Předmluva

Tato kniha je pokračováním Úvodu do inteligentního kalkulu (krátce „Úvodu“), který vydalo nakladatelství Academia v roce 2002. Úvod obsahuje 11 kapitol a tato kniha začíná proto kapitolou 12. [1]) V rejstříku je kromě hesel z této knihy zařazena i většina hesel z Úvodu. Za předmluvou je umístěn aktualizovaný seznam označení a zkratek.

Tato kniha obsahuje příklady k partiím, které bývají obsahem druhého ročníku přednášek z matematické analýzy na univerzitách; může však být užitečná všude tam, kde se přednáší teorie funkcí více proměnných, tedy např. na pedagogických fakultách a na některých fakultách vysokých školách technických a ekonomických.

Podobně jako v Úvodu se čtenář v této knize seznámí s příslušnými základními pojmy a najde zde (bez důkazů) všechny věty potřebné k racionálnímu a spolehlivému řešení příkladů. Důraz se opět klade na pochopení výpočetních metod a na postupy řešení založené na aplikaci obecných vět. Bylo by jistě zbytečné opakovat zde podrobněji zásady inteligentního kalkulu; čtenář je najde v předmluvě k Úvodu. Poznamenejme jen, že příklady obsažené v této knize jsou obtížnější a mnohdy méně přehledné než příklady pro první ročník. Protože např. grafy funkcí tří a více proměnných nejsou podmnožinami prostoru $\mathbb{R}^3$, v němž lze spojit některé pojmy s názornou představou, bude nyní nutné spoléhat v daleko větší míře na schopnost pracovat s abstraktními objekty podle přísných a přesných zákonů logiky. [2])

Abstraktní metrické prostory a základní topologické a metrické pojmy v nich jsou obsahem kapitoly 12. Při induktivním postupu bychom tak základní pojmy, jako je spojitost a limita zobrazení nebo otevřenost a uzavřenost množiny, studovali nejdříve v $\mathbb{R}$, pak v $\mathbb{R}^2$, v $\mathbb{R}^3$, v eukleidovských prostorech libovolné dimenze, a abstrakcí bychom nakonec došli k metrickým prostorům. I když by takový postup měl pro studenta nesporné výhody, na přednáškách jej zpravidla nelze realizovat pro jeho značnou časovou náročnost. Místo něj se volí postup deduktivní, v němž (po podrobném výkladu v $\mathbb{R}$) přeskočíme k metrickým prostorům a pojmy v nich zavedené ilustrujeme přiměřeným množstvím příkladů např. z roviny a z trojrozměrného prostoru.

Kapitola 13 se zabývá posloupnostmi a řadami funkcí, jejich stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergencí a podmínkami, za nichž je lze derivovat a integrovat „člen po členu“. Integrací posloupností a řad funkcí se však zabývá později (a na vyšší úrovni) i kapitola 19. Vyšetřování tzv. mocninných řad jen v reálném oboru je zbytečným přepychem, protože vynaložená námaha je stejná jako v komplexním

[1]) Každá z těchto knih tvoří sice samostatný celek, ale ve druhé z nich se pokládají za známé pojmy a výsledky z Úvodu.

[2]) Studiu prostorů, z nichž některé mají i nekonečnou dimenzi, se nelze vyhnout např. proto, že mnohé aplikace se bez nich neobejdou: Pohyb n hmotných bodů lze i v klasické mechanice studovat jako pohyb jednoho bodu v $3n$-rozměrném prostoru; v obecné teorii relativity se setkáme s křivými prostory dimenze 4, moderní fyzikální teorie studují variety dimenzí ještě vyšších, „klasická“ kvantová fyzika dvacátých let dvacátého století pracuje v prostorech nekonečné dimenze.

oboru, ale např. základní věta o rozvoji funkce v mocninnou (Taylorovu) řadu má v komplexním oboru nesrovnatelně jednodušší předpoklady. Mnohdy je teprve po přechodu do komplexního oboru patrné, proč funkci (jako je např.$1/(x^2+1)$), která má v $\mathbb{R}$ derivace všech řádů, nelze rozvést v mocninnou řadu s poloměrem konvergence $+\infty$ a proč jiné funkce (mající také derivace všech řádů všude v $\mathbb{R}$) nelze v mocninnou řadu o daném středu rozvést vůbec. V kapitole 13 je naznačena i myšlenka hledat řešení (lineární) diferenciální rovnice ve tvaru mocninné řady; tato idea je pak dále rozvedena v kapitole 18. To však je jediný exkurs do komplexní analýzy, která má svou vlastní problematiku a jejíž metody i výsledky jsou značně odlišné od metod reálné analýzy.

Kapitoly $14-17$ jsou věnovány některým základním pojmům a větám teorie funkcí několika proměnných. Jsou to např. směrové a parciální derivace (vč. záměnnosti parciálních derivací vyšších řádů) a diferenciál (který zde není žádnou „nekonečně malou veličinou", ale lineární formou). Následují některé elementární geometrické pojmy založené na derivacích 1. řádu (tečná a normálová nadrovina), na nichž si čtenář procvičí nejen své znalosti z analýzy, ale i z geometrických aplikací lineární algebry.

Kapitola 16 se zabývá tzv. implicitními funkcemi neboli lokálním řešením soustav (obecně nelineárních) rovnic, kterých je buď méně, nebo stejně jako neznámých funkcí. Seznámení se s varietami dovolí lépe pochopit problém tzv. vázaných extrémů, které se vyšetřují v kapitole 17, difeomorfismy hrají v analýze podobnou roli jako homeomorfismy v obecné topologii. Operuje s nimi např. věta o substituci ve vícerozměrných integrálech.

Studium extrémů funkcí více než jedné proměnné se značně liší od podobné problematiky pro jednu proměnnou, protože do značné míry odpadají úvahy o monotonii, která byla v Úvodu při vyšetřování průběhu funkcí naopak v centru pozornosti. V kapitole 17 se hledají většinou jen „globální" extrémy, protože „lokální" extrémy funkcí více proměnných jsou (na rozdíl od tzv. stacionárních bodů) stejně bezvýznamné jako v teorii funkcí jedné proměnné. Derivace ani diferenciály vyšších řádů se při hledání extrémů neužívají.

V kapitole 18 jsou vyloženy principy řešení lineárních diferenciálních rovnic (libovolného řádu), speciálně i rovnic s konstantními koeficienty, u nichž se problém řešení často redukuje na problém čistě algebraický. Zvýšená pozornost je věnována řešením (obecných lineárních) rovnic druhého řádu, které jsou důležité nejen ve fyzice, ale např. i v teorii tzv. speciálních funkcí. Čtenář má možnost seznámit se se základními principy řešení rovnic ve tvaru mocninných (a ještě poněkud obecnějších) řad; protože se k napsání obecného řešení rovnice druhého řádu potřebují dvě lineárně nezávislá řešení, je jistě namístě trvat na jejich nalezení i v případech, kdy to není zrovna jednoduché. Informace uvedené v knize na toto téma jsou však přesto kusé, protože tato problematika patří spíše do komplexní analýzy, kde navazuje na její nepříliš elementární partie a předpokládá znalost tzv. analytických (mnohoznačných) funkcí (viz [14]).

Nejdelší ze všech kapitol je kapitola 19, v níž se vysvětluje integrace přes podmnožiny eukleidovského prostoru libovolné dimenze, přičemž konkrétní výpočty se omezují převážně na $\mathbb{R}^2$ a na $\mathbb{R}^3$. Kalkulus pracuje tradičně s Riemannovým integrálem (případně nějak zobecněným, aby bylo možné integrovat i některé neomezené funkce a přes některé neomezené množiny); výběr Riemannova integrálu se odůvodňuje jeho celkem jednoduchou definicí. Tento argument je podle mého názoru nepatřičný, protože v aplikacích nerozhoduje, jak rychle jsme vyslovili definici, ale jaké má náš výtvor vlastnosti, jak je obecný, jak snadno se s ním zachází. [3])

Riemannův integrál má nepěkné vlastnosti již v $\mathbb{R}$; budeme-li chtít integrovat něco jiného než spojitou funkci přes kompaktní interval, *budeme mít potíže*: Ani funkce identicky rovná 1 nemusí mít integrál přes každou kompaktní množinu. (Má-li hranice této množiny kladnou míru, integrál neexistuje.) Budeme-li chtít provést limitní přechod za znamením (Riemannova) integrálu, *budeme mít potíže* s existencí integrálu z limitní funkce i v případě, že jde o monotónní posloupnost funkcí stejně omezených v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, z nichž každá má jen konečný počet bodů nespojitosti, neboť její limitou může být Dirichletova funkce. Budeme-li chtít např. dvojrozměrnou integraci převést na sled dvou integrací jednorozměrných, *budeme mít potíže*, protože není žádná souvislost mezi existencí (Riemannova) dvojného integrálu a příslušných integrálů dvojnásobných. Budeme-li chtít např. ve dvojném (Riemannově) integrálu provést substituci, *budeme mít potíže*, protože žádná uspokojivá věta o substituci pro tento integrál neexistuje. (I jednoduchá substituce může převést omezený obor na neomezený, omezenou funkci na neomezenou; Riemannův integrál je však definován jen pro (některé) omezené funkce a integrační obor musí být také omezený. A již definice Riemannova integrálu přes rovinu nebo trojrozměrný prostor je přitom problematická. $\mathbb{R}$ je sjednocením všech intervalů s krajními body v $\mathbb{R}$ a tím je dána i „přirozená“ definice Riemannova integrálu od $-\infty$ do $+\infty$ jako limity integrálu od a do b pro $a \to -\infty$ a $b \to +\infty$. Rovina je však sjednocením nejen všech čtverců nebo obdélníků, ale také kruhů, elips, trojúhelníků, atd. Který z těchto útvarů vybereme pro definici integrálu přes celou rovinu? Je „přirozenější“ zvolit čtverce, nebo kruhy? Je to jedno, nebo na tom záleží? Jsem jednoznačně toho názoru, že tudy rozumná cesta nevede.)

Důvodů, proč nepracovat s Riemannovým integrálem, je ještě více; přitom je již 100 let k dispozici integrál daleko obecnější a navíc s nesrovnatelně jednoduššími vlastnostmi. Jeho autorem je francouzský matematik Henri Lebesgue a metodika výkladu jeho integrálu je nyní již propracována a vyzkoušena v kurzovních přednáškách pro různé specializace studentů tak, že obavy před ním jsou zcela zbytečné. Námitka, že Riemannův integrál je vhodný mj. proto, že souvisí se známými konečnými součty (z nichž se pak téměř zázračně stane integrál prostou výměnou Σ za $\int$ a $\Delta x \Delta y \Delta z$ za $dx dy dz$), je zcela neopodstatněná, protože Lebesgueův integrál je zobecněním integrálu Riemannova, a má proto tuto vlastnost také. Užíváme-li však

[3]) Pochopitelně, budeme-li jen bezhlavě počítat (třeba i integrál, který neexistuje), nepotřebujeme žádné věty. Budeme-li počítat jen to, co před námi již někdo správně spočítal, nebudeme příliš riskovat. Běda však, budeme-li chtít objevit něco nového; pak nám podobný postup nezaručí správnost výsledku. Nespoléhejme ani na počítače vybavené příslušným matematickým programem; zatím jsou jejich postupy stejné jako v běžném (bezmyšlenkovitém) kalkulu, se všemi nedostatky, které z toho vyplývají. Dvojné integrály se např. počítají jako dvojnásobné, takže se občas „vypočte“ i integrál, který neexistuje. Zdá se, že jejich autoři jsou sice výborní programátoři, ale špatní znalci matematické analýzy. Bude asi ještě dlouho trvat, než podobné programy začnou produkovat výsledky splňující kritéria exaktní matematiky.

Lebesgueův integrál, nemusíme se snažit např. kruh rozložit na čtverce, protože konečné součty, kterými lze Lebesgueův integrál aproximovat, pracují s obecnějšími (tzv. měřitelnými) množinami.

V kapitole 19 je velmi stručně popsán postup zavedení Lebesgueova integrálu na základě (tzv. Lebesgueovy) míry, která je zobecněním délky, obsahu a objemu elementárních geometrických útvarů, a uvedeny jsou i jeho nejdůležitější vlastnosti. Řada příkladů pak ukáže, jak snadno se s Lebesgueovým integrálem zachází v kombinaci s integrálem Newtonovým, který nepřestává být hlavním nástrojem jednorozměrné integrace. [4])

Poslední, dvacátá kapitola je věnována základům tzv. harmonické analýzy, tj. rozkladu periodické funkce na nekonečnou řadu jednoduchých periodických funkcí. I zde je výhodné pracovat s Lebesgueovým integrálem a v běžných situacích vystačíme s jediným kritériem konvergence (založeným na konečnosti variace).

Praha, listopad 2004 I. Černý

[4]) Doporučuji čtenáři seznámit se i s obsahem kapitoly VII vynikající Jarníkovy knihy [13]; kapitola je věnována „početní technice Lebesgueova integrálu“.