Učební text k přednášce Matematická analýza I (MAI054)

Martin Klazar

26. února 2007

Přednáška pokrývá v zimním semestru následující látku:

0. Úvod a opakování (značení, operace s množinami apod.).

1. Reálná čísla a jejich vlastnosti.

2. Posloupnosti a řady reálných čísel.

3. Limity a spojitost funkcí jedné reálné proměnné.

4. Derivace funkcí jedné reálné proměnné.

5. Primitivní funkce (tj. antiderivování).

Poděkování. K odstranění překlepů a chyb v tomto textu velmi přispěli studenti Kateřina Böhmová, Jiří Fajfr, Rudolf Gavlas, Jiří Machálek a Adam Nohejl, kterým děkuji za jejich zájem a pozornost.

0 Úvod a opakování

Co je to matematická analýza a proč se jí zabývat? Slouží fyzikům (a nejen jim) k modelování světa kolem nás. Historicky nejvýznamnějším a zakladatelským počinem v takovém modelování bylo Newtonovo matematické odvození eliptičnosti drah planet obíhajících kolem Slunce jako důsledku gravitačního zákona (podle něhož se Slunce a planeta přitahují silou $F = \kappa mM/r^2$, kde m

a M jsou hmotnosti planety a Slunce, r je jejich vzdálenost a κ je konstanta úměrnosti). Matematická analýza vytváří pro jevy z našeho světa matematické modely, například reálná čísla, reálné funkce jedné i více proměnných, derivace (pro modelování rychlosti a zrychlení pohybu) a integrály (pro modelování plochy, objemu, momentu setrvačnosti). Jejími zakladateli jsou Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Leibniz (1646–1716). Dodejme, že takové modely zpravidla začnou v matematice žít svým vlastním, na aplikacích nezávislým, životem.

Důležitou vlastností modelů a struktur matematické analýzy je jejich nekonečnost. Matematická analýza se zabývá nekonečnými strukturami a ději a vytváří nástroje pro zkoumání a uchopování nekonečna. Ty jsou zapotřebí—při neopatrném zacházení s nekonečnem se lehce dospěje k nesprávým výsledkům. Podívejme se na tři takové paradoxy nekonečna.

Příklady. 1. Nekonečná řada

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

má součet 2, k tomuto číslu se její částečné součty $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \ldots$ stále více a více blíží. To se dá odvodit i formální manipulací: vynásobíme-li rovnost dvěma, vznikne původní řada zvětšená o dvě,

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 + S,$$

takže $2S = 2+S$ a $S = 2$. Pokud podobně manipulujeme s nekonečnou řadou

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots,$$

dostaneme vztah

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots = S - 1$$

a rovnici $2S = S-1$, která má řešení -1. Nekonečná řada $1+2+4+8+16+\cdots$ má tedy mít záporný součet -1?

2. Celkový součet čísel ve čtvercové matici (tj. tabulce) můžeme získat různými způsoby. Můžeme třeba sečíst čísla v každém řádku a pak sečíst tyto řádkové součty nebo můžeme začít sečtením čísel v každém sloupci a poté sečíst výsledné sloupcové součty. Například matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

má řádkové a sloupcové součty

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & -3 \\ & & & 10 \\ \hline -10 & 5 & 12 & \underline{7} \end{array}$$

a celkový součet tedy je $0 - 3 + 10 = -10 + 5 + 12 = 7$. Díky komutativitě sčítání si jsme zcela jisti tím, že oběma způsoby vždy vyjde stejný výsledek. Nekonečná matice

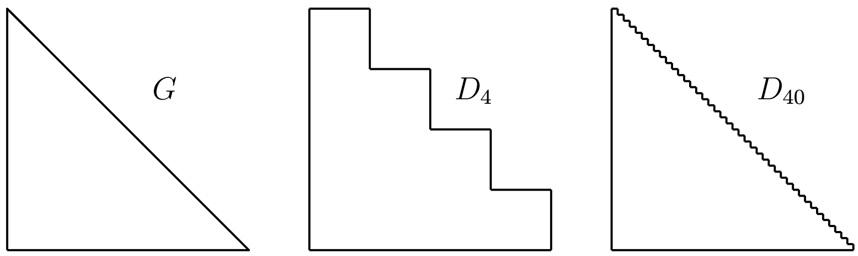
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

má ale řádkové a sloupcové součty

$$\begin{array}{cccccc|c} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & ? \end{array}$$

a ty dávají dva různé celkové součty: $1 + 0 + 0 + \cdots = 1$ a $0 + 0 + 0 + \cdots = 0$. Který z nich je správný? V této matici navíc v každém řádku i sloupci jsou nejvýše dvě nenulové položky a v sumě řádkových součtů je jen jeden nenulový sčítanec a v sumě sloupcových součtů žádný. Součty, které tu provádíme, tak vždy mají fakticky jen konečně mnoho sčítanců a přesto jsme dostali dva odlišné výsledky. Komutativita sčítání neplatí! Nebo platí?

3. Délku rovinné křivky přibližně spočítáme tak, že křivku rozdělíme několika body na krátké úseky a dělící body spojíme úsečkami. Vzniklá lomenná čára svým tvarem aproximuje křivku a její délka se přibližně rovná délce křivky. Při aproximování křivky lomennou čarou je ale třeba být opatrný. Při nevhodném způsobu aproximace můžeme dostat lomennou čáru, která se křivce bude velmi „podobat“—nedokážeme už ji třeba pohledem od křivky odlišit—ale křivka a lomenná čára budou mít stále dosti odlišnou délku. Uvažme například aproximace přepony G rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami o délce 1 pomocí schodovitých lomenných čar D_n, kde D_n se skládá z n svislých a n vodorovných úseček, každá o délce $\frac{1}{n}$. Čáry D_4 a D_{40} jsou na následujícím obrázku:



Aproximující schodovité lomenné čáry $D_1, D_2, D_3, \ldots$ se stále více a více blíží úsečce G, například už D_{1000} asi zrakem od G nerozeznáme. Jejich délky se ale nemění a jsou všechny rovny 2, i když G má délku $\sqrt{2}$.

Matematická analýza má významné použití i v informatice. Její diskrétní (tj. nespojité, přetržité) modely se často zkoumají pomocí spojitých metod a modelů z analýzy. Je to často nejúčinnější postup.

První kapitolu ukončíme zopakováním logické a množinové terminologie. *Logika*, hlavně *matematická logika*, se zabývá formálními podmínkami pravdivosti a dokazatelnosti (hlavně matematických) tvrzení a *výroků*. Výrok je takové tvrzení, o němž má smysl říci, zda je pravdivé nebo ne. Například „Vídeň je hlavní město České Republiky“ je výrok, kdežto výkřiky typu „Ahoj“ nebo „Kéž by už byl konec!“ výroky nejsou, nemá smysl se dohadovat o jejich pravdivosti nebo nepravdivosti.

Z jednoduchých výroků vytváříme složitější výroky pomocí logických spojek & („a zároveň“), $\vee$ („nebo“), $\Rightarrow$ (implikace), $\iff$ (ekvivalence) a $/$ (negace). Připomeňme si, že výrok A & B je pravdivý, právě když jsou oba výroky A i B pravdivé; $A \vee B$ je pravdivý, právě když alespoň jeden z obou výroků A a B je pravdivý; $A \Rightarrow B$ je pravdivý, právě když nenastává situace, že A je pravdivý, ale B je nepravdivý; $A \iff B$ je pravdivý, právě když oba výroky A a B mají stejnou pravdivostní hodnotu a $/\!\!\!A$ je pravdivý, právě když je A nepravdivý.

K vytváření složitějších matematických tvrzení dále používáme symboly *kvantifikátorů*, $\forall$ („pro všechny") a $\exists$ („existuje"). Používáme symboly pro *predikáty* (výrokové funkce), např. predikát sudosti $S(x)$ s jednou proměnnou x pro přirozené číslo x. Predikáty mohou mít i více než jednu proměnnou, nejčastěji se vyskytují *binární predikáty* se dvěma proměnnými. Příkladem je predikát $<$ („menší než") na množině celých čísel $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Dále používáme symboly pro *funkce*, např. symbol $\sin(x)$ pro trigonometrickou funkci sinus s jednou reálnou proměnnou. *Tvrzení* (sentence) je matematické tvrzení sestavené ze symbolů pro proměnné pomocí spojek, kvantifikátorů, predikátů a funkcí, které neobsahuje volné (tj. nekvantifikované) proměnné. Příkladem tvrzení může být třeba tvrzení

$$\forall x, y : \; S(x) \; \& \; S(y) \Rightarrow S(x+y),$$

které říká, že součet každych dvou sudých (přirozených) čísel je zase sudé číslo. Toto tvrzení je pravdivé. Další příklady tvrzení jsou

$$\forall x \; \exists y : \; x < y,$$

které říká, že ke každému celému číslu existuje větší; je to rovněž pravdivé tvrzení. Na druhou stranu tvrzení

$$\exists x \; \forall y : \; (x = y) \vee (x < y),$$

podle něhož existuje nejmenší celé číslo, je nepravdivé.

Zopakujme nyní množinové značení. Množinu můžeme zadat výčtem jejích prvků (což je možné pouze u konečných množin), jako třeba

$$X = \{a, *, -5, 7\},$$

nebo ji můžeme zadat vlastností, například

$$Y = \{x \in \mathbb{N} : \; x \text{ je sudé}\}.$$

Pro náležení do množiny se používá symbol $\in$ („být prvkem"). Tedy $* \in X$, ale $0 \notin Y$. Důležitou množinou je *prázdná množina* $\emptyset$, která nemá žadné prvky.

Dvě množiny mohou být ve vztahu *inkluze*, kdy je jedna *podmnožinou* druhé, což značíme jako $A \subset B$ (každý prvek množiny A je i prvkem množiny

B), nebo mohou být *disjunktní*, což značíme jako $A \cap B = \emptyset$ (neexistuje žádný prvek ležící současně v obou množinách). Ze dvou množin A a B můžeme vyrobit další množinu C operací *sjednocení*, $C = A \cup B$ (prvky množiny C jsou právě prvky ležící v A nebo v B), operací *průniku*, $C = A \cap B$ (prvky množiny C jsou právě prvky ležící současně v A i v B) nebo operací *rozdílu*, $C = A \backslash B$ (prvky množiny C jsou právě prvky ležící v A ale ne v B). Pokud $A \subset M$, rozdíl $M \backslash A$ (tj. množinu tvořenou právě těmi prvky M, které nejsou v A) označujeme i symbolem A^c a mluvíme o *doplňku* množiny A (do množiny M, která se rozumí z kontextu).

Kartézský součin dvou množin A a B je množina všech uspořádaných dvojic, v nichž první složka je prvek A a druhá složka je prvek B:

$$A \times B = \{(a, b) :\ a \in A, b \in B\}.$$

Podobně se definuje kartézský součin více než dvou množin.*Binární relace na množině* A je množina $R \subset A \times A$. Na relaci $\leq$ („menší nebo rovno než“) na množině přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ se tak vedle syntaktického pohledu, kdy $\leq$ je funkcí o dvou argumentech a s hodnotou „ano“ nebo „ne“ (např. $4 \leq 2$ dává „ne“, $5 \leq 100$ dává „ano“) díváme i sémanticky jako na množinu těch uspořádaných dvojic přirozených čísel (a, b), že $a \leq b$, tj. $\leq$ je množina

$$\{(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,3),(3,3),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(1,5),\ldots\}.$$

Podobně je (binární) relace mezi množinami A a B podmnožina $R \subset A \times B$.

Relace $F \subset X \times Y$ je *zobrazení (funkce)* z množiny X do množiny Y, když pro každé $a \in X$ existuje právě jedno $b \in Y$, že $(a, b) \in F$; značíme to jako

$$F :\ X \to Y.$$

Místo $(a, b) \in F$ píšeme, že $F(a) = b$, a říkáme, že prvek b je *funkční hodnota* funkce F na *argumentu a*. *Bijektivní zobrazení*, krátce *bijekce*, neboli *vzájemně jednoznačné zobrazení* z X do Y, je takové zobrazení $F :\ X \to Y$, že pro každé $b \in Y$ existuje právě jedno $a \in X$, že $F(a) = b$. Příkladem bijekce z množiny $\mathbb{Z}$ do množiny $\mathbb{Z}$ je zobrazení dané předpisem $F(x) = x + 1$. Speciálním případem zobrazení je pojem *posloupnosti* prvků množiny A. Je to zobrazení f z množiny $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ do množiny A. Místo $f(n)$ obvykle označujeme funkční hodnotu f na n symbolem f_n.

Binární operace na množině A je zobrazení

$$F :\ A \times A \to A,$$

které každé uspořádané dvojici (a, b) prvků z A přiřazuje prvek $c = F(a, b)$ z A, výsledek operace F na prvcích a a b; obvykle píšeme $c = a\ F\ b$. Příkladem je třeba operace sčítání na množině přirozených čísel nebo operace největšího společného dělitele.

Zopakujeme značení pro číselné množiny (které jsme už beztak používali).

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \text{ a } \mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

jsou *přirozená čísla* a *celá čísla*. Nulu tedy nebudeme považovat za přirozené číslo. Poznamenejme ale, že v teorii množin se přirozená čísla konstruují od nuly, kterou představuje prázdná množina, $0 = \emptyset$, a každé přirozené číslo je množinou svých předchůdců:

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{0\} = \{\emptyset\},\ 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \text{atd.}$$

Racionální čísla neboli *zlomky* tvoří množinu

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{a}{b} :\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Přesněji řečeno, zlomky jsou třídy ekvivalence dvojic celých čísel,

$$\mathbb{Q} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 :\ b \neq 0\}/\sim,$$

kde $\sim$ je relace ekvivalence definovaná

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

$\mathbb{Q}$ je tedy tvořena „rodinkami" vzájemně ekvivalentních zlomků, jedna z nich např. obsahuje zlomky

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{200}{300}, \frac{-34}{-51}, \ldots.$$

Zlomek $\frac{a}{b}$ je v *základním tvaru*, když $b \in \mathbb{N}$ a čitatel a a jmenovatel b jsou nesoudělná čísla (zlomek už nelze dále zkrátit). Každá třída ekvivalentních zlomků obsahuje právě jeden zlomek v základním tvaru.

Reálnými čísly se budeme zabývat v příští kapitole. Nyní pár slov o důkazech. Typické matematické tvrzení má tvar $A \Rightarrow B$, z předpokladu A plyne závěr B. V *přímém důkazu* B odvodíme z A pomocí mezikroků A_i, $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n = B$, kde každé A_i je bud axiom nebo plyne z již dokázaných tvrzení. V *nepřímém důkazu* neboli *důkazu sporem* předpokládáme, že A platí, ale B neplatí, a odvodíme spor.

Příklad. Dvěma způsoby dokážeme, že $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, tj. že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. Dokážeme tedy implikaci $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha \notin \mathbb{Q}$.

První důkaz. Pro spor předpokládáme, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Nechť je zlomek $\frac{p}{q}$ v základním tvaru, takže čísla p a q nemají kromě ± 1 žádného společného dělitele. Umocněním na druhou dostaneme

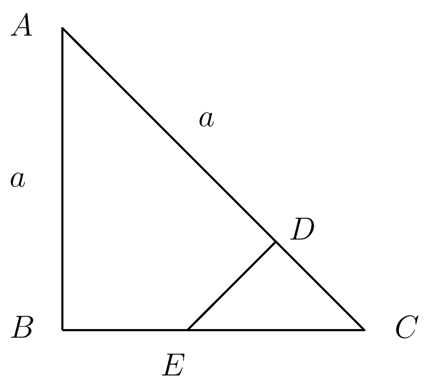
$$2q^2 = p^2.$$

Odtud plyne, že p je sudé (čtverec lichého čísla je liché číslo), $p = 2r$ pro $r \in \mathbb{N}$ a máme

$$2q^2 = (2r)^2 = 4r^2, \quad \text{tedy} \quad q^2 = 2r^2$$

a vidíme, že q je také sudé. To je spor s nesoudělností p a q.

Druhý důkaz. Je rovněž sporem, ale je geometrický. Číslo $\sqrt{2}$ je délkou přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka T s odvěsnami o délce 1. Předpokládejme opět, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Zvětšíme-li T q krát, dostaneme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran. Označme jako $U = ABC$ nejmenší takový trojúhelník (s nejmenší délkou přepony). Nechť má U odvěsny o délce $a = |AB| = |BC| \in \mathbb{N}$ a přeponu o délce $b = |AC| \in \mathbb{N}$. Sestrojíme ještě menší rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník V s celočíselnými délkami stran a tím dostaneme spor. Konstrukce V je popsána na následujícím obrázku:



V U na přeponě z bodu A vyneseme vzdálenost a a dostaneme bod D. Z něj spustíme kolmici na přeponu, která protne odvěsnu BC v bodě E.

Trojúhelník $V = ECD$ je patrně pravoúhlý a rovnoramenný (úhly u přepony EC jsou 45°), takže $|ED| = |DC| = b - a$. Dále $|BE| = |ED|$, protože čtyřúhelník $ABED$ je symetrický vzhledem k přímce AE. Takže i $|BE| = b - a$ a $|EC| = a - |BE| = a - (b - a) = 2a - b$. Délky stran trojúhelníku $V = ECD$ jsou celá čísla $b - a$ a $2a - b$. Protože V je menší než U, máme spor.

1 Reálná čísla a jejich vlastnosti

Reálná čísla $\mathbb{R}$ si můžeme představovat geometricky jako nekonečně dlouhou a nekonečně hustou přímku

$$\cdots \ \rule{10cm}{0.4pt} \ \cdots$$

V této kapitole se na $\mathbb{R}$ podíváme jinak a popíšeme jejich algebraickou konstrukci.

Uspořádané těleso

Už známe zlomky
$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{a}{b}:\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}.$$
Připomeňme si jejich vlastnosti vzhledem k aritmetickým operacím a vzhledem k relaci uspořádání.

Nechť $x, y, z \in \mathbb{Q}$ jsou libovolné tři zlomky. Operace sčítání a násobení mají následující vlastnosti.

A1. $x + y = y + x$; **A2.** $(x + y) + z = x + (y + z)$; **A3.** $x + 0 = x$; **A4.** $x + (-x) = 0$; **A5.** $xy = yx$; **A6.** $(xy)z = x(yz)$; **A7.** $x1 = x$; **A8.** $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x^{-1} = 1$; **A9.** $x(y + z) = xy + xz$.

Neutrální prvky 0 a 1 v axiomech A3 a A7 jsou určeny jednoznačně, podobně i inverzní prvky $-x$ a x^{-1} v axiomech A4 a A8.

Definice. Obecně řekneme, že struktura $(T, +, \times)$—množina se dvěma binárními operacemi označenými $+$ a $\times$—je *(komutativní) těleso*, když splňuje axiomy A1–A9.

Relace uspořádání $<$ na zlomcích $\mathbb{Q}$ má následující vlastnosti.

A10. Nastává právě jedna z možností $x < y$, $x = y$ a $x > y$; **A11.** $(x < y)$ & $(y < z) \Rightarrow x < z$; **A12.** $x < y \Rightarrow x + z < y + z$; **A13.** $(x < y)$ & $(z > 0) \Rightarrow xz < yz$;

(Neostrá nerovnost $x \leq y$ se definuje jako $x \leq y \iff (x < y)$ nebo $x = y$.)

Definice. Obecně řekneme, že struktura $(T, <)$—množina s binární relací označenou $<$—je *lineární uspořádání*, když splňuje axiomy A10 a A11. Pokud struktura $(T, +, \times, <)$ splňuje všechny axiomy A1–A13, nazýváme ji *uspořádaným tělesem*.

Množina zlomků $\mathbb{Q}$ spolu s aritmetickými operacemi a relací uspořádání je příkladem uspořádaného tělesa.

Izomorfismus

Dvě uspořádaná tělesa $(T, +, \times, <)$ a $(U, +', \times', <')$ jsou *izomorfní*, když existuje bijekce $f : T \to U$ taková, že $\forall x, y \in T$ platí, že $f(x+y) = f(x) +' f(y)$, $f(x \times y) = f(x) \times' f(y)$ a $x < y \iff f(x) <' f(y)$. Podobně se definuje izomorfismus ostatních struktur, těles a lineárních uspořádání. Izomorfní struktury jsou z praktického hlediska nerozlišitelné, totožné. Operace a relace na nich se chovají identickým způsobem, jenom se prvky v obou množinách "jinak jmenují".

Příklady. **1.** Uvažme těleso $(\mathbb{Z}_5, +, \times)$ tvořené zbytkovými třídami $0, 1, 2, 3, 4$ modulo 5, v němž se sčítá a násobí modulo 5. (Například $3+3 = 1$, $3 \times 4 = 2$, $4 \times 4 = 1$ atd.) Tělesa $(\mathbb{Q}, +, \times)$ a $(\mathbb{Z}_5, +, \times)$ jsou neizomorfní—z toho prostého důvodu, že první je nekonečné, ale druhé konečné, takže mezi jejich nosnými množinami nemůže existovat vůbec žádná bijekce. **2.** Uspořádaná tělesa zlomků $(\mathbb{Q}, +, \times, <)$ a reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \times, <)$—to druhé musíme teprve sestrojit—jsou příklady neizomorfních uspořádaných těles. Důvod neexistence izomorfismu je stejný (stejně triviální) jako v příkladu 1, neexistuje žádná bijekce mezi množinami $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$. Dokážeme to ve Větě 1.3.

Maximum, minimum, supremum, infimum

Předpokládáme, že je dáno nějaké lineární uspořádání $(T, <)$ a $X \subset T$ je jeho podmnožina.

Řekneme, že $a \in X$ je *největší (maximální) prvek* množiny X, resp. že to je *nejmenší (minimální) prvek* množiny X, když pro každé $x \in X$ je $x \leq a$, resp. pro každé $x \in X$ je $x \geq a$. Píšeme

$$a = \max(X), \quad \text{resp.} \quad a = \min(X).$$

Množina nemusí mít ani maximum ani minimum, ale pokud existují, jsou tyto prvky určené jednoznačně.

Příklady. 1. Množina sudých čísel $X = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ jako podmnožina přirozených čísel $(\mathbb{N}, <)$ (s obvyklým lineárním uspořádáním) nemá největší prvek, $\max(X)$ neexistuje, ale $\min(X) = 2$. **2.** Množina $X = \{\alpha \in \mathbb{Q} : 0 < \alpha < 1\}$ zlomků ležících v intervalu $(0, 1)$ nemá v lineárním uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ (obvyklé lin. uspořádání zlomků) ani maximum ani minimum.

Horní (resp. dolní) mez množiny X je prvek $m \in T$ takový, že $m \geq a$ (resp. $m \leq a$) pro každé $a \in X$. Množina X je *shora (resp. zdola) omezená*, když má horní (resp. dolní) mez. Množina je *omezená*, pokud má horní i dolní mez.

Definice. Nechť $X \subset T$, kde $(T, <)$ je dané lineární uspořádání. *Supremum* množiny X je nejmenší horní mez X a *infimum* množiny X je její největší dolní mez. Tedy

$$\sup(X) = \min(\{\text{horní meze } X\}) \ \text{ a } \ \inf(X) = \max(\{\text{dolní meze } X\}).$$

Supremum a infimum opět nemusejí existovat, ale existují-li, jsou určené jednoznačně. Na rozdíl od maxima a minima nemusejí patřit do množiny X. Jsou to relativní pojmy: i když množinu X nezměníme, přidání či odebrání prvků nadmnožiny T může supremum či infimum změnit.

Příklady. 1. Nechť $X = \{\alpha \in \mathbb{Q} : 0 < \alpha < 1\}$, $Y = \{\alpha \in \mathbb{Q} : \alpha \leq 1\}$, $Z = \{\alpha \in \mathbb{Q} : 0 < \alpha < \sqrt{3}\}$ a lineární uspořádání je $(\mathbb{Q}, <)$ s obvyklým uspořádáním. Pak $\sup(X) = \sup(Y) = 1$, $\sup(Z)$ neexistuje, $\inf(X) = \inf(Z) = 0$ a $\inf(Y)$ neexistuje. **2.** Každá konečná podmožina X lineárního uspořádání má maximum i minimum a supremum i infimum a platí, že $\max(X) = \sup(X)$ a $\min(X) = \inf(X)$.

Supremum množiny X, když existuje, má tyto vlastnosti:

- $\sup(X) \geq a$ pro $\forall a \in X$;
- $\forall b \in T, b < \sup(X)\ \exists a \in X:\ a > b$.

Je to vlastně ekvivalentní definice suprema, jen jsme jinak zapsali požadavek, že $\sup(X)$ je nejmenší horní mez X. Podobně $\inf(X) \leq a$ pro každé $a \in X$ a pro každé $b \in T$, $b > \inf(X)$, existuje prvek X, který je menší než b.

Zavedení reálných čísel

Nechť $(T, <)$ je nějaké lineární uspořádání. Řekneme, že splňuje *axiom suprema*, když má následující vlastnost.

A14. Každá podmnožina $X \subset T$, která je neprázdná a shora omezená, má supremum.

Uvidíme, že $(\mathbb{Q}, <)$ (s obvyklým lin. uspořádáním) axiom suprema nesplňuje, ale reálná čísla (opět s obvyklým lin. uspořádáním) ho splňují.

Věta 1.1 (charakterizace reálných čísel)
Existuje uspořádané těleso splňující axiom suprema. Až na izomorfismus je určené jednoznačně.

Toto uspořádané těleso nazýváme *tělesem reálných čísel* a značíme ho $\mathbb{R}$. Je to tedy až na izomorfismus jediná struktura $(T, +, \times, <)$, která splňuje všechny axiomy A1–A14.

Příklad. Ukážeme, že zlomky s obvyklým lineárním uspořádáním nesplňují axiom suprema. Vezmeme množinu zlomků

$$A = \{a \in \mathbb{Q}:\ a > 0 \ \&\ a^2 < 2\}.$$

Je neprázdná a shora omezená, protože například $1 \in A$ a $a < 2$ pro $\forall a \in A$. Budeme předpokládat, že nějaký zlomek S je jejím supremem, $S = \sup(A)$, a odvodíme spor. Protože $1 \in A$ a 2 je horní mez A, máme $1 \leq S \leq 2$. Musí nastat jedna ze tří možností: $S^2 < 2$, $S^2 = 2$ a $S^2 > 2$. Jak už víme, druhá možnost nenastává, protože 2 nemá v $\mathbb{Q}$ druhou odmocninu. Nechť $S^2 < 2$. Pro každé dostatečně malé $e \in Q$, $0 < e < 1$, máme, že

$$(S + e)^2 = S^2 + 2eS + e^2 < S^2 + e(2S + 1) \leq S^2 + 5e < 2$$

("dostatečně malé" tedy znamená $e < (2 - S^2)/5$), čili $S + e \in A$. Ale $S + e \in A$ je spor s tím, že S je horní mezí A. Nechť $S^2 > 2$. Pro každé dostatečně malé $e \in Q$, $0 < e < 1$, máme, že

$$(S-e)^2 = S^2 - 2eS + e^2 > S^2 - 2eS \geq S^2 - 4e > 2$$

("dostatečně malé" tedy znamená $e < (S^2 - 2)/4$). Tedy $(S - e)^2 > 2 > a^2$ pro každé $a \in A$, a tak $S - e > a$ pro každé $a \in A$. Vidíme, že $S - e$ je horní mezí A, což je spor s tím, že S je nejmenší horní mez A.

Důvod, proč A nemá supremum (i když je shora omezená a neprázdná), je ten, že hodnota funkce x^2 se pro malou změnu argumentu x také málo změní, ale pro $x \in \mathbb{Q}$ se x^2 nikdy přesně netrefí do 2. Když dokážeme ke $\mathbb{Q}$ přidat nějaké další prvky, aby byl splněn axiom suprema, množina A bude mít supremum S a nevyhnutelně pro něj nastane druhá možnost $S^2 = 2$ (první a třetí vedou stále ke sporu). Přidáním nových prvků ke $\mathbb{Q}$ tak vyrobíme nejenom supremum množiny A, ale, což je zajímavější a důležitější, současně i řešení rovnice $x^2 = 2$, odmocninu z čísla 2, a řešení mnoha a mnoha jiných rovnic, jako jsou $x^7 = 11$, $2^x - x = 3$ apod. Poznamenejme ještě explicitně, že nové prvky chceme přidat tak, aby supremum měla *každá* neprázdná a shora omezená množina, včetně množin obsahujících nově přidané prvky, a nikoli pouze každá neprázdná a shora omezená podmnožina $\mathbb{Q}$.

Nástin důkazu Věty 1.1

Podrobně důkaz v tomto textu dělat nebudeme.

Věta 1.2 (Cantorova věta o vnořených intervalech)
Nechť $I_n = [a_n, b_n]$, kde $n = 1, 2, \ldots$ a $a_n \leq b_n$ jsou reálná čísla, je systém do sebe vnořených intervalů:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots\ .$$

Pak existuje číslo $L \in \mathbb{R}$, které leží v každém z těchto intervalů. Pokud navíc pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že interval I_N (a tedy i interval $I_{N+1}, I_{N+2}, \ldots$) má délku menší než ε, je takové číslo L jediné, to jest

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{L\}.$$

Důkaz. Protože $I_m \supset I_n$ pro $m < n$ je ekvivalentní s $a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$, levé koncové body a_i a pravé koncové body b_j splňují nerovnosti

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1,$$

speciálně žádný levý koncový bod není větší než žádný pravý koncový bod. Položíme

$$L = \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

Z vlastností suprema hned plyne, že $a_n \leq L$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ (je to horní mez dané množiny) a že neexistuje b_n menší než L (z $b_n < L$ by plynula existence nějakého a_m většího než b_n—L je nejmenší horní mez dané množiny—a to je ve sporu s nerovnostmi pro a_i a b_j). Takže $a_n \leq L \leq b_n$ pro každé n a $L \in I_n$ pro každé n.

Abychom dokázali zbývající část věty, předpokládejme, že K a L jsou dvě různá čísla ležící ve všech intervalech I_n. Pak každý interval I_n musí mít délku alespoň $|K - L|$ a podmínka na délky intervalů není pro $0 < \varepsilon < |K - L|$ splněna. □

Věta 1.3 (Cantorova věta o nespočetnosti $\mathbb{R}$)
Množina reálných čísel je nespočetná, to jest neexistuje bijektivní zobrazení mezi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$.

Důkaz. Dokážeme, že pro každou posloupnost reálných čísel $(a_1, a_2, \ldots)$ existuje reálné číslo α, které se v ní nevyskytuje: $\alpha \neq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

První důkaz za pomoci Věty 1.2. Buď dána posloupnost $(a_1, a_2, \ldots)$. Vezmeme interval $[0, 1]$ a rozdělíme ho na třetiny $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ a $[\frac{2}{3}, 1]$. Číslo a_1 v některé z nich neleží (pokud například $a_1 = \frac{2}{3}$, leží a_1 ve druhé i třetí třetině, ale ne v první). Jako interval I_1 vezmeme tu třetinu, v níž a_1 neleží. Nyní "zabijeme" číslo a_2: rozdělíme I_1 na třetiny a jako interval I_2 vezmeme tu z nich, v níž a_2 neleží. (Pokud například $I_1 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ a a_2 neleží ve třetí třetině I_1, klademe $I_2 = [\frac{1}{3} + \frac{2}{9}, \frac{2}{3}] = [\frac{5}{9}, \frac{2}{3}]$.) Dál pokračujeme zřejmým způsobem. Sestrojíme tak systém do sebe vnořených intervalů

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$$

s tou vlastností, že $a_n \notin I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 1.2 exisuje číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\alpha \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že $\alpha \neq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Druhý důkaz Cantorovou diagonální metodou. Buď dána posloupnost $(a_1, a_2, \ldots)$. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ si jako $a_n(m)$ označíme m-tou cifru za desetinnou čárkou v dekadickém rozvoji čísla a_n; má-li rozvoj jen konečně mnoho cifer za desetinnou čárkou, doplníme je nekonečně mnoho nulami, a v případě dvojznačného dekadického rozvoje (například $134,300684999999\ldots$ a $134,300685000000\ldots$ je totéž reálné číslo) volíme rozvoj s konečně mnoha devítkami. Číslo α pak definujeme dekadickým rozvojem

$$\alpha = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots,$$

kde n-tá cifra b_n je dána vztahem

$$b_n = \begin{cases} a_n(n) + 1 & \text{pro } 0 \le a_n(n) < 8 \text{ a} \\ a_n(n) - 1 & \text{pro } a_n(n) = 8 \text{ nebo } 9. \end{cases}$$

V tomto rozvoji se za desetinnou čárkou nevyskytuje ani jedna devítka a je tedy jednoznačný. Dále $b_n \ne a_n(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž $\alpha \ne a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. □

2 Posloupnosti a řady reálných čísel

V této kapitole se budeme zabývat limitami posloupností a jejich vlastnostmi. *Posloupností (reálných čísel)* rozumíme zobrazení $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ píšeme hodnotu $a(n)$ jako a_n a celou posloupnost zapisujeme jako $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ nebo jako $(a_n)_{n\ge1}$ nebo, stručněji, jako (a_n).

Příklady posloupností. 1. $(a_n)_{n\ge1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$, kde $a_n = n$. **2.** $(a_n)_{n\ge1} = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$, kde $a_n = 2^n$. **3.**

$$(a_n)_{n\ge1} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{1}{\sqrt{7}}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{\sqrt{11}}, \ldots\right), \text{ kde } a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

4.

$$(p_n)_{n\ge1} = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots), \text{ kde } p_n \text{ je } n\text{-té prvočíslo.}$$

Posloupnost (a_n) může být zadaná explicitním vzorcem (formulí, vlastností), jako v předešlých příkladech, nebo *rekurentně* (pomocí rekurentního vzorce) odkazem k sobě samé. Rekurence má obecně tvar $a_n = f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, n-tý člen posloupnosti se vypočítá z předchozích členů.

Příklady rekurentních posloupností. **1.** Posloupnost mocnin dvojky $(2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ lze definovat i rekurentně jako $a_1 = 2$ a $a_n = 2a_{n-1}$ pro $n \geq 2$. **2.** Posloupnost *Fibonacciových čísel*

$$(F_n)_{n\geq 1} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$$

definujeme rekurencí $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$. Explicitní vzorec pro F_n je

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$ [1]

3. Posloupnost čtverců $(1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots)$, kde $a_n = n^2$, se dá rekurentně definovat jako $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. **4.** Posloupnost zadaná rekurencí $b_1 = 1$ a $b_{n+1} = b_1 b_2 \ldots b_n + 2$ začíná

$$(1, 3, 5, 17, 257, 65537, \ldots).$$

Nedá se n-tý člen napsat explicitním vzorcem

Posloupnost (a_n) je *shora omezená*, když množina $\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ má horní mez. Podobně je posloupnost *zdola omezená*, když množina jejích členů má dolní mez, a je *omezená*, je-li shora i zdola omezená. Posloupnost (a_n) je *neklesající* (= slabě rostoucí), pokud $m \leq n \Rightarrow a_m \leq a_n$, a je *nerostoucí* (= slabě klesající), pokud $m \leq n \Rightarrow a_m \geq a_n$. Posloupnost (a_n) je *klesající*, pokud $m < n \Rightarrow a_m > a_n$, a je *rostoucí*, pokud $m < n \Rightarrow a_m < a_n$. Řekneme, že (a_n) je *cauchyovská*, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Limita posloupnosti

[1] Jak se tento vzorec odvodí? Řekněme, že máme číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ splňující rovnici $\alpha^2 = \alpha + 1$. Vynásobením α^n dostaneme vztah $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Takže posloupnost $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots)$ splňuje rekurenci, až na počáteční podmínky. Řešení kvadratické rovnice $\alpha^2 = \alpha + 1$ je $\alpha_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$, a máme dokonce dvě čísla α s požadovanou vlastností. Každá lineární kombinace $(a_n)_{n\geq 1} = u(\alpha_1, \alpha_1^2, \ldots) + v(\alpha_2, \alpha_2^2, \ldots)$ s koeficienty $u, v \in \mathbb{R}$ splňuje rekurenci. Vhodnou volbou u a v, totiž $u = 1/\sqrt{5}$ a $v = -1/\sqrt{5}$, dosáhneme, že jsou splněny i počáteční podmínky $a_1 = a_2 = 1$.

Definice. Číslo $L \in \mathbb{R}$ je *limitou* posloupnosti $(a_n)_{n\geq 1}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takový index $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Pak píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

nebo $\lim a_n = L$ nebo, že $a_n \to L$ pro $n \to \infty$. Říkáme také, že a_n *konverguje k* L. Má-li posloupnost limitu, je *konvergentní*, jinak je *divergentní*. Zatím jako limity posloupností povolíme jen reálná čísla, tzv. nevlastní limity $+\infty$ a $-\infty$ zavedeme později.

Poznámky. 1. V důkazech výsledků o limitách budeme často používat *trojúhelníkovou nerovnost* $|a + b| \leq |a| + |b|$, která platí pro každé $a, b \in \mathbb{R}$. **2.** Konvergence či divergence posloupnosti se neporuší, když změníme pouze konečně mnoho jejích členů. **3.** Číslo $L \in \mathbb{R}$ není limitou posloupnosti (a_n), právě když

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} :\ (n > n_0)\ \&\ |a_n - L| \geq \varepsilon,$$

to jest existuje $\varepsilon > 0$ takové, že nekonečně mnoho členů posloupnosti má od L vzdálenost alespoň ε.

Příklady limit. 1. Platí, že $\lim 1/n = 0$. Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme $N \in \mathbb{N}$ tak velké, že $1/N < \varepsilon$. Pak $n > N$ dává $1/n < 1/N < \varepsilon$ a $|1/n - 0| < \varepsilon$. **2.** *Konstantní posloupnost* $(c, c, c, c, \ldots)$ má jako limitu c. **3.** Posloupnosti $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ a $((-1)^n)_{n\geq 1}$ jsou divergentní. **4.** Platí, že

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Předpokládejme pro spor, že 1 není limitou posloupnosti $(n^{1/n})_{\geq 1}$. Protože $n^{1/n} \geq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, znamená to, že existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnost přirozených čísel $1 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ splňující

$$n_k^{1/n_k} > 1 + \varepsilon \text{ pro } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Podle binomické věty (máme $n_k \geq 2$),

$$n_k > (1 + \varepsilon)^{n_k} = \sum_{i=0}^{n_k} \binom{n_k}{i} \varepsilon^i > n_k\varepsilon + n_k(n_k - 1)\varepsilon^2/2.$$

Po vydělení n_k dostáváme, že $1 > \varepsilon + (n_k - 1)\varepsilon^2/2$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Ale výraz $(n_k - 1)\varepsilon^2/2$ je pro velké k větší než libovolná konstanta a nemůže být shora omezený číslem 1, což je spor.

Obecné výsledky o konvergenci posloupností

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)
Každá posloupnost reálných čísel má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Pro spor budeme předpokládat, že $(a_n)_{n\geq 1}$ má dvě limity $K < L$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\varepsilon < (L-K)/2$. Protože K i L je limita posloupnosti, existují čísla $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že $n > n_1 \Rightarrow |a_n - K| < \varepsilon$ a $n > n_2 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Pak ale pro n větší než $\max(n_1, n_2)$ platí obě nerovnosti současně: $|a_n - K| < \varepsilon$ & $|a_n - L| < \varepsilon$. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti odtud získáme spor:

$$L - K = |L - K| \leq |L - a_n| + |a_n - K| < 2\varepsilon < L - K.$$

□

Věta 2.2 (monotonie a omezenost ⇒ konvergence)
Je-li posloupnost $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ neklesající a shora omezená, je konvergentní a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\}).$$

Podobně je každá nerostoucí a zdola omezená posloupnost konvegentní a infimum množiny jejích členů je její limitou.

Důkaz. Supremum množiny $\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ označíme jako s. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak, podle vlastností suprema, $a_n \leq s$ pro všechny $n \in \mathbb{N}$ a existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $a_m > s - \varepsilon$. Díky monotonii posloupnosti máme $a_n \geq a_m$ pro $n > m$, takže $n > m \Rightarrow s - \varepsilon < a_n \leq s$ a $\lim a_n = s$. Druhá část věty se dokazuje analogicky. □

Příklad. Pomocí předchozí věty rozhodneme o konvergenci rekurentní posloupnosti (x_n), kde $x_1 = 2$ a $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$. První tři členy této posloupnosti jsou $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{2}$ a $x_3 = \frac{17}{12}$. Ukážeme, že je nerostoucí a zdola omezená. Druhá vlastnost je zřejmá, protože $x_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme první vlastnost. Nejprve dokážeme, že $\sqrt{2}$ je dolní mez členů posloupnosti. Jistě $x_1 = 2 \geq \sqrt{2}$. Pro $n > 1$ máme, s použitím nerovnosti

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (jež plyne úpravou nerovnosti $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$), že

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2} \geq \frac{1}{x_{n-1}} \sqrt{2x_{n-1}^2} = \sqrt{2}.$$

Odtud už plyne monotonie:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \leq x_n \iff \frac{1}{x_n} \leq \frac{x_n}{2} \iff 2 \leq x_n^2 \iff \sqrt{2} \leq x_n.$$

Podle předchozí věty a nerovnosti $x_n \geq \sqrt{2}$ je (x_n) konvergentní a

$$\lim x_n = \inf(\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\}) \geq \sqrt{2}.$$

Později spočítáme, že $\lim x_n = \sqrt{2}$.

Nechť $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $B = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ je *podposloupností* posloupnosti A, nebo že B je posloupnost *vybraná* z A, když existuje rostoucí zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (tj. $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$) takové, že $b_n = a_{f(n)}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jinak řečeno, existuje posloupnost přirozených čísel $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots$, pro níž platí, že $b_n = a_{k_n}$.

Příklady podposloupností. 1. $(a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots)$ je podposloupností $(a_n)_{n\geq 1}$; zde $b_n = a_{2n}$ a $f(n) = 2n$. **2.** Posloupnost čtverců přirozených čísel $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots)$ je vybraná z posloupnosti $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$, ale není ani podposloupností sudých čísel $(2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$ ani podposloupností posloupnosti $(9, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 10, 11, 12, \ldots)$ (zde si 9 a 1 v řadě přirozených čísel vyměnily místa).

Poznámky. 1. "Být podposloupností" je reflexivní a tranzitivní relace na množině všech posloupností: (a_n) je podposloupností sebe samé a když je (a_n) vybraná z (b_n) a ta je vybraná z (c_n), je (a_n) vybraná i z (c_n). **2.** Není to ale antisymetrická relace: jako cvičení najděte takové dvě různé posloupnosti (a_n) a (b_n), že (a_n) je vybraná z (b_n) a naopak. **3.** Všimněte si, že indexy posloupnosti $(a_{k_n})_{n\geq 1}$ vybrané z $(a_n)_{n\geq 1}$ splňují pro $n = 1, 2, \ldots$ nerovnost $k_n \geq n$.

Tvrzení 2.3 (podposloupnost má tutéž limitu)
Je-li $(b_n)_{n\geq 1}$ vybraná z posloupnosti reálných čísel $(a_n)_{n\geq 1}$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, *potom i* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Důkaz. Platí, že $b_n = a_{k_n}$, kde $(k_n)_{n\geq 1}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje $N \in \mathbb{N}$, že $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Protože $k_n \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, máme i $n > N \Rightarrow |b_n - L| = |a_{k_n} - L| < \varepsilon$ a tedy $b_n \to L$ pro $n \to \infty$. □

V matematice je řada vět a výsledků, které na obecné rovině říkají, že "úplný nepořádek je nemožný", že každá struktura z nějaké třídy struktur musí mít "hezkou" podstrukturu. Známý příklad představuje věta o večírku: *Na každém večírku, jehož se účastní alespoň šest lidí, se najdou tři lidé, kteří se navzájem znají nebo tři lidé, kteří se navzájem neznají (předpokládáme, že relace známosti je symetrická).* Důkaz je prostý. Vezmeme jednoho účastníka večírku, třeba Annu. Kromě ní je na večírku alespoň pět dalších lidí. Někteří z nich Annu znají a ostatní ji neznají. Je jasné, že se najdou tři lidé, kteří Annu znají, nebo tři, kteří ji neznají (jinak by na večírku kromě Anny byli nejvýše $2 + 2 = 4$ lidé). Nechť nastává druhý případ, první se vyšetřuje podobně. Pokud se tři lidé, kteří neznají Annu, vzájemně znají, máme trojici vzájemně se znajících lidí. Pokud se někteří dva z nich neznají, pak tito dva spolu s Annou tvoří trojici vzájemně se neznajících účastníků večírku. Pro večírky s pěti a méně lidmi už věta neplatí. Obecně *Ramseyova věta* říká, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje takové $N \in \mathbb{N}$, že na každém večírku s N a více lidmi se najde n účastníků, kteří se navzájem znají nebo n účastníků, kteří se navzájem neznají. Následující věta o posloupnostech reálných čísel patří právě mezi věty tohoto druhu, věty o "nemožnosti úplného nepořádku".

Věta 2.4 (Bolzanova–Weierstrassova věta)
Každá omezená posloupnost reálných čísel má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Předpokládáme, že $A = (a_n)_{n\geq 1}$ je omezená posloupnost reálných čísel: existují čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a \leq a_n \leq b$ pro všechna n. Položíme $I_1 = [a, b]$ a $k_1 = 1$. V intervalu I_1 leží všechny členy posloupnosti A, kterých je nekonečně mnoho. Rozdělíme I_1 na dvě poloviny (půlícím bodem $(a+b)/2$). Jako interval I_2 zvolíme tu polovinu, do níž padne nekonečně mnoho členů posloupnosti A. (Alespoň jedna z polovin tuto vlastnost mít musí. Kdyby v každé z nich leželo jen konečně mnoho členů A, celá A by dohromady měla také jen konečně mnoho členů, což není pravda.) Můžeme tedy zvolit $k_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $k_2 > k_1$ a $a_{k_2} \in I_2$. Protože v I_2 leží nekonečně mnoho členů posloupnosti A, do alespoň jedné z polovin I_2 jich opět musí padnout nekonečně mnoho a za interval I_3 zvolíme tu polovinu, pro níž to platí (platí-li to pro obě, vybereme si libovolnou). Díky nekonečnosti počtu členů A v

I_3 opět můžeme vybrat $k_3 \in \mathbb{N}$ tak, že $k_3 > k_2$ a $a_{k_3} \in I_3$. Dál postupujeme analogicky. Konkrétně, v r-tém kroku máme zvoleny intervaly $I_1, I_2, \ldots, I_r$ a přirozená čísla $k_1 = 1 < k_2 < \ldots < k_r$ tak, že I_{i+1} je jedna z polovin I_i, $a_{k_i} \in I_i$ a v I_r leží nekonečně mnoho členů posloupnosti A. Jako interval I_{r+1} vezmeme tu z polovin I_r, do níž padne nekonečně mnoho členů A, a zvolíme $k_{r+1} \in \mathbb{N}$ tak, že $k_{r+1} > k_r$ a $a_{k_{r+1}} \in I_{r+1}$. Takto sestrojíme (nekonečný) systém vnořených intervalů

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$$

a (nekonečnou) posloupnost přirozených čísel $(k_n)_{n\geq 1}$ s těmito vlastnostmi:

1. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je I_{n+1} jedna z polovin intervalu I_n, speciálně $|I_{n+1}| = |I_n|/2$;
2. $1 = k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ (je to rostoucí posloupnost);
3. $a_{k_n} \in I_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle Věty 1.2 existuje reálné číslo L, dokonce jediné, které leží ve všech intervalech I_n:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{L\}.$$

Buď nyní dáno $\varepsilon > 0$. Protože $|I_n| = |I_{n-1}|/2 = |I_{n-2}|/4 = \cdots = |I_1|/2^{n-1}$, můžeme zvolit tak velké $N \in \mathbb{N}$, že $|I_N| < \varepsilon$. Pro $n > N$ máme, že $a_{k_n} \in I_n \subset I_N$ a $L \in I_N$, a tak

$$n > N \Rightarrow |a_{k_n} - L| \leq |I_N| < \varepsilon.$$

Vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n\geq 1}$ tedy konverguje k L. □

Připomeňme si, že posloupnost (a_n) je cauchyovská, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé dva indexy $m, n \in \mathbb{N}$ větší než N platí, že $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Posloupnost tedy není cauchyovská, pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ existují dva indexy m a n větší než N, pro něž platí, že $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$.

Věta 2.5 (konvergence $\Longleftrightarrow$ cauchyovskost)
Posloupnost $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ je konvergentní, právě když je cauchyovská.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Předpokládáme, že $a_n \to L$ pro $n \to \infty$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Díky Δ-ové nerovnosti, $m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \le |a_m - L| + |L - a_n| < 2\varepsilon$. Vidíme, že posloupnost je cauchyovská.

Implikace $\Leftarrow$. Předpokládáme, že $(a_n)_{n\ge 1}$ je cauchyovská. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Z cauchyovskosti plyne, že $(a_n)_{n\ge 1}$ je omezená. (Pro $\varepsilon = 1$ existuje $N \in \mathbb{N}$, že $m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < 1$. Tudíž $|a_n| \le \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1)$ pro všechny $n \in \mathbb{N}$.) Podle Věty 2.4 má konvergentní podposloupnost: existuje posloupnost přirozených čísel $1 \le k_1 < k_2 < \ldots$ a číslo $L \in \mathbb{R}$ tak, že $a_{k_n} \to L$ pro $n \to \infty$. Pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ tedy platí, že $n > n_0 \Rightarrow |a_{k_n} - L| < \varepsilon$. Dále díky cauchyovskosti existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $m, n > n_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$. Takže $n > \max(n_0, n_1) \Rightarrow |a_n - L| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - L| < 2\varepsilon$ a celá posloupnost konverguje k L. $\square$

Příklady. 1. Posloupnost $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots) = ((-1)^n)_{n\ge 1}$ není cauchyovská, a tedy ani konvergentní, protože $|a_n - a_{n+1}| = 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. **2.** Posloupnost

$$(1, 1 + \tfrac{1}{2}, 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}, 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}, \ldots),\ \text{kde}\ a_n = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

není cauchyovská, a tedy ani konvergentní, protože

$$|a_{2n} - a_n| = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \ge n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Aritmetika limit

Tvrzení 2.6 (limity a uspořádání)
Nechť (a_n) a (b_n) jsou konvergentní posloupnosti reálných čísel s limitami $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

1. *Když $A > B$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n > n_0 \Rightarrow a_n > b_n$.*
2. *Když existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n > n_0 \Rightarrow a_n \ge b_n$, pak $A \ge B$.*

Důkaz. 1. Zvolíme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\varepsilon < (A - B)/2$. Pro dostatečně velké indexy n je a_n blíže k A než ε a b_n je blíže k B než ε: $n > n_0 \Rightarrow A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ & $B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon$. Díky volbě ε máme $B + \varepsilon < A - \varepsilon$, a tak $b_n < B + \varepsilon < A - \varepsilon < a_n$.

2. Předpokládejme pro spor, že $A < B$. Pak, podle bodu 1, pro nějaké $n_1 \in \mathbb{N}$ platí, že $n > n_1 \Rightarrow a_n < b_n$. Pro $n > \max(n_0, n_1)$ by pak muselo platit současně $a_n < b_n$ i $a_n \geq b_n$, což je spor. $\square$

Poznámka. Ostrá nerovnost mezi členy posloupností může v limitě přejít v rovnost, například $\frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{2n} = 0$.

Tvrzení 2.7 (věta o dvou policajtech)
Nechť reálné posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n) *splňují, že (i)* $\lim a_n = \lim b_n = L \in \mathbb{R}$ *a (ii) existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro* $n > n_0$ *platí* $a_n \leq c_n \leq b_n$. *Potom i* (c_n) *je konvergentní a* $\lim c_n = L$.

Důkaz. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\lim a_n = \lim b_n = L$, existuje takové $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n > n_1$ leží a_n i b_n v intervalu $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Pro $n > \max(n_0, n_1)$ leží navíc c_n mezi a_n a b_n, takže leží také v intervalu $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Tedy $n > \max(n_0, n_1) \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$. $\square$

Tvrzení 2.8 (limity a aritmetické operace)
Nechť (a_n) a (b_n) *jsou konvergentní posloupnosti reálných čísel s limitami* $\lim a_n = A$ *a* $\lim b_n = B$. *Potom*

1. $\lim(a_n + b_n) = A + B$;
2. $\lim(a_n b_n) = AB$;
3. *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a* $B \neq 0$, *pak* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Důkaz. Buď dáno malé $\varepsilon > 0$, vezmeme rovnou $\varepsilon < 1$. Protože $a_n \to A$ i $b_n \to B$ pro $n \to \infty$, můžeme zvolit $n_0 \in \mathbb{N}$ tak velké, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$ & $|b_n - B| < \varepsilon$. Předpokládáme, že $n > n_0$.

1. Podle Δ-ové nerovnosti,

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy i $a_n + b_n \to A + B$ pro $n \to \infty$.

2. Podle Δ-ové nerovnosti a nerovnosti $|b_n| < |b_n - B| + |B| < \varepsilon + |B| < 1 + |B|$,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n + Ab_n - Ab_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| \cdot |b_n| + |A| \cdot |b_n - B| \\ &< \varepsilon(|B| + 1) + |A|\varepsilon \\ &< (|A| + |B| + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy i $a_n b_n \to AB$ pro $n \to \infty$.

3. Nyní vezmeme $\varepsilon > 0$ rovnou tak malé, že $\varepsilon < \frac{|B|}{2}$. Pak, pro $n > n_0$, $|B| \leq |B - b_n| + |b_n| < \varepsilon + |b_n|$ a $|b_n| > |B| - \varepsilon > \frac{|B|}{2}$. S použitím Δ-ové nerovnosti a nerovnosti $|b_n| > \frac{|B|}{2}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - Ab_n}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &\leq \frac{|a_n - A| \cdot |B| + |A| \cdot |B - b_n|}{|b_n| \cdot |B|} \\ &< \frac{\varepsilon(|A| + |B|)}{|B|^2/2}. \end{aligned}$$

Tedy i $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$ pro $n \to \infty$. □

Poznámka. Z bodů 1 a 2 této věty vyplývá, že když $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $a_n \to A$, $b_n \to B$ pro $n \to \infty$, potom $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha A + \beta B$ pro $n \to \infty$.

Příklad. Dopočítáme příklad o rekurentní posloupnosti uvedený po Větě 2.2. Ukázali jsme, že posloupnost (x_n) daná rekurentně jako $x_1 = 2$ a $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ má vlastní limitu $L > 0$. Podle předchozí věty

$$L = \lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{\lim x_n}{2} + \frac{1}{\lim x_n} = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}.$$

Máme rovnici $L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}$, čili $L^2 = 2$ a $L = \sqrt{2}$ ($L = -\sqrt{2}$ nelze, protože víme, že $L > 0$).

Tvrzení 2.9 (násobení limitní nulou)
Pokud je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ omezená a posloupnost $(b_n) \subset \mathbb{R}$ konverguje k nule, pak i posloupnost $(a_n b_n)$ konverguje k nule.

Důkaz. Protože (a_n) je omezená, existuje takové $c \in \mathbb{R}$, že $|a_n| < c$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Z $\lim b_n = 0$ plyne existence takového $n_0 \in \mathbb{N}$, že $|b_n| < \varepsilon$. Tedy $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < c\varepsilon$. Tedy i $(a_n b_n)$ konverguje k nule. □

Poznámka. Nula má jako limita vyjímečné postavení. Pokud totiž (a_n) diverguje a (b_n) konverguje, ale ne k nule, pak $(a_n b_n)$ diverguje.

Nevlastní limity

Zavedeme *nevlastní limity* $+\infty$ a $-\infty$. Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má (nevlastní) limitu* $+\infty$ (resp. $-\infty$), když pro každé $c \in \mathbb{R}$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow a_n > c$ (resp. $n > n_0 \Rightarrow a_n < c$). Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \text{ resp. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

nebo $\lim a_n = +\infty$, resp. $\lim a_n = -\infty$. Pokud $\lim a_n \in \mathbb{R}$, mluvíme pro rozlišení o *vlastní limitě*. Obecná posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tedy buď má vlastní limitu, je konvergentní, nebo nemá vlastní limitu, je divergentní. Divergentní posloupnost buď má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, nebo nemá vůbec žádnou limitu, ani nevlastní.

Příklady nevlastních limit. $\lim n^5 - 2^n = -\infty$, $\lim \sqrt{n} = +\infty$ a posloupnost $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, \ldots)$ nemá limitu (ani nevlastní).

Rozšířená reálná osa $\mathbb{R}^*$ je množina $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Relaci uspořádání a aritmetické operace rozšíříme na symboly $+\infty$ a $-\infty$ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
&\forall a \in \mathbb{R}: \ -\infty < a < +\infty;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq -\infty: \ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq +\infty: \ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0: \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0: \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \mp\infty;\\
&\forall a \in \mathbb{R}: \ \frac{a}{\pm\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Zbylé výrazy

$$(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0} \ \text{ pro } \ a \in \mathbb{R}^*$$

—součet dvou nekonečen s opačnými znaménky, součin nuly a nekonečna, podíl dvou nekonečen a každý podíl s nulou ve jmenovateli—ponecháváme nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy.*

Symbol $+\infty$ (resp. $-\infty$) zastupuje posloupnosti s limitou $+\infty$ (resp. $-\infty$). Má dobrý smysl definovat například výsledek násobení $(+\infty)\cdot(-\infty)$ jako $-\infty$, neboť pro každé dvě posloupnosti reálných čísel (a_n) a (b_n) splňující $a_n \to +\infty$ a $b_n \to -\infty$ platí, že $a_n b_n \to -\infty$. Obdobné tvrzení platí pro každý hořejší definovaný výraz obsahující nekonečno. Na druhou stranu nelze třeba dost dobře říci, co by mělo být výsledkem násobení $0\cdot(+\infty)$, protože jenom z předpokladů $a_n \to 0$ a $b_n \to +\infty$ neplyne nic o limitě $\lim a_n b_n$. Například

$$\begin{aligned}
\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0, &\qquad \lim n = +\infty \ \text{ a } \ \lim \frac{(-1)^n}{n}\cdot n \ \text{ neexistuje}\\
\lim \frac{1}{n} = 0, &\qquad \lim n = +\infty \ \text{ a } \ \lim \frac{1}{n}\cdot n = 1\\
\lim \frac{1}{n} = 0, &\qquad \lim n^2 = +\infty \ \text{ a } \ \lim \frac{1}{n}\cdot n^2 = +\infty
\end{aligned}$$

a tak dále—limita součinové posloupnosti neexistuje nebo to může být cokoli z $\mathbb{R}^*$. Stejná situace nastává pro všechny neurčité výrazy.

Poznámky. 1. Přesněji, $\frac{a}{0}$ je pro $a \neq 0$ méně neurčitý výraz, než ostatní, jak ukazuje následující tvrzení: existuje-li limita odpovídající podílové posloupnosti, může to být jen $+\infty$ nebo $-\infty$. Ovšem výraz $\frac{0}{0}$ je stejně neurčitý, jako ostatní: limita odpovídající podílové posloupnosti nemusí existovat nebo jí může být cokoli z $\mathbb{R}^*$. **2.** Jsou i další neurčité výrazy, třeba $1^{+\infty}$ (rozmyslete si, že z předpokladů $a_n \to 1$ a $b_n \to +\infty$ neplyne nic o limitě $\lim a_n^{b_n}$).

Tvrzení 2.10 (dělení limitní nulou)
Nechť posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ splňují, že $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$ (může být $A = +\infty$), $\lim b_n = 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechny $n \in \mathbb{N}$. Rozlišíme tři (vzájemně se vylučující) případy: (i) $b_n > 0$ pro $n > n_0$, (ii) $b_n < 0$ pro $n > n_0$ a (iii) nenastává ani (i) ani (ii), takže b_n mění nekonečněkrát často znaménko. V prvním případě $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, ve druhém $\lim \frac{a_n}{b_n} = -\infty$ a ve třetím tato limita neexistuje.

Důkaz. Protože $\lim a_n > 0$, existuje $\delta > 0$ a $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $n > n_1 \Rightarrow a_n > \delta$. Předpokládejme, že nastává případ (i), případ (ii) je velmi podobný. Buď dáno $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Protože platí (i) a $b_n \to 0$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $n > n_2 \Rightarrow 0 < b_n < \frac{\delta}{c}$. Odtud

$$n > \max(n_1, n_2) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} > \frac{\delta}{\delta/c} = c.$$

Tedy $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$ pro $n \to \infty$.

Předpokládejme, že nastává případ (iii). Nechť δ a n_1 jsou jako v případu (i). Vezmeme libovolné $\varepsilon > 0$. Existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $n > n_2 \Rightarrow -\varepsilon < b_n < \varepsilon$. Pro $n > \max(n_1, n_2)$ je $a_n > \delta > 0$, ale b_n je nekonečněkrát kladné a nekonečněkrát záporné. Každá z nerovností

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \text{a} \quad \frac{a_n}{b_n} < \frac{\delta}{-\varepsilon} = -\frac{\delta}{\varepsilon}$$

tedy nastává pro nekonečně mnoho n. To znamená, že $\lim \frac{a_n}{b_n}$ neexistuje. $\square$

Nyní probereme, jak se dosavadní výsledky o limitách změní, povolíme-li jako limity kromě reálných čísel i $+\infty$ a $-\infty$. Věta 2.1 o jednoznačnosti limity se nemění: každá posloupnost má nejvýše jednu limitu, včetně nevlastních limit. Větu 2.2 o monotonních posloupnostech lze upravit takto:

Věta 2.2* (monotonie ⇒ existence limity)
Každá neklesající posloupnost má limitu, vlastní, je-li shora omezená, a $+\infty$ jinak.

Tvrzení 2.3 o podposloupnosti se nemění: podposloupnost má touž limitu (vlastní či nevlastní), jako původní posloupnost. Jednoduché modifikace důkazů pro případ nevlastních limit jsou vhodným cvičením. Bolzanovu–Weierstrassovu větu (Věta 2.4) lze pro nevlastní limity modifikovat následovně.

Věta 2.4* (B.–W. věta pro všechny posloupnosti)
Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má podposloupnost, která má limitu (vlastní nebo nevlastní).

Důkaz. Případ omezené posloupnosti byl vyřešen v důkazu Věty 2.4. Předpokládejme proto, že (a_n) není shora omezená; případ, že není zdola omezená, je prakticky identický. Je jasné, že pro žádné $k \in \mathbb{N}$ ani $(a_k, a_{k+1}, \ldots)$ není shora omezená. Protože $(a_1, a_2, \ldots)$ není shora omezená, existuje takový index $n_1 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_1} > 1$. Protože $(a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots)$ není shora omezená, existuje takový index $n_2 \in \mathbb{N}$, že $n_2 > n_1$ a $a_{n_2} > 2$. Dál postupujeme naznačeným způsobem. V r-tém kroku máme definovánu posloupnost indexů $1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_r$ takovou, že $a_{n_i} > i$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$. Protože $(a_{n_r+1}, a_{n_r+2}, \ldots)$ není shora omezená, existuje takový index $n_{r+1} \in \mathbb{N}$, že $n_{r+1} > n_r$ a $a_{n_{r+1}} > r + 1$. Takto sestrojená podposloupnost $(a_{n_k})_{k\ge 1}$ má zřejmě limitu $+\infty$. $\square$

Věta 2.5 (ekvivalence konvergence a cauchyovskosti) v případě nevlastních limit neplatí, protože, jak se snadno vidí, žádná posloupnost s nevlastní limitou není cauchyovská. Tvrzení 2.6 o limitě a uspořádání a Tvrzení 2.7 o dvou policajtech platí pro nevlastní limity beze změny. Pro nevlastní limity se dá dokonce říci více: Pokud posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ splňují, že $\lim a_n = +\infty$ a $a_n \le b_n$ pro $n > n_0$, potom i $\lim b_n = +\infty$; podobně pro limitu $-\infty$. Tvrzení 2.8 o aritmetice limit se pro nevlastní limity musí upravit s ohledem na neurčité výrazy:

Tvrzení 2.8* (nevlastní limity a aritmetické operace)
Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti reálných čísel s případně nevlastními limitami $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom

1. *$\lim(a_n + b_n) = A + B$, je-li součet $A + B$ definován;*
2. *$\lim(a_n b_n) = AB$, je-li součin AB definován;*
3. *pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, je-li podíl $\frac{A}{B}$ definován.*

Modifikace v důkazech Tvrzení 2.6–2.8 pro nevlastní limity jsou přenechány čtenářce jako cvičení.

Limes superior a limes inferior

Nekonečna umožňují rozšířit definice suprema a infima na všechny podmnožiny $\mathbb{R}$. Pokud $X \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a není shora omezená, klademe $\sup(X) = +\infty$. Podobně pro neprázdnou a zdola neomezenou $X \subset \mathbb{R}$ klademe $\inf(X) = -\infty$. Dále klademe $\sup(\emptyset) = -\infty$ a $\inf(\emptyset) = +\infty$. V rámci rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^*$ tyto definice souhlasí s tím, že $\sup(X)$ je nejmenší horní mez X a $\inf(X)$ je největší dolní mez X.

Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Rozšířené reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je jejím *hromadným bodem*, pokud je limitou nějaké posloupnosti vybrané z (a_n). Podle Věty 2.4* má každá posloupnost hromadný bod.

Zavedeme užitečné pojmy limes superior a limes inferior posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Nejprve pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme pomocné posloupnosti $(b_k) \subset \mathbb{R}^*$ a $(c_k) \subset \mathbb{R}^*$ jako

$$b_k = \sup(\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}) \ \text{ a } \ c_k = \inf(\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}).$$

Pokud je (a_n) shora omezená, jsou všechny b_k reálná čísla. Pokud (a_n) není shora omezená, jsou všechny b_k rovny $+\infty$. Analogicky, pro zdola omezenou (a_n) jsou všechny c_k reálná čísla a jinak jsou všechny rovny $-\infty$. Z definice plynou pro každé $k \in \mathbb{N}$ nerovnosti

$$c_k \le a_k \le b_k,\ b_k \ge b_{k+1} \ \text{ a } \ c_k \le c_{k+1},$$

tj. (b_k) je nerostoucí a (c_k) je neklesající. *Limes superior* a *limes inferior* posloupnosti (a_n) definujeme jako $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ pro shora neomezenou (a_n), jako $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pro zdola neomezenou (a_n) a jinak jako limity

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} b_k \ \text{ a } \ \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} c_k.$$

Tyto limity existují podle Věty 2.2*. Limsup a liminf posloupnosti jsou tedy vždy definovaná, jednoznačně určená rozšířená reálná čísla.

Poznámka. Chceme nalézt limsup nějaké posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Její body vyneseme na reálnou osu a z $+\infty$ posouváme píst doleva, směrem do $-\infty$, dokud mu to body posloupnosti dovolí. Píst se zastaví v poloze b_1. Smažeme bod a_1 a snažíme se dále posunout píst. Možná zůstane na místě nebo mu a_1 uvolnil místo a je nyní možné ho posunout vlevo do nové polohy, než ho body $a_2, a_3, \ldots$ zastaví. Druhá poloha pístu je b_2. Pak smažeme a_2 a píst posuneme do polohy b_3 atd. V tomto procesu se píst přibližuje k mezní poloze, kterou je právě $\limsup a_n$. Podobně si lze představovat $\liminf a_n$.

Příklady. Určíme limsup a liminf následujících posloupností:

$$\begin{aligned}
(a_n) &= (1.1, -1.01, 1.001, -1.0001, 1.00001, \ldots),\\
(d_n) &= (1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, \ldots),\\
(e_n) &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots) \ \text{ a}\\
(f_n) &= (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \ldots).
\end{aligned}$$

Pro (a_n) máme $(b_k) = (1.1, 1.001, 1.001, 1.00001, 1.00001, 1.0000001, \ldots)$ a $(c_k) = (-1.01, -1.01, -1.0001, -1.0001, -1.000001, \ldots)$. Tedy $\limsup a_n =$

1 a $\liminf a_n = -1$. Pro (d_n) máme $(b_k) = (+\infty, +\infty, \ldots)$ a $(c_k) = (-\infty, -\infty, \ldots)$. Tedy $\limsup d_n = +\infty$ a $\liminf d_n = -\infty$. Pro (e_n) máme $(b_k) = (+\infty, +\infty, \ldots)$ a $(c_k) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$. Tedy $\limsup e_n = \liminf e_n = +\infty$. Pro (f_n) máme $(b_k) = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots)$ a $(c_k) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots)$. Tedy $\limsup f_n = \liminf f_n = 0$.

Poznámka o hromadných bodech. *Není těžké vidět, že reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ interval $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti, to jest množina $\{n \in \mathbb{N} : \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon\}$ je nekonečná.*
Důkaz. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem (a_n): $a_{k_n} \to \alpha$ pro $n \to \infty$ pro nějakou rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n). Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow a_{k_n} \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Interval $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ tedy obsahuje nekonečně členů z (a_n). Na druhou stranu, nechť pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho n, že $a_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Zvolíme $n_1 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_1} \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$, pak vybereme $n_2 \in \mathbb{N}$, že $n_2 > n_1$ a $a_{n_2} \in (\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2})$, potom vybereme $n_3 \in \mathbb{N}$, že $n_3 > n_2$ a $a_{n_3} \in (\alpha - \frac{1}{3}, \alpha + \frac{1}{3})$ atd. Získáme podposloupnost konvergující k α, čili α je hromadný bod posloupnosti A. $\square$

Věta 2.11 (limsup, liminf a hromadné body)
Nechť $A = (a_n) \subset \mathbb{R}$ je posloupnost a $H(A) \subset \mathbb{R}^*$ je množina jejích hromadnych bodů. Potom

$$\limsup a_n = \max(H(A)) \quad \text{a} \quad \liminf a_n = \min(H(A)).$$

Důkaz. Nechť $S = \limsup a_n$. Ukážeme, že $S \in H(A)$. Rozlišíme tři případy, podle toho, zda $S = \pm\infty$ nebo $S \in \mathbb{R}$.

Nechť $S = +\infty$. To znamená, že (a_n) není shora omezená a (jak víme z důkazu Věty 2.4*) lze z ní vybrat posloupnost s limitou $+\infty$. Tedy $+\infty \in H(A)$. Nechť $S = -\infty$. To znamená, že $\lim b_k = -\infty$. Z $a_k \le b_k$ plyne, že i $\lim a_k = -\infty$. Tedy $-\infty \in H(A)$.

Nechť $S \in \mathbb{R}$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $b_k \to S$ a (b_k) je nerostoucí, existuje takové $k_0 \in \mathbb{N}$, že $k > k_0 \Rightarrow S \le b_k < S + \varepsilon$. Z definice b_k jako suprema množiny $\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$ plyne, že pro každé k větší než k_0 existuje l, $l \ge k$, takové, že $S - \varepsilon < a_l$. Tedy

$$\forall k, k > k_0 \; \exists l, l \ge k : \; S - \varepsilon < a_l \le b_k < S + \varepsilon.$$

Odtud plyne, že interval $(S - \varepsilon, S + \varepsilon)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n). Podle hořejší poznámky o hromadných bodech je $S \in H(A)$.

Ukážeme, že S je největší prvek v $H(A)$: $\alpha \in H(A) \Rightarrow \alpha \leq S$. Nechť α je libovolný hromadný bod posloupnosti (a_n). Pro nějakou rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) máme $\lim a_{k_n} = \alpha$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $a_{k_n} \leq b_{k_n}$. V limitě (Tvrzení 2.6 a 2.3) tato nerovnost přejde v $\alpha \leq S$.

Analogicky se dokazuje, že $\liminf a_n \in H(A)$ a že to je nejmenší prvek množiny $H(A)$. □

Důsledek. *Pro každou posloupnost $A = (a_n) \subset \mathbb{R}$ platí, že*

$$\lim a_n = L \in \mathbb{R}^* \iff \limsup a_n = \liminf a_n = L.$$

Důkaz. Pokud $\lim a_n = L$, pak podle Tvrzení 2.3 máme $H(A) = \{L\}$ a předchozí Věta dává, že $\limsup a_n = \liminf a_n = L$. Naopak, nechť $\limsup a_n = \liminf a_n = L$. Máme, pro každe $k \in \mathbb{N}$, $c_k \leq a_k \leq b_k$. Protože $\lim c_k = \liminf a_n = \lim b_k = \limsup a_n = L$, podle Tvrzení 2.7 o dvou policajtech i $\lim a_k = L$. □

Dvě standardní limity

Nechť $\alpha, q \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \dots \quad \alpha > 0 \\ 1 & \dots \quad \alpha = 0 \\ 0 & \dots \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \dots \quad q > 1 \\ 1 & \dots \quad q = 1 \\ 0 & \dots \quad -1 < q < 1 \\ \text{neexistuje} & \dots \quad q \leq -1. \end{cases}$$

Příklady. 1. Dokážeme první limitu. Je zřejmé, že $\lim n^0 = \lim 1 = 1$. Protože $n^{-\alpha} = 1/n^\alpha$ a $1/+\infty = 0$, stačí dokázat jen, že $\lim n^\alpha = +\infty$ pro $\alpha > 0$. Protože (n^α) je neklesající a $n^\alpha \geq 1$, $L = \lim n^\alpha \in \mathbb{R}^*$ existuje a $L \geq 1$. Předpokládejme pro spor, že $L \in \mathbb{R}$. Podle aritmetiky limit a tvrzení o vybrané posloupnosti,

$$L = \lim n^\alpha = \lim (2n)^\alpha = \lim 2^\alpha \cdot \lim n^\alpha = 2^\alpha L.$$

Tedy $L = 2^\alpha L$, z čehož plyne, že $L = 0$ nebo $2^\alpha = 1$, což je obojí spor. Proto $L = +\infty$.

2. Dokážeme druhou limitu. Případ $q = 1$ je jasný. Nechť $-1 < q < 1$. Pak je posloupnost $(|q|^n)$ klesající a zdola omezená (číslem 0), takže má vlastní limitu L. Podle aritmetiky limit a tvrzení o vybrané posloupnosti,

$$L = \lim |q|^n = \lim |q|^{n+1} = \lim |q| \cdot \lim |q|^n = |q|L.$$

Tedy $L = |q|L$ a opět $|q| = 1$ nebo $L = 0$. První možnost nenastává, tudíž $\lim |q|^n = 0$. Protože $|q^n| = |q|^n$, platí i $\lim q^n = 0$. Nechť $q > 1$. Protože $q^n = 1/(1/q)^n$, $(1/q)^n \to 0$ a vždy $(1/q)^n > 0$, podle Tvrzení 2.10 máme $\lim q^n = +\infty$. Konečně, nechť $q \le -1$. Pak $q^{2n+1} \le -1$, $q^{2n} \ge 1$ a proto (q^n) nemá limitu.

3. Nalezneme $\lim 2^n/n$. Aritmetiku limit nemůžeme použít přímo, protože jde o neurčitý výraz $\frac{+\infty}{+\infty}$. Ale, označíme-li $a_n = \frac{2^n}{n}$, máme

$$\lim \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \tfrac{2^{n+1}/(n+1)}{2^n/n} = \lim 2\tfrac{n}{n+1} = 2\lim(1 - \tfrac{1}{n+1}) = 2,$$

a proto $a_{n+1} > 1.9a_n$ pro $n > n_0$. Pro $n > n_0$ je tedy (a_n) rostoucí a má vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$ nebo limitu $+\infty$. První případ vede na rovnici $L = 2L$, protože $L = \lim a_n = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \lim a_n = 2L$. Tedy $L = 0$, což není možné ($a_n > 0$ a (a_n) je eventuálně rostoucí). Tedy

$$\lim \frac{2^n}{n} = +\infty.$$

Řady reálných čísel

Nekonečná řada (reálných čísel) je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

kde $(a_n)_{n\ge1}$ je posloupnost reálných čísel. Budeme se snažit přidržovat tohoto značení, ale pochopitelně se používá mnoho variant zápisů nekonečných řad, pro sčítací index se například může použít jiné písmeno, sčítá se od jiné hodnoty než od 1, apod.; zápisy pro nekonečné řady jsou tedy třeba také

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots,\ \sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots, \sum_{k\ge8} c_k = c_8 + c_9 + \cdots.$$

Částečný součet řady, přesněji její n-tý částečný součet s_n, je součet jejích prvních n členů. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a pro řadu $\sum_{k\geq 8} c_k$ je $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$.

Definice. Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) částečných součtů dané řady, mluvíme o *konvergentní řadě* a limita $\lim s_n$ je jejím *součtem.* Pokud $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada *divergentní.*

Pro součet řady se používá stejný symbol, jako pro ni samotnou. Konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má tedy součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

V případě, že (s_n) má nevlastní limitu $\pm\infty$, budeme též mluvit o součtu $\pm\infty$ a psát, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Poznámka. Pro řadu s nezápornými členy, tj. řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, částečné součty splňují nerovnosti $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$. Taková řada tedy buď konverguje nebo má součet $+\infty$.

Příklady. 1. Řada $\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ je divergentní, protože $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$. **2.** I řada $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ je divergentní, jak už tušíme a jak si brzy přesně zdůvodníme. **3.** Naproti tomu řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

je konvergentní a její součet je 1, protože $s_n = \sum_{k=1}^{n} (1/2)^k = 1 - (1/2)^n \to 1$ pro $n \to \infty$. **4.** I řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

je konvergentní, jak dokážeme pomocí Leibnizova kritéria (Věta 2.14).

Dvě důležité řady

První z nich je *geometrická řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr zvaný *kvocient*. Pro součet geometrické řady platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \ldots \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & \ldots \quad q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \ldots \quad q \leq -1. \end{cases}$$

Vyplývá to ze vzorce pro částečný součet ($q \neq 1$):

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Pro $|q| < 1$ je $\lim q^{n+1} = 0$ a podle aritmetiky limit $\lim s_n = (0-1)/(q-1) = 1/(1-q)$. Pro $q > 1$ jako limita vyjde $(+\infty - 1)/(q-1) = +\infty$ a pro $q = 1$ také (tehdy $s_n = n$). Pro $q \leq -1$ limita $\lim q^{n+1}$ neexistuje a tedy ani limita $\lim s_n = \lim(q^{n+1} - 1)/(q-1)$ (vzhledem k vyjádření $q^{n+1} = 1 + (q-1)s_n$).

Druhou je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

kde $s \in \mathbb{R}$. Pro její konvergenci platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ \text{diverguje pro } s \leq 1. \end{cases}$$

Dokážeme to později. Pro některé hodnoty s jsou pro součty této řady známy explicitní vzorce, například

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Obecné výsledky o konvergenci řad

Věta 2.12 (podmínky konvergence řady)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada reálných čísel.

1. *Pokud konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

2. *Konverguje, právě když splňuje tzv.* Cauchyovu podmínku pro řady:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ m > n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Důkaz. 1. Nechť má tato řada součet $L \in \mathbb{R}$. Podle aritmetiky limit pak $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = L - L = 0$.

2. Řada konverguje, právě když její posloupnost částečných součtů (s_n) má vlastní limitu, což podle Věty 2.5 nastává, právě když je (s_n) cauchyovská, tj. právě když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0:\ m, n > n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

Můžeme ovšem předpokládat, že $m > n$, a pak $s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m$. Cauchyova podmínka pro řady tedy není nic jiného než cauchyovskost posloupnosti částečných součtů. □

Příklad. *Harmonická řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

nesplňuje Cauchyovu podmínku, jak už jsme v jednom příkladu ukázali:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| \geq \frac{1}{2}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Proto diverguje, $\lim s_n = +\infty$. Protože pro $s \leq 1$ je $1/n^s \geq 1/n$, ze stejného důvodu diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$, $s \leq 1$.

Harmonická řada dále ukazuje, že implikaci v bodu 1 nelze obecně otočit, tj. $\lim a_n = 0$ je sice nutnou, ale obecně ne postačující podmínkou konvergence řady $\sum a_n$.

Definice. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, je-li řada absolutních hodnot jejích členů $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní.

Tvrzení 2.13 (absolutní konvergence ⇒ konvergence)
Pokud řada konverguje absolutně, potom konverguje.

Důkaz. Předpokládáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, takže splňuje Cauchyovu podmínku (bod 2 Věty 2.12). Tím se ale splní i Cauchyova podmínka pro původní řadu: pro každé $m > n \geq 1$ máme podle Δ-ové nerovnosti, že

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| \\ &= \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|\big|. \end{aligned}$$

Podle bodu 2 Věty 2.12 je tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. □

Poznámka. Opačná implikace samozřejmě neplatí, například řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ je konvergentní, jak hned uvidíme, ale ne absolutně, protože řada absolutních hodnot jejích členů je divergentní harmonická řada.

Věta 2.14 (Leibnizovo kritérium)
Nechť posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ splňuje nerovnosti $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$ a $\lim a_n = 0$. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

konverguje.

Důkaz. Pro částečné součty máme díky předpokladu o a_n nerovnosti $s_1 = a_1 \geq s_1 - (a_2 - a_3) = s_3 \geq s_3 - (a_4 - a_5) = s_5 \geq s_7 \geq \ldots$ a podobně $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots$, takže posloupnost $(s_{2n-1})_{n\geq 1}$ je nerostoucí a posloupnost $(s_{2n})_{n\geq 1}$ je neklesající. Dále $s_1 \geq s_1 - a_2 = s_2$, $s_3 \geq s_3 - a_4 = s_4$, atd., takže pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ máme $s_{2m-1} \geq s_{2n}$ a speciálně je (s_{2n-1}) zdola omezená a (s_{2n}) je shora omezená. Obě posloupnosti mají (podle Věty 2.2) vlastní limity $\lim s_{2n-1} = L$ a $\lim s_{2n} = K$. Ovšem $s_{2n-1} - a_{2n} = s_{2n}$ a $a_n \to 0$, v limitě proto tato rovnost přejde v $K = L$. Takže $\lim s_{2n-1} = \lim s_{2n} = L$ a odtud se už snadno vidí, že i $\lim s_n = L$. □

Příklady. Leibnizovo kritérium dokazuje například konvergenci řad

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{a} \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Dají se spočítat jejich součty, první je $\log 2$ a druhý $\pi/4$. Obě řady konvergují neabsolutně.

Tvrzení 2.15 (lineární kombinace řad)

1. *Nechť číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ není nulové. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, a pro jejich součty platí, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pokud řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$, a pro součty těchto tří řad platí, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz. Cvičení na aritmetiku limit posloupností částečných součtů. □

Poznámka. Opačná implikace v bodu 2 obecně neplatí: pro $\alpha = \beta = 1$, $a_n = (-1)^n$ a $b_n = (-1)^{n+1}$ máme konvergentní součtovou řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = 0 + 0 + \cdots = 0$, ale obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergují.

Kritéria konvergence řad s nezápornými členy

Tvrzení 2.16 (srovnávací kritéria konvergence řad)
Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mějte nezáporné členy, tj. $a_n \geq 0$ a $b_n \geq 0$ pro všechny $n \in \mathbb{N}$.

1. *Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

2. *Nechť $\lim \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}^*$, patrně $K \geq 0$. Pak*

$$\begin{aligned} 0 < K < +\infty \quad &\Rightarrow \quad \Big(\sum a_n \text{ konverguje} \iff \sum b_n \text{ konverguje}\Big) \\ K = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Big(\sum b_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}\Big) \\ K = +\infty \quad &\Rightarrow \quad \Big(\sum a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum b_n \text{ konverguje}\Big). \end{aligned}$$

Důkaz. 1. Nechť řada $\sum b_n$ konverguje, tj. má shora omezené částečné součty, řekněme konstantou c. Označme si částečné součty řady $\sum a_n$, resp. $\sum b_n$, jako s_n, resp. t_n. Pro $n > n_0$ máme

$$s_n = s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \le s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n} b_i = s_{n_0} + (t_n - t_{n_0}) = t_n + (s_{n_0} - t_{n_0}).$$

Takže, pro $n > n_0$, $s_n < c + (s_{n_0} - t_{n_0})$. Prvních n_0 členů řady $\sum a_n$ už na omezenosti částečných součtů s_n nic změnit nemůže. Řada $\sum a_n$ tedy konverguje.

2. Nechť $0 < K < +\infty$. Protože $a_n/b_n \to K \in \mathbb{R}$ a $K > 0$, zvolíme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\varepsilon < K/2$, a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n > n_0 \Rightarrow K/2 < K - \varepsilon < a_n/b_n < K + \varepsilon < 3K/2.$$

Pro $n > n_0$ proto máme odhady

$$a_n < (3K/2)b_n \ \text{ a } \ b_n < (2/K)a_n.$$

Podle bodu 1 jsou obě řady ekvivalentní ve smyslu konvergence.

Zbylé dva případy $K = 0$ a $K = +\infty$ jsou podobné a jsou přenechány čtenáři jako cvičení. $\square$

Příklady. 1. Rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 + 3n}.$$

Srovnáme ji s divergentní harmonickou řadou $\sum b_n = \sum 1/n$. Podíl a_n/b_n v limitě jde k 1, protože

$$\frac{(n + \sqrt{n})/(n^2 + 3n)}{1/n} = \frac{n^2 + n^{3/2}}{n^2 + 3n} = \frac{1 + n^{-1/2}}{1 + 3n^{-1}} \to \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

Podle bodu 2 Věty 2.16 tedy naše řada diverguje.

2. Rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}.$$

Srovnáme ji s konvergentní geometrickou řadou $\sum b_n = \sum (1/2)^n$. Podíl a_n/b_n v limitě jde k 0, protože

$$\frac{n^5/3^n}{1/2^n} = n^5(2/3)^n \to 0.$$

Podle bodu 2 Věty 2.16 tedy naše řada konverguje.

V následujících dvou kritériích konvergence budeme řadu s nezápornými členy porovnávat s geometrickou řadou. Připomeňme si, že $1 + q + q^2 + \cdots$ konverguje, právě když $-1 < q < 1$.

Věta 2.17 (Cauchyovo odmocninové kritérium)
Nechť má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nezáporné členy, tj. $a_n \geq 0$ pro všechny $n \in \mathbb{N}$.

1. *Předpokládejme, že existuje $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, a n_0 tak, že $n > n_0 \Rightarrow a_n^{1/n} < q$. Pak řada konverguje.*
2. *Když $\limsup a_n^{1/n} < 1$, pak řada konverguje.*
3. *Když $\lim a_n^{1/n} < 1$, pak řada konverguje.*
4. *Když $\limsup a_n^{1/n} > 1$, pak řada diverguje.*
5. *Když $\lim a_n^{1/n} > 1$, pak řada diverguje.*

Důkaz. 1. Pro $n > n_0$ tedy máme nerovnost $a_n < q^n$. Srovnání s konvergentní geometrickou řadou $1 + q + q^2 + \cdots$ dává (bod 1 Tvrzení 2.16) konvergenci řady $\sum a_n$.

2. Nechť $\limsup a_n^{1/n} = q$. Vezmeme si nějaké $r \in \mathbb{R}$, $q < r < 1$. Podle definice limsupu předpoklad znamená, že existuje n_0 tak, že

$$n > n_0 \Rightarrow a_n^{1/n} < r.$$

Podle bodu 1 je $\sum a_n$ konvergentní.

3. Zřejmé, plyne z bodu 2, protože $\lim = \limsup$.

4. Nechť $\limsup a_n^{1/n} > 1$. Pro nekonečně mnoho n tedy platí, že $a_n^{1/n} > 1$, čili $a_n > 1$. Není splněna nutná podmínka konvergence řady (že $\lim a_n = 0$) a proto $\sum a_n$ diverguje.

5. Opět díky $\lim = \limsup$ plyne z bodu 4. □

Věta 2.18 (d'Alambertovo podílové kritérium)
Nechť má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *kladné členy, tj.* $a_n > 0$ *pro všechny* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Předpokládejme, že existuje* $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, *a* n_0 *tak, že* $n > n_0 \Rightarrow a_{n+1}/a_n < q$. *Pak řada konverguje.*
2. *Když* $\limsup a_{n+1}/a_n < 1$, *pak řada konverguje.*
3. *Když* $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, *pak řada konverguje.*
4. *Když* $\lim a_{n+1}/a_n > 1$, *pak řada diverguje.*

Důkaz. 1. Máme nerovnosti

$$a_{n_0+1} \leq a_{n_0+1},\ a_{n_0+2} < qa_{n_0+1},\ a_{n_0+3} < qa_{n_0+2} < q^2 a_{n_0+1}, \ldots$$

a obecně $n > n_0 \Rightarrow a_n \leq q^{n-n_0-1} a_{n_0+1}$. Srovnání s konvergentní geometrickou řadou opět podle bodu 1 Tvrzení 2.16 dává konvergenci řady $\sum a_n$.

2. Předpoklad $\limsup a_{n+1}/a_n = q < 1$ zase znamená, že pro (jakékoli) $r \in \mathbb{R}$, $q < r < 1$, existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_{n+1}/a_n < r$. Podle bodu 1 je $\sum a_n$ konvergentní.

3. Plyne hned z bodu 2, protože $\lim = \limsup$.

4. Předpoklad $\lim a_{n+1}/a_n > 1$ znamená, že existuje n_0 tak, že $n > n_0 \Rightarrow a_{n+1}/a_n > 1$. Takže

$$a_{n_0+1} > a_{n_0},\ a_{n_0+2} > a_{n_0+1} > a_{n_0}, \ldots$$

a obecně $n > n_0 \Rightarrow a_n > a_{n_0} > 0$. To popírá nutnou podmínku konvergence řady (že $\lim a_n = 0$) a proto $\sum a_n$ diverguje. $\square$

Poznámka. 1. Na rozdíl od odmocninového kritéria v podílovém kritériu neplatí, že z $\limsup a_{n+1}/a_n > 1$ plyne divergence řady. Například řada

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{32} + \frac{3}{64} + \frac{1}{128} + \cdots$$

konverguje, i když $\limsup a_{n+1}/a_n = 3/2 > 1$.

2. Pokud $\lim a_n^{1/n} = 1$ nebo $\limsup a_n^{1/n} = 1$, odmocninové kritérium o konvergenci řady neříká nic. Totéž v podílovém kritériu. Například pro obě řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \text{ a } \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

jsou limity $\lim a_n^{1/n}$ i $\lim a_{n+1}/a_n$ rovny 1 (víme, že $\lim n^{1/n} = 1$), ale první řada diverguje a druhá konverguje.

Dvěma způsoby nyní konečně dokážeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \ s > 1.$$

První důkaz je pomocí integrálů. Částečný součet $s_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n^s$ lze pro $N \geq 2$ odhadnout jako

$$s_n < 1 + P,$$

kde P je plocha rovinného útvaru omezeného osou x, grafem funkce $y = 1/x^s$ a kolmicemi na osu x v bodech $x = 2$ a $x = N$. Zanedlouho se naučíme počítat plochy takových útvarů. Předpokládejme, že to už umíme: díky $s > 1$ máme

$$P = \int_2^N \frac{dx}{x^s} = \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_2^N = \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{N^{s-1}}\right) < \frac{1}{(s-1)2^{s-1}}.$$

Tedy

$$s_n < 1 + \frac{1}{(s-1)2^{s-1}}.$$

Posloupnost (s_n) je shora omezená a řada konverguje. Odvodili jsme dokonce horní odhad na její součet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \frac{1}{(s-1)2^{s-1}}.$$

Druhý důkaz používá následující kritérium.

Věta 2.19 (Cauchyovo kritérium)
Nechť posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ splňuje nerovnosti $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{konverguje} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \ \textit{konverguje.}$$

Důkaz. Pro částečné součty původní a odvozené řady

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \ \text{ a } \ T_K = \sum_{k=0}^{k} 2^k a_{2^k}$$

dokážeme indukcí podle K odhad

$$S_{2^{K+1}-1} \le T_K \le 2S_{2^K}.$$

Pro $K = 0$ platí, $S_1 = a_1 \le T_0 = a_1 \le 2S_1 = 2a_1$. Předpokládáme, že odhad platí pro nějaké $K \in \mathbb{N}_0$ a odvodíme jeho platnost pro $K+1$. Označíme si

$$r = 2^K, \ s = 2^{K+1} \ \text{ a } \ t = 2^{K+2}.$$

Z $S_{s-1} \le T_K \le 2S_r$ tedy chceme odvodit $S_{t-1} \le T_{K+1} \le 2S_s$. Máme

$$2S_s = 2S_r + 2\sum_{n=r+1}^{s} a_n \ge 2S_r + 2\sum_{n=r+1}^{s} a_s = 2S_r + 2(s-r)a_s.$$

Protože $2(s-r) = 2r = s = 2^{K+1}$, dostáváme nerovnost

$$2S_s \ge 2S_r + sa_s.$$

Podobně

$$S_{t-1} = S_{s-1} + \sum_{n=s}^{t-1} a_n \le S_{s-1} + \sum_{n=s}^{t-1} a_s = S_{s-1} + (t-s)a_s.$$

Protože $(t-s) = s = 2^{K+1}$, dostáváme nerovnost

$$S_{t-1} \le S_{s-1} + sa_s.$$

V rovnici $T_{K+1} = T_K + 2^{K+1}a_{2^{K+1}} = T_K + sa_s$ sčítanec T_K odhadneme zdola a shora pomocí indukčního předpokladu a s použitím odvozených nerovností pro $2S_s$ a S_{t-1} dostaneme

$$S_{t-1} \le S_{s-1} + sa_s \le T_{K+1} = T_K + sa_s \le 2S_r + sa_s \le 2S_s.$$

Takže $S_{t-1} \le T_{K+1} \le 2S_s$.

Pokud původní řada konverguje, má shora omezené částečné součty, $S_n < c$. Protože $T_n \le 2S_{2^n}$, odvozená řada má taky shora omezené částečné součty, $T_n < 2c$, a konverguje rovněž. Naopak, konverguje-li odvozená řada, máme $T_n < c$. Protože $S_{2^{n+1}-1} \le T_n$ a $S_n \le S_{2^{n+1}-1}$ ($n \le 2^{n+1} - 1$ a posloupnost (S_n) je neklesající), máme i $S_n < c$ a původní řada konverguje. $\square$

Příklad. Cauchyovo kritérium aplikujeme na řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \ s > 1.$$

Dostáváme pro ni odvozenou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{s-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{s-1})^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k,$$

což je geometrická řada s kvocientem $1/2^{s-1}$. Protože $s > 1$, máme $0 < 1/2^{s-1} < 1$ a odvozená řada konverguje. Podle Věty 2.19 tedy konverguje i původní řada.

Kritéria neabsolutní konvergence a přerovnávání řad

Připomeňme si, že řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, když konverguje řada $\sum |a_n|$ absolutních hodnot jejích členů, a že z absolutní konvergence plyne konvergence (Tvrzení 2.13), ale obecně to naopak neplatí (viz třeba řadu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$). Už jsme také uvedli jedno kritérium konvergence řad s kladnými i zápornými členy, Leibnizovo kritérium (Věta 2.14), podle něhož

$$\Big(a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0 \ \& \ \lim a_n = 0\Big) \ \Rightarrow \ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \text{ konverguje.}$$

Sčítanec této řady $(-1)^{n+1}a_n$ lze psát jako a_nb_n, kde (b_n) je posloupnost $(1, -1, 1 - 1, 1, -1, \ldots)$. Řada $\sum b_n$ diverguje, ale posloupnost jejích částečných součtů $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ je omezená. Následující věta zobecňuje Leibnizovo kritérium tím, že jako (b_n) povoluje jakoukoli posloupnost s omezenými částečnými součty.

Věta 2.20 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)
Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou dvě posloupnosti, přičemž $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$.

1. *(Abelovo kritérium) Když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ konverguje.*

2. *(Dirichletovo kritérium) Když $\lim a_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ konverguje.*

Poznámka. Leibnizovo kritérium je tedy zvláštním případem Dirichletova kritéria. Abelovo kritérium a Dirichletovo kritérium jsou neporovnatelná, žádné není silnější, než druhé.

Pro důkaz věty budeme potřebovat jednu transformaci součtů typu $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.

Lemma 2.21 (Abelova parciální sumace)
Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *jsou reálná čísla a* $s_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ *pro* $k = 1, 2, \ldots, n$. *Pak*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1 - a_2)s_1 + (a_2 - a_3)s_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)s_{n-1} + a_n s_n.$$

Pokud navíc $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$, *pak*

$$a_1 \cdot \min(\{s_i :\ 1 \leq i \leq n\}) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq a_1 \cdot \max(\{s_i :\ 1 \leq i \leq n\}).$$

Důkaz. Podle definice s_k máme $b_1 = s_1$ a $b_k = s_k - s_{k-1}$ pro $2 \leq k \leq n$. Roznásobením a přerovnáním dostaneme, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= a_1 s_1 + a_2(s_2 - s_1) + a_3(s_3 - s_2) + \cdots + a_n(s_n - s_{n-1}) \\ &= (a_1 - a_2)s_1 + (a_2 - a_3)s_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)s_{n-1} + a_n s_n. \end{aligned}$$

Nejmenší součet s_i označíme jako s a největší jako S. Protože všechna čísla a_i i rozdíly $a_i - a_{i+1}$ jsou nezáporné, je součet

$$(a_1 - a_2)s_1 + (a_2 - a_3)s_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)s_{n-1} + a_n s_n$$

(pravá strana identity v Abelově parciální sumaci) nejvýše roven

$$(a_1 - a_2)S + (a_2 - a_3)S + \cdots + (a_{n-1} - a_n)S + a_n S,$$

což je přesně $(a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{n-1} - a_n + a_n)S = a_1 S$. Stejně se dokáže dolní odhad $a_1 s$. □

Poznámka. Pokud $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je posloupnost s $\lim a_n = 0$, pak patrně

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1,$$

protože $s_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1} \to a_1$ pro $n \to \infty$. Těmto řadám se říká *skládací řady* (telescoping series); členy v částečných součtech se zruší a s_n se složí na mnohem jednodušší tvar jako skládací námořní dalekohled. Takovou řadou je například

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots,$$

protože

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Má součet $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \cdots = 1/2$.

Důkaz. Dokážeme Abelovo a Dirichletovo kritérium. Ukážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje Cauchyovu podmínku pro řady. Pro $m \geq n$ označíme

$$\begin{aligned} t(n,m) &= \min(\{b_n + b_{n+1} + \cdots + b_i :\ n \leq i \leq m\}) \\ T(n,m) &= \max(\{b_n + b_{n+1} + \cdots + b_i :\ n \leq i \leq m\}). \end{aligned}$$

Podle Lemmatu 2.21 máme

$$a_n \cdot t(n,m) \leq \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \leq a_n \cdot T(n,m)$$

a tedy

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| \leq a_n \cdot \max(|t(n,m)|, |T(n,m)|).$$

Jsou-li splněny předpoklady Abelova kritéria, pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $i \geq n > n_0 \Rightarrow |b_n + b_{n+1} + \cdots + b_i| < \varepsilon$, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a splňuje tedy Cauchyovu podmínku. Pro $n > n_0$ tedy máme $|t(n,m)| < \varepsilon, |T(n,m)| < \varepsilon$ a, díky $0 \leq a_n \leq a_1$,

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| < a_n \varepsilon \leq a_1 \varepsilon.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje Cauchyovu podmínku a konverguje.

Jsou-li splněny předpoklady Dirichletova kritéria, pak existuje konstanta $c > 0$, že $|b_1 + b_2 + \cdots + b_n| < c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

má omezené částečné součty. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti dostaneme, že $|t(n,m)| < 2c, |T(n,m)| < 2c$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n > n_0 \Rightarrow 0 \le a_n < \varepsilon$, protože $\lim a_n = 0$. Tedy, pro $n > n_0$,

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| < 2ca_n < 2c\varepsilon.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ opět splňuje Cauchyovu podmínku a konverguje. □

Příklady. 1. Rozhodněte o konvergenci řady

$$1 - \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} - \frac{5}{8} + \frac{4}{9} + \frac{1}{10} - \frac{5}{11} + \cdots.$$

Zde máme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ s

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ a } (b_n) = (1, -5, 4, 1, -5, 4, 1, -5, 4, 1, -5, 4, \ldots).$$

Konverguje podle Dirichletova kritéria protože $(a_n) = (1/n)$ je nerostoucí posloupnost konvergující k nule a částečné součty posloupnosti (b_n) jsou $(1, -4, 0, 1, -4, 0, 1, -4, 0, \ldots)$.

2. Obecněji, pokud $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge 0$, $\lim a_n = 0$ a (b_n) je periodická posloupnost (popř. periodická od jistého indexu dále), v níž je součet členů periody roven nule, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje podle Dirichletova kritéria.

3. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$$

rovněž konverguje podle Dirichletova kritéria. Máme

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ a } (b_n) = (\sin(1), \sin(2), \sin(3), \ldots)$$

a pomocí explicitního vzorečku pro $\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$ [2] se snadno vidí, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ má omezené částečné součty.

[2]Protože $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$, $\sin(1) + \sin(2) + \cdots + \sin(n)$ je imaginární část součtu $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q^{n+1/2} - q^{-1/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$, kde $q = e^i$. Protože $q^{1/2} - q^{-1/2} = 2i\sin(1/2)$, dostáváme $\sin(1) + \sin(2) + \cdots + \sin(n) = \frac{\cos(1/2) - \cos(n+1/2)}{2\sin(1/2)}$.

Přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$, kde $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce (tj. p je permutace množiny přirozenych čísel).

Příklady. Přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ je třeba řada

$$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + a_8 + a_7 + \cdots,$$

kde p prohazuje čísla $2n$ a $2n-1$ pro $n \in \mathbb{N}$, nebo řada

$$a_1 + a_3 + a_2 + a_6 + a_5 + a_4 + a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 + a_{15} + a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{11} + \cdots,$$

kde p otáčí pořadí čísel v intervalech $\{\binom{n}{2}+1, \binom{n}{2}+2, \ldots, \binom{n}{2}+n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.22 (přerovnání neměnní součet abs. konvergentní řady) *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, je každé její přerovnání také absolutně konvergentní a má stejný součet*

Důkaz. Nechť $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce, která přerovnává absolutně konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$. Všimněme si, že

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = +\infty.$$

Vskutku, pro dané $m \in \mathbb{N}$ vezmeme $N = \max(p^{-1}(1), p^{-1}(2), \ldots, p^{-1}(m))$ a pak $n > N \Rightarrow p(n) > m$. Pro dané $\varepsilon > 0$ máme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $m \geq n > n_0 \Rightarrow |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon$, protože naše řada je absolutně konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ tak splňuje Cauchyovu podmínku. Pro toto n_0 tedy, jak víme, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že $n > n_1 \Rightarrow p(n) > n_0$. Pro každé $m \geq n > n_1$ pak, označíme-li $R = \max(p(n), p(n+1), \ldots, p(m))$, máme i

$$|a_{p(n)}| + |a_{p(n+1)}| + \cdots + |a_{p(m)}| \leq \sum_{i=n_0+1}^{R} |a_i| < \varepsilon.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p(n)}|$ splňuje Cauchyovu podmínku a přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ proto absolutně konverguje.

Nyní dokážeme, že má stejný součet. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$. Pro dané $\varepsilon > 0$ tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow |L - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)| < \varepsilon$ a také existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že $m \geq n > n_1 \Rightarrow |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon$ (Cauchyova podmínka pro řadu absolutních hodnot). Položíme $R = \max(n_0, n_1) + 1$ a

$N = \max(p^{-1}(1), p^{-1}(2), \dots, p^{-1}(R))$. Pro $n > N$ částečný součet přerovnané řady můžeme rozložit jako

$$\sum_{i=1}^{n} a_{p(i)} = \sum_{i=1}^{R} a_i + \sum_{j \in S} a_j,$$

kde $S = \{p(1), p(2), \dots, p(n)\} \setminus \{1, 2, \dots, R\}$. Všechny prvky S jsou větší než R a tedy větší než n_1. Pro $n > N$ proto podle Δ-ové nerovnosti máme

$$\begin{aligned} \left| L - \sum_{i=1}^{n} a_{p(i)} \right| &\le \left| L - \sum_{i=1}^{R} a_i \right| + \left| \sum_{j \in S} a_j \right| \\ &\le \left| L - \sum_{i=1}^{R} a_i \right| + \sum_{j \in S} |a_j| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon, \end{aligned}$$

protože $R > n_0$ a

$$\sum_{j \in S} |a_j| \le \sum_{i=n_1+1}^{\max(S)} |a_i| < \varepsilon.$$

Tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = L$. □

Součty absolutně konvergentních řad se proto chovají jako konečné součty v tom smyslu, že nezávisí na pořadí sčítanců, jsou komutativní.

Na druhou stranu nyní dokážeme, že součet neabsolutně konvergentní řady lze přerovnáním libovolně změnit. Součty takových řad proto velmi závisejí na pořadí sčítanců a jsou nekomutativní.

Věta 2.23 (Riemannova, o přerovnání neabsolutně konv. řady) *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale ne absolutně, to jest $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. Pak pro každé rozšířené reálné číslo $\gamma \in \mathbb{R}^*$ existuje její přerovnání, které má součet γ.*

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. Jako (b_n), resp. (c_n), si označíme podposloupnost nezáporných, resp. záporných, členů posloupnosti (a_n). Obě podposloupnosti tvoří rozklad posloupnosti (a_n), každé a_n leží v právě jedné z nich. Částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozložíme jako

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{1 \le i \le n,\ a_i \ge 0} a_i + \sum_{1 \le i \le n,\ a_i < 0} a_i = B_n + C_n.$$

B_n, resp. C_n, je jistý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Vidíme, že

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = B_n - C_n.$$

Odtud $B_n = (s_n + t_n)/2$ a $C_n = (s_n - t_n)/2$. Protože $\lim s_n$ je vlastní a $\lim t_n = +\infty$, máme $\lim B_n = +\infty$ a $\lim C_n = -\infty$, čili

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \ \text{ a } \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = -\infty.$$

Všimněme si také, že

$$\lim b_n = \lim c_n = \lim a_n = 0,$$

protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a (b_n) a (c_n) jsou vybrané z (a_n).

Nechť nám nepřítel dal číslo $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Nalezneme permutaci $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = \gamma$. Předpokládejme nejprve, že γ je reálné číslo, případ $\gamma = \pm\infty$ je trochu odlišný (a jednodušší). Přerovnání řady sestrojíme následujícím postupem.

> Nejprve bereme postupně $b_1, b_2, \ldots$ tak dlouho, až částečný součet (vytvářeného přerovnání) překročí γ. Pak přidáváme postupně $c_1, c_2, \ldots$, až částečný součet poklesne pod γ. Pak přidáváme $b_{j_1+1}, b_{j_1+2}, \ldots$ (b_{j_1} je poslední zatím spotřebovaný člen posloupnosti (b_n)) zase tak dlouho, až částečný součet překročí γ. Pak začneme prvním zatím nespotřebovaným členem posloupnosti (c_n) a přidáváme $c_{k_1+1}, c_{k_1+2}, \ldots$ tak dlouho, až částečný součet poklesne pod γ, a tak dále. Tímto jednoznačně určeným postupem střídáme postupné přidávání prvků z posloupností (b_n) a (c_n) nekonečně dlouho.

Ověříme, že vznikne přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ se součtem rovným γ.

Protože $\sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$, máme $\sum_{n>k} b_n = +\infty$ i pro každé $k \in \mathbb{N}$, a podobně $\sum_{n>k} c_n = -\infty$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $s \in \mathbb{R}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ tedy existuje $r \in \mathbb{N}$, $r > k$, že

$$s + b_{k+1} + b_{k+2} + \cdots + b_r > \gamma,$$

a existuje $t \in \mathbb{N}$, $t > k$, že

$$s + c_{k+1} + c_{k+2} + \cdots + c_t < \gamma.$$

V popsaném postupu se tedy nekonečněkrát střídají konečné (a neprázdné) úseky přidávaných členů posloupností (b_n) a (c_n). Ke každému b_n a ke každému c_n se tak v průběhu postupu někdy dostaneme a vzniklá posloupnost $Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots)$ rovná

$$(b_1, \ldots, b_{j_1}, c_1, \ldots, c_{k_1}, b_{j_1+1}, b_{j_1+2}, \ldots, b_{j_2}, c_{k_1+1}, c_{k_1+2}, \ldots, c_{k_2}, b_{j_2+1}, \ldots, \ldots, \ldots),$$

kde $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots$ a $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots$, je permutací posloupnosti $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$—každé a_n se v Q vyskytuje právě jednou. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

je tak přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Podle konstrukce posloupnosti Q pro každé $r \in \mathbb{N}$ máme nerovnosti (klademe $k_0 = 0$)

$$j_r + k_{r-1} \leq n \leq j_r + k_r - 1 \;\;\Rightarrow\;\; \gamma \leq \sum_{i=1}^{n} q_i \leq \gamma + b_{j_r}$$

$$j_r + k_r \leq n \leq j_{r+1} + k_r - 1 \;\;\Rightarrow\;\; \gamma - c_{k_r} \leq \sum_{i=1}^{n} q_i \leq \gamma.$$

Každé $n \geq j_1$ splňuje právě jednu z těchto možností. Protože $\lim_{r\to\infty} b_{j_r} = \lim_{r\to\infty} c_{k_r} = 0$, máme (podle Tvrzení 2.7), že $\lim(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) = \gamma$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \gamma.$$

Podívejme se nyní na případ $\gamma = +\infty$, případ $\gamma = -\infty$ je podobný. Uvažme posloupnost $Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots)$ rovnou

$$(b_1, b_2, \ldots, b_{j_1}, c_1, b_{j_1+1}, b_{j_1+2}, \ldots, b_{j_2}, c_2, b_{j_2+1}, b_{j_2+2}, \ldots, b_{j_3}, c_3, b_{j_3+1}, \ldots),$$

kde $1 \le j_1 < j_2 < \dots$ je libovolná posloupnost indexů, pro níž se pro každé $r \in \mathbb{N}$ splňuje, že

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_r + \sum_{i=1}^{j_r} b_i \ge r.$$

(Díky $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ lze takovou posloupnost indexů vzít.) Pro každé $r \in \mathbb{N}$ (klademe $j_0 = 0$) pak máme nerovnost

$$j_{r-1} + r - 1 \le n \le j_r + r - 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} q_i \ge r - 1.$$

Pro každé $n \ge 1$ nastává právě jedna z těchto možností, tudíž $n \ge j_r + r \Rightarrow q_1 + q_2 + \cdots + q_n \ge r$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty.$$

Je též jasné, že tato řada je přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

3 Limity a spojitost reálných funkcí jedné reálné proměnné

Od reálných posloupností, což jsou funkce typu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, nyní přejdeme k obecným reálným funkcím s jednou proměnnou $f : M \to \mathbb{R}$, definovaným na obecné množině reálných čísel $M \subset \mathbb{R}$. Typicky je M omezený nebo neomezený interval nebo i $M = \mathbb{R}$.

Řekneme, že f je *rostoucí* (resp. *klesající*) funkce (na množině M), pokud $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$). Je *neklesající* (resp. *nerostoucí*), pokud $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ (resp. $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$). Je *shora omezená*, když existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M : f(x) < c$. Podobně se definuje omezenost zdola a f je *omezená*, je-li omezená shora i zdola, tj. existuje $c > 0$, že $\forall x \in M : |f(x)| < c$. Řekneme, že f je *sudá* (resp. *lichá*) funkce, když pro každé $x \in M$ je i $-x \in M$ a $f(x) = f(-x)$ (resp. $f(x) = -f(-x)$). Konečně řekneme, že f je *periodická* funkce s periodou $p \in \mathbb{R}, p > 0$, když pro každé $x \in M$ je i $x \pm p \in M$ a $f(x) = f(x \pm p)$.

Limita funkce v bodě, spojitost v bodě

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, přesněji δ-okolí bodu a, kde $\delta \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$, je interval $U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$. Je to tedy přesně množina

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\}.$$

Okolí nekonečen definujeme jako $U(+\infty,\delta) = (1/\delta,+\infty)$ a $U(-\infty,\delta) = (-\infty,-1/\delta)$. *Pravé okolí,* resp. *levé okolí*, bodu $a \in \mathbb{R}$ je interval $U^+(a,\delta) = [a, a+\delta)$, resp. $U^-(a,\delta) = (a-\delta, a]$. *Prstencová okolí* bodu $a \in \mathbb{R}$ jsou obyčejná okolí s vyjmutým bodem a: $P(a,\delta) = U(a,\delta)\backslash\{a\}$, $P^+(a,\delta) = U^+(a,\delta)\backslash\{a\}$ a $P^-(a,\delta) = U^-(a,\delta)\backslash\{a\}$. Prstencová okolí nekonečen jsou stejná jako jejich obyčejná okolí.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$ pro každé $\delta > 0$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f *má v bodě a limitu* $A \in \mathbb{R}^*$, když

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; x \in P(a,\delta) \cap M \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon).$$

Značení:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Poznámka. 1. Limita funkce f v bodě a nezávisí na její hodnotě v a, f ani nemusí být v a definovaná. Pokud by, v rozporu s předpokladem, existovalo prstencové okolí bodu a neprotínající definiční obor funkce f, pak by každé číslo bylo její limitou v a, což by nebylo moc praktické. Většinou bude ale splněn ještě silnější předpoklad, že $P(a,\delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$.

2. Stojí za zmínku, že limita posloupnosti je speciální případ této definice: $M = \mathbb{N}$ a $a = +\infty$.

Příklady. 1. Přepišme pro případ, že a i A jsou reálná čísla a $P(a,\delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$, ekvivalentně definici limity funkce:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon.$$

2. Pokud $M = \mathbb{R}$, $a = -\infty$ a $A = +\infty$, definice limity funkce se dá rozepsat jako

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall K \, \exists L : \; x < L \Rightarrow f(x) > K.$$

3. Pokud $f(x) = x$ (a $M = \mathbb{R}$) a $a \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x\to a} f(x) = a$. Pokud změníme hodnotu funkce v nule a definujeme ji jako

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

pak stále $\lim_{x\to a} f(x) = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$, i pro $a = 0$.

4. Funkce *signum* (znaménko), která je definovaná předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

má limitu $\lim_{x\to a} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(a)$ pro $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, a $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje.

5. Nechť $M = \mathbb{Q}$, $a = \sqrt{2}$ a hodnota funkce $f(x)$ je pro zlomek p/q v základním tvaru definovaná jako $f(p/q) = 1/q$. Pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Platí to vlastně pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Jednostranné limity. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f:\ M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $P^+(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$ pro každé $\delta > 0$. Funkce $f(x)$ má v bodě *a limitu zprava* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A,$$

pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in P^+(a,\delta) \cap M \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon).$$

Podobně se definuje *limita zleva*, $P^+(a,\delta)$ se nahradí levým prstencovým okolím $P^-(a,\delta)$.

Poznámka. Pokud pro $a \in \mathbb{R}$ máme $\lim_{x\to a} f(x) = A$, pak existuje alespoň jedna z jednostranných limit $f(x)$ v a a rovná se A. Naopak, z $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = A$ plyne, že i $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f:\ M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ je v bodě *a spojitá*, když $U(a,\delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$ a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Funkce $f(x)$ je v bodě *a spojitá zprava*, když $U^+(a,\delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$ a $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Podobně se definuje spojitost zleva.

Základní věty o limitách funkcí

Věta 3.1 (jednoznačnost limity funkce)
Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz. $A, B \in \mathbb{R}^*$ buďte dvě různé limity funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Protože $A \neq B$, lze zvolit tak malé $\varepsilon > 0$, že $U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$. Mají existovat $\delta_1, \delta_2 > 0$, že $x \in P(a, \delta_1) \cap M \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$ a $x \in P(a, \delta_2) \cap M \Rightarrow f(x) \in U(B, \varepsilon)$. Pro $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$ máme, že $x \in P(a, \delta) \cap M \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon)$. To je ale spor, tato dvě okolí jsou disjunktní a současně v jejich průniku má ležet nějaké $f(x)$ (které existuje, neboť předpokládáme, že každé prstencové okolí bodu a protíná M). $\square$

Věta 3.2 (Heineho definice limity funkce)
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, $P(a, \delta) \cap M \neq \emptyset$ pro každé $\delta > 0$, $f : M \to \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\lim_{x \to a} f(x) = A$;
2. *pro každou posloupnost $(x_n) \subset M$ takovou, že $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, platí, že $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.*

Důkaz. Nechť platí bod 1 a posloupnost $(x_n) \subset M$ splňuje, že $x_n \neq a$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a $x_n \to a$ pro $n \to \infty$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $f(P(a, \delta) \cap M) \subset U(A, \varepsilon)$. Existuje též $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(a, \delta)$. Pro $n > n_0$ tak máme, že $f(x_n) \in U(A, \varepsilon)$. Proto $f(x_n) \to A$ pro $n \to \infty$.

Nechť bod 1 neplatí, $\lim_{x \to a} f(x)$ neexistuje nebo se nerovná A. To jest existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in P(a, \delta) \cap M$ s vlastností $f(x) \notin U(A, \varepsilon)$. Pro každé $\delta = 1/n$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$, vezmeme takové x a označíme ho x_n. Patrně $x_n \to a$ pro $n \to \infty$, vždy $x_n \neq a$, ale $f(x_n) \notin U(A, \varepsilon)$, takže $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ není A. Bod 2 tedy také neplatí; není splněn pro posloupnost (x_n). $\square$

Jako důsledek dostáváme charakterizaci spojitosti funkce $f : M \to \mathbb{R}$:

$$f \text{ je spojitá v } a \in M \iff \forall\, (x_n) \subset M : \; x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a).$$

Příklad. Pomocí předchozí věty ukážeme, že funkce $f(x) = \sin(1/x)$, která je definovaná na množině $M = \mathbb{R} \backslash \{0\}$, nemá limitu v nule. Uvažme dvě posloupnosti (x_n) a (y_n), kde

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \;\text{ a }\; y_n = \frac{1}{(2n + 1/2)\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $\lim x_n = \lim y_n = 0$, ale $f(x_n) = \sin(1/x_n) = 0$ a $f(y_n) = \sin(1/y_n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Proto $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ neexistuje.

Poznámka. Je lehké vidět, že z existence vlastní limity funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ plyne existence prstencového okolí $P(a, \delta)$, na němž je f omezená.

Tvrzení 3.3 (aritmetika limit funkcí)
Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, funkce f a g jsou definované na nějakém prstencovém okolí bodu a, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$.

1. *$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$, je-li tento součet definován.*
2. *$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, je-li tento součin definován.*
3. *Nechť je navíc $g(x)$ nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu a. Pak $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$, je-li tento podíl definován.*

Důkaz. Pomocí Heineho definice limity (Věta 3.2) tyto výsledky snadno převedeme na výsledky o aritmetice limit posloupností (Tvrzení 2.8). Dokažme třeba bod 1. Nechť $(x_n) \subset \mathbb{R}$ je libovolná posloupnost, na níž je součtová funkce $f(x) + g(x)$ definovaná, $\lim x_n = a$, ale $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, podle Tvrzení 3.2 (implikace $1 \Rightarrow 2$) máme, že $\lim f(x_n) = A$ a $\lim g(x_n) = B$. Podle Tvrzení 2.8 pak i $\lim f(x_n) + g(x_n) = A + B$. To podle Tvrzení 3.2 (implikace $2 \Rightarrow 1$) znamená, že $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$. Body 2 a 3 se dokazují analogickým postupem. □

Tvrzení 3.4 (limity funkcí a uspořádání)
Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a funkce f, g a h jsou definované na nějakém prstencovém okolí bodu c.

1. *Mají-li funkce f a g v bodě c limitu a $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$, že $f(x) > g(x)$ pro každé $x \in P(c, \delta)$.*
2. *Existuje-li $\delta > 0$, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in P(c, \delta)$, potom i $\lim_{x\to c} f(x) \geq \lim_{x\to c} g(x)$, když obě limity existují.*
3. *Existuje-li $\delta > 0$, že $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in P(c, \delta)$ a $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, potom i $\lim_{x\to c} h(x) = A$.*

Důkaz. 1. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = A > \lim_{x\to c} g(x) = B$. Protože $A > B$, existuje takové $\varepsilon > 0$, že $U(A,\varepsilon) \cap U(B,\varepsilon) = \emptyset$. Dokonce platí, že $a > b$ pro každé $a \in U(A,\varepsilon)$ a $b \in U(B,\varepsilon)$. Pro toto ε existuje $\delta > 0$, že $f(P(c,\delta)) \subset U(A,\varepsilon)$ a $g(P(c,\delta)) \subset U(B,\varepsilon)$. Tedy $f(x) > g(x)$ pro každé $x \in P(c,\delta)$.

2. Kdyby platila opačná nerovnost, $\lim_{x\to c} f(x) < \lim_{x\to c} g(x)$, na nějakém $P(c,\delta_0)$ by podle bodu 1 platila nerovnost $f(x) < g(x)$, což je ve sporu s předpokladem.

3. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$, že $f(P(c,\delta)) \subset U(A,\varepsilon)$ a $g(P(c,\delta)) \subset U(A,\varepsilon)$. Můžeme předpokládat, že na tomto prstencovém okolí $P(c,\delta)$ platí i nerovnost $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Okolí $U(A,\varepsilon)$ je konvexní—s každými dvěma body obsahuje i celou úsečku jimi určenou. Pro každé $x \in P(c,\delta)$ leží $h(x)$ na úsečce určené body $f(x)$ a $g(x)$, které oba leží v $U(A,\varepsilon)$. Tudíž i $h(x)$ leží v $U(A,\varepsilon)$. Tedy i $h(P(c,\delta)) \subset U(A,\varepsilon)$ a $\lim_{x\to c} h(x) = A$. □

Připomeňme si, že funkce je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, když je definovaná na nějakém jeho okolí $U(a,\delta_0)$ a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, jinak řečeno

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon,$$

jinak řečeno

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ f(U(a,\delta)) \subset U(f(a),\varepsilon).$$

Podobně pro jednostrannou spojitost. Z Tvrzení 3.3 vyplývá, že součet a součin dvou funkcí spojitých v nějakém bodě $c \in \mathbb{R}$ je v c také spojitý. Totéž platí pro podíl dvou funkcí, za dodatečného předpokladu, že funkce ve jmenovateli nemá v c hodnotu nula.

Příklady. Každý polynom s reálnými koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

je funkce, která je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$. Každý takový polynom lze totiž vytvořit z konstantních funkcí $f_a(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, a z identické funkce $id(x) = x$, které jsou zřejmě spojité v každém bodě $c \in \mathbb{R}$, opakovaným násobením a sčítáním:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = x(x(\ldots(x(xa_n + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \cdots + a_2) + a_1) + a_0.$$

Povolíme-li při vytváření nových funkcí kromě sčítání a násobení i operaci dělení, a vyjdeme-li opět z konstantních funkcí a z identické funkce, dostaneme třídu *racionálních funkcí*, což jsou podíly polynomů:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

kde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ a $b_m \neq 0$. Každá racionální funkce je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$, který není kořenem jmenovatele, tj. $b_m c^m + \cdots + b_1 c + b_0 \neq 0$.

Věta 3.5 (limita složené funkce)
Nechť $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, funkce $f(x)$ je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu A, funkce $g(x)$ je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu c,

$$\lim_{x \to A} f(x) = B, \ \lim_{x \to c} g(x) = A$$

a je splněna jedna z podmínek P1 a P2:

P1. *Funkce $f(x)$ je spojitá v A.*

P2. *Na nějakém prstencovém okolí $P(c, \eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu A, tj. $g(x) \neq A$ pro každé $x \in P(c, \eta)$.*

Potom

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = B.$$

Důkaz. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{x \to A} f(x) = B$, existuje $\delta > 0$ tak, že $f(P(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$. Protože $\lim_{x \to c} g(x) = A$, pro toto δ existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $g(P(c, \delta_1)) \subset U(A, \delta)$. Jediná obtíž nyní je ta, že okolí $U(A, \delta)$ není obsaženo v okolí $P(A, \delta)$, má navíc bod A. Pokud je splněna podmínka P1, můžeme δ vzít tak, že dokonce $f(U(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$. Pak obtíž mizí a

$$f(g(P(c, \delta_1))) \subset f(U(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon).$$

Tedy $\lim_{x \to c} f(g(x)) = B$. Pokud je splněna podmínka P2, můžeme δ_1 vzít tak, že dokonce $g(P(c, \delta_1)) \subset P(A, \delta)$. Obtíž opět mizí,

$$f(g(P(c, \delta_1))) \subset f(P(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$$

a $\lim_{x \to c} f(g(x)) = B$. □

Poznámka. Není-li splněna ani podmínka P1 ani P2, věta neplatí, protože pak $\lim_{x \to c} f(g(x))$ neexistuje nebo se nerovná B. Dokažte jako cvičení.

Věta 3.6 (limita monotónní funkce)
Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je na intervalu (a, b) monotónní. Potom existují (případně nevlastní) jednostranné limity

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Důkaz. Budeme předpokládat, že f je neklesající a dokážeme existenci limity f v bodě a zprava, ostatní případy jsou analogické. Položme

$$\alpha = \inf(\{f(x) : x \in (a, b)\}).$$

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, případ $\alpha = -\infty$ je podobný. Bud dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice infima existuje $u \in (a, b)$, že $f(u) < \alpha + \varepsilon$. Protože f je neklesající,

$$x \in (a, u) \Rightarrow \alpha \leq f(x) \leq f(u) < \alpha + \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha$. □

Funkce spojité na intervalu

Vnitřní bod nějakého intervalu I je bod, který v I leží i s nějakým svým okolím. *Krajní bod* intervalu je bod, který není vnitřní. Například $(-\infty, 5)$ nemá krajní body, jen vnitřní, ale $(-\infty, 5]$ má právě jeden krajní bod a to 5.

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce na něm definovaná. Řekneme, že *f je na intervalu I spojitá*, je-li spojitá v každém vnitřním bodu I a v každém krajním bodu I je odpovídajícím způsobem jednostranně spojitá.

Příklad. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(0, 1)$ i na intervalu $(0, 1]$. Není však spojitá na intervalu $[0, 1)$ (bez ohledu na to zda a jak je definovaná v nule), protože $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Věta 3.7 (Darbouxova, o nabývání mezihodnot)
Nechť $a < b$ jsou reálná čísla, funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a, b]$ spojitá a $f(a) \leq f(b)$. Pak každé reálné číslo z intervalu $[f(a), f(b)]$ je hodnotou funkce $f(x)$, to jest pro každé $y \in \mathbb{R}$, $f(a) \leq y \leq f(b)$, existuje $\alpha \in [a, b]$, že $f(\alpha) = y$.

Důkaz. Pokud $y = f(a)$, popřípadě $y = f(b)$, máme $\alpha = a$, popřípadě $\alpha = b$. Můžeme proto předpokládat, že $f(a) < y < f(b)$. Uvažme množinu

$$A = \{z \in [a, b] : \ f(z) < y\}.$$

A je neprázdná množina (třeba $a \in A$), která je obsažená v intervalu $[a, b]$. Její supremum je proto reálné číslo z $[a, b]$. Položíme

$$\alpha = \sup(A).$$

Uvidíme, že $f(\alpha) = y$. Z jednostranné spojitosti f v a a v b a z $f(a) < y < f(b)$ plyne, že existuje takové $\delta > 0$, že $x \in [a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < y$ a $x \in (b-\delta, b] \Rightarrow f(x) > y$. Tedy $[a, a+\delta) \subset A$ a $(b-\delta, b] \cap A = \emptyset$, a tak $a < \alpha < b$.

Kdyby bylo $f(\alpha) < y$, tato nerovnost by vzhledem ke spojitosti f v α platila v nějakém okolí α a v A by byly prvky větší než α, což nelze (α je horní mez A). Podobně kdyby bylo $f(\alpha) > y$, tato nerovnost by zase platila v nějakém okolí α a pro nějaké $\delta > 0$ bychom měli, že $(\alpha-\delta, \alpha+\delta) \cap A = \emptyset$. Což je opět spor ($\alpha$ je nejmenší horní mez A). □

Důsledek. Spojitá funkce zobrazuje interval na interval. To jest, je-li $J \subset \mathbb{R}$ interval a $f : \ J \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, je množina $f(J) = \{f(x) : \ x \in J\}$ opět interval.

Důkaz. Nejprve si ujasněme, co to je interval. Podle první definice je množina $M \subset \mathbb{R}$ interval, pokud existují čísla $a, b \in \mathbb{R}^*$ tak, že

$$M = \{x \in \mathbb{R} : \ a \prec x \prec b\},$$

kde symbol $\prec$ může být buď $<$ nebo $\leq$ (a různý v obou výskytech). Máme tedy celkem 11 typů intervalů:

$$\begin{array}{rcl}
\emptyset & \ldots & \text{např. } a > b \\
\{a\} & \ldots & a = b \in \mathbb{R} \text{ a obě } \prec \text{ rovné } \leq \\
(a,b), [a,b), (a,b], [a,b] & \ldots & a < b \text{ a obě } a, b \text{ v } \mathbb{R} \\
(-\infty, b), (-\infty, b], [a, +\infty), (a, +\infty) & \ldots & a < b \text{ a právě jedno z } a, b \text{ v } \mathbb{R} \\
\mathbb{R} & \ldots & a = -\infty \text{ a } b = +\infty.
\end{array}$$

Podle druhé definice jsou intervaly právě *konvexní* podmnožiny $\mathbb{R}$, tj. množiny $M \subset \mathbb{R}$ splňující podmínku

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \ x \leq z \leq y, x \in M, y \in M \Rightarrow z \in M.$$

Dokažme, že obě definice jsou ekvivalentní. Každá množina M, která je intervalem podle první definice, je zřejmě konvexní. Naopak, nechť $M \subset \mathbb{R}$ je konvexní. Položíme $a = \inf(M)$ a $b = \sup(M)$. Tvrdíme, že

$$(a, b) \subset M \subset [a, b].$$

Pokud $x \in (a, b)$, podle definice infima a suprema existují prvky $\alpha, \beta \in M$ takové, že $\alpha < x < \beta$. Podle konvexity pak i $x \in M$. Pokud $x \in M$, podle definice infima a suprema máme $a \leq x$ a $x \leq b$, takže $x \in [a, b]$. Množina M se tedy od (a, b) liší jen eventuálním přidáním jednoho nebo obou bodů a, b a je tedy intervalem podle první definice.

Nyní dokážeme důsledek. Ukážeme, že $f(J)$ je konvexní množina. Nechť $x, y \in f(J)$, $z \in \mathbb{R}$ a $x \leq z \leq y$. Máme $x = f(\alpha)$ a $y = f(\beta)$ pro $\alpha, \beta \in J$. Můžeme předpokládat, že $\alpha \leq \beta$ (případ $\alpha > \beta$ je podobný). Protože zúžená funkce $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $f(\alpha) \leq z \leq f(\beta)$, podle Věty 3.7 máme i $z = f(\gamma)$ pro nějaké $\gamma \in [a, b]$. Takže $f(J)$ je konvexní a tedy interval. □

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$ (na množině M) svého

- *minima*, když $\forall x \in M : f(x) \geq f(a)$;
- *maxima*, když $\forall x \in M : f(x) \leq f(a)$;
- *ostrého minima*, když $\forall x \in M, x \neq a : f(x) > f(a)$;
- *ostrého maxima*, když $\forall x \in M, x \neq a : f(x) < f(a)$;
- *lokálního minima*, když $\exists \delta > 0 \; \forall x \in M \cap U(a, \delta) : f(x) \geq f(a)$;
- *lokálního maxima*, když $\exists \delta > 0 \; \forall x \in M \cap U(a, \delta) : f(x) \leq f(a)$.

Ostré lokální extrémy se definují zřejmým způsobem.

Věta 3.8 (princip maxima pro spojité funkce)
Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom f nabývá na intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima.

Důkaz. Dokážeme nabývání maxima, případ minima je velmi podobný. Položíme

$$\alpha = \sup(f([a, b])).$$

Podle definice suprema pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $y \in f([a,b])$, že $\alpha-\varepsilon < y \leq \alpha$ (pro $\alpha \in \mathbb{R}$), resp. $1/\varepsilon < y$ (pro $\alpha = +\infty$). Existuje tedy posloupnost funkčních hodnot konvergující k α: existuje $(x_n) \subset [a,b]$, že $\lim f(x_n) = \alpha$. Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty (Věta 2.4) má (x_n) konvergentní podposloupnost (x_{k_n}), $\lim x_{k_n} = \beta$. Protože $a \leq x_{k_n} \leq b$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, v limitě dostaneme (Tvrzení 2.6), že $a \leq \beta \leq b$, tedy $\beta \in [a,b]$ (v této chvíli by důkaz selhal, kdyby definiční interval funkce f nebyl toho správného typu). Podle Tvrzení 2.3, důsledku Heineho definice limity (Věta 3.2) a (případně jednostranné) spojitosti f v bodě β máme

$$\alpha = \lim f(x_{k_n}) = f(\lim x_{k_n}) = f(\beta).$$

Funkce f tedy nabývá v bodě β intervalu $[a,b]$ své maximum α. □

Důsledek. Je-li f jako ve větě, tj. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $a \leq b$ jsou reálná čísla, potom je f na intervalu $[a,b]$ omezená, protože pro každé $x \in [a,b]$ máme, že

$$f(t_1) \leq f(x) \leq f(t_2),$$

kde t_1, resp. t_2, je bod z J, v němž f nabývá na J své minimum, resp. maximum.

Poznámky. 1. Pokud $f : \to \mathbb{R}$ definovaná na intervalu J není spojitá nebo J není typu $[a,b]$, potom f nemusí na J nabývat maximum ani minimum a nemusí ani být omezená. Například funkce $f(x) = x$ je na intervalu $J = (0,1)$ spojitá, ale nenabývá na něm ani maximum ani minimum. Totéž pro funkci $f(x) = 1/x$, která na J navíc ani není omezená. Na intervalu $J = [-1,1]$ funkce

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pro } x \in [-1,0) \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ x-1 & \text{pro } x \in (0,1] \end{cases}$$

nenabývá ani maximum ani minimum, protože na J není spojitá (je nespojitá v nule). Funkce $f(x) = x$ je na $J = (-\infty,1]$ spojitá, ale není omezená (a nenabývá minimum) atd.

2. Intervaly $[a,b]$ (kde $a \leq b$ jsou reálná čísla), pro něž platí princip maxima spojité funkce, jsou omezené a *uzavřené* neboli tzv. *kompaktní* intervaly.

Připomeňme si, že pro prosté (injektivní) zobrazení $f : X \to Y$ (tj. f splňuje podmínku $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$) máme na $Z = f(X) \subset Y$ definované *inverzní zobrazení*

$$f^{-1}: \ Z \to X, \ f^{-1}(z) = x \iff f(x) = z.$$

Zobrazení f a f^{-1} jsou pak bijekce mezi množinami X a Z.

Věta 3.9 (spojitost inverzní funkce)
$J \subset \mathbb{R}$ buď interval, funkce $f: \ J \to \mathbb{R}$ buď spojitá a rostoucí (klesající). Potom inverzní funkce $f^{-1}: \ K \to J$, kde K je interval $f(J)$, je rovněž spojitá a rostoucí (klesající).

Důkaz. Větu dokážeme pomocí lemmatu.
Lemma. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval, $f: \ J \to \mathbb{R}$ je rostoucí (klesající) a $f(J)$ je interval. Pak je f spojitá na J.*
Důkaz je snadný. Nechť je f rostoucí a x_0 je vnitřní bod J, pro klesající f a krajní body je postup podobný. Dokážeme spojitost f v x_0. Můžeme vzít x_1, x_2 z J, že $x_1 < x_0 < x_2$. Pak $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ a všechny body z intervalu $[f(x_1), f(x_2)]$ jsou funkční hodnoty (protože $f(J)$ je interval). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Můžeme předpokládat, že je už tak malé, že

$$[f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon] \subset [f(x_1), f(x_2)].$$

V J tedy existují x_3, x_4, že $x_1 \le x_3 < x_0 < x_4 \le x_2$ a $f(x_3) = f(x_0) - \varepsilon$ a $f(x_4) = f(x_0) + \varepsilon$. Vezmeme $\delta > 0$ menší než $\min(x_0 - x_3, x_4 - x_0)$. Pak $x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$.

Nyní důkaz věty. Nechť je f rostoucí, případ klesající f je velmi podobný. Inverzní funkce $f^{-1}: \ K \to J$ je také rostoucí. $K = f(J)$ je interval díky důsledku Věty 3.7. Dále $f^{-1}(K) = J$ je interval. Podle lemmatu je f^{-1} na K spojitá. □

Poznámky. 1. Shrňme operace s funkcemi, které zachovávají spojitost. (i) Pokud f a g jsou spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak i funkce $f + g$ a fg jsou spojité v a a také f/g je spojitá v a, když $g(a) \neq 0$. (ii) Je-li g spojitá v a a f je spojitá v $g(a)$, je složená funkce $f(g)$ spojitá v a. (iii) Je-li $f: \ J \to \mathbb{R}$ rostoucí (klesající) a spojitá na intervalu J, je inverzní funkce $f^{-1}: \ f(J) \to \mathbb{R}$ spojitá na intervalu $f(J)$.

2. Pro funkci $f: \ J \to \mathbb{R}$ spojitou na intervalu J je její prostota ekvivalentní s tím, že f je rostoucí nebo klesající. Dokažme to. Je-li f rostoucí nebo klesající, je zjevně prostá. Nechť f není na J ani rostoucí ani klesající. Odvodíme, že f není prostá. Podívejme se na všechny trojice bodů $x_1 < x_2 < x_3$

z J a na odpovídající trojice funkčních hodnot $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$. Kdyby vždy platilo, že $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, f by byla rostoucí (každou dvojici různých bodů z J mohu patrně doplnit na trojici různých bodů z J). Kdyby vždy platilo, že $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$, f by byla klesající. Musí tedy existovat taková trojice bodů $x_1 < x_2 < x_3$ z J, že $f(x_1) \leq f(x_2) \geq f(x_3)$ nebo $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$. Můžeme předpokládat, že tyto nerovnosti jsou ostré (nastává-li někde rovnost, f není prostá, jak chceme ukázat). Nechť nastává první případ $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, druhý je podobný. Nechť $y \in \mathbb{R}$ je libovolný bod splňující $\max(f(x_1), f(x_3)) < y < f(x_2)$. Podle Věty 3.7 existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$ a $f(\alpha) = f(\beta) = y$. Takže f není prostá.

Exponenciála a logaritmus

Věta 3.10 (zavedení exponenciály)
Existuje právě jedna funce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, která má dvě následující vlastnosti:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}: \ \exp(x) \geq 1 + x$.

Tuto funkci nazýváme exponenciální funkcí.

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci takové funkce a pak její jednoznačnost.

Existence. Funkci $f(x)$ s vlastnostmi 1 a 2 definujeme pomocí limity:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Dokážeme, že (i) pro každé $x \in \mathbb{R}$ tato limita existuje a je vlastní, (ii) funkce f má vlastnost 1, tj. $f(x + y) = f(x)f(y)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, a (iii) funkce f má vlastnost 2, tj. $f(x) \geq 1 + x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nejprve ale dokážeme indukcí podle n *Bernoulliovu nerovnost,* která se nám bude několikrát hodit:

$$n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}\ , x \geq -1 \Rightarrow (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Pro $n = 0, 1$ zjevně platí. Platí-li pro n, vynásobíme obě její strany nezáporným číslem $1 + x$ a dostaneme, že

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

což je Bernoulliova nerovnost pro $n+1$.

(i). Dokážeme, že posloupnost $((1+x/n)^n)_{n\geq 1}$ je, pro libovolné pevné $x\in\mathbb{R}$, omezená a pro $n>n_0$ neklesající. Odhadneme podíl $(n+1)$-tého a n-tého členu a ukážeme, že pro velké n je ≥ 1. Pro $n>n_0$ a s použitím Bernoulliovy nerovnosti dostáváme, že

$$\begin{aligned}
\frac{(1+x/(n+1))^{n+1}}{(1+x/n)^n} &= (1+x/(n+1))\left(\frac{1+x/(n+1)}{1+x/n}\right)^n \\
&= \frac{n+1+x}{n+1}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n \\
&\geq \frac{n+1+x}{n+1}\left(1-\frac{nx}{(n+1)(n+x)}\right) \\
&= \frac{(n+(1+x))(n^2+n+x)}{(n+1)^2(n+x)} \\
&= \frac{n^3+n^2(x+2)+n(2x+1)+x(x+1)}{n^3+n^2(x+2)+n(2x+1)+x} \\
&\geq 1,
\end{aligned}$$

protože čitatel je o $x^2\geq 0$ větší než jmenovatel. Podmínka $n>n_0$, kde n_0 závisí na x, nám zajistí, že čitatel a jmenovatel posledního zlomku jsou kladná čísla, $1+x/n\neq 0$ a že lze použít Bernoulliovu nerovnost, tj. $x/(n+1)(n+x)\leq 1$. Tedy, pro pevné $x\in\mathbb{R}$ a nějaké n_0 závisející na x,

$$n>n_0 \Rightarrow \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n>0.$$

Pro $x\neq 0$ zde můžeme napsat ostrou nerovnost, tj. pro $x\neq 0$ je $((1+x/n)^n)$ pro $n>n_0$ dokonce rostoucí.

Nyní dokážeme omezenost této posloupnosti. Dokážeme omezenost shora, omezenost zdola je zřejmá ($1+x/n>0$ pro $n>n_0$). Uvážíme podobnou posloupnost

$$(b_n)_{n\geq 2}=\left(\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^n\right)_{n\geq 2}$$

a stejnou metodou ukážeme, že je klesající. Pro $n\geq 2$ máme, s pomocí Bernoulliovy nerovnosti,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+1/(n-1))^n}{(1+1/n)^{n+1}}=\frac{1}{1+1/n}\left(\frac{1+1/(n-1)}{1+1/n}\right)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \\
&\geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \\
&= \frac{n(n^2+n-1)}{(n+1)(n^2-1)} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} \\
&> 1.
\end{aligned}
$$

Pro $n \geq 2$ tak máme $b_n > b_{n+1}$. Pro dané $x \in \mathbb{R}$ nyní vezmeme $k \in \mathbb{N}$ tak, že $k > |x|$. Pro $n \geq 2$ pak platí

$$
0 < \left(1+\frac{x}{kn}\right)^{kn} = \left(\left(1+\frac{x/k}{n}\right)^n\right)^k < \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^k < \left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\right)^k,
$$

a, protože $b_2 > b_3 > b_4 > \ldots$,

$$
0 < \left(1+\frac{x}{kn}\right)^{kn} < b_n^k \leq b_2^k = 4^k.
$$

Posloupnost $((1+x/n)^n)_{n\geq 1}$ je tedy shora omezená (ukázali jsme právě, že její podposloupnost s indexy n dělitelnými k je omezená, což dává omezenost shora pro celou posloupnost, protože ta je neklesající). Podle Věty 2.2 existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

(ii). Buďte dány $x, y \in \mathbb{R}$. Máme

$$
\begin{aligned}
f(x)f(y) &= \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n \cdot \lim_{n\to\infty}(1+y/n)^n \\
&= \lim(1+x/n)^n(1+y/n)^n \\
&= \lim\left(1+(x+y)/n+xy/n^2\right)^n \\
&= \lim(1+(x+y)/n)^n \cdot \lim\left(1+\frac{xy/n^2}{1+(x+y)/n}\right)^n \\
&= f(x+y)\cdot 1 \\
&= f(x+y),
\end{aligned}
$$

kde ovšem musíme ještě ukázat, že poslední limita je rovna jedné. Vyplývá to z následujícího lemmatu.

Lemma. *Nechť $(c_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená posloupnost. Pak*

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c_n}{n^2}\right)^n = 1.
$$

Důkazík. Uvedeme dva důkazy. Nechť $c > 0$ je konstanta omezující posloupnost, tj. $|c_n| < c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle binomické věty,

$$1 \leq \left(1 + \frac{c_n}{n^2}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{c_n}{n^2}\right)^k \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{n^k},$$

kde jsme použili jednoduchý odhad $\binom{n}{k} \leq n^k$. Pro $n > mc$, kde $m \in \mathbb{N}$, odhadneme poslední řadu pomocí geometrické řady s kvocientem $1/m$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{n^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \frac{1/m}{1 - 1/m} = \frac{1}{m-1} \to 0 \text{ pro } m \to \infty.$$

Proto, podle věty o dvou policajtech, $\lim(1 + c_n/n^2)^n = 1$.

Druhý důkaz je stylový pomocí Bernoulliovy nerovnosti. Pomocí ní a nerovnosti $1 + y \leq 1/(1-y)$, která platí pro $y < 1$, pro $n > n_0$ máme

$$1 \leq \left(1 + \frac{c_n}{n^2}\right)^n \leq \frac{1}{(1 - c_n/n^2)^n} \leq \frac{1}{1 - c_n/n} \to 1 \text{ pro } n \to \infty.$$

Opět $\lim(1 + c_n/n^2)^n = 1$. Tím je lemma dokázáno.

(iii). To je nejjednodušší: pro dané $x \in \mathbb{R}$ máme, pomocí Bernoulliovy nerovnosti (použitelné zde opět pro $n > n_0$, což je v limitě jedno), že

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \lim(1 + x) = 1 + x.$$

Jednoznačnost. Ukážeme, že každá funkce $\exp(x)$ s vlastnostmi 1 a 2 už musí splňovat i

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Tím bude jednoznačnost dokázána.

Vlastnost 1 dává indukcí pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ identitu

$$\exp(nx) = \exp(x)^n.$$

Protože $\exp(0) = \exp(0 + 0) = \exp(0)^2$, máme $\exp(0)(\exp(0) - 1) = 0$ a $\exp(0) = 0$ nebo 1. První hodnota je ve sporu s vlastností 2, která požaduje $\exp(0) \geq 1 + 0 = 1$. Takže

$$\exp(0) = 1.$$

Protože $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$, pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n > n_0$ tedy platí odhad

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(x) = \exp(x/n)^n \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n},$$

kde první nerovnost plyne z vlastnosti 2 a druhá také, vzhledem k $\exp(-x/n) \geq 1 - x/n$ a $\exp(x/n) = 1/\exp(-x/n)$; $n > n_0$ potřebujeme pro $1 \pm x/n > 0$. Tedy

$$1 \leq \frac{\exp(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n} \to 1 \text{ pro } n \to \infty,$$

podle Lemmatu, a

$$\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Tím je věta dokázaná. □

Uvedeme další vlastnosti exponenciální funkce plynoucí z vlastností 1 a 2.

- Z vlastnosti 2 okamžitě plyne, že

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

- Odtud, díky $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, máme

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

- Platí důležitá limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

  Skutečně, podle vlastnosti 2 a $\exp(x) = 1/\exp(-x)$ máme pro $0 < x < 1$ odhad

$$1 + x \leq \exp(x) \leq 1/(1 - x).$$

  Takže, pro $0 < x < 1$, máme

$$1 = \frac{1 + x - 1}{x} \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq \frac{1/(1 - x) - 1}{x} = \frac{1}{1 - x}.$$

  Pro $x < 0$ se nerovnosti otočí. Obě strany pro $x \to 0$ jdou k jedné a podle věty o dvou policajtech dostáváme $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

- Pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme
$$\exp(x) > 0.$$
Pro $x \geq -1$ to dává vlastnost 2 a pro $x < 0$ to plyne z $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

- Pro každé kladné $x \in \mathbb{R}$ máme
$$\exp(x) > 1.$$
Kdyby totiž existovalo kladné x_0 s $\exp(x_0) \leq 1$, pak bychom měli $\exp(nx_0) = \exp(x_0)^n \leq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což je spor s $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ (neboť $nx_0 \to +\infty$ pro $n \to \infty$, ale posloupnost funkčních hodnot nejde do $+\infty$).

- Funkce $\exp(x)$ je na celém svém definičním oboru $\mathbb{R}$ rostoucí. Pokud $x < y$, pak totiž
$$\frac{\exp(y)}{\exp(x)} = \exp(y - x) > 1,$$
protože $y - x > 0$, a tak $\exp(y) > \exp(x)$.

- Funkce $\exp(x)$ je na celém svém definičním oboru $\mathbb{R}$ spojitá. Dokažme to. Nechť je $a \in \mathbb{R}$ libovolné číslo; ukážeme, že $\lim_{x\to a} \exp(x) = \exp(a)$. To je ekvivalentní s
$$\lim_{x\to a}(\exp(x) - \exp(a)) = 0.$$
Výraz v limitě přepíšeme jako
$$\exp(x) - \exp(a) = \exp(a) \cdot \frac{\exp(x - a) - 1}{x - a} \cdot (x - a).$$
Pro $x \to a$ jde první konstantní činitel k $\exp(a)$, druhý jde podle hořejší důležité limity k 1 a třetí jde k nule. Celková limita je podle aritmetiky limit funkcí proto rovna nule.

- *Eulerovo číslo* $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ je definováno jako hodnota $\mathrm{e} = \exp(1)$. Jak víme,
$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Ukážeme, že každé kladné reálné číslo je hodnotou exponenciály,

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty).$$

  Nechť $y \in \mathbb{R}$ je kladné. Podle hořejších limit exponenciály v $\pm\infty$ existují čísla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, že

$$\exp(x_1) < y < \exp(x_2).$$

  Podle Věty 3.7, díky spojitosti exponenciály, existuje $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_3 < x_2$, že $\exp(x_3) = y$. Navíc, protože je $\exp(x)$ rostoucí, se každá kladná hodnota y nabývá právě jednou.

Nyní se podíváme na logaritmickou funkci. Funkci $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definujeme jako inverzní funkci k exponenciále:

$$\log(x) := \exp(x)^{\langle -1 \rangle}.$$

Uveďme její vlastnosti.

- Funkce $\log(x)$ je rostoucí—to plyne hned definice, je to inverzní funkce k rostoucí funkci.

- Pro každé $x, y \in (0, +\infty)$ platí identita

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

  To je důsledkem základní identity pro exponenciálu. Pro dané $x, y \in (0, +\infty)$ máme jednoznačně určená čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, že $x = \exp(\alpha)$ a $y = \exp(\beta)$. Pak $xy = \exp(\alpha)\exp(\beta) = \exp(\alpha + \beta)$, takže $\log(xy) = \alpha + \beta = \log(x) + \log(y)$.

- Funkce $\log(x)$ je spojitá na intervalu $(0, +\infty)$. Plyne to z Věty 3.9.

- Máme limity $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$ a $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$. Plynou z odpovídajících limit exponenciály.

- Funkce $\log(x)$ zobrazuje $(0, +\infty)$ na $\mathbb{R}$. To plyne z definice $\log(x)$ jako inverzní funkce k exponenciále, která je definovaná na $\mathbb{R}$.

- Máme hodnotu $\log(1) = 0$, protože $\exp(0) = 1$.

- Platí limita
$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(x)}{x-1}=1.$$
Zvolme x v okolí čísla 1. Pak existuje jednoznačně určené $y\in\mathbb{R}$, že $x=\exp(y)$. Pro $x\to 1$ máme, že $y\to 0$, protože log je spojitá funkce. Tedy
$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(x)}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\exp(y)-1}=1.$$

Pomocí exponenciály a logaritmu definujeme *obecnou mocninu* a^b pro $a,b\in\mathbb{R}$ a $a>0$ jako
$$a^b=\exp(b\log(a)).$$
Je to rozšíření mocniny s racionálním exponentem $p=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, kterou (pro $p,q\in\mathbb{N}$) počítáme jako
$$a^{p/q}=\sqrt[q]{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}\ \text{ kde } a \text{ násobíme } p \text{ krát.}$$
Skutečně je pro $q\in\mathbb{N}$ číslo $\alpha=\exp(\frac{1}{q}\log(a))$ q-tou odmocninou z a, protože
$$\alpha^q=\Big(\exp(\tfrac{1}{q}\log(a))\Big)^q=\exp(q\tfrac{1}{q}\log(a))=\exp(\log(a))=a.$$

Shrňme vlastnosti monotonie funkce a^b.
$$\text{Pro pevné } a>0 \text{ je } a^b \begin{cases}\text{rostoucí pro} & a>1\\ \text{konstantní pro} & a=1\\ \text{klesající pro} & a<1.\end{cases}$$
$$\text{Pro pevné } b\in\mathbb{R} \text{ je } a^b \begin{cases}\text{rostoucí pro} & b>0\\ \text{konstantní pro} & b=0\\ \text{klesající pro} & b<0.\end{cases}$$
To plyne z definice. Při pevném a je a^b jako funkce b spojitá na intervalu $\mathbb{R}$ a pro pevné b je spojitá jako funkce a na intervalu $(0,+\infty)$. To plyne ze spojitosti exponenciály a logaritmu a z toho, že skládání funkcí zachovává spojitost.

Mocninu s obecným exponentem a^b tedy můžeme spočítat dvěma způsoby. Jednak podle hořejší definice jako $a^b=\exp(b\log(a))$ nebo jako limitu mocnin s racionálními exponenty
$$\lim_{\beta\to b,\ \beta\in\mathbb{Q}}a^\beta.$$

Protože $a^b = \exp(b \log(a))$ souhlasí s hodnotou a^b pro racionální b počítanou „školským“ způsobem a a^b je jako funkce b spojitá, dávají oba postupy tentýž výsledek.

Tvrzení 3.11 (růst exponenciály a logaritmu)
Platí tyto dvě limity:

1. *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ máme*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty;$$
2. *Pro každé $\varepsilon \in (0, +\infty)$ máme*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x^\varepsilon} = 0.$$

Důkaz. Jedna limita se snadno převede na druhou. Nechť $\exp(x)/x^\alpha \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Tedy $\exp(x)/x^{1/\varepsilon} \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ pro dané $\varepsilon > 0$ a pak i $\exp(x)^\varepsilon/x \to +\infty$. Položíme $y = \exp(x)$ a dostaneme $y^\varepsilon/\log(y) \to +\infty$ pro $y \to +\infty$, čili $\log(y)/y^\varepsilon \to 0$. Opačný převod z logaritmické limity na exponenciální je podobný.

Zbývá dokázat jednu z obou limit. Z následující věty je první z nich zřejmá. □

Ze tří funkcí $\log(x)$, x^α pro pevné $\alpha > 0$ a $\exp(x)$, které pro $x \to +\infty$ jdou do $+\infty$, roste exponenciála nejrychleji, x^α roste prostředním růstem a logaritmus roste nejpomaleji.

Věta 3.12 (exponenciála jako řada)
Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Důkaz. Tato řada absolutně konverguje pro každé reálné x podle podílového kritéria (Tvrzení 2.18): $\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \frac{x}{n+1} \to 0$ pro $n \to \infty$. Definuje tedy funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ukážeme, že $f(x+y) = f(x)f(y)$ a $f(x) \geq 1 + x$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$. To podle Věty 3.10 vynucuje $f(x) = \exp(x)$.

Pro důkaz identity pro $f(x)$ použijeme výsledek o tzv. *Cauchyově součinu řad*. Ten se pro dvě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ definuje jako

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

tj. n-tý sčítanec c_n je $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Tvrzení. *Jsou-li obě řady absolutně konvergentní a mají-li součty $A \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{R}$, pak je absolutně konvergentní i jejich Cauchyův součin a má součet $C = AB$.*

Důkazík. Částečné součty řady $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ jsou shora omezené, protože díky trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |c_k| &= \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} |a_i| \cdot |b_{k-i}| = \sum_{i+j \leq n} |a_i| \cdot |b_j| \\
&\leq (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|)(|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_n|) \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \right).
\end{aligned}$$

Cauchyův součin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ tedy absolutně konverguje.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ tím pádem také konverguje a má součet C. Dokážeme rovnost $C = AB$. Označme částečné součty řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jako, po řadě, r_n, s_n a t_n. Součet t_n je zhruba $r_n s_n$, přesněji

$$\begin{aligned}
|r_n s_n - t_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_n \sum_{k=0}^{n} b_n - \sum_{k=0}^{n} c_n \right| \\
&= \left| \sum_{i,j \leq n} a_i b_j - \sum_{i+j \leq n} a_i b_j \right| \\
&= \left| \sum_{i,j \leq n,\ i+j > n} a_i b_j \right| \\
&\leq \sum_{i,j \leq n,\ i+j > n} |a_i| \cdot |b_j|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i+j=k} |a_i| \cdot |b_j| \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k,
\end{aligned}
$$

kde řada $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ je Cauchyův součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$. Tato řada (s nezápornými členy) také samozřejmě konverguje, podle první části tvrzení, a tak

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k = 0.$$

Tedy i $\lim |r_n s_n - t_n| = 0$ a

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim t_n = \lim r_n \lim s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = AB.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Teď je jasné, že řada pro $f(x+y)$ je Cauchyovým součinem řad pro $f(x)$ a $f(y)$:

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Číslo $f(x+y)$ je proto podle tvrzení o Cauchyově součinu rovno součinu čísel $f(x)$ a $f(y)$.

Zbývá ještě dokázat pro každé $x \in \mathbb{R}$ nerovnost

$$f(x) \geq 1 + x.$$

Pro $x \geq 0$ je její platnost zřejmá z řady pro $f(x)$, $1+x$ je její částečný součet. Pro $x \leq -1$ je platnost nerovnosti také zřejmá, protože pak $1 + x \leq 0$, ale $f(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (je jasné, že $f(x) > 0$ pro $x \geq 0$, a $f(x) > 0$ pro $x < 0$ díky $1 = f(0) = f(-x + x) = f(-x)f(x)$). V intervalu $-1 < x < 0$ mají sčítance řady pro $f(x)$ střídající se znaménka a jejich absolutní hodnoty klesají monotónně k nule. Částečné součty proto splňují nerovnosti $s_0 = 1 > s_2 > s_4 > \ldots$, $s_1 = 1 + x < s_3 < s_5 < \ldots$ a $s_{2i} > s_{2j-1}$ pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ (viz důkaz Věty 2.14). Tedy opět $f(x) = \lim s_n > s_1 = 1 + x$. □

Exponenciála tak pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňuje identitu

$$\mathrm{e}^x = \exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Věta 3.13 (iracionalita čísla e)
Eulerovo číslo $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ *je iracionální,* $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Důkaz. Z vyjádření exponenciály řadou dostáváme řadu

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{!}{4!} + \cdots.$$

Předpokládejme pro spor, že e je racionální, $\mathrm{e} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Máme $p, q \in \mathbb{N}$. Vyjádření čísla e a tedy zlomku $\frac{p}{q}$ řadou vynásobíme číslem $q!$ a dostaneme

$$\begin{aligned} q!\frac{p}{q} &= q!\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!} + q!\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!} \\ a &= b + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots, \end{aligned}$$

kde $a = p \cdot (q-1)! \in \mathbb{N}$ a

$$b = q! + q! + q(q-1)\ldots 3 + q(q-1)\ldots 4 + \cdots + q + 1 \in \mathbb{N}.$$

Součet zbývající nekonečné řady odhadneme shora součtem geometrické řady s kvocientem $1/(q+1)$:

$$0 < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^n} = \frac{1}{q} \le 1.$$

Dostáváme spor, protože rovnost $a = b + c$, kde $a, b \in \mathbb{N}$ a $0 < c < 1$, platit nemůže. □

Snadno se také vidí, že i číslo $\log_3 2 = \log 2/\log 3$ je iracionální. Máme totiž

$$3^{\log 2/\log 3} = \mathrm{e}^{(\log 2/\log 3)\log 3} = \mathrm{e}^{\log 2} = 2.$$

Kdyby platilo, že $\log 2/\log 3 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, měli bychom $3^{p/q} = 2$ a tedy $3^p = 2^q$. To ale pro žádná dvě čísla $p, q \in \mathbb{N}$ neplatí, protože 2 a 3 jsou prvočísla a rozklad čísla na součin prvočísel je až na pořadí činitelů jednoznačný. Samotné hodnoty logaritmů $\log 2$ a $\log 3$ jsou rovněž iracionální, ale dokázat to už je podstatně obtížnější.

4 Derivace funkcí jedné reálné proměnné

Derivace funkce $f(x)$ v bodě a je její okamžitá míra růstu v bodě a.

Základní vlastnosti derivací

Definice. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $a \in M$ a $U(a, \delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$. *Derivace funkce f v bodě a* je limita

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0^+$ ($h \to 0^-$), resp. $x \to a^+$ ($x \to a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Poznámky. 1. Derivace buď existuje vlastní ($f'(a) \in \mathbb{R}$) nebo nevlastní ($f'(a) = \pm\infty$) nebo neexistuje. **2.** Platí tato ekvivalence:

$$f'(a) = A \in \mathbb{R}^* \iff f'_+(a) = f'_-(a) = A.$$

3. Geometrický výklad derivace. Poměr

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

je tangens úhlu α, který svírá směrem vzhůru orientovaná přímka p jdoucí body $(a, f(a))$ a $(a+h, f(a+h))$ a kladně orientovaná osa x. V limitě $h \to 0$ přímka p přejde v tečnu t ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$; t je daná rovnicí

$$t: \ y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Příklady. 1. Funkce $f(x) = x$ má derivaci rovnou 1 v každém bodě, protože

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

2. Funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, má v a derivaci rovnou na^{n-1}, protože

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \to 0} \left(a^{n-1} \binom{n}{1} + a^{n-2} h \binom{n}{2} + \cdots + h^{n-1} \binom{n}{n} \right) = na^{n-1}.$$

3. Pro exponenciální funkci máme

$$\exp'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

Přímka $y = 1 + x$ je tedy tečnou ke grafu funkce $y = \exp(x)$ v bodě $(0, 1)$. Obecně platí, že $\exp'(a) = \exp(a)$.

4. Funkce signum, $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ ($= 1$ pro $x > 0$, $= 0$ pro $x = 0$ a $= -1$ pro $x < 0$), má v nule jednostranné derivace

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{sgn}(x) - \mathrm{sgn}(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

a

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sgn}(x) - \mathrm{sgn}(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

takže $\mathrm{sgn}'(0) = +\infty$.

5. Funkce absolutní hodnoty, $f(x) = |x|$, v nule nemá vůbec derivaci, protože $f'_-(0) = -1$ a $f'_+(0) = 1$.

Tvrzení 4.1 (vlastní derivace vynucuje spojitost)
Má-li $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ v bodě a vlastní derivaci, je v a spojitá.

Důkaz. Máme

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x\to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Tedy $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ a f je spojitá v a. □

Poznámky. 1. Má-li f v a vlastní derivaci, můžeme f v okolí a aproximovat pomocí lineární funkce:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \Delta(a, x),$$

kde

$$\lim_{x\to a} \frac{\Delta(a, x)}{x - a} = 0.$$

Nejenomže chyba $\Delta(a, x)$ jde pro $x \to a$ k nule, ona jde k nule rychleji než identická funkce $x - a$.

2. Funkce $f(x) = |x|$ je příkladem funkce spojité v bodě (nula), která v něm vůbec nemá derivaci.

3. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ má v bodě nula nevlastní derivaci $+\infty$ a současně v tomto bodě není spojitá. Nevlastní derivace tedy nevynucuje obecně spojitost.

4. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = x^{1/3}$ pro $x \geq 0$ a jako $f(x) = -(-x)^{1/3}$ pro $x < 0$ je v 0 spojitá a má tam (jak se snadno spočte) nevlastní derivaci $+\infty$.

Věta 4.2 (aritmetika derivací)
Nechť $f, g : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v bodě a derivaci (vlastní či nevlastní).

1. *Platí, že $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, je-li pravá strana definovaná.*
2. *Platí* Leibnizova formule: $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, *je-li pravá strana definovaná a f nebo g je spojitá v a.*
3. *Je-li g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Důkaz. 1. Máme
$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

2. Výraz $\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$ je symetrický v f a g a můžeme proto předpokládat, že například g je spojitá v a. Pak máme
$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - f(a))}{x - a} \lim_{x\to a} g(x) + \\ &\quad + f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

3. Protože $\lim_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0$, můžeme pracovat na vhodném prstencovém okolí bodu a, kde se $g(x)$ nikdy nerovná nule. Máme

$$
\begin{aligned}
(f/g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))g(a) - f(a)(g(x)-g(a))}{(x-a)g(x)g(a)} \\
&= \frac{g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(a)\lim_{x\to a} g(x)} \\
&= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.
\end{aligned}
$$

□

Příklad. Bez předpokladu spojitosti jedné z funkcí f a g v a Leibnizova formule nemusí platit. Uvažme funkce

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & \ldots\ x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \ldots\ x = 0 \\ -1 & \ldots\ x < 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \ldots\ x > 0 \\ \frac{1}{2} & \ldots\ x = 0 \\ 1 & \ldots\ x < 0. \end{cases}
$$

Pak

$$
f(x)g(x) = \begin{cases} -1 & \ldots\ x \neq 0 \\ -\frac{1}{4} & \ldots\ x = 0. \end{cases}
$$

Máme $f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = (+\infty)\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})(-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$. Ale derivace $(fg)'(0)$ neexistuje.

Věta 4.3 (derivace složené funkce)
Nechť funkce f má derivaci v bodě y_0, funkce g má derivaci v bodě x_0, $y_0 = g(x_0)$ a g je spojitá v x_0. Pak

$$
(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0),
$$

je-li výraz napravo definován.

Důkaz. Nechť je $f'(y_0)$ vlastní. Funkce

$$
F(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & \ldots\ y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \ldots\ y = y_0 \end{cases}
$$

je spojitá v y_0. Na nějakém prstencovém okolí bodu x_0 platí rovnost

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Podle předpokladu $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$. Podle Věty 3.5 (předpoklad P1) proto máme

$$\lim_{x \to x_0} F(g(x)) = \lim_{y \to y_0} F(y) = F(y_0) = f'(y_0).$$

Dále

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Tedy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} F(g(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Nechť je $f'(y_0)$ nevlastní. Pak můžeme předpokládat, že $g'(x_0) \neq 0$ (jinak je výraz $f'(y_0)g(x_0)$ neurčitý a vzorec nic netvrdí). V důsledku toho funkce $g(x)$ na nějakém prstencovém okolí bodu x_0 nenabývá hodnotu $y_0 = g(x_0)$ a na tomto okolí platí rovnost

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Pro $x \to x_0$ má druhý zlomek vpravo limitu $g'(x_0)$. První zlomek vpravo má díky předpokladu $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$ a díky Větě 3.5 (předpoklad P2) limitu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = f'(y_0).$$

Zlomek vlevo má tedy pro $x \to x_0$ zase limitu rovnou $f'(y_0) \cdot g'(x_0)$. □

Příklad. Pro nevlastní derivace věta bez předpokladu spojitosti funkce g nemusí platit. Uvažme funkce

$$f(x) = |x| \ \text{ a } \ g(x) = \begin{cases} 1 & \dots\ x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \dots\ x = 0 \\ -1 & \dots\ x < 0. \end{cases}$$

Pak

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 & \dots\ x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \dots\ x = 0. \end{cases}$$

Derivace $f(g(x))'(0)$ neexistuje (jednostranné derivace jsou různé, $+\infty$ a $-\infty$), ale $g'(0) = +\infty$, $g(0) = -1/2$ a $f'(-1/2) = -1$, takže $f'(-1/2)g'(0) = (-1)(+\infty) = -\infty$.

Věta 4.4 (derivace inverzní funkce)
Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak

1. *Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce f^{-1} má v b derivaci*
$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

2. *Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $\left(f^{-1}\right)'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Důkaz. S pomocí substituce $y = f(x)$ a Věty 3.5 (předpoklad P2) máme

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - b}.$$

Pokud $f'(a) \neq 0$, je poslední limita rovna $1/f'(a)$. Pokud $f'(a) = 0$ a f je rostoucí, je poslední limita rovna

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x)-b}{x-a}} = +\infty,$$

protože $\frac{f(x)-b}{x-a} \to 0$ pro $x \to a$, ale $\frac{f(x)-b}{x-a}$ je kladná na každém prstencovém okolí bodu a. Případ klesající f je podobný. □

Poznámka. Z praktického hlediska máme formuli

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Pokud dokážeme f' vyjádřit pomocí f, dostaneme pro derivaci $(f^{-1})'(x)$ pěkný vzorec, protože $f(f^{-1}(x)) = x$.

Goniometrické a cyklometrické funkce

Je několik vzájemně ekvivalentních metod pro zavedení goniometrických funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Geometricky dostaneme $(\cos(x), \sin(x))$ pro $0 \leq x < 2\pi$ jako souřadnice toho bodu na jednotkové kružnici C, který na C určuje spolu s bodem $(1, 0)$ v kladném směru (proti chodu hodinových ručiček) oblouk s délkou x. Nedostatkem této metody je, že se opírá o intuitivně názorný avšak přesně už ne tak snadno uchopitelný pojem délky křivky.

Jiná metoda je pomocí exponenciály v komplexním oboru. My se omezíme na charakterizační větu, kterou nebudeme dokazovat a z níž odvodíme základní vlastnosti funkce $\sin(x)$.

Věta (charakterizace sinu). *Existuje právě jedno kladné číslo* $\pi \in \mathbb{R}$ *a právě jedna funkce* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *taková, že (i)* $\sin(0) = 0$, *(ii)*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \ \sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin(x) \sin(\pi/2 - y),$$

(iii) $\sin(x)$ *je rostoucí na* $[0, \pi/2]$ *a (iv)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Odvodíme pár základních vlastností funkce $\sin(x)$.

- $\sin(\pi/2) = 1$. V identitě (ii) položíme $x = \pi/2$ a $y = 0$. Pro $z = \sin(\pi/2)$ pak dostaneme rovnici $z = z^2$. Tedy $z = 0$ nebo $z = 1$. První možnost je vyloučena vzhledem k (iii).
- Funkce $\sin(x)$ je lichá. To plyne z (ii) a (i), položíme-li $x = 0$.
- Pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí $\sin(\pi/2 + y) = \sin(\pi/2 - y)$. To plyne z (ii), položíme-li $x = \pi/2$.
- Pro každé $z \in \mathbb{R}$ platí $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$. V (ii) položíme $x = z + \pi/2$ a $y = \pi/2$.
- Pro každé $z \in \mathbb{R}$ platí $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$, funkce sinus je periodická s periodou 2π. To plyne z předchozí vlastnosti.

- Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin(x)| \le 1$. To platí pro $0 \le x \le \pi/2$ vzhledem k (iii) a $\sin(\pi/2) = 1$. Pro ostatní x to plyne díky už odvozeným vlastnostem funkce sinus.

- Funkce $\sin(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Pro bod $a = 0$ to plyne z (iv). V obecném bodě $a \in \mathbb{R}$ máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(\sin(x) - \sin(a)) &= (\sin(x) + \sin(-a)) \\ &= 2\lim_{x\to a}\sin((x-a)/2)\sin(\pi/2 - (x+a)/2) = 0,\end{aligned}$$

  protože první činitel jde pro $x \to a$ k nule a druhý je omezený.

- Platí, že $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. To je důsledek spojitosti a Darbouxovy věty (Věta 3.7).

- Nulové body $\sin(x)$ jsou právě body $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce $\cos(x)$ je definována jako

$$\cos(x) = \sin(\pi/2 + x).$$

Funkce tangens a cotangens jsou definovány vztahy

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{a} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}.$$

Definiční obor funkce tangens, resp. cotangens, je množina $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$, resp. $\mathbb{R}\backslash\{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ a $\cot(x)$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní ke goniometrickým. Pro invertování musíme zúžit definiční obor goniometrické funkce na vhodný interval monotonie. Pro $\sin(x)$ a $\tan(x)$, resp. $\cos(x)$ a $\cot(x)$, vezmeme interval $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, resp. $[0, \pi]$. Dostaneme tak inverzní funkce

$$\begin{aligned}\arcsin x := (\sin x)^{-1} : &\quad [-1, 1] \to [\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ \arccos x := (\cos x)^{-1} : &\quad [-1, 1] \to [0, \pi] \\ \arctan x := (\tan x)^{-1} : &\quad \mathbb{R} \to [\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ \operatorname{arccot} x := (\cot x)^{-1} : &\quad \mathbb{R} \to [0, \pi].\end{aligned}$$

Tvrzení. *Pro každé $x \in [-1,1]$ platí rovnosti*

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2 \quad a \quad \arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \pi/2.$$

Důkaz. Vezmeme $x \in [-1,1]$. Podle definice cosinu máme

$$\sin(\pi/2 - \arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = x.$$

Argument sinu leží ve správném intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Aplikací arcusinu dostaneme $\pi/2 - \arccos(x) = \arcsin(x)$. Druhá identita se dokazuje podobně. $\square$

Přehled derivací elementárních funkcí

- Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že
$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.$$
Spočtěme derivaci exponenciály v bodě $a \in \mathbb{R}$ z definice:
$$(\mathrm{e}^x)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a}{x - a} = \mathrm{e}^a \lim_{x \to a} \frac{\mathrm{e}^{x-a} - 1}{x - a} = \mathrm{e}^a \cdot 1 = \mathrm{e}^a,$$
podle základní limity pro exponenciálu.

- Pro každé $x \in (0, +\infty)$ platí, že
$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$
To plyne z derivace exponenciály a z formule pro derivaci inverzní funkce:
$$(\log x)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^x)' \circ (\log x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

- Derivace konstantní funkce $f(x) = c$ je konstantní funkce $f(x) = 0$. Jasné.

- Pro každé pevné $a \in (0, +\infty)$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že
$$(a^x)' = a^x \log a.$$

Vyplývá to z derivace exponenciály a z formule pro derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (\exp(x \log a))' \\ &= \exp(x)' \circ (x \log a) \cdot (x \log a)' \\ &= \exp(x \log a) \log a \\ &= a^x \log a.\end{aligned}$$

- Pro $\alpha \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, resp. pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x > 0$ máme

  $$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

  Vyplývá to z derivace exponenciály a logaritmu a z formule pro derivaci složené funkce:

  $$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= (\exp(\alpha \log x))' \\ &= \exp(x)' \circ (\alpha \log x) \cdot (\alpha \log x)' \\ &= \exp(\alpha \log x)\frac{\alpha}{x} \\ &= x^\alpha \frac{\alpha}{x} \\ &= \alpha x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

- Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že

  $$(\sin x)' = \cos x \quad \text{a} \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

  Derivaci sinu spočteme z definice pomocí základní limity pro sinus a pomocí součtového vzorce:

  $$\begin{aligned}(\sin x)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) + \sin(-a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(\pi/2 - a - h/2) \\ &= \sin(\pi/2 - a) \\ &= \cos a.\end{aligned}$$

  Derivace cosinu plyne ze vzorce pro derivování složené funkce: $(\cos x)' = (\sin(x + \pi/2))' = \cos(x + \pi/2) = \sin(x + \pi) = -\sin x$.

- Pro každé $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$ platí, že

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

To plyne ze vzorce pro derivování podílu a z derivací sinu a cosinu:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

- Pro každé $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$ platí, že

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Odvození je podobné jako pro funkci tangens.

- Pro každé $x \in (-1, 1)$ platí, že

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{a} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

To se spočte pomocí vzorce pro derivování inverzní funkce:

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin x)' \circ (\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Odvození pro arcuscosinus je podobné; z rovnosti $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ také hned plyne, že součet derivací obou funkcí je nulový.

- Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{a} \quad (\text{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Opět podle vzorce pro derivování inverzní funkce, díky identitě $\cos^2 x = 1/(1+\tan^2 x)$:

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{(\tan x)' \circ (\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Podobně pro arcuscotangens nebo s využitím rovnosti $\arctan x + \text{arccot} x = \pi/2$.

Derivace a extrémy, věty o střední hodnotě

Tvrzení 4.5 (nenulová derivace vylučuje lokální extrém) *Nechť má $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ v bodě a nenulovou derivaci $f'(a) \neq 0$. Potom f nenabývá v a lokální extrém, to jest pro každé δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, existují body $b, c \in P(a, \delta_1)$ takové, že $f(b) < f(a) < f(c)$.*

Důkaz. Nechť např. $f'(a) > 0$. Existuje tedy $\delta_2 > 0$, že

$$x \in P(a,\delta_2) \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

To znamená, že $x \in P^-(a,\delta_2) \Rightarrow f(x) < f(a)$ a také $x \in P^+(a,\delta_2) \Rightarrow f(x) > f(a)$. □

Důsledek. *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ a f má v a lokální extrém vzhledem k M. Potom $f'(a)$ neexistuje (nebo není definovaná, protože $U(a,\delta) \not\subset M$ pro každé $\delta > 0$) nebo $f'(a) = 0$.*

Příklady. 1. Funkce $f(x) = |x|$ definovaná na intervalu $[-1, 1]$ má lokální maxima v bodech 1 a -1, a v bodu 0 má lokální minimum. V -1 a 1 derivace není definovaná a v bodu 0 neexistuje.

2. Funkce $f(x) = x^2$ na tomtéž intervalu $[-1, 1]$ má stejné lokální extrémy v týchž bodech. V bodech 1 a -1 derivace není definovaná, v bodu 0 má f nulovou derivaci.

3. Funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[2, 3]$ má ve 2 lokální minimum a ve 3 lokální maximum. V těchto bodech opět není derivace definovaná.

Poznámka. V typické úloze na hledání extrému funkce máme danou spojitou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, která má v každém bodě intervalu (a,b) derivaci. V takové situaci f nabývá na $[a,b]$ svého globálního maxima i minima (Věta 3.8) a podle předchozího důsledku body, kde f nabývá extrémy, leží v množině

$$\{x \in (a,b): \ f'(x) = 0\} \cup \{a,b\}.$$

Věta 4.6 (Rolleova věta)
Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f: \ [a,b] \to \mathbb{R}$ je na $[a,b]$ spojitá, má na intervalu (a,b) derivaci (i nevlastní) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a,b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Pokud je funkce f na intervalu $[a,b]$ konstantní, věta pro ni zřejmě platí, protože pak $f'(c) = 0$ pro každé $c \in (a,b)$. Pokud není konstantní, existuje $d \in (a,b)$, že třeba $f(d) > f(a) = f(b)$; případ $f(d) < f(a) = f(b)$ je podobný. Nechť $c \in [a,b]$ je bod, v němž f nabývá na $[a,b]$ své maximum (existuje podle Věty 3.8). Protože $f(c) \geq f(d) > f(a) = f(b)$, máme $c \in (a,b)$. Bod c je bodem lokálního maxima, a tak $f'(c) = 0$ podle důsledku Tvrzení 4.5. $\square$

Věta 4.7 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)
Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f: \ [a,b] \to \mathbb{R}$ je na $[a,b]$ spojitá a má na intervalu (a,b) derivaci (i nevlastní). Potom existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Uvážíme pomocnou funkci

$$h(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Je na $[a,b]$ spojitá (je to lineární kombinace spojitých funkcí $f(x)$ a $x - a$) a na (a,b) má derivaci

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dále $h(a) = h(b) = 0$. Podle Věty 4.6 existuje $c \in (a,b)$, že $h'(c) = 0$, čili

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Geometricky tato věta říká, že—za uvedených předpokladů—pro každou přímku procházející dvěma různými body na grafu funkce f existuje bod mezi nimi, v němž je tečna ke grafu rovnoběžná s přímkou.

Věta 4.8 (Cauchyova věta o střední hodnotě)
Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou na $[a, b]$ spojité a mají na intervalu (a, b) derivaci, přičemž $g'(x)$ je vždy vlastní a nenulová ($f'(x)$ může být i nevlastní). Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz. Uvážíme pomocnou funkci

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a).$$

Tato funkce je na $[a, b]$ spojitá a na (a, b) má derivaci

$$h'(x) = f'(x)(g(a) - g(b)) - (f(b) - f(a))g'(x)$$

(protože $f'(x) \in \mathbb{R}^*$, ale $g'(x) \in \mathbb{R}$, je tento rozdíl definovaný pro každé $x \in (a, b)$). Dále $h(a) = h(b) = 0$, takže podle Rolleovy věty $h'(c) = 0$ pro nějaké $c \in (a, b)$. Dostáváme

$$f'(c)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(c) = 0.$$

Protože $g'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, máme $g'(c) \neq 0$ a také (podle Rolleovy věty) $g(b) - g(a) \neq 0$. Můžeme tedy vydělit $g'(c)(g(b) - g(a))$ a dostaneme dokazovaný vztah. □

Uvedeme několik použití vět o střední hodnotě. Následující populární výsledek umožňuje, při splněných předpokladech, spočítat některé limity funkcí typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Věta 4.9 (l'Hospitalovo pravidlo)
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce $f, g : P(a, \delta) \to \mathbb{R}$ mají na $P(a, \delta)$ vlastní derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $P(a, \delta)$.

1. *Pokud* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, *pak i* $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = A$.
2. *Pokud* $\lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$ *a* $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, *pak i* $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = A$.

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ a $x \to a^+$.

Důkaz. 1. Nechť nejprve $a \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje δ_1, že $0 < \delta_1 < \delta$ a

$$a < x < a + \delta_1 \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U(A, \varepsilon).$$

Funkce f a g dodefinujeme v a jako $f(a) = g(a) = 0$, dostaneme tak funkce spojité na $[a, a + \delta_1]$. Podle Věty 4.8 (pro interval $[a, x]$) existuje pro každé $x \in (a, a + \delta_1)$ číslo c, že $a < c < x$ a

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Protože $c \in (a, a + \delta_1)$, $f'(c)/g'(c) \in U(A, \varepsilon)$. Tedy

$$a < x < a + \delta_1 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \in U(A, \varepsilon)$$

a $\lim_{x \to a^+} f(x)/g(x) = A$. Stejně se dokáže, že $\lim_{x \to a^-} f(x)/g(x) = A$.

Nechť $a = +\infty$. Substituce $x = 1/y$ převádí limitu pro $x \to +\infty$ na limitu pro $y \to 0^+$. Takže, s použitím (už dokázaného) l'Hospitalova pravidla pro limitu ve vlastním bodě,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{-f'(1/y)/y^2}{-g'(1/y)/y^2} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pro $a = -\infty$ se použije substituce $x = -1/y$.

2. Nechť nejprve $a, A \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že $\lim_{x \to a^+} f(x)/g(x) = A$, limita $\lim_{x \to a^-} f(x)/g(x) = A$ se dokáže podobně. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$. Zvolíme δ_1 tak, že $0 < \delta_1 < \delta$ a

$$a < x < a + \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

Pro tato x máme též

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| < |A| + \varepsilon < |A| + 1.$$

Zvolme nyní pevné $y \in (a, a+\delta_1)$. Protože $|g(x)| \to +\infty$ pro $x \to a^+$, existuje δ_2, že $0 < \delta_2 < y - a$ a

$$a < x < a + \delta_2 \Rightarrow \frac{|f(y)| + (|A| + 1)|g(y)|}{|g(x)|} < \varepsilon.$$

Buď nyní x libovolné číslo z intervalu $(a, a+\delta_2)$. Podle Věty 4.8 (pro interval $[x, y]$) existuje číslo z, že $x < z < y$ a

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Úpravou odtud vyjádříme rozdíl $f(x)/g(x) - f'(z)/g'(z)$ jako

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f'(z)}{g'(z)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)}.$$

Protože $z \in (a, a+\delta_2) \subset (a, a+\delta_1)$, máme $|f'(z)/g'(z)| < |A|+1$. Díky volbě δ_2 a trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(z)}{g'(z)}\right| &= \left|\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f'(z)}{g'(z)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)}\right| \\
&\le \frac{|f(y)| + |f'(z)/g'(z)| \cdot |g(y)|}{|g(x)|} \\
&< \frac{|f(y)| + (|A|+1)|g(y)|}{|g(x)|} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Celkem, díky trojúhelníkové nerovnosti,

$$x \in (a, a+\delta_2) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(z)}{g'(z)}\right| + \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - A\right| < 2\varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = A$.

Případ $a = \pm\infty$, $A \in \mathbb{R}$ se stejně jako v části 1 substitucí $x = \pm 1/y$ převede na už dokázaný případ limity ve vlastním bodě $y \to 0^+$. Případ $a \in \mathbb{R}$, $A = \pm\infty$ se vyřeší úpravou postupu, který jsme předvedli pro případ $a, A \in \mathbb{R}$. Podrobnosti přenecháváme čtenáři jako cvičení. Konečně případ $a = \pm\infty$, $A = \pm\infty$ se substitucí $x = \pm 1/y$ opět převede na případ $a \in \mathbb{R}$, $A = \pm\infty$. □

Příklady na (ne)použití l'Hospitalova pravidla. 1. Výpočet

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{3x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)'}{(3x+1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

podle l'Hospitalova pravidla je chybný. Není splněn předpoklad, že čitatel a jmenovatel jdou k nule nebo absolutní hodnota jmenovatele jde do nekonečna. Správná limita je 1.

2. Argument, podle něhož

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+\sin x}$$

neexistuje, protože

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(x+\sin x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+\cos x}$$

a tato poslední limita (zcela správně) neexistuje, je chybný. O případu, kdy limita podílu derivací neexistuje, l'Hospitalovo pravidlo neříká nic. Správná limita je $+\infty$.

3. Limitu

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x}$$

nemá smysl počítat l'Hospitalovým pravidlem, alespoň ne přímo, protože derivováním čitatele a jmenovatele se situace nezjednoduší, ale zkomplikuje:

$$\frac{(\exp(-1/x))'}{(x)'} = \frac{\exp(-1/x)/x^2}{1} = \frac{\exp(-1/x)}{x^2}$$

a dalším derivováním se zlomek dále komplikuje. Lepší je výpočet pomocí substituce $y = 1/x$, který hned dává, porovnáním růstu exponenciály a polynomiální funkce nebo použitím l'Hospitalova pravidla, že

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\exp(y)} = 0.$$

4. Nakonec příklad na čisté užití l'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6},$$

kde jsme v poslední rovnosti použili základní limitu pro sinus (nebo jsme mohli ještě jednou l'Hospitalovat).

Tvrzení 4.10 (jednostranná derivace jako limita derivace)
Nechť $a \in \mathbb{R}$, funkce $f : [a, a+\delta) \to \mathbb{R}$ je spojitá zprava v bodě a, má vlastní derivaci na $(a, a+\delta)$ a $\lim_{x \to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom má f v a derivaci zprava a

$$f'_+(a) = A.$$

Důkaz. Funkce f je zřejmě spojitá na $[a, a+\delta)$ (v a zprava to předpokládáme a jinde to plyne z Tvrzení 4.1). Pro každé $x \in (a, a+\delta)$ můžeme tedy použít Větu 4.7 pro interval $[a, x]$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje δ_1, že $0 < \delta_1 < \delta$ a $a < x < a + \delta_1 \Rightarrow f'(x) \in U(A, \varepsilon)$. Pro každé takové x podle Věty 4.7 existuje $c \in (a, x)$, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c).$$

Ale $f'(c) \in U(A, \varepsilon)$ (protože $a < c < a + \delta_1$), a tak

$$a < x < a + \delta_1 \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in U(A, \varepsilon).$$

Tedy $f'_+(a) = A$. □

Věta 4.11 (derivace a monotonie)
Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (s kladnou délkou), funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je na J spojitá a má v každém vnitřním bodě intervalu J derivaci. Pokud na vnitřku J platí $f' > 0$ (resp. $f' \geq 0$), je f na J rostoucí (resp. neklesající). Pokud na vnitřku J platí $f' < 0$ (resp. $f' \leq 0$), je f na J klesající (resp. nerostoucí).

Důkaz. Probereme jen případ $f' > 0$, ostatní případy jsou velmi podobné. Pro každá dvě čísla $a < b$ z J podle Věty 4.7 existuje číslo c takové, že $a < c < b$ a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0.$$

Z $b - a > 0$ proto plyne, že i $f(b) - f(a) > 0$ a f je na J rostoucí. □

Důsledek. *Je-li $f : J \to \mathbb{R}$ spojitá na intervalu J a má nulovou derivaci v každém vnitřním bodě J, je f na J konstantní.*

Důkaz. Protože $f' \geq 0$ a současně $f' \leq 0$ na vnitřku J, je f na J neklesající i nerostoucí a tedy konstantní. □

Poznámka. Pro jiné definiční obory než jsou intervaly věta i její důsledek obecně neplatí. Např. f definovaná jako $f(x) = x$ na intervalu $[0, 1]$ a jako $f(x) = x - 20$ na intervalu $[2, 3]$ má v každém vnitřním bodě množiny $[0, 1] \cup [2, 3]$ kladnou derivaci (rovnou 1), ale není na této množině rostoucí.

Pokud funkce $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ má na $U(a, \delta)$ vlastní derivaci $f'(x)$ a existuje limita

$$f''(a) := \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

nazveme ji *druhou derivací* f v a. Analogicky definujeme derivace vyšších řádů: Má-li $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ na $U(a, \delta)$ derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n - 1$, *derivace řádu* n *v* a je limita

$$f^{(n)}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a},$$

když existuje.

Konvexní a konkávní funkce

Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ definovaná na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ je na něm *konvexní*, resp. *konkávní*, když pro každá tři čísla $x_1 < x_2 < x_3$ z J bod $(x_2, f(x_2))$ leží na přímce jdoucí body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ nebo pod ní, resp. leží na této přímce nebo nad ní. Pokud bod $(x_2, f(x_2))$ leží vždy pod přímkou jdoucí body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$, resp. vždy nad ní, mluvíme o *ryze konvexní*, resp. o *ryze konkávní* funkci.

Podmínka konvexity je ekvivalentní podmínce

$$\forall\, x_1, x_2, x_3 \in J, x_1 < x_2 < x_3 :$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Pro ryzí kovexnost neostré nerovnosti přejdou v ostré. Všimněte si, že stačí uvést jen jednu nerovnost $\le$ ze tří (vzhledem ke tranzitivitě tu máme tři nerovnosti, třetí není napsaná), zbylé dvě z ní plynou. Pro konkavitu a ryzí konkavitu se nerovnosti obrátí.

Věta 4.12 (konvexita a konkavita zaručují jednostranné derivace) *Funkce $f : J \to \mathbb{R}$, která je na intervalu J konvexní nebo konkávní, má v každém vnitřním bodu intervalu J vlastní jednostranné derivace.*

Důkaz. Probereme jen případ konvexní funkce a derivace zprava, ostatní případy jsou velmi podobné. Nechť $a \in J$ a $\delta > 0$ splňují $(a-\delta, a+\delta) \subset J$. Pro x probíhající interval $(a, a+\delta)$ je díky konvexitě f funkce

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

neklesající. Z konvexity plyne, že je i zdola omezená: pro libovolné pevné $y \in J$, $y < a$, a $x \in (a, a+\delta)$ máme

$$\frac{f(a) - f(y)}{a - y} \le \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Podle Věty 3.6 tedy existuje vlastní limita

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

což je $f'_+(a)$. □

Důsledek. *Funkce $f:\ (a,b) \to \mathbb{R}$, která je na (a,b) konvexní nebo konkávní, je na (a,b) spojitá.*

Důkaz. Podle předchozí věty má f v každém bodě intervalu (a,b) vlastní jednostranné derivace. To vynucuje, že v každém bodě $c \in (a,b)$ platí limity $\lim_{x \to c^+}(f(x) - f(c)) = 0$ a $\lim_{x \to c^-}(f(x) - f(c)) = 0$. Tudíž je f spojitá v c zleva i zprava a je tedy v c spojitá. □

Příklady. 1. Funkce $f(x) = |x|$ je na intervalu $(-1,1)$ konvexní a (tedy) spojitá. Má vlastní derivaci v každém bodě intervalu s výjimkou nuly, kde má různé vlastní jednostranné derivace 1 (zprava) a -1 (zleva).

2. Funkce $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ je na intervalu $[-1,0]$ konvexní, ale ne ryze konvexní. Funkce není na intervalu spojitá, protože v bodě 0 není spojitá zleva.

Věta 4.13 (konvexita, konkavita a druhá derivace)
Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$, funkce $f:\ (a,b) \to \mathbb{R}$ má na (a,b) druhou derivaci $f''(x)$ a první derivace $f'(x)$ je na (a,b) spojitá. Pokud na (a,b) platí, že $f'' > 0$ (resp. $f'' \ge 0$), je f na (a,b) ryze konvexní (resp. konvexní). Pokud na (a,b) platí, že $f'' < 0$ (resp. $f'' \le 0$), je f na (a,b) ryze konkávní (resp. konkávní).

Důkaz. Probereme jen případ, kdy $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Ostatní případy jsou podobné. Funkce f' je tedy podle Věty 4.11 na (a, b) rostoucí. Pro tři zvolené body $x_1 < x_2 < x_3$ z (a, b) díky tomu a díky Větě 4.7 dostáváme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

pro nějaké body c_1 a c_2 splňující $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3$. Takže f je na (a, b) ryze konvexní. □

Bod $a \in \mathbb{R}$ je *inflexí* nebo *inflexním bodem* funkce $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, má-li graf f v bodě $(a, f(a))$ tečnu, která není svislá, a přechází-li graf f v okolí tohoto bodu z jedné strany tečny na druhou. Podrobněji řečeno, f má vlastní derivaci $f'(a)$ a existuje takové δ_1, že $0 < \delta_1 < \delta$ a

$$\begin{aligned} x \in (a - \delta_1, a) \ &\Rightarrow\ f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \\ x \in (a, a + \delta_1) \ &\Rightarrow\ f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \end{aligned}$$

nebo jsou obě nerovnosti prohozené—pro x nalevo od a leží $(x, f(x))$ pod tečnou a pro x napravo od a nad ní nebo naopak.

Příklad. Funkce $f(x) = x^3$ má v bodě $x = 0$ inflexní bod, její graf přechází z jedné strany tečny $y = 0$ na druhou.

Tvrzení 4.14 (pro nenulovou druhou derivaci není inflexe)
Pokud $f''(a) \neq 0$, nemá funkce f v bodě a inflexi.

Důkaz. Nechť $f''(a) > 0$, případ záporné druhé derivace je velmi podobný. Funkce f je tedy definovaná na nějakém okolí a a má na něm vlastní první derivaci a je proto na něm spojitá. Protože

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0,$$

existuje $\delta > 0$, že $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f'(x) < f'(a)$ a $x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f'(x) > f'(a)$. Podle Věty 4.7 pro každé $x \in (a - \delta, a)$ existuje takové c, že $x < c < a$ a

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(c) < f'(a), \quad \text{tudíž} \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

Stejně tak pro každé $x \in (a, a + \delta)$ existuje takové c, že $a < c < x$ a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) > f'(a), \quad \text{tudíž} \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pro každé $x \in P(a,\delta)$ leží bod $(x, f(x))$ nad tečnou v bodě $(a, f(a))$ a a proto není inflexním bodem funkce f. $\square$

Věta 4.15 (postačující podmínka inflexe)
Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je funkce, která má na (a,b) spojitou derivaci f', a pro nějaký bod $z \in (a,b)$ má na intervalu (a,z) zápornou a na intervalu (z,b) kladnou druhou derivaci (nebo naopak). Potom je z inflexním bodem f.

Důkaz. Nechť $f'' > 0$ na (a,z) a $f'' < 0$ na (z,b). Funkce f' je proto podle Věty 4.11 na $(a,z]$ rostoucí a na $[z,b)$ klesající. Podle Věty 4.7 pro každé $x \in (a,z)$ a každé $y \in (z,b)$ existují taková čísla c_1 a c_2, že $x < c_1 < z < c_2 < y$ a

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(c_1) < f'(z) < f'(c_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Takže

$$f(x) > f(z) + f'(z)(z - x) \quad \text{a} \quad f(y) < f(z) + f'(z)(y - z).$$

Nalevo od z leží bod $(x, f(x))$ nad tečnou k f v $(z, f(z))$ a napravo od z leží pod ní. Proto je z inflexním bodem. $\square$

Lineární funkce $x \mapsto ax + b$ je *asymptotou* ke grafu funkce f v $+\infty$, když platí

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Stejně definujeme asymptotu v $-\infty$.

Tvrzení 4.16 (o asymptotě)
Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $ax + b$, právě když

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{a} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b.$$

Totéž platí pro asymptotu v $-\infty$.

Důkaz. Má-li f v $+\infty$ asymptotu $ax + b$, pak

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{ax + b}{x} = 0 + a = a$$

a

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) + b = b.$$

Naopak, platí-li obě limity, z druhé z nich hned máme, že

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax - b = 0$$

a f má v $+\infty$ asymptotu $ax + b$. $\square$

Vyšetření průběhu funkce

Při vyšetření průběhu funkce postupujeme podle následujících bodů.

1. Určíme definiční obor a obor spojitost funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnicovými osami.
3. Zjistíme symetrii funkce: sudost, lichost, periodicita.
4. Vypočítáme limity v krajních bodech definičního oboru.
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce konvexní či konkávní. Určíme inflexní body.
7. Nalezneme asymptoty funkce.
8. Načrtneme graf funkce.

Příklad. Vyšetříme průběh funkce f zadané předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/\sin^2 x) & \dots\ x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & \dots\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1. Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}$. Mimo body $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je zjevně spojitá. Protože

$$\lim_{x\to k\pi} \exp(-1/\sin^2 x) = \lim_{y\to 0^+} \exp(-1/y) = 0 = f(k\pi),$$

je f spojitá i v každém celočíselném násobku π, je tedy spojitá na celém $\mathbb{R}$.

2. Platí, že $f(0) = 0$ a $f(x) = 0 \iff x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Průsečíky se souřadnicovými jsou tedy $(k\pi, 0)$ pro k probíhající $\mathbb{Z}$.

3. Protože $\sin(x+\pi) = -\sin x$ a $\sin(-x) = -\sin x$, je funkce f sudá a periodická s periodou π.

4. Definiční obor f je celé $\mathbb{R}$, takže zde jde pouze o limity pro $x \to +\infty$ a $x \to -\infty$. Ty neexistují, protože $f(k\pi) = 0$ a $f(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1/e$.

5. Pro $x \neq k\pi$ máme

$$f'(x) = 2f(x)\frac{\cos x}{\sin^3 x}.$$

Pro každé pevné $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\exp(-1/y)}{y^n} = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^n}{\exp z} = 0,$$

a tak

$$\lim_{x\to k\pi} f'(x) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{y\to 0^+} 2\frac{\exp(-1/y)}{y^3} = 0.$$

Podle Tvrzení 4.10 je $f'(k\pi) = 0$. Takže

$$f'(x) = \begin{cases} 2f(x)\frac{\cos x}{\sin^3 x} & \dots\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \dots\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tato funkce je všude spojitá a je periodická s periodou π.

Funkce $\cos x$ má nulové body $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Na intervalu $[0,\pi]$ má tedy f' nulové body 0, $\frac{\pi}{2}$ a π. Na $(0,\frac{\pi}{2})$ je $f' > 0$ a na $(\frac{\pi}{2},\pi)$ je $f' < 0$. Na intervalech $[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ je tedy f rostoucí a na intervalech $[k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi]$ je klesající (Věta 4.11). V bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má tedy f lokální minima, která jsou všechna neostrými globální minimy se společnou hodnotou 0. Podobně v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má f lokální maxima, která jsou všechna neostrými globálními maximy se společnou hodnotou 1/e.

Intervaly monotonie jsou konečně jasné i bez derivování přímo z definice f jako složeniny čtyř funkcí

$$f(x) = (\exp x) \circ (-1/x) \circ (x^2) \circ \sin x.$$

První z nich je rostoucí na $\mathbb{R}$, druhá na $(0,+\infty)$, třetí na $[0,+\infty)$ a čtvrtá je na $[0,\frac{\pi}{2}]$ rostoucí a na $[\frac{\pi}{2},\pi]$ klesající. Proto (složenina dvou rostoucích funkcí je rostoucí funkce, složenina rostoucí a klesající funkce je klesající funkce) je f na $(0,\frac{\pi}{2}]$ a tedy (vzhledem ke spojitosti) i na $[0,\frac{\pi}{2}]$ rostoucí a na $[\frac{\pi}{2},\pi]$ je klesající.

6. Opětovným derivováním a užitím Tvrzení 4.10 dostaneme vzorec pro druhou derivaci, v němž označíme $u = \sin^2 x$:

$$f''(x) = \begin{cases} 2f(x)\frac{2u^2-5u+2}{u^3} & \dots\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \dots\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tato funkce je všude spojitá a je periodická s periodou π.

Polynom $2u^2 - 5u + 2$ má kořeny 2 a $\frac{1}{2}$. První z nich můžeme z úvah vyloučit vzhledem k $|u| = |\sin^2 x| \leq 1$. Hodnota $u = \sin^2 x = \frac{1}{2}$ se nabývá právě pro $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Na intervalu $[0, \pi]$ má tedy f'' nulové body 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ a π. Na $(0, \frac{\pi}{4})$ je $f'' > 0$, na $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ je $f'' < 0$ a na $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ je opět $f'' > 0$. Na intervalech $[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$ je $f'' \geq 0$ a f je konvexní a na intervalech $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi]$ je $f'' \leq 0$ a f je konkávní (Věta 4.13). Není těžké vidět, že na těchto intervalech je f dokonce ryze konvexní, resp. ryze konkávní. Inflexní body funkce f jsou právě body $\pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (Tvrzení 4.14 a Věta 4.15).

7. Máme $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$, ale $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0x = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ neexistuje, a totéž pro $x \to -\infty$. Funkce tedy v nekonečnech nemá asymptoty (Tvrzení 4.16).

8. Zde bude časem obrázek grafu funkce.

Taylorův polynom

Pokud má funkce f, definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, v a vlastní první derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$, má graf f v bodě a (přesněji v bodě $(a, f(a))$) tečnu s rovnicí $t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Pak platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$$

Tuto aproximaci teď zobecníme na polynomy vyššího stupně a ukážeme, že pro funkci f s vlastní n-tou derivací v a existuje právě jeden polynom $p(x)$ stupně nejvýše n, pro který

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, funkce f je definovaná na okolí a a má v a vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$; pokud $n = 0$, předpokládáme spojitost f

v a. *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a* rozumíme polynom

$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Taylorův polynom $T(x) = T_n^{f,a}(x)$ splňuje identitu

$$(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a},$$

takže $T(a) = f(a), T'(a) = f'(a), \ldots, T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Lemma. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a Q je polynom stupně nejvýše n takový, že*

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Pak je Q identicky nulový polynom.

Důkaz. Indukce podle n. Pro $n = 0$ to platí, ve jmenovateli máme konstantní jedničku a Q musí být identicky nulový. Nechť $n \geq 1$. Jmenovatel jde k nule a tedy i čitatel: $Q(a) = \lim_{x\to a} Q(x) = 0$. Takže a je kořen Q a $Q(x) = (x-a)R(x)$ pro polynom R stupně nejvýše $n-1$. Máme

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

a podle indukčního předpokladu je R identicky nulový. Tedy i $Q = (x-a)R$ je identicky nulový. □

Věta 4.17 (charakterizace Taylorova polynomu)
Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Taylorův polynom $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom $P(x)$ stupně nejvýše n s vlastností

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Nejprve indukcí podle n ukážeme, že tuto vlastnost Taylorův polynom $T_n^{f,a}(x)$ má. Pro $n = 0$ to je pravda, $T_0^{f,a}(x) = f(a)$ a $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a))/1 =$

0 podle spojitosti f v a. Pro $n > 0$ s využitím l'Hospitalova pravidla (Věta 4.9) a indukce máme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - (T_n^{f,a})'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nechť naopak má P tuto vlastnost. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \\
&= 0 + 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

podle předpokladu o P a podle již dokázané vlastnosti Taylorova polynomu. Podle Lemmatu tak máme, že $P(x) - T_n^{f,a}(x)$ je identicky nulový a $P(x) = T_n^{f,a}(x)$. □

Zbytkem Taylorova polynomu $R_n^{f,a}(x)$ rozumíme rozdíl mezi hodnotou funkce a hodnotou Taylorova polynomu:

$$R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x).$$

Věta 4.18 (obecný tvar zbytku Taylorova polynomu)
Funkce f a φ buďte definované na okolí $U(a,\delta)$ bodu $a \in \mathbb{R}$, přičemž f má na $U(a,\delta)$ vlastní $(n+1)$-tou derivaci $f^{(n+1)}(x)$ a φ má na $U(a,\delta)$ vlastní a nenulovou první derivaci $\varphi'(x)$. Potom pro každé $x \in P(a,\delta)$ existuje číslo c ležící mezi a a x takové, že

$$R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(c)} \cdot f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n.$$

Důkaz. Pro pevné $x \in P(a,\delta)$ uvážíme pomocnou funkci

$$F(t) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i.$$

Na intervalu s krajními body a a x je F spojitá, $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$, a má na něm vlastní první derivaci rovnou

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}(x-t)^{i-1} \right) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Podle Cauchyovy věty o střední hodnotě (Věta 4.8) existuje číslo c ležící mezi a a x takové, že

$$-\frac{(f(x) - T_n^{f,a}(x))}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)} = -\frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n}{n!\varphi'(c)}.$$

Úpravou odtud plyne dokazovaný vztah. $\square$

Důsledky. *Za předpokladů předchozí věty o f pro každé $x \in P(a, \delta)$ existují čísla c_1 a c_2 ležící mezi a a x taková, že*

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_1) \cdot (x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textit{(Lagrangeův tvar zbytku)}$$

a

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_2) \cdot (x-c_2)^n (x-a)}{n!} \quad \textit{(Cauchyův tvar zbytku).}$$

Důkaz. Lagrangeův tvar zbytku dostaneme z Věty 4.18 pro $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ a Cauchyův tvar zbytku pro $\varphi(t) = t$. $\square$

Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů, rozumíme pro $x \in \mathbb{R}$ její *Taylorovou řadou se středem v a* řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Pokud je f v čísle x definovaná, bylo by pěkné, aby tato řada konvergovala a její součet se rovnal $f(x)$. To nastává, právě když $R_n^{f,a}(x) \to 0$ pro $n \to \infty$. Rovněž to vždy nastává pro $x = a$, protože $T_n^{f,a}(a) = f(a)$ pro každé n.

Pro několik elementárních funkcí teď odvodíme jejich rozvoje do Taylorovy řady. Pro jednoduchost budeme pracovat jen s Taylorovými řadami se středem v nule, to jest s $a = 0$.

Taylorův rozvoj exponenciály:

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots.$$

Tento rozvoj už známe z Věty 3.12. Nyní jsme k němu dospěli pomocí Taylorovy řady.

Důkaz. Protože $\exp(x)^{(n)} = \exp(x)$ pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ a $\exp(0) = 1$, je tato řada Taylorovou řadou funkce $\exp(x)$ se středem v nule. Pro $f(x) = \exp(x)$ a pevné nenulové $x \in \mathbb{R}$ máme (Lagrangeův tvar)

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{\exp(c_n)x^{n+1}}{(n+1)!},$$

kde c_n leží mezi nulou a x. Tedy, pro $n \to \infty$,

$$|R_n^{f,a}(x)| \le \frac{\exp(|x|) \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

a Taylorova řada exponenciály k ní konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. □

Taylorův rozvoj sinu a cosinu:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots \\
\forall x \in \mathbb{R}:\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots.
\end{aligned}$$

Důkaz. To hned plyne z hodnot derivací sinu a cosinu v nule a z Lagrangeova tvaru zbytku Taylorova polynomu: pro $f(x) = \sin x$ máme $f^{(n)}(0) = \pm \sin 0 = 0$ pro sudé n a $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cos 0 = (-1)^{n-1}$ pro liché n. Dále (pro nějaké c_n ležící mezi 0 a x)

$$|R_n^{f,a}(x)| = \frac{|\sin^{(n+1)}(c_n)| \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Pro cosinus podobně. $\square$

Taylorův rozvoj logaritmu:

$$\begin{aligned}
\forall x \in (-1,1]: \ \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
\forall x \in [-1,1): \ \log(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \\
\forall x \in [-1,1): \ \log\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots
\end{aligned}$$

Důkaz. Pro $f(x) = \log(1+x)$ máme

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

takže $f^{(n)}(0)/n! = (-1)^{n-1}/n$ a $\log(1+x)$ má danou Taylorovu řadu se středem v nule. Ukážeme, že pro každé pevné x z intervalu $(-1,1]$ zbytek $R_n(x) = R_n^{f,0}(x)$ pro $n \to \infty$ jde k nule. Pro $0 < x \leq 1$ to plyne z Lagrangeova tvaru: pro nějaké c_n ležící mezi nulou a x máme, pro $n \to \infty$,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+c_n)^{n+1}} \cdot x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+c_n)^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Lagrangeův tvar zbytku však nefunguje pro $-1 < x < 0$ (přesněji, nefunguje pro $-1 < x < -1/2$), nedává totiž horní odhad jdoucí k nule. Pro tato x použijeme Cauchyův tvar zbytku. Pro $-1 < x < 0$ odpovídající číslo c_n z intervalu $(x,0)$ napíšeme jako $\theta_n x$, kde $\theta_n \in (0,1)$, a dostaneme

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left| \frac{1}{n!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+c_n)^{n+1}} \cdot (x-c_n)^n x \right| \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta_n x|} \cdot \left| \frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x} \right|^n \\
&< \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},
\end{aligned}$$

protože pro $x > -1$ a $0 < \theta < 1$ je

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1.$$

Vzhledem k $|x| < 1$ tedy opět $|R_n(x)| < |x|^{n+1}/(1 - |x|) \to 0$ pro $n \to \infty$. Taylorova řada funkce $\log(1+x)$ k ní tedy konverguje pro každé x z intervalu $(-1, 1]$. Dva zbylé rozvoje plynou substitucí $-x$ za x a z vlastnosti logaritmu $\log(1/x) = -\log x$. □

Pro $x = 1$ tak dostáváme identitu (s kterou už jsme se setkali za Větou 2.14)

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Taylorův rozvoj mocniny: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

$$\forall x \in (-1, 1): \ (1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

kde

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

Pokud $\alpha = m \in \mathbb{N}$, dostáváme konečný rozvoj

$$(1 + x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n,$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Pro $f(x) = (1 + x)^\alpha$ máme

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n},$$

a tak

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

Pro pevné x, $|x| < 1$, zbytek v Cauchyově tvaru ukazuje, že Taylorova řada funkce $(1+x)^\alpha$ k ní konverguje. Pro $n \in \mathbb{N}$ a nějaké $c_n = \theta_n x$, kde $\theta_n \in (0, 1)$, máme

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n)(1 + c_n)^{\alpha - n - 1}(x - c_n)^n x}{n!} \right| \\ &\le |\alpha|(|\alpha| + 1) \prod_{k=2}^{n} (1 + |\alpha|/k) \cdot K \cdot \left| \frac{1 - \theta_n}{1 + \theta_n x} \right|^n \cdot |x|^{n+1}, \end{aligned}$$

kde $K = \max((1+|x|)^{\alpha-1}, (1-|x|)^{\alpha-1})$. Z důkazu Taylorova rozvoje logaritmu už víme, že pro $x > -1$ a $0 < \theta_n < 1$ je

$$\left|\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x}\right|^n < 1.$$

Dále $1 + |\alpha|/k \leq \exp(|\alpha|/k)$, takže

$$\prod_{k=2}^{n}(1+|\alpha|/k) \leq \mathrm{e}^{|\alpha|(1/2+1/3+\cdots+1/n)} < \mathrm{e}^{|\alpha|\log n} = n^{|\alpha|},$$

neboť $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^n dt/t = \log n$. Celkem

$$|R_n(x)| < K|\alpha|(|\alpha|+1) \cdot n^{|\alpha|} \cdot |x|^{n+1} \to 0$$

pro $n \to \infty$, protože $|x| < 1$. □

Asymptotické symboly o a O

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta > 0$, a funkce f, g jsou definované na prstencovém okolí $P(a, \delta)$, přičemž g je na něm kladná. Pokud

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

píšeme, že $f = o(g)$ pro $x \to a$, a říkáme, že *funkce f je malé o funkce g pro x jdoucí k a.*

Pokud existuje $c > 0$ tak, že

$$\forall x \in P(a, \delta): \ |f(x)| < cg(x),$$

píšeme, že $f = O(g)$ pro $x \to a$, a říkáme, že *funkce f je velké o funkce g pro x jdoucí k a.*

Patrně $f = o(g)$ pro $x \to a$ implikuje $f = O(g)$ pro $x \to a$. Vlastnost Taylorova polynomu z Věty 4.17 můžeme pomocí o napsat takto: když $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$, pak

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n), \ x \to a.$$

Obšírněji:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n^{f,a}(x),$$

kde $R_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n)$ pro $x \to a$. Tomuto vztahu funkce a jejího Taylorova polynomu říkáme *Peanův tvar zbytku.*

Připomeňme si, že Lagrangeův tvar zbytku je rovnost (platící za předpokladu, že $f^{(n+1)}(x)$ je vlastní na nějakém $U(a,\delta)$)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

kde $c = c(x)$ závisí na x a leží mezi čísly a a x. Je-li $f^{(n+1)}(x)$ omezená na okolí bodu a, je patrně

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = O((x-a)^{n+1}),\ x \to a.$$

Protože pro $x \to a$ je $O((x-a)^{n+1}) = o((x-a)^n)$—této rovnosti je třeba rozumět jako zkratce za „každá funkce, jež je $O((x-a)^{n+1})$ pro $x \to a$, je také $o((x-a)^n)$ pro $x \to a$"—zahrnuje za tohoto předpokladu Lagrangeův tvar zbytku v sobě i Peanův tvar zbytku.

Odvodíme *Taylorův rozvoj arcustangenty se zbytkem v Peanově tvaru:*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0.$$

Derivováním $f(x) = \arctan x$ dostaneme

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\
f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\\
f'''(x) &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\\
f^{(4)}(x) &= \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4}\\
f^{(5)}(x) &= \frac{24-72x-240x^2-72x^3+192x^4}{(1+x^2)^5}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tedy $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -2$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 24$, ale není moc vidět, jak obecně ukázat, že $f^{(2n)}(0) = 0$ a $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n(2n)!$. Lepší vyjádření derivací dostaneme z rozkladu

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix}\right).$$

Odtud (ignorujme, že jsme se ocitli v komplexním oboru) opakovaným derivováním máme

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\left(\frac{i^{n-1}}{(1+ix)^n} + \frac{(-i)^{n-1}}{(1-ix)^n}\right).$$

Takže opravdu, díky $i^2 = -1$,

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}(i^{n-1}+(-i)^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \dots\ n = 2m \\ (-1)^m(2m)! & \dots\ n = 2m+1 \end{cases}$$

a

$$\frac{(\arctan x)^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0 & \dots\ n = 2m \\ \frac{(-1)^m}{2m+1} & \dots\ n = 2m+1. \end{cases}$$

Jiná metoda, vyhýbající se komplexním číslům, je založena na následujícím lemmatu.

Lemma. *Nechť má funkce f v nule vlastní derivace až do řádu $n+1$ a pro $x \to 0$ pro nějaké reálné konstanty $a_0, a_1, \dots, a_n$ platí*

$$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

Potom pro $x \to 0$ platí i

$$f(x) = f(0) + \frac{a_0x}{1} + \frac{a_1x^2}{2} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Důkaz. Z jednoznačnosti Taylorova polynomu řádu n (Věta 4.17), použité pro funkci $f'(x)$, plyne, že pro $k = 0, 1, \dots, n$

$$\frac{(f'(x))^{(k)}(0)}{k!} = a_k.$$

Po vydělení $k+1$ pro $k=0,1,\dots,n$ máme

$$\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} = \frac{a_k}{k+1},$$

což dává, až na konstantní člen (jenž je $f(0)$), Taylorův polynom řádu $n+1$ pro funkci $f(x)$. $\square$

Pro $f(x) = \arctan x$ máme podle vzorce pro součet geometrické řady, pro $x \to 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}),$$

a tak, podle lemmatu,

$$f(x) = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0.$$

Ještě tři poznámky o Taylorových řadách

1. Taylorovy polynomy jsou mocným nástrojem pro počítání limit funkcí. Jako příklad spočteme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}.$$

Z Taylorových rozvojů arcustangenty a sinu už víme, že pro $x \to 0$

$$\arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{a} \quad \sin x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Tangens se pro $x \to 0$ chová jako

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \\ &= \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^3 + o(x^3) \\ &= x + \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

protože

$$\frac{1}{1-\theta} = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{1-\theta} \quad \text{a} \quad 0 < \frac{\theta^2}{1-\theta} < \theta^2/2 \quad \text{pro} \quad |\theta| < 1/2,$$

$xo(x^2) = o(x^3), o(x^3) + o(x^3) = o(x^3)$ atd. Taylorův rozvoj arcusinu dostaneme stejným obratem jako rozvoj arcustangenty:

$$(\arcsin x)' = (1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \binom{-1/2}{1}(-x^2)^1 + o(x^2) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

pro $x \to 0$, podle Taylorova rozvoje funkce $(1 + x)^\alpha$. Podle Lemmatu,

$$\arcsin x = \arcsin 0 + \tfrac{1}{1}x + \tfrac{1/2}{3}x^2 + o(x^3) = x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Celkem

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

2. Uvažme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou jako

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \ldots\ x \neq 0 \\ 0 & \ldots\ x = 0. \end{cases}$$

Protože

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^k} = 0$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, je f na $\mathbb{R}$ spojitá a má na $\mathbb{R}$, včetně nuly, spojité derivace všech řádů a $f^{(n)}(0) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Například, pro každé $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2} \quad \text{a} \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2},$$

což jsou funkce jdoucí k 0 pro $x \to 0$. Podle Tvrzení 4.10 tedy i $f'(0) = f''(0) = 0$ a podobně pro všechny derivace vyšších řádů. Tato funkce tedy má pro každé $n \in \mathbb{N}$ pro střed $a = 0$ identicky nulový Taylorův polynom řádu n a má Taylorovu řadu se středem v nule rovnou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots = 0.$$

Tato řada má pro každé $x \in \mathbb{R}$ součet rovný nule. Konverguje tedy k hodnotě funkce jen pro $x = a = 0$ a pro všechny ostatní x se její součet liší od $f(x)$, protože $f(x) > 0$ pro $x \neq 0$.

3. Taylorovy řady mají důležité použití v diskrétní matematice, konkrétně v kombinatorické enumeraci. Pro mnohé „pěkné“ funkce $f(x)$ (zadané jednoduchou formulí) jsou koeficienty a_n, $n = 0, 1, \ldots$, v Taylorově řadě se středem v nule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

nezáporná celá čísla, která jsou rovna počtům jistých kombinatorických objektů. Uvedeme tři příklady z mnoha.

Střídavé permutace. Permutace $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ čísel $1, 2, \ldots, n$ je střídavá permutace délky n, když platí

$$\sigma_1 < \sigma_2 > \sigma_3 < \sigma_4 > \sigma_5 < \ldots .$$

Například 132 a 231 jsou všechny střídavé permutace délky $n = 3$ a

$$1324,\ 1423,\ 2314,\ 2413,\ \text{ a }\ 3412$$

jsou všechny střídavé permutace délky $n = 4$. Nechť p_n je počet střídavých permutací délky n. Definujeme $p_0 = 1$. Dále máme, jak jsme viděli, $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = 2$, $p_4 = 5$. Dá se dokázat, že pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n x^n}{n!} = \tan x + \frac{1}{\cos x}.$$

Funkce $\tan x$ je lichá a funkce $1/\cos x$ je sudá, takže $\tan x$ přispívá do Taylorovy řady koeficienty s lichými indexy a $1/\cos x$ koeficienty se sudými indexy. Posloupnost počtů střídavých permutací pokračuje dále jako

$$(p_n)_{n \geq 0} = (1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, \ldots).$$

Množinové rozklady. Nechť b_n je počet způsobů, jak se množina $\{1, 2, \ldots, n\}$ (nebo kterákoli jiná n-prvková množina) dá vyjádřit jako sjednocení neprázdných a disjunktních množin. Klademe $b_0 = 1$ a dále máme $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ a $b_3 = 5$, protože $\{1, 2, 3\}$ se dá vyjádřit jako

$$\{1, 2, 3\},\ \{1, 2\} \cup \{3\},\ \{1, 3\} \cup \{2\},\ \{2, 3\} \cup \{1\}\ \text{ a }\ \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}.$$

Dá se dokázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Posloupnost počtů množinových rozkladů, kterým se říká Bellova čísla, pokračuje dále jako

$$(b_n)_{n \geq 0} = (1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, \ldots).$$

Uspořádané množinové rozklady. Nechť d_n je pro dané n počet všech uspořádaných m-tic (nutně $m \leq n$) $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ takových neprázdných množin A_i, že

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \{1, 2, \ldots, n\}, \; A_i \cap A_j = \emptyset \;\text{ pro } i \neq j.$$

Oproti předešlému příkladu je tedy rozdíl v tom, že zde nám záleží na pořadí množin ve sjednocení. Pro $n = 3$ tedy $d_3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 13$ oproti $b_3 = 5$. Dá se dokázat, že pro každé $x \in (-\log 2, \log 2)$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!} = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^x}.$$

Posloupnost počtů uspořádaných množinových rozkladů pokračuje dále jako

$$(d_n)_{n \geq 0} = (1, 1, 3, 13, 73, 501, 4051, 37633, 394353, \ldots).$$

5 Primitivní funkce

Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pokud má funkce $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ na (a, b) derivaci a ta se rovná $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, řekneme, že F *je na intervalu* (a, b) *primitivní funkcí k funkci* f.

Tvrzení 5.1 (Primitivní funkce je jednoznačná až na konstantu) *Je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na (a, b), je pro každé $c \in \mathbb{R}$ funkce $F(x) + c$ také primitivní k $f(x)$ na (a, b). Naopak, jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní k $f(x)$ na (a, b), existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $F(x) - G(x) = c$ pro každé $x \in (a, b)$.*

Důkaz. Když $F'(x) = f(x)$ na (a,b), pak patrně i $(F(x)+c)' = f(x)+0 = f(x)$ na (a,b). Naopak, když $F'(x) = G'(x) = f(x)$ na (a,b), pak $(F(x)-G(x))' = f(x)-f(x) = 0$ na (a,b), což podle Důsledku Věty 4.11 dává na (a,b) rovnost $F(x) - G(x) = c$ pro nějakou konstantu c. □

Poznámky. **1.** Funkce primitivní k nějaké jiné funkci na otevřeném intervalu I je na I spojitá (podle Tvrzení 4.1).

2. Funkce $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ je definovaná na $\mathbb{R}$, ale nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. To vyplývá z Tvrzení 4.10. Nechť je F primitivni k $\mathrm{sgn}(x)$ na $\mathbb{R}$. Funkce F je tedy spojitá zprava v nule a $F'(x) = \mathrm{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$. Tedy $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$ a podle Tvrzení 4.10 máme $F'_+(0) = 1$. To je ale ve sporu s $F'_+(0) = F'(0) = \mathrm{sgn}(0) = 0$.

3. Problémem funkce signum není nespojitost v nule jako taková, ale to, že tam má jednostrannou limitu odlišnou od funkční hodnoty. Nyní sestrojíme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která bude rovněž nespojitá v nule, ale bude přesto mít na $\mathbb{R}$ primitivní funkci $F(x)$. Položíme

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2) & \dots\ x \neq 0 \\ 0 & \dots\ x = 0. \end{cases}$$

Pak, pro $x \neq 0$,

$$F'(x) = 2x\sin(1/x^2) - \tfrac{2}{x}\cos(1/x^2).$$

Dále

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x^2) = 0,$$

takže $F'(0) = 0$. Funkce $F(x)$ je tedy na $\mathbb{R}$ primitivní k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2) & \dots\ x \neq 0 \\ 0 & \dots\ x = 0. \end{cases}$$

Ale $f(x)$ není spojitá v nule, jednostranné limity $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$ neexistují.

4. Za chvíli dokážeme, že funkce, která na otevřeném intervalu I má primitivní funkci, nabývá na I všech mezihodnot. Tuto vlastnost tedy sdílí se spojitými funkcemi (viz Větu 3.7).

Množina funkcí primitivních k $f(x)$ se označuje symbolem integrálu

$$\int f(x)\, dx.$$

Fakt, že $F(x)$ je primitivní funkcí k $f(x)$ značíme jako

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c.$$

Například $\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ na $\mathbb{R}$.

Věta 5.2 (spojitá funkce má primitivní funkci)
Je-li I neprázdný otevřený interval a funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je na I spojitá, pak má f na I primitivní funkci.

Důkaz. Dokážeme pomocí Riemannova integrálu v letní semestru. $\square$

Poznámka. Protože derivování zachovává lineární kombinace, zachovává je i operace primitivní funkce: když je na intervalu I funkce F primitivní k f a G je primitivní ke g, pak je pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkce $\alpha F + \beta G$ na intervalu I primitivní k $\alpha f + \beta g$.

Tabulka primitivních funkcí

Vzorce pro derivace elementárních funkcí přečtené opačným směrem nám okamžitě poskytnou vzorce pro primitivní funkce.

1. Necht $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, potom na intervalu $(0, +\infty)$ platí

   $$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c.$$

   Pokud $\alpha \in \mathbb{Z}$ a $\alpha < -1$, platí tento vztah na každém z intervalů $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Pokud $\alpha \in \mathbb{N}_0$, platí tento vztah na $\mathbb{R}$.

2. Na každém z intervalů $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ platí, že

   $$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c.$$

3. Na $\mathbb{R}$ máme

   $$\int \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e}^x + c.$$

4. Na $\mathbb{R}$ máme

   $$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \quad \text{a} \quad \int \cos x\, dx = \sin x + c.$$

5. Na každém intervalu $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, máme
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c.$$
6. Na každém intervalu $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, máme
$$\int -\frac{dx}{\sin^2 x} = \cot x + c.$$
7. Na $\mathbb{R}$ máme
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c.$$
8. Na intervalu $(-1, 1)$ máme
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c.$$

Věta 5.3 (funkce s primitivní funkcí má Darbouxovu vlastnost) *Má-li funkce $f : I \to \mathbb{R}$, kde $I = (a, b)$ je otevřený interval, na I primitivní funkci, je obraz $f(I)$ též interval. Funkce f má tedy Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Nechť F je primitivní k f na I a $c \in \mathbb{R}$ je číslo ležící mezi dvěma hodnotami funkce f, to jest $f(x_1) < c < f(x_2)$, kde x_1, x_2 jsou dva různé body z I. Budeme předpokládat, že $x_1 < x_2$, pro $x_1 > x_2$ se následující argument jednoduchým způsobem upraví (místo minima uvážíme maximum). Uvažme minimum funkce
$$H(x) = F(x) - cx$$
na intervalu $[x_1, x_2]$. H je na I a tedy i na $[x_1, x_2]$ spojitá a $[x_1, x_2]$ je kompaktní interval, H tedy nabývá minima v bodě $x^* \in [x_1, x_2]$ (Věta 3.8). H má na I derivaci
$$H'(x) = f(x) - c,$$
takže $H'(x_1) = f(x_1) - c < 0$ a $H'(x_2) = f(x_2) - c > 0$. To znamená, že pro malé $\delta > 0$ platí, že $x \in (x_1, x_1 + \delta) \Rightarrow H(x) < H(x_1)$ a $x \in (x_2 - \delta, x_2) \Rightarrow H(x) < H(x_2)$. Krajní body x_1 a x_2 tedy nejsou body minima a $x^* \in (x_1, x_2)$. Pak (Tvrzení 4.5) nutně $H'(x^*) = 0$, čili
$$f(x^*) - c = 0$$

a $f(x^*) = c$. Číslo c je tedy také hodnotou funkce f a proto f zobrazuje I opět na interval. $\square$

Poznámka. Darbouxova vlastnost (nabývání všech mezihodnot) funkce f je tedy nutnou podmínkou pro to, aby f měla primitivní funkci. Teď je jasné, proč funkce jako třeba $\operatorname{sgn}(x)$ na intervalu $(-1, 1)$ nemají primitivní funkci.

Počítání primitivních funkcí

Uvedeme dvě početní techniky pro určení primitivní funkce. První z nich je odvozena ze vzorce pro derivaci složené funkce a druhá ze vzorce pro derivaci součinu.

Věta 5.4 (o substituci)
Buďte dány funkce $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, přičemž φ má na (α, β) vlastní první derivaci.

1. *Nechť je funkce $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ na intervalu (a, b) primitivní k funkci $f(x)$. Pak na intervalu (α, β) platí, že*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + c.$$

2. *Nechť je funkce $G : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ na intervalu (α, β) primitivní k funkci $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ a navíc platí, že $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a $\varphi' \neq 0$ na (α, β). Pak na intervalu (a, b) platí, že*

$$\int f(x)\, dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c.$$

Důkaz. 1. Stačí zpětně přečíst vzorec pro derivaci složené funkce:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

takže $F(\varphi(t))$ je na (α, β) primitivní k $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

2. Dodatečný předpoklad o funkci φ říká, že její derivace je na (α, β) buď stále kladná nebo stále záporná (kdyby φ' na (α, β) měnila znaménko, podle Věty 5.3 by na tomto intervalu musela nabýt hodnotu 0). Funkce φ je tedy na (α, β) rostoucí nebo klesající (Věta 4.11) a má inverzní funkci

$\varphi^{-1}: (a,b) \to (\alpha,\beta)$. Vzorce pro derivování složené funkce a pro derivování inverzní funkce dávají

$$
\begin{aligned}
(G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \\
&= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Funkce $G(\varphi^{-1}(x))$ je tedy na (a,b) primitivní k $f(x)$. □

Příklady. Z primitivní funkce $\int f(x)\, dx$ můžeme tedy vypočítat primitivní funkci $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$ a naopak. Uvedeme dva příklady, na oba směry výpočtu.

1. Nechť

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

na intervalu I a $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a \neq 0$. Pak, podle bodu 1 předchozí věty,

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot(ax+b)'\, dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c.$$

2. Chceme nalézt primitivní funkci k $\sqrt{1-x^2}$ na intervalu $x \in (-1,1)$. Použijeme substituci $x = \sin t$, kde $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Inverzní funkce zde je $t = \arcsin x$. Podle bodu 2 předchozí věty tím náš problém převedeme na

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot(\sin t)'\, dt = \int \cos^2 t\, dt.$$

Protože platí rovnost $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$, na $\mathbb{R}$ máme

$$\int \cos^2 t\, dt = \int (1/2 + \cos(2t)/2)\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + c.$$

Celkem, na intervalu $(-1,1)$,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + c \\
&= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c,
\end{aligned}
$$

kde jsme použili vztah $\sin(2x) = 2(\sin x)(\cos x) = 2(\sin x)\sqrt{1-\sin^2 x}$.

Věta 5.5 (integrace per partes)
Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu (a,b) a funkce F a G jsou k nim na (a,b) primitivní. Potom i funkce fG a Fg mají na (a,b) primitivní funkce a na (a,b) platí identita

$$\int f(x)G(x)\ dx + \int F(x)g(x)\ dx = F(x)G(x) + c,$$

tj. součet funkce primitivní k fG a funkce primitivní k Fg je až na aditivní konstantu roven funkci FG.

Důkaz. Funkce fG a Fg jsou na (a,b) spojité a existence funkcí k nim primitivních plyne z Věty 5.2 (kterou jsme zatím nedokázali). Identita vyplývá z Leibnizovy formule pro derivaci součinu: z

$$(FG)' = fG + Fg$$

plyne, že FG je na (a,b) primitivní k $fG + Fg$, takže

$$\begin{aligned}\int f(x)G(x)\ dx + \int F(x)g(x)\ dx &= \int (f(x)G(x) + F(x)g(x))\ dx \\ &= F(x)G(x) + c.\end{aligned}$$

□

Příklady. Pokud tedy známe primitivní funkci $\int F(x)g(x)\ dx$, můžeme vypočítat i primitivní funkci $\int f(x)G(x)\ dx$:

$$\int f(x)G(x)\ dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\ dx.$$

Uvedeme dva příklady. V obou pracujeme na celém $\mathbb{R}$.

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Víme, že $I_1 = \arctan x + c$. Odvodíme rekurentní vzorec pro primitivní funkce I_n. Funkci $(1+x^2)^{-n}$ napíšeme jako $x' \cdot (1+x^2)^{-n}$. Takže

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\ dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right)\ dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}).\end{aligned}$$

Dostáváme rekurenci

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n(1+x^2)^n} + (1 - 1/2n)I_n.$$

Odtud máme $I_1 = \arctan x + c$, $I_2 = \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + c$ atd.

2. Abychom spočetli

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \, dx,$$

opakovaně píšeme e^x jako $(\mathrm{e}^x)'$. Tedy

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin x \, dx &= \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \, dx \\ &= \mathrm{e}^x \sin x - \left(\mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x (-\sin x) \, dx\right).\end{aligned}$$

Odtud dostáváme rovnici

$$2\int \mathrm{e}^x \sin x \, dx = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + c,$$

takže

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \, dx = \frac{\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)}{2} + c.$$

Integrace racionálních funkcí

Racionální funkce $f(x)$ je podíl dvou reálných polynomů,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Chápeme ji jako zobrazení $f: \mathbb{R}\backslash K \to \mathbb{R}$, kde $K = \{\alpha \in \mathbb{R} : Q(\alpha) = 0\}$ je množina *(reálných) kořenů* polynomu Q ve jmenovateli f. Pro $\alpha \in K$ není hodnota $f(\alpha)$ definovaná.

Příklad. Racionální funkce

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \frac{x-1}{1} = x - 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

se shodují jako zobrazení všude s vyjímkou bodu 1, kde první z nich není definovaná.

Budeme hledat primitivní funkci k obecné racionální funkci

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} : \ I = (a, b) \to \mathbb{R},$$

kde interval I neobsahuje žádný kořen jmenovatele Q. Funkce $f(x)$ je na I spojitá a podle Věty 5.2 tam má primitivní funkci. Dá se tato primitivní funkce vyjádřit vzorečkem? ANO, ale tento vzoreček dokážeme napsat, jen když známe reálné i komplexní kořeny polynomu Q.