Matematická analýza na varietách

Lukáš Krump

Vladimír Souček

Jakub A. Těšínský

Předmluva

Předkládaná skripta jsou záznamem přednášky „Úvod do analýzy na varietách“, kterou měl v létech 1990 – 1995 na MFF UK jeden z autorů. V současných studijních předpisech patří tato přednáška do studijních plánů několika studijních směrů. Je proto užitečné mít k dispozici text přednášky ve tvaru, v jakém se nyní přednáší. Text skript se snaží zároveň zachovat styl přednášky, včetně úvodní neformální kapitoly, kterou přednáška začíná.

Tato skripta nejsou jediná, která obsahují základní pojmy týkající se variet a diferenciálních forem. Starší skripta O. Kowalského [**13**] a jejich německá verze [**14**] tuto a další látku obsahuje, částečně je pokryta i v nových skriptech O. Kowalského o Riemannově geometrii [**15**]. Krátké shrnutí z úplně jiného pohledu lze najít také ve skriptech J. Lukeše a J. Malého [**16**] a v připravovaných skriptech J. Malého [**17**]. Stručný výčet základních definic a vět včetně mnoha příkladů je možno také nalézt ve skriptech Příklady z matematiky pro fyziky III [**12**].

Teorie variet a diferenciálních forem je základní součást diferenciální geometrie, která se dlouho vyvíjela od klasického souřadnicového popisu až k současnému bezsouřadnicovému jazyku. Ten je po svém pochopení a zažití velmi elegantní a účinný, ale na první poslech nesnadno srozumitelný. Ve většině současných textů je od začátku výklad veden pomocí bezsouřadnicových definic; navíc se současně zavádějí dva obtížné pojmy – varieta, resp. její tečný prostor a diferenciální formy. K tomu je ještě třeba současně vyložit základy multilineární algebry (která v současné není součástí základního kurzu lineární algebry v prvních dvou ročnících). Výsledkem často bývá dojem obtížnosti a těžké pochopitelnosti.

Tato skripta se liší od výše zmíněných textů tím, že nejdříve čtenáře seznámí s kalkulem diferenciálních forem na $\mathbb{R}^n$ a pak teprve zavádí pojem variety a užívá multilineární algebru k bezsouřadnicové definici diferenciálních forem a jejich integrace na varietách. Čtenář (resp. posluchač) si tak může nejdříve zvyknout na počítání s diferenciálními formami v souřadnicích a je pak pro něj lehčí s porozuměním přijmout abstraktnější výklad v následující kapitole. Dokázané vlastnosti diferenciálních forem na $\mathbb{R}^n$ (včetně Stokesovy věty) pak v následující kapitole umožní snadno dokázat analogická tvrzení pro formy na varietách.

Úvodní kapitola skript je odlišná od ostatních. Použitý způsob výkladu se liší od ostatních kapitol a připomíná spíš styl používaný běžně v matematické fyzice (předpoklady vět nejsou formulovány, důkazy nejsou formálně odděleny a jsou součásti výkladu). Jejím cílem je ukázat čtenáři, jaké důvody vedou k pojmům studovaným v dalších kapitolách, proč jsou přirozené a jak se dají odvodit postupy běžnými v matematice, resp. fyzice.

Běžná precizní formulace matematických textů je obvykle závěrečným stádiem vývoje, který vede k nejlépe formulovaným pojmům a k nejkratšímu a nejelegantnějšímu způsobu dokazování jejich vlastností. Výsledek je sice formálně dokonalý a esteticky velice působivý, ale velmi často neobsahuje podstatné části intuitivního pochopení, které bylo nutné při vytváření odpovídající teorie. Čtenáři je obvykle při prvním seznámení s oborem nepochopitelné, jak vlastně taková teorie mohla vůbec vzniknout. Hlavním cílem úvodní kapitoly je tedy ilustrovat, jak je možné teorii diferenciálních forem a obecnou Stokesovu větu vyvodit z několika jednoduchých a názorných geometrických obrázků. Na konci této kapitoly by měl čtenář intuitivně chápat, jak musí definice diferenciálních forem vypadat, jaké označení je výhodné (to je velmi důležitá součást teorie!) a které jsou nejdůležitější vlastnosti zaváděných symbolů a pojmů. Formalizmus diferenciálních forem v $\mathbb{R}^n$ a definice jejich integrace je zřejmá realizace programu vysvětleného v úvodní kapitole. Třetí kapitola se svým formálně perfektním (ale už abstraktním) výkladem pak čtenáři poskytne tu správnou matematickou formulaci celé teorie nejen na $\mathbb{R}^n$, ale i na obecných varietách a zároveň přidá přesný matematický smysl formálním symbolům („dx_i“) užívaným v předchozích kapitolách. Výsledná elegantní teorie diferenciálních forem na varietách je v současné době standardně a bez dalšího komentáře používaná ve většině matematické literatury a patří mezi základní kameny matematického vzdělání.

Skripta obsahují mnoho příkladů spolu s návody, výsledky, ev. řešeními. Úvodní dvě kapitoly a tyto příklady snad přispějí k tomu, aby formální konstrukce prezentovaná ve třetí kapitole nebyla jen nesrozumitelnými, formálními „písmenky", ale aby se spojila čtenáři s předchozím intuitivním vysvětlením v jeden srozumitelný celek.

Skripta jsou opravdu jen úvodem do analýzy na varietách a z celé teorie je zde vyloženo nezbytné minimum; obsahují jen tolik látky, kolik je možné srozumitelně vyložit během jednoho semestru (dvě hodiny týdně). Celá teorie existuje za obecnějších předpokladů (zde jsou všechny formy hladké, integrace je definována jen přes kompaktní variety). Mnoho dalších důležitých pojmů a vlastností (např. Lieovy derivace tenzorových polí, distribuce a jejich integrabilita) zde chybí. Další krásné partie z diferenciální geometrie (Riemannovy variety, fibrované prostory, konexe) nebo z globální analýzy (eliptické operátory na kompaktních varietách, Atiyah-Singerova věta o indexu) nebo z harmonické analýzy na homogenních prostorech čekají na zájemce v další literatuře (např. viz [**6**], [**9**], [**11**], [**13**], [**14**], [**18**], [**21**]).

Leden 1998
L. Krump, V. Souček, J. A. Těšínský

Předmluva ke druhému vydání

Druhé vydání skript je opravenou verzí vydání prvního. Text byl zachován bez větších změn, byly však do něj zapracovány zejména opravy drobných i větších chyb a nedodělků, na které jsme během používání skript přišli buď sami nebo nás na ně upozornili naši studenti několika různých ročníků. Děkujeme těmto studentům za výraznou pomoc, která svědčí o tom, že skripta důkladně čtou a jsou jim tedy dobrým pomocníkem ve studiu.

Na konci skript jsme rovněž doplnili několik nových bibliografických odkazů, z nichž bychom rádi upozornili zejmnéna na nové vydání klasické Conlonovy knihy [**5**], které je našemu pojetí velice blízké, avšak má širší záběr. Rovněž upozorňujeme na anglickou verzi Jänichovy knihy [**10**] a nové vydánín Kowalského skript [**15**].

Doufáme, že skripta zůstanou i nadále kvalitním průvodcem studentů po analýze na varietách.

Září 2002
autoři

Adresy autorů:
L.K.: Matematický ústav Univerzity Karlovy, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8,
e-mail: krump@karlin.mff.cuni.cz
V.S., Matematický ústav Univerzity Karlovy, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8,
e-mail: soucek@karlin.mff.cuni.cz
J.A.T., Grafická 30, 150 00 Praha 5,
e-mail: gorn@karlin.mff.cuni.cz

Obsah

Kapitola I

Úvod

1. Stokesova věta v $\mathbb{R}^3$

Newtonův vzorec v $\mathbb{R}^1$

Důležité matematické teorie mívají obvykle základ v několika jednoduchých, intuitivně pochopitelných a názorných myšlenkách. Někdy se dokonce stává, že takováto základní idea je vodítkem pro vytvoření takovéto teorie. Tak se vlastně tvoří většina zajímavé matematiky. Hledat tyto ideje, nacházet nečekané souvislosti a pracovat na intuitivní úrovni patří mezi zábavu a potěšení matematiků. Vypracovat z jádra matematické myšlenky přesné definice pojmů, tvrzení a věty o nich je spíš práce jako každá jiná. Kalkulus diferenciálních forem je příkladem, na kterém se výše uvedená tvrzení dají velmi dobře ilustrovat. Cílem tohoto úvodu je ukázat, že stačí znát základní informace o integraci funkcí a nechat si klidnou chvíli na přemýšlení o možných analogiích integrace funkcí ve vyšších dimenzích. Výsledek může při troše štěstí a matematické intuici být velmi zajímavý – několik obrázků, ze kterých vše ostatní (při vynaložení příslušné práce a úsilí) již více méně plyne.

Začněme tedy popisem toho, co je netriviální matematický nápad, záblesk analogie či systému, rozšiřujícího již známé věci. Z integrálního počtu je potřeba jen to základní – Newtonova formule pro výpočet určitého integrálu pomocí primitivní funkce:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Tahle formulka se dá obracet z mnoha stran. Zkusme to geometricky. Na levé straně rovnice je integrál z derivace funkce f ve všech bodech úsečky $\langle a, b\rangle$. Napravo hodnoty funkce f v krajních bodech úsečky. To vše pro funkce na úsečce, tj. podmnožině $\mathbb{R}$. Je možné najít něco analogického také pro funkce na $\mathbb{R}^2$?

Analogie Newtonova vzorce v $\mathbb{R}^2$

Co když člověka třeba napadne, že množina $\{a, b\}$, v níž uvažujeme hodnoty f, je právě hranicí úsečky $\langle a, b\rangle$? V $\mathbb{R}^2$ je místa dost hned na dvě analogie – první je otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a křivka $<\!\varphi\!> = \partial\Omega$, která tvoří hranici Ω; druhou je křivka $<\!\varphi\!>$ a její okraj, tj. její koncové body (viz obr. 1). V Newtonově větě jsou potřeba tyto pojmy – „funkce“ f, její „derivace“ f', integrál f' přes úsečku a „hodnoty“ f v bodech hranice. Je možné definovat analogie těchto čtyř pojmů tak aby platila analogie Newtonova vzorce pro $\varphi, \partial\varphi$, resp. $\Omega, \partial\Omega$?

1.1. Křivka a její hranice v $\mathbb{R}^2$.

To nejjednodušší, co lze zkusit je křivka φ a její dvoubodová hranice. Nejdřív ještě kontrolní otázku – co je to vlastně křivka. Intuitivní odpověď je jasná – prostě křivá čára v rovině, jednodimenzionální podmnožina $\mathbb{R}^2$. Trochu přesnější vyjádření může být, že křivka $<\!\varphi\!>$ je obraz $\varphi(\langle a, b\rangle)$ jednodimenzionálního intervalu $\langle a, b\rangle$ při (hladkém) zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ (viz obr. 2). Aby se vyloučil degenerovaný případ (např. konstantního zobrazení), je třeba přidat nějakou podmínku regularity pro φ. To je velmi uspokojivé, ale má to jednu vadu – mnoho zobrazení φ má tentýž obraz; jedna podmnožina $<\!\varphi\!>$ má nekonečně mnoho parametrizací. Pro tuto chvíli však akceptujeme právě uvedenou definici křivky a k otázce parametrizací se vrátíme později. Jen si zapamatujeme, že naše hledané pojmy by pokud možno neměly záviset na volbě parametrizace křivky, aby výsledné tvrzení mělo opravdu geometrický obsah.

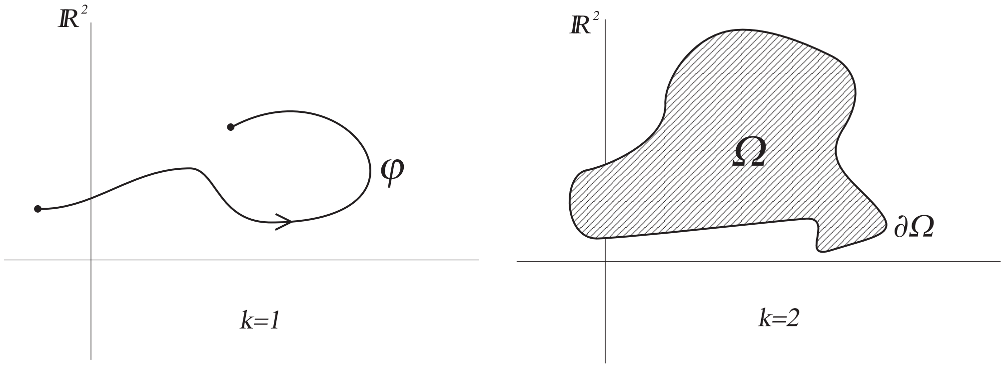
Na začátku úvahy je tedy jasné, že křivka $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ je analogií intervalu a její koncové body $\varphi(a), \varphi(b)$ analogií koncových bodů $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. Funkce f na okolí $U; \langle a, b\rangle \subset U \subset \mathbb{R}$ lze zřejmě nahradit funkcí f na okolí $U; <\!\varphi\!> \subset U \subset \mathbb{R}^2$. To co zbývá, je nalézt, co je to „derivace Df“ a jak je třeba definovat integrál $\int_\varphi Df$ tak, aby platilo

$$\int_\varphi Df = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$

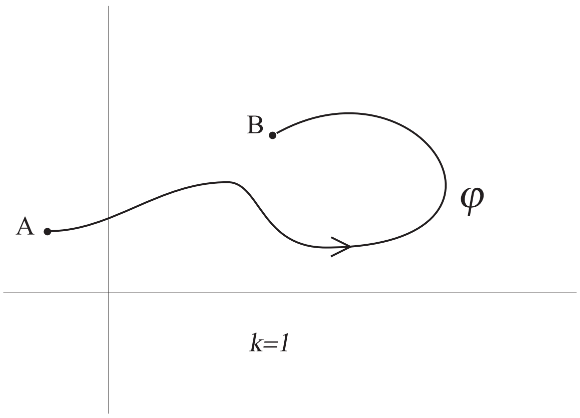
Tady by náš zvědavý matematik asi strávil kratší či delší dobu přemýšlením, aby ho nakonec napadlo použít parametrizaci φ naší křivky a přenést problém do $\mathbb{R}$, kde ho už vyřešil Newton. Vskutku, pro zobrazení $f \circ \varphi$ na $\langle a, b\rangle$ platí

$$\int_{\langle a,b\rangle} (f \circ \varphi)' = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) \tag{1}$$

a tak stačí vzít levou stranu jako definici $\int_\varphi Df$ (což zároveň naznačuje velmi dobře, co Df musí být) a hledané tvrzení platí.



Obrázek 1. Křivka a její okraj – koncové body, otevřená množina a její okraj – křivka



Obrázek 2. Křivka a její parametrizace

Uvedený první příklad dobře ilustruje obecný postup. Již známé věty v dimenzi 1 využitím parametrizace jako přechod z vyšších dimenzí do nižších vedou přirozeně k nalezení správné analogie i toho, co je „derivace funkce“ i toho, co je integrál z této derivace. Navíc máme zadarmo návrh důkazu této nové věty.

V našem případě křivky v $\mathbb{R}^2$ stačí podívat se na závěr na levou stranu vztahu (1):

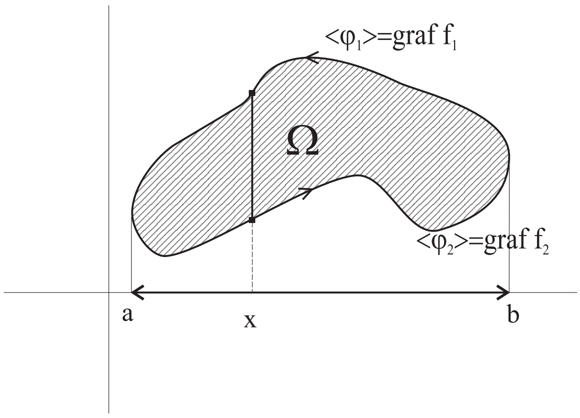
$$\int_{\langle a,b\rangle} (f \circ \varphi)'\, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \frac{d\varphi_i}{dt}(t)\, dt.$$

Z ní je vidět, že správná analogie „derivace f“ je **gradient** $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2})$, a je to tedy vektorové pole v $\mathbb{R}^2$ a ne funkce jako v dimenzi 1.

Dále je také ihned vidět, že správná definice „integrálu“ $\int_\varphi \vec{F} d\vec{s}$ vektorového pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ podél křivky $<\varphi>$ je

$$\int_\varphi \vec{F} d\vec{s} \equiv \int_\varphi F_1 dx_1 + F_2 dx_2 := \int_a^b [\sum_{i=1}^{2} F_i(\varphi(t)) \frac{d\varphi_i}{dt}(t)] dt.$$

Výsledkem je tzv. věta o potenciálu vektorového pole.



Obrázek 3. Odvození Greenovy věty

1.2. Věta [o potenciálu]. *Nechť* $\varphi : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *je hladké zobrazení, nechť* U *je hladká funkce na okolí množiny* $\varphi(\langle a, b\rangle)$. *Pak*

$$\int_\varphi \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = U(\varphi(b)) - U(\varphi(a)).$$

Ta (podobně jako Newtonova věta) říká, že integrál podél $<\varphi>$ z vektorového pole $\vec{F}$, které je gradientem funkce U (U se obvykle nazývá potenciálem vektorového pole $\vec{F}$), se vypočte jako rozdíl hodnot potenciálu U v koncových bodech křivky φ.

1.3. Oblast a její hranice v $\mathbb{R}^2$.

Zkusme, jestli nyní nebude možné odvodit takovýmto způsobem analogii předchozích dvou vět i v případě oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a její hranice $\partial\Omega$. Dvojný integrál z funkce přes oblast Ω je standardní integrál. Co se týče pravé strany budoucí rovnice, objekt za integračním znamením (analogie „funkce“) není apriori jasný.

Přirozená a nabízející se možnost je považovat za „funkci“ vektorové pole a za její integrál právě definovaný křivkový integrál z vektorového pole. V rovnosti

$$\int\int_\Omega DF = \int_{\partial\Omega} F_1 dx_1 + F_2 dx_2$$

zbývá tedy zjistit, co znamená „derivace“ DF pod integrálem nalevo (a dokázat pak příslušnou rovnost). Nedá se pochybovat o tom, že DF by měla být jedna z myslitelných parciálních derivací komponent F_1, F_2 nebo jejich vhodná kombinace.

Zkusme štěstí a podívejme se, co se dá říct o integrálu

$$\int\int_\Omega \frac{\partial F_1}{\partial x_2}.$$

Pro naše účely můžeme předpokládat, že oblast Ω má jednoduchý tvar – že existují dvě hladké funkce f_1, f_2, definované na intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že

$$\Omega = \{[x_1, x_2]; x_1 \in \langle a, b\rangle,\ f_2(x_1) \le x_2 \le f_1(x_1)\},$$

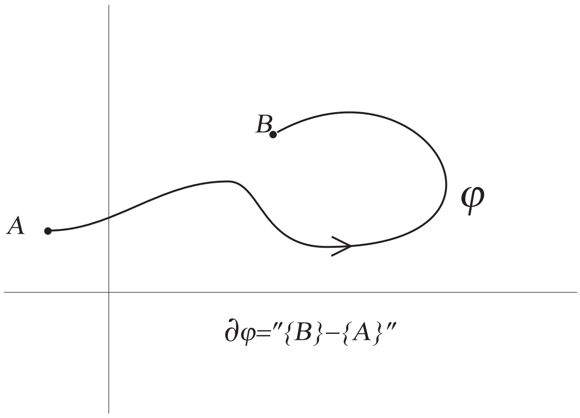
jak je znázorněno na obrázku 3.

Fubiniova věta říká, že

$$\int\int_\Omega \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \int_a^b (\int_{f_2(x_1)}^{f_1(x_1)} \frac{\partial F_1}{\partial x_2})dx_2)dx_1 = \int_a^b [F_1(x_1, f_1(x_1)) - F_1(x_1, f_2(x_1))]dx_1.$$

Budeme-li definovat křivky φ_1, φ_2 na $\langle a, b\rangle$, pomocí

$$\varphi_1(t) = (t, f_1(t));\ \varphi_2(t) = (t, f_2(t)),$$



OBRÁZEK 4. Orientace křivky

pak „rozdíl“ $\varphi_2 - \varphi_1$ popisuje (aspoň intuitivně) hranici $\partial\Omega$ a podle definice křivkového integrálu z vektorového pole

$$\int_a^b [F_1(x_1, f_1(x_1)) - F_1(x_1, f_2(x_1))]dx_1 = \int_{\varphi_2} F_1 dx_1 - \int_{\varphi_1} F_1 dx_1 = \int_{„\varphi_2\ -\ \varphi_1“} F_1 dx_1 .$$

Platí tedy, že

$$\int_\Omega \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \int_{<\partial\Omega>} F_1 dx_1 ,$$

pokud snad v nějakém rozumném smyslu platí $\partial\Omega = \varphi_2 - \varphi_1$. (Analogicky se získá vzorec pro zaměněné souřadnice.)

Tím jsme narazili na velmi delikátní bod celé konstrukce. Při troše pozornosti jsme si ho mohli všimnout již dříve. Hranice křivky je tvořena dvěma body. Z jakéhosi nejasného důvodu jsme „integrál“ přes tuto hranici nenapsali jako součet funkčních hodnot dané funkce, jak by bylo přirozené, ale jako jejich rozdíl. Geometrická představa křivky a její hranice tedy zřejmě není zcela přesná. I když se rozhodneme pro rozdíl funkčních hodnot v krajích bodech místo jejich součtu, zbyde pořád ještě problém, který z krajních bodů se vezme se znaménkem plus a který se znaménkem minus. To musí nějak souviset s křivkou, přes kterou integrujeme na levé straně vztahu. Křivka tedy není jen nějaká „jednodimenzionální“ podmnožina, ale musíme mít navíc nějakou strukturu, která by odlišila od sebe její koncové body. Jednoduché řešení je vzít křivky „orientované“, tj. ty které mají určen směr probíhání (obvykle se kreslí se šipkou naznačující směr probíhání – viz obr. 4).

Je-li φ takto orientovaná křivka, víme jednoznačně, který bod je počáteční a který je koncový. V tomto smyslu orientace křivky určuje orientaci její hranice (kde orientací bodu myslíme přidání znaménka $\pm$, které určuje znaménko příslušné funkční hodnoty). Všimněte si zároveň, že při změně orientace křivky se změní znaménko integrálu vektorového pole přes křivku.

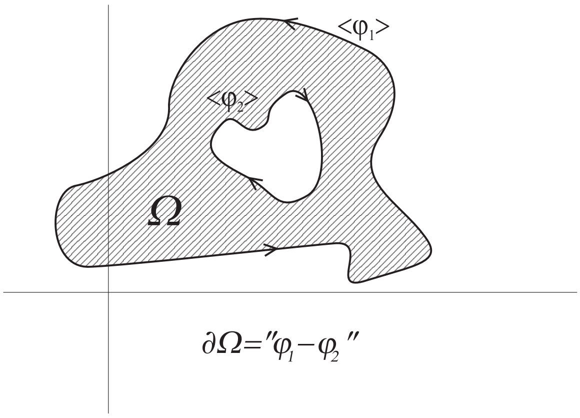
Podobně v případě Ω a $\partial\Omega$ se musíme rozhodnout, jak budeme definovat orientaci $\partial\Omega$. Pokud ji budeme definovat proti směru hodinových ručiček pro vnější okraj a po směru hodinových ručiček pro vnitřní okraj (viz obr. 5) a přidáme-li konvenci, že integrál přes opačně orientovanou parametrizaci je opačný, pak jsme dokázali tvrzení

1.4. Věta [Greenova]. *Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^2$ a nechť $\partial\Omega$ je její orientovaná hranice (viz obr. 5), pak pro hladké vektorové pole $\vec{F}$ v okolí $\overline{\Omega}$ platí*

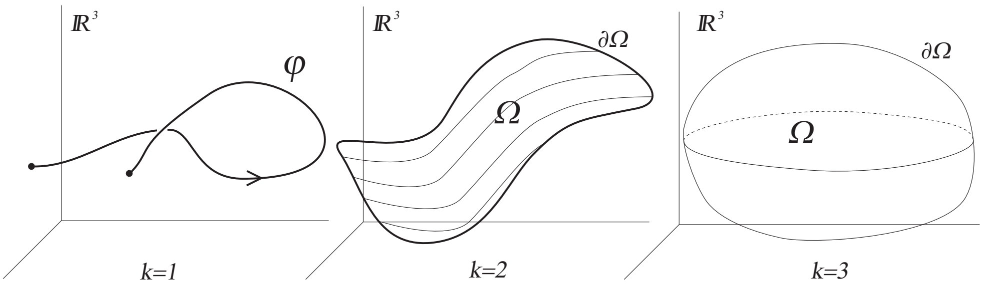
$$\int_\Omega \left[\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right] dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 .$$

Analogie Newtonova vzorce v $\mathbb{R}^3$

V trojrozměrném prostoru je místo na tři různé typy obrázků (viz obr. 6).



Obrázek 5. Orientace okraje oblasti Ω



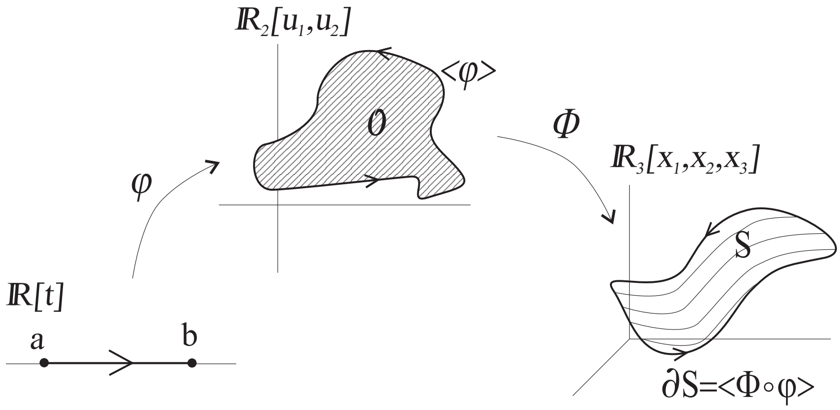
Obrázek 6. Křivka, plocha a oblast v $\mathbb{R}^3$

1.5. Křivka a její hranice v $\mathbb{R}^3$.
Zcela obdobně jako v $\mathbb{R}^2$ se odvodí věta o potenciálu v $\mathbb{R}^3$:

1.6. Věta [o potenciálu]. *Nechť $\varphi : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je hladké zobrazení, nechť U je hladká funkce na okolí U množiny $\varphi(\langle a, b\rangle)$. Pak*

$$\int_\varphi \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3}dx_3\right) = U(\varphi(b)) - U(\varphi(a)).$$

1.7. Plocha a její hranice v $\mathbb{R}^3$.
Nejzajímavější je případ plochy v prostoru. Podobně jako tomu bylo pro křivky, také plocha pro nás bude nejen jakási podmnožina v prostoru mající „dimenzi 2“, ale množina i s její parametrizací. Přesněji, řekneme, že $S = \Phi(\mathcal{O})$ je dvoudimenzionální parametrická plocha, pokud $\mathcal{O}$ je otevřená podmnožina v rovině a $\Phi : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^3$ je hladké zobrazení, definované v nějakém okolí uzávěru $\mathcal{O}$. Předpokládejme dále, že hranice $\partial\mathcal{O}$ je popsána kladně orientovanou (proti směru hodinových ručiček) křivkou φ, tj. $\varphi(\langle a, b\rangle) = \partial\mathcal{O}$. Zkusme opět, jako v nahoře, přenést celý problém pomocí paramatrizace do roviny a použít Greenovu větu. Kupodivu, je to možné a řekne nám to vše potřebné. Jen už je k tomu potřeba trochu počítání. Pro zjednodušení zápisu budeme používat vektorové označení $\vec{F}, \vec{x}$ a $\langle \vec{F}, \vec{x}\rangle = \sum_1^3 F_i x_i$. Vyjdeme z toho, že vhodný objekt pro integraci přes „okraj“ $\partial S = \Phi\circ\varphi(\langle a, b\rangle)$ (pozor – není to topologická hranice!) plochy $S = \Phi(\mathcal{O})$ (viz též obr. 7), tj. přes křivku v $\mathbb{R}^3$, je vektorové pole $\vec{F}$.



Obrázek 7. Plocha a její hranice v $\mathbb{R}^3$

$$\int_{\Phi\circ\varphi}[F_1dx_1+F_2dx_2+F_3dx_3] = \int_a^b \langle \vec{F}, \frac{d\vec{x}}{dt}\rangle dt =$$

$$= \int_a^b \left[\langle \vec{F}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_1}\rangle\frac{du_1}{dt} + \langle \vec{F}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_2}\rangle\frac{du_2}{dt}\right] dt = \int_\varphi f du_1 + g du_2,$$

kde

$$f = \langle \vec{F}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_1}\rangle; \quad g = \langle \vec{F}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_2}\rangle.$$

Podle Greenovy věty je tedy tento integrál roven

$$\int\int_{\mathcal{O}} \left[\langle\frac{\partial\vec{F}}{\partial u_1}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_2}\rangle + \langle\vec{F}, \frac{\partial^2\vec{x}}{\partial u_1\partial u_2}\rangle - \langle\frac{\partial\vec{F}}{\partial u_2}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_1}\rangle - \langle\vec{F}, \frac{\partial^2\vec{x}}{\partial u_1\partial u_2}\rangle\right] du_1\, du_2 =$$

$$= \int\int_{\mathcal{O}} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial x_j}{\partial u_1}\right) du_1 du_2 =$$

$$= \int\int_{\mathcal{O}} \left(\sum_{i,j;i\neq j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial x_j}{\partial u_1}\right)\right) du_1 du_2 =$$

$$= \int\int_{\mathcal{O}} \left[G_1 \det\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2)} + G_2 \det\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u_1,u_2)} + G_3 \det\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u_1,u_2)}\right] du_1 du_2,$$

kde

$$G_1 := \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}; \quad G_2 := \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}; \quad G_3 := \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2};$$

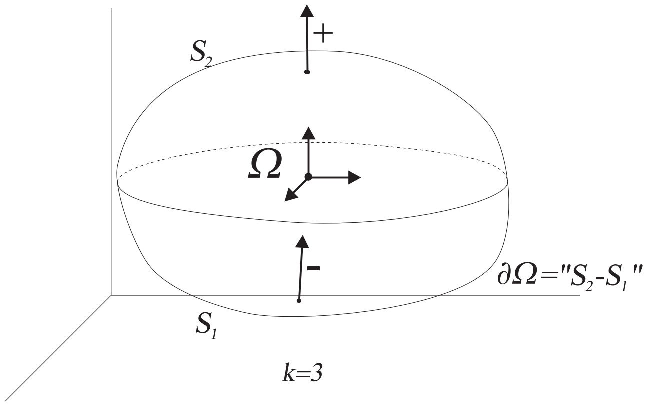
$$\det\frac{\partial(x_i,x_j)}{\partial(u_1,u_2)} := \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial x_j}{\partial u_1}; \quad i \neq j.$$

To vede k následující definici:

1.8. Definice rotace. Je-li $\vec{F}$ vektorové pole, pak definujeme **rotaci** $\operatorname{rot}\vec{F}$ pole $\vec{F}$ jako vektorové pole

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}; \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}; \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2};\right) = „\frac{\partial}{\partial\vec{x}}“ \times \vec{F}.$$

Je-li $S = \Phi(\mathcal{O})$ dvoudimenzionální parametrická plocha a $\vec{F}$ je hladké vektorové pole na okolí uzávěru S, pak definujme plošný integrál $\int_S \vec{F}d\vec{S}$ z $\vec{F}$ přes plochu S takto:



OBRÁZEK 8. Oblast Ω v $\mathbb{R}^3$ a její hranice $\partial\Omega = S_2 - S_1$

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} \equiv \int_S F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2 :=$$
$$:= \int_{\mathcal{O}} \left[(F_1 \circ \Phi) \det \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)} + (F_2 \circ \Phi) \det \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u_1, u_2)} + (F_3 \circ \Phi) \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right] du_1 du_2$$

Později si ukážeme, že takto definovaný integrál nezávisí na volbě parametrizace, ale že jeho znaménko závisí na volbě orientace plochy, což je pojem, který je třeba v budoucnu přesněji definovat, stejně jako symbol $\wedge$, který je v definici plošného integrálu zatím bez významu.

Právě uvedený výpočet je tedy důkazem následující věty.

1.9. Věta [Stokes]. *Je-li $\vec{F}$ hladké vektorové pole v okolí plochy S v $\mathbb{R}^3$, pak*

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} = \int_{\partial S} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$$

1.10. Oblast a její hranice v $\mathbb{R}^3$.

Zkusme si nyní rozmyslet ještě poslední případ, který může nastat v trojrozměrném prostoru – oblast Ω v $\mathbb{R}^3$ a její hranice $\partial\Omega$ (viz obr. 8).

Uvažujme jednoduchý případ, kdy je oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ohraničena zdola i shora grafem funkce, tj.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; f_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq f_2(x_1, x_2)\}.$$

Předpokládejme dále, že je v okolí uzávěru Ω dáno vektorové pole $\vec{F}$.

Pak (opět s použitím Newtonova vzorečku) vypočteme pomocí Fubiniho věty

$$\int\int\int_\Omega \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \int\int \left[\int_{f(x_1,x_2)}^{f(x_1,x_2)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 \right] dx_1 dx_2 =$$
$$= \int\int [F_3(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)) - F_3(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2))] \, dx_1 dx_2 =$$
$$= \int_{S_2} F_3 dx_1 \wedge dx_2 - \int_{S_1} F_3 dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\partial\Omega} F_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

kde jsme použili výše definovaný plošný integrál z vektorového pole a vzali jsme v úvahu, že plocha S_2 je orientována pomocí vnější normály a plocha S_1 je orientována pomocí vnitřní normály. Plocha $\partial\Omega$ je tedy orientována pomocí vnější normály všude.

Přesně stejný výpočet lze provést pro derivace $\frac{\partial F_2}{\partial x_2}$ a $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$.

To vede k následující definici:

1.11. Definice divergence. Je-li $\vec{F}$ vektorové pole, pak definujeme **divergenci** div $\vec{F}$ pole $\vec{F}$ jako funkci

$$\operatorname{div}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right).$$

Výše uvedený výpočet je pak důkazem následující věty.

1.12. Věta [Gauss-Ostrogradski]. *Je-li $\vec{F}$ hladké vektorové pole v okolí uzávěru $\overline{\Omega}$, pak*

$$\int_\Omega [\operatorname{div}\vec{F}]dx_1dx_2dx_3 = \int_{\partial\Omega} \vec{F}d\vec{S}.$$

Vyšší dimenze

Je vidět, že tento způsob odvozování skutečně funguje a je snadné si představit, jak postupovat dál, do dimenze 4 a vyšších. Na druhou stranu nelze takto probrat všechny případy jeden po druhém, neboť jich je nekonečně mnoho. To je další místo, kde má matematik příležitost projevit svoje matematické nadání a intuici. Je totiž teď třeba v dosud známých případech najít nějaký systém, který by umožnil popsat obecný případ konečné, leč libovolné dimenze. Hledání zákonitostí, struktury, vytváření abstraktních struktur ze známých speciálních případů – to je pravá práce (a potěšení) pro matematika.

Pokud by snad dosud známé případy (dimenze 1, 2 a 3) nestačily, je vždy možné se ještě podívat na dimenzi 4, která je další na řadě. Zkusme si ale zopakovat to, co dosud víme a přemýšlet o možném systému.

Nejdříve údaje o integrálech v jednotlivých dimenzích a objektech, stojících pod znamením integrálu.

V prostoru $\mathbb{R}^2$:

(i) dimenze 0 – funkce f;
(ii) dimenze 1 – „vektorové pole“ $F_1dx_1 + F_2dx_2$;
(iii) dimenze 2 – „funkce“ $fdx_1dx_2 = fdx_1 \wedge dx_2$

V prostoru $\mathbb{R}^3$:

(i) dimenze 0 – funkce f;
(ii) dimenze 1 – „vektorové pole“ $F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3$;
(iii) dimenze 2 – „vektorové pole“ $F_1dx_2 \wedge dx_3 + F_2dx_3 \wedge dx_1 + F_3dx_1 \wedge dx_2$;
(iv) dimenze 3 – „funkce“ $fdx_1dx_2dx_3 = fdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Jistě by každý ze čtenářů už snadno odpověděl na otázku, kolik komponent mají integrované objekty v $\mathbb{R}^4$ pro jednotlivé případy (postupně $1, 4, 6, 4, 1$) nebo pro $\mathbb{R}^n$ a dimenzi k (kombinační číslo $\binom{n}{k}$). V tom je jasný systém.

Zajímavější a těžší je otázka, jaký je systém při definici „derivace“ objektu pod integrálem. Pro to je třeba si vyhradit ještě trochu času, zopakovat si základní informace získané nahoře, vzít si tužku a papír a spočítat si následujících několik jednoduchých příkladů.

Nejdříve opakování postatných bodů:

(i) Pro funkci $f = f(x_1, \dots, x_n)$ platí

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

To je „derivace“ funkce v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Symbol $\wedge$ pro násobení diferenciálu má následující fundamentální vlastnost:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$
$$dx_i \wedge dx_i = 0.$$

(iii) Platí $d(dx_i)) = 0$.
(iv) Vše je přirozeně lineární a distributivní.

Ukazuje se, že tyto vlastnosti už umožňují vypočítat „derivaci“ d objektů pod integračním znamením jednotným způsobem a tak, že souhlasí s výše uvedenými případy:
V $\mathbb{R}^2$ platí

$$d(F_1dx_1 + F_2d_2) = dF_1 \wedge dx_1 + dF_2 \wedge dx_2 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right)dx_1 \wedge dx_2.$$

V $\mathbb{R}^3$ platí

$$d(F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3) = dF_1 \wedge dx_1 + dF_2 \wedge dx_2 + dF_3 \wedge dx_3 =$$
$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

V $\mathbb{R}^3$ platí

$$\begin{aligned} d(F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2) = &\\ = dF_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dF_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + dF_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = &\\ = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 & \end{aligned}$$

Je zřejmé, že i ve zdánlivě nahodilé a různorodé definici „derivace“ objektu pod integračním znamením existuje v probraných případech jasná zákonitost a systém. Je z nich již snadné vyvodit obecnou abstraktní definici, platnou v jakékoliv dimenzi. To dává návod k definici de Rhamova diferenciálu d v následující kapitole.

Výše uvedené výpočty také ukazují jednotný systém, jak definovat integrál z diferenciálních forem pomocí jejich přenesení do prostoru parametrů. Je vidět, že základem je opět definice diferenciálu funkce (přenesení formy $f dx_i$ pomocí zobrazení $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je $(f \circ \varphi) d\varphi_i$) a vlastnosti vnějšího násobení: pokud $x_i = \varphi_i(u_1, u_2)$, pak např.

$$dx_i \wedge dx_j = \det \frac{\partial(\varphi_i, \varphi_j)}{\partial(u_1, u_2)} du_1 \wedge du_2 = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_2} du_2\right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} du_1\right)$$

To je zřejmá inspirace pro definici přenášení obecných diferenciálních forem pomocí hladkých zobrazení, zavedené v příští kapitole.

Tím již vlastně zábavná a potěšení přinášející část práce končí. Právě uvedená cvičení jasně ukazují, jak definovat nový druh násobení (vnější násobení), jak definovat objekty pod integrálem (budou se jmenovat diferenciální formy), jak definovat jejich „derivace“ (tzv. vnější diferenciál) a konečně jak definovat integrál z diferenciální formy (s užitím přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení). Pokud někdo odolal pokušení si text přečíst a podařilo se mu na uvedený systém přijít samostatně, jistě má za odměnu velmi příjemný pocit objevu něčeho nového a pěkného. Další část už je technika a práce – vytvořit ze všeho ucelený a přesný logický systém, napsat fungující definice pojmů, zvolit vhodné předpoklady a dokázat příslušné věty. Tuto část už (přinejmenším z časových důvodů) podrobně popisovat nebudeme, ale uvedeme již v příští kapitole rovnou hotový výsledek – teorii diferenciálních forem na $\mathbb{R}^n$, kterou pro nás připravili naši předchůdci. Po přečtení tohoto úvodu se snad budou zdát zaváděné pojmy srozumitelné a výstižné. Vrátíme-li se nazpět k začátku této kapitoly, je na čtenáři, aby posoudil, zda tvrzení tam uvedené (že nápad dívat se na Newtonovu formuli jako na integrál přes podmnožinu a její hranici a z toho vyplývající vícedimenzionální geometrické obrázky vedou v podstatě jednoznačně k teorii diferenciálních forem) je přehnané či nikoliv.

Pokud je toto ukázka, jak odvodí obecnou Stokesovu větu matematik, je třeba se zmínit, že také fyzikové odvodili svým způsobem tytéž pojmy a věty v trojdimenzionálním prostoru. Jejich motivace byla umět vypočítat práci vykonanou silou po zakřivené dráze či tok vektorového pole plochou. Podrobnosti je možné najít v následujích cvičeních.

Přirozených a struktuře odpovídajích pojmů a tvrzení není obvykle v dané struktuře příliš a tak není fakt, že odlišné způsoby odvozování přivedly i matematiky i fyziky k témuž, neobvyklý. Je to spíš věc, která se běžně stává.

Příklady, úlohy a cvičení

V následujících příkladech se podíváme na křivkový a plošný integrál prvního a druhého druhu způsobem, jakým se chápou a odvozují ve fyzice.

1.13. Práce síly podél dráhy.

Častou fyzikální úlohou je spočítat práci, kterou vykoná jistá (proměnlivá) síla $\vec{F}$ po jisté (zakřivené) dráze φ v prostoru $\mathbb{R}^n$. Je-li dráha přímá (a rovna vektoru $\vec{v}$) a síla konstantní, řekne nám středoškolská fyzika, že práce je rovna

$$W = \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle,$$

kde závorka značí skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

V případě zakřivené dráhy předpokládejme, že φ je regulární zobrazení z intervalu $\langle a, b\rangle$ do $\mathbb{R}^n$ (tj. φ' je všude v $\langle a, b\rangle$ definována a různá od nuly) a pro jednoduchost předpokládejme rovněž, že zobrazení φ je prosté. Křivku φ aproximujeme lomenou čárou procházející hodnotami φ v bodech dělení $\Delta : a = a_0, a_1, \ldots, a_N = b$. Potom přibližná práce je

$$W_\Delta = \sum_{i=1}^{N} \langle \vec{F}_i, \vec{v}_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle \vec{F}(\varphi(a_i)), \varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} F_j(\varphi(a_i))(\varphi_j(a_i) - \varphi_j(a_{i-1})).$$

Podle věty o střední hodnotě existují čísla ξ_i^j v intervalech $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ tak, že

$$\varphi_j(a_i) - \varphi_j(a_{i-1}) = \varphi_j'(\xi_i^j)(a_i - a_{i-1})$$

a tedy

$$W_\Delta = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} F_j(\varphi(a_i))\varphi_j'(\xi_i^j)(a_i - a_{i-1}).$$

Nyní si všimněme, že tento výraz je vlastně tzv. Riemannova suma příslušná k integrálu

$$\sum_{j=1}^{n} \int_a^b F_j(\varphi(t))\varphi_j'(t)\, dt. \tag{2}$$

Definujeme tedy nyní **křivkový integrál druhého druhu z vektorového pole $\vec{F}$ podél křivky** φ předpisem (2) a označíme jej symbolem

$$\int_\varphi \vec{F}\, d\vec{s} \;\equiv\; \int_\varphi F_1\, dx_1 + \cdots + F_n\, dx_n.$$

Práce síly $\vec{F}$ podél dráhy φ se tedy spočítá jako

$$W = \int_\varphi \vec{F}\, d\vec{s}.$$

Poznámka: Riemannova suma integrálu (2) je ve skutečnosti definována jako

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} F_j(\varphi(\xi_i^j))\varphi_j'(\xi_i^j)(a_i - a_{i-1}),$$

v našem případě je tedy hodnota funkce $F_j \circ \varphi$ v bodě ξ_i^j nahrazena hodnotou v bodě a_i. To však nemění hodnotu limity této sumy pro $\|\Delta\| \to 0$ (rozmyslete si!).

1.14. Hmotnost nehomogenního drátu s lineární hustotou ϱ.

Jinou obvyklou úlohou je spočítat hmotnost drátu $\mathbb{R}^n$. Je-li drát úsečka (rovná vektoru $\vec{v}$) a hustota konstantní, je hmotnost rovna

$$m = \varrho\|\vec{v}\|,$$

kde $\|\vec{v}\|$ značí euklidovskou normu v $\mathbb{R}^n$.

V případě zakřiveného drátu aproximujeme φ stejně jako v předchozím případě lomenou čárou procházející hodnotami φ v bodech dělení Δ. Potom přibližná hmotnost je

$$m_\Delta = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i\|\vec{v}_i\| = \sum_{i=1}^{N} \varrho(\varphi(a_i))\|\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{N} \varrho(\varphi(a_i))\|\varphi'(\xi_i^j)\|(a_i - a_{i-1})$$

Dostáváme opět Riemannovu sumu, tentokrát k integrálu

$$\int_a^b \varrho(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|\, dt. \tag{3}$$

Definujeme tedy nyní **křivkový integrál prvního druhu z funkce ϱ podél křivky** φ předpisem (3) a označíme jej symbolem

$$\int_\varphi \varrho\, ds.$$

Hmotnost drátu φ s hustotou ϱ se tedy spočítá jako

$$m = \int_\varphi \varrho\, ds.$$

1.15. Tok vektorového pole plochou.

Rozmysleme si nyní analogickou situaci v dvojrozměrném případě. Ve fyzice se definuje tok vektorového pole $\vec{F}$ plochou S. Je-li plocha S rovnoběžník určený vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ v $\mathbb{R}^3$ a na této ploše působí konstantní síla $\vec{F}$, je tok definován pomocí smíšeného součinu

$$T = \langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{F} \rangle = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{F}),$$

kde $\times$ znamená vektorový součin dvou vektorů.

V zakřiveném případě je opět nutno aproximovat. Předpokládejme, že plocha S je parametrizována zobrazením $\Phi : \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^3$, které je všude regulární a prosté. Dělení Δ bude tentokrát obdélníková síť daná děleními intervalů $a = a_0, a_1, \ldots, a_N = b$ a $c = c_0, c_1, \ldots, c_N = d$. Chystáme se použít stejných idejí jako v jednorozměrném případě, označení je zde ovšem složitější. Označme pro jednoduchost

$$\vec{v}_{ij} = \Phi(a_i, c_j) - \Phi(a_{i-1}, c_j), \vec{w}_{ij} = \Phi(a_i, c_j) - \Phi(a_i, c_{j-1}).$$

Nyní

$$T_\Delta = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle \vec{v}_{ij} \times \vec{w}_{ij}, \vec{F}_{ij} \rangle$$

Užitím věty o střední hodnotě najdeme ξ_i a η_j tak, že platí $\vec{v}_{ij} = \Phi_u(\xi_i, c_j)(a_i - a_{i-1})$ a $\vec{w}_{ij} = \Phi_v(a_i, \eta_j)(c_j - c_{j-1})$, kde Φ_u, Φ_v označuje derivaci zobrazení Φ podle první resp. druhé proměnné. Dostáváme

$$T_\Delta = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle \Phi_u(\xi_i, c_j) \times \Phi_v(a_i, \eta_j), \vec{F}(\Phi(a_i, c_j)) \rangle (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}).$$

Obdobnou úvahou o Riemannových sumách dospíváme k integrálu

$$T = \int_a^b \int_c^d \langle \Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v), \vec{F}(\Phi(u, v)) \rangle \, du \, dv. \tag{4}$$

Definujeme **plošný integrál druhého druhu z vektorového pole $\vec{F}$ přes plochu** S předpisem (4) a označíme jej symbolem

$$\int_S \vec{F} \, d\vec{S} \ \equiv \int_S F_1 \, dy \, dz \ + F_2 \, dz \, dx + F_3 \, dx \, dy$$

Tok síly $\vec{F}$ plochou S se tedy spočítá jako

$$T = \int_S \vec{F} \, d\vec{S}.$$

1.16. Hmotnost nehomogenní plochy s plošnou hustotou ϱ.

Nyní již sami dokážete odvodit vzorec pro hmotnost plochy S s plošnou hustotou ϱ. Obdobnou aproximací jako v případě toku plochou lze dospět k integrálu

$$m = \int_a^b \int_c^d \|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| \varrho(\Phi(u, v))) \, du \, dv. \tag{5}$$

Definujeme **plošný integrál prvního druhu z funkce ϱ přes plochu** S předpisem (5) a označíme jej symbolem

$$\int_S \varrho \, dS.$$

Hmotnost plochy S s hustotou ϱ se tedy spočítá jako

$$m = \int_S \varrho \, dS.$$

Kapitola II

Diferenciální formy v $\mathbb{R}^n$

2. Vnější algebra $\mathbb{R}^n$

V obecném vektorovém prostoru umíme násobit vektory čísly, ale neumíme násobit vektory mezi sebou. Existuje více způsobů, jak rozšířit vektorový prostor V tak, aby na příslušně větším vektorovém prostoru už byl definován součin libovolných dvou prvků (tj. jak vnořit V do nějaké asociativní, ale ne nutně komutativní, algebry). Univerzální rozšíření v tomto smyslu je tenzorová algebra vektorového prostoru (viz podkapitola 6). My bychom chtěli vnořit $\mathbb{R}^n$ do algebry, jejíž násobení není nutně komutativní, ale ve které je násobení vektorů z původního vektorového prostoru antikomutativní. Výslednému násobení budeme říkat vnější násobení a odpovídající algebra se bude nazývat vnější algebra $\mathbb{R}^n$.

V prostoru $\mathbb{R}^n$ existuje význačná, kanonická báze. Konstrukce, která by odpovídala vlastnostem odvozeným v předchozí kapitole, je možná nejen na $\mathbb{R}^n$, ale na libovolném vektorovém prostoru V s vybranou význačnou bází $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Označme hledané vnější násobení symbolem $\wedge$. Formální definice je okamžitým důsledkem základní vlastnosti $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$. K bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ musíme přidat jako nové nezávislé generátory postupně součiny

$$
\begin{aligned}
e_i \wedge e_j; &\qquad i < j; \quad i, j = 1, \dots, n \\
e_i \wedge e_j \wedge e_k; &\quad i < j < k; \quad i, j, k = 1, \dots, n \\
\text{atd.} &
\end{aligned}
$$

Užitečné označení může být $e_I \equiv e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, kde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$; $i_1 < \dots < i_k$. Prvky rozšířené báze jsou tedy indexovány pomocí podmnožin $I \subset \{1, \dots, n\}$. Prvky $e_{\{i\}}$ se ztotožňují s původními vektory e_i a $e_\emptyset$ je třeba ztotožnit s jedničkou $1 \in \mathbb{R}$. Pro prvky takovéto rozšířené báze je třeba definovat násobení přirozeným způsobem a to pak lineárně rozšířit na odpovídající lineární obal.

Popsaná konstrukce začínala volbou pevné báze v příslušném vektorovém prostoru. Je otázka, zda výsledná algebra závisí na této volbě. Dalo by se ukázat, že ne, tj. že všechny takto získané algebry jsou izomorfní. Tuto práci si ušetříme; v podkapitole 6 si budeme definovat vnějšího algebru obecného vektorového prostoru pomocí multilineární algebry bez jakékoliv volby báze a ukážeme si zároveň, že při libovolné volbě báze je algebra definovaná v této kapitole izomorfní vnější algebře sestrojené pomocí multilineární algebry. Všimněte si, že tento postup je typický pro obvyklý vývoj matematických pojmů – naše nynější intuitivně srozumitelná definice (která vznikla přímým zobecněním úvodních názorných idejí) je po čase nahražena elegantní, abstraktní definicí, která nejlépe odpovídá dané struktuře, která však je méně intuitivně pochopitelná a méně srozumitelná.

2.1. Definice vnější algebry vektorového prostoru. Nechť V je libovolný n-dimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je pevně zvolená báze V. Uvažujme konečnou množinu symbolů e_I, kde $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, prvky množiny I jsou uspořádány vzestupně podle velikosti a kde platí $e_\emptyset = 1 \in \mathbb{R}$ a $e_{\{i\}} = e_i \in V$. **Vnější algebra** vektorového prostoru V je algebra $\Lambda^*(V)$, jejíž bází je množina symbolů $\{e_I;\, I \subseteq \{1, \dots, n\}\}$. Tedy vnější algebra je množina všech formálních sum

$$\Lambda^*(V) = \{ \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \alpha_I e_I;\, \alpha_I \in \mathbb{R}\}.$$

Operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem definujeme takto:

$$
\begin{aligned}
\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \alpha_I e_I + \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \beta_I e_I &:= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (\alpha_I + \beta_I) e_I \\
c \left(\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \alpha_I e_I \right) &:= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (c\alpha_I) e_I
\end{aligned}
\tag{6}
$$

kde $\alpha_I, \beta_I, c \in \mathbb{R}$. Násobení vektorů definujeme pro prvky báze takto:

$$
e_I \wedge e_J := \begin{cases} 0 & \text{pokud } I \cap J \neq \emptyset, \\ \operatorname{sgn} \binom{I, J}{I \cup J}\, e_{I \cup J} & \text{pokud } I \cap J = \emptyset, \end{cases}
\tag{7}
$$

kde sgn značí znaménko permutace[1]. Násobení obecných vektorů je díky bilinearitě operace vektorového násobení $\wedge$ jednoznačně určeno vztahy (7).

Algebra $\Lambda^*(V)$ je tedy jakožto vektorový prostor (tj. až na vektorové násobení $\wedge$) izomorfní s $\mathbb{R}^{2^n}$. Stejně jako $\mathbb{R}^{2^n}$ totiž obsahuje prvky tvaru $\sum \alpha_I e_I$, kde $\alpha_I \in \mathbb{R}$, e_I jsou prvky báze a I je index probíhající nějakou 2^n-prvkovou množinu indexů. Operace sčítání a násobení skalárem jsou definovány stejně jako v $\mathbb{R}^{2^n}$ (viz (6)). Na rozdíl od $\mathbb{R}^{2^n}$ je však $\Lambda^*(V)$ algebra; pro každé dva její prvky je definován jejich součin, patřící do $\Lambda^*(V)$. To, že index I probíhá množinu $\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ všech podmnožin množiny $\{1,\dots,n\}$ a ne množinu $\{1,\dots,2^n\}$, je konvence, která značně usnadňuje definici vektorového násobení v $\Lambda^*(V)$. Index I někdy nazýváme též multiindex a v konkrétních případech vynecháváme složené závorky (tj. $e_{\{1,3,7\}}$ zkracujeme na $e_{1,3,7}$) nebo dokonce i čárky (tj. píšeme e_{137}). Zkracování použijeme výhradně tam, kde nemůže dojít k nedorozumění.

2.2. Poznámky.
(i) Pro $k \in 0,\dots,n$ označme $\Lambda^k(V)$ = lineární obal symbolů e_I, kde I je přesně k-prvková. Prvkům $\Lambda^k(V)$ říkáme **k-vektory** a prostor $\Lambda^k(V)$ se nazývá **k-tá vnější mocnina** prostoru V. Zřejmě $\Lambda^*(V) = \oplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$. Je-li tedy například $V = \mathbb{R}^3$ a e_1, e_2, e_3 báze V, pak $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ má bázi $e_\emptyset = 1$ a je jednodimenzionální, $\Lambda^1(V) = V$ je vektorový prostor s bází e_1, e_2, e_3 a je tedy 3-dimenzionální, $\Lambda^2(V)$ má dimenzi 3 a bázi e_{12}, e_{13}, e_{23} a konečně $\Lambda^3(V)$ je jednodimenzionální s bází e_{123}.

(ii) Vektor $e_\emptyset = 1 \in \Lambda^*(V)$ je opravdu podle definice jednotkou vzhledem k násobení, neboť pro libovolné $I \subset \{1,\dots,n\}$ je

$$e_I \wedge e_\emptyset = \operatorname{sgn}\binom{I, \emptyset}{I \cup \emptyset} e_{I\cup\emptyset} = \operatorname{sgn}\binom{I}{I} e_I = e_I.$$

Obdobně $e_\emptyset \wedge e_I = e_I$ a tedy $\forall \omega \in \Lambda^*(V) : \omega \wedge e_\emptyset = \omega = e_\emptyset \wedge \omega$. Těleso $\mathbb{R}$ je tedy přirozeně vnořeno do $\Lambda^*(V)$ jako $\mathbb{R} \simeq \Lambda^0(V) \subset \Lambda^*(V)$.

(iii) Podle definice vektorového násobení platí:

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, \tag{8}$$

kde $I = \{i_1,\dots,i_k\}, 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. Tyto dva zápisy budeme střídat dle potřeby. Vztah (8) také ukazuje, proč jsme definovali násobení $\wedge$ právě vztahem (7).

Dokažme nyní několik základních vlastností vnějšího násobení $\wedge$:

2.3. Věta. *Buď V vektorový prostor dimenze n nad $\mathbb{R}$ s bází $e_1,\dots,e_n$. Buďte $k,l \in \{1,\dots,n\}$ libovolná, pak platí:*

(i) $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}, \dim \Lambda^*(V) = 2^n$.
(ii) *$\wedge$ je asociativní.*
(iii) *Je-li $\omega \in \Lambda^k(V), \tau \in \Lambda^l(V)$, pak $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$.*
(iv) *Buďte $v_1,\dots,v_k \in V$ vektory. Zapišme je ve tvaru $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$, kde $v_i^j \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,\dots,k\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$. Pro každou k-prvkovou podmnožinu $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ označme $V_I := (v_i^j)_{i\in\{1,\dots,k\}, j\in I}$ matici $k \times k$, která vznikne z matice koeficientů $W{:=}(v_i^j)_{i\in\{1,\dots,k\},j\in\{1,\dots,n\}}$ vynecháním sloupců jejichž index j není v množině I. Při tomto označení platí:*[2]

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\},|I|=k} \det V_I \cdot e_I$$

DŮKAZ. ad (i) jednoduché, viz též poznámku 2.2(i).

---

[1] Symbol $\operatorname{sgn}\binom{I,J}{I\cup J}$ označuje znaménko permutace $\binom{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_r}{k_1,\dots,k_{p+r}}$, kde $i_1 < \cdots < i_p$ jsou setříděné prvky množiny $I = \{i_1,\dots,i_p\}$, $j_1 < \cdots < j_r$ jsou setříděné prvky množiny $J = \{j_1,\dots,j_r\}$ a $k_1 < \cdots < k_{p+r}$ jsou setříděné prvky množiny $I \cup J = \{k_1,\dots,k_{p+r}\}$.

[2] Čísla $\{\det V_I\}_{|I|=k}$ se obvykle nazývají Plückerovy souřadnice k-vektoru $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$.

ad (ii) Dokažme asociativitu nejprve pro prvky báze. Buďte $I, J, K \subset \{1, \ldots, n\}$. V případě, že jsou I, J, K po dvou disjunktní, platí

$$\begin{aligned} e_I \wedge (e_J \wedge e_K) &= e_I \wedge (\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, K \\ J \cup K \end{pmatrix} e_{J\cup K}) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, K \\ J \cup K \end{pmatrix} e_I \wedge e_{J\cup K} = \\ &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, K \\ J \cup K \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \cup K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} e_{I\cup J\cup K} = \\ &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I, J \cup K \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \cup K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} e_{I\cup J\cup K} = \\ &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} e_{I\cup J\cup K}. \end{aligned} \tag{9}$$

V případě, že I, J, K nejsou po dvou disjunktní, pak buď $J \cap K \neq \emptyset$ nebo $I \cap (J \cup K) \neq \emptyset$, z čehož snadno zjistíme postupem podobným předchozím rovnostem, že $e_I \wedge (e_J \wedge e_K) = 0$. (0 chápeme jako $0e_\emptyset$ ve smyslu odstavce 2.2(iii).) Analogicky se dokáže i

$$(e_I \wedge e_J) \wedge e_K = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} e_{I\cup J\cup K} \tag{10}$$

pokud jsou I, J, K po dvou disjunktní a $(e_I \wedge e_J) \wedge e_K = 0$ jinak. Ze vztahů (9),(10) již plyne platnost tvrzení pro prvky báze.

Pro obecné prvky dostaneme tvrzení díky linearitě operace $\wedge$, neboť

$$\begin{aligned} &\sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \alpha_I e_I \wedge \left((\sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}} \beta_J e_J) \wedge (\sum_{K\subset\{1,\ldots,n\}} \gamma_K e_K) \right) = \\ &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{K\subset\{1,\ldots,n\}} \alpha_I \beta_J \gamma_K e_I \wedge (e_J \wedge e_k) = \\ &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{K\subset\{1,\ldots,n\}} \alpha_I \beta_J \gamma_K (e_I \wedge e_J) \wedge e_k = \\ &= \left(\sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \alpha_I e_I \wedge \sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}} \beta_J e_J \right) \wedge \sum_{K\subset\{1,\ldots,n\}} \gamma_K e_K. \end{aligned}$$

Dokázavše, že $\wedge$ je asociativní, můžeme na mnoha místech vynechávat závorky a psát například $e_I \wedge e_J \wedge e_K$.

ad (iii) Stejně jako v bodě (ii) dokážeme tvrzení nejdříve pro prvky báze. Je-li $I, J \subset \{1, \ldots, n\}, I \cap J = \emptyset, |I| = k, |J| = l$, pak

$$e_I \wedge e_J = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} e_{I\cup J} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ J, I \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, I \\ I \cup J \end{pmatrix} e_{I\cup J} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ J, I \end{pmatrix} e_J \wedge e_I$$

přitom permutace $\binom{I,J}{J,I}$ má znaménko $(-1)^{kl}$.

Pro obecná ω, τ již tvrzení plyne, obdobně jako v (ii), z linearity násobení $\wedge$.

ad (iv) Platí

$$\left(\sum_{i_1=1}^n v_1^{i_1} e_{i_1} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{i_k=1}^n v_k^{i_k} e_{i_k} \right) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k},$$

přitom sčítanec na pravé straně je nula pokud $i_a = i_b$ pro nějaká $a, b \in \{1, \ldots, k\}$, $a \neq b$. Zůstanou jen ty sčítance, kde $i_1, \ldots, i_k$ jsou vzájemně různé a tedy $\{i_1, \ldots, i_k\}$ je k-prvková podmnožina množiny $\{1, \ldots, n\}$. Součet tedy běží přes všechny k-prvkové podmnožiny množiny $\{1, \ldots, n\}$ a jejich všechny možné permutace. Počítaný výraz je tedy roven

$$\begin{aligned} &\sum_{|I|=k} \sum_{\sigma\in S_k} v_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots v_k^{i_{\sigma(k)}} e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{\sigma(k)}} = \\ &\qquad = \sum_{|I|=k} \left(\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \; v_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots v_k^{i_{\sigma(k)}} \right) e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = \sum_{|I|=k} \det V_I \; e_I \end{aligned}$$

kde S_k je množina všech permutací množiny $\{1, \dots, k\}$ a $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, kde $i_1, \dots, i_k$ jsou prvky I označené tak aby $i_1 < \dots < i_k$. Poslední rovnost plyne přímo z definice determinantu matice V_I.

□

2.4. Poznámky.
(i) Pro vektorový prostor v dimenze n zřejmě platí $\dim \Lambda^k(V) = \dim \Lambda^{n-k}(V)$. Izomorfismus mezi těmito dvěma prostory sestrojíme v oddíle o Hodgeově operátoru.
(ii) Z tvrzení 2.3(iv) plyne (při označení z věty) pro $k = n$ vztah $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \det W e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$.

Hodgeův operátor

Uvažujme n-dimenzionální vektorový prostor V se zvolenou orientací (viz definice 8.22) a se zadaným skalárním součinem $\langle \_, \_ \rangle$. Sestrojíme tzv. **Hodgeův operátor** $*$, který bude izomorfismem mezi $\Lambda^k(V)$ a $\Lambda^{n-k}(V)$.

Nejprve však zavedeme skalární součin na vnější mocnině $\Lambda^k(V)$ prostoru V se skalárním součinem: pro prvky tvaru $e_I, e_J \in \Lambda^k(V)$ položme

$$\langle e_I, e_J \rangle = \langle e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k} \rangle = \langle e_{i_1}, e_{j_1} \rangle \ldots \langle e_{i_k}, e_{j_k} \rangle.$$

Snadno se ověří, že takto definovaný součin je pozitivně definitní symetrická bilineární forma na $\Lambda^k(V)$.

2.5. Lemma. Je-li V lineární prostor se skalárním součinem a $f : V \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení, existuje právě jeden prvek $u \in V$ takový, že $f(v) = \langle u, v \rangle$ pro všechna $v \in V$.

Důkaz. Buď $e_1, \dots, e_n$ ortonormální báze V a položme

$$u = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i.$$

Potom pro každé $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in V$ je

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u, e_i \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Prvek u je přitom zobrazením f zřejmě jednoznačně určen. □

Zvolme nyní kladně orientovanou ortonormální bázi $e_1, \dots, e_n$ prostoru V a označme $\sigma = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in \Lambda^n(V)$. Pro každé $\lambda \in \Lambda^k(V)$ je zobrazení

$$\begin{aligned} \Lambda^{n-k}(V) &\to \Lambda^n(V) \\ \mu &\mapsto \lambda \wedge \mu \end{aligned}$$

lineární. Tedy existuje právě jedno lineární zobrazení $f_\lambda : \Lambda^{n-k}(V) \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lambda \wedge \mu = f_\lambda(\mu) \sigma.$$

Podle lemmatu 2.5 existuje právě jeden prvek $*\lambda$ prostoru $\Lambda^{n-k}(V)$ takový, že pro všechna $\mu \in \Lambda^{n-k}(V)$ je $f_\lambda(\mu) = \langle *\lambda, \mu \rangle$ neboli

$$\lambda \wedge \mu = \langle *\lambda, \mu \rangle \sigma.$$

2.6. Definice. Lineární zobrazení

$$\begin{aligned} * : \Lambda^k(V) &\to \Lambda^{n-k}(V) \\ \lambda &\mapsto *\lambda \end{aligned}$$

se nazývá **Hodgeův operátor**.

2.7. Poznámka. Je-li V vektorový prostor dimenze n a $k \leq n$, je Hodgeův operátor izomorfismus $\Lambda^k(V) \simeq \Lambda^{n-k}(V)$.

Ke každému λ totiž existuje jediné zprostředkující lineární zobrazení f_λ a k němu opět jediný prvek $*\lambda$, zobrazení $*$ je tedy prosté, a jelikož oba prostory mají stejnou dimenzi, je $*$ izomorfismus.

Příklady, úlohy a cvičení

2.8. Vnější algebra v nízkých dimenzích.
Uvědomte si, jak vypadají vnější mocniny $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ a vnější algebra $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ pro $n = 2, 3, 4$. Jak vypadají kanonické báze těchto prostorů, jaké jsou jejich dimenze?

2.9. Geometrický význam vnějšího součinu $n-1$ vektorů na $\mathbb{R}^n$.
Buďte $v_1, \ldots, v_{n-1}$ vektory v $\mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n$ kanonická báze. Pak lze psát

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_n$$

pro nějaká $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Definujme vektor $[v_1, \ldots, v_{n-1}] \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$[v_1, \ldots, v_{n-1}] := (a_1, \ldots, a_n).$$

Značí-li $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ standardní skalární součin, ukažte, že

$$\forall w \in \mathbb{R}^n : \langle [v_1, \ldots, v_{n-1}], w\rangle = \det(w, v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Speciálně, $\langle [v_1, \ldots, v_{n-1}], v_i\rangle = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n-1$.

Pro $n = 3$ je $[u, v] = u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$, což je obvyklý vektorový součin na $\mathbb{R}^3$.

2.10. Rozložitelné k-vektory a jejich geometrická interpretace.
V zde bude značit vektorový prostor $\mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n$ jeho kanonickou bázi. Rozmyslete si, která z tvrzení lze zobecnit na případ obecného vektorového prostoru.

(a) **Důsledek** věty 2.3(iv): při označení z věty platí pro $k = n$

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \det W e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

(Viz poznámku 2.4(ii).) Analogicky se dokáže obecnější tvrzení: jsou-li $v_1, \ldots, v_n$ a $v'_1, \ldots, v'_n$ dvě báze prostoru V, buď $A = (a_i^j)$ regulární matice taková, že $v_i = \sum_{i=1}^n a_i^j v'_j$ (tj. matice přechodu mezi těmito bázemi); pak platí

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \det A\ v'_1 \wedge \ldots \wedge v'_n.$$

(b) **Dokažte:** Vektory $v_1, \ldots, v_k \in V$ jsou lineárně závislé $\iff v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = 0$.

(c) **Definice:** Buď $k \in \{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že k-vektor $\omega \in \Lambda^k(V)$ je **rozložitelný**, existují-li vektory $v_1, \ldots, v_k \in V$ takové, že $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$. Množinu všech nenulových rozložitelných k-vektorů (pro pevné k) označíme $\mathcal{R}$. Pro $\omega \in \mathcal{R}$ definujeme **jádro** $\operatorname{Ker}\omega := \{v \in V; v \wedge \omega = 0\}$.

(d) **Dokažte:** Je-li $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \mathcal{R}$, je $\operatorname{Ker}\omega = \mathrm{LO}(v_1, \ldots, v_k)$, kde LO značí lineární obal.

(e) **Dokažte:** Jsou-li $\omega, \omega' \in \mathcal{R}$, pak $\operatorname{Ker}\omega = \operatorname{Ker}\omega' \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \omega = \alpha\omega'$.

(f) **Definice:** Zavedeme ekvivalenci $\sim$ na $\mathcal{R}$ takto:

$$\omega \sim \omega' \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \omega = \alpha\omega'.$$

Dále označíme symbolem $\mathrm{Gr}_{k,n}$ množinu všech k-dimenzionálních vektorových podprostorů v $\mathbb{R}^n$. Tento objekt se nazývá **Grassmannova varieta** neboli **Grassmannián**.

Zatím máme Grassmannián popsán jen jako množinu. Na Grassmanniánu však lze definovat rovněž strukturu hladké variety a toto bude jeden z důležitých netriviálních příkladů takové struktury – viz 7.16(e).

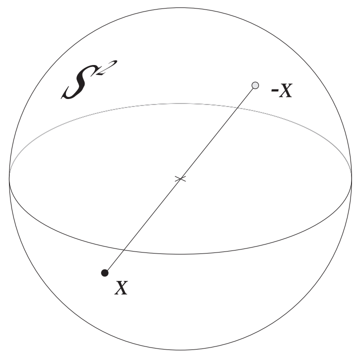
(g) **Geometrická interpretace rozložitelných k-vektorů:** Z (e) a (f) plyne, že pro $\omega \sim \omega'$ je $\operatorname{Ker}\omega = \operatorname{Ker}\omega'$, tj. existuje bijekce

$$\mathcal{R}/\sim\ \simeq \mathrm{Gr}_{k,n}.$$

(h) **Definice:** Je-li $\omega = \sum_{|J|=k} \omega_J e_J \in \Lambda^k(V)$, pak $\{\omega_J\}_{|J|=k} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ se nazývají **Plückerovy souřadnice** k-vektoru ω. Speciálně, je-li $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \mathcal{R}$, jsou Plückerovy souřadnice vektoru ω rovny $\{\det V_J\}_{|J|=k}$, kde V_J jsou $k \times k$-podmatice matice koeficientů W vektorů $v_1, \ldots, v_k$ určené multiindexy J délky k (viz větu 2.3(iv)). Přiřazení $\omega \mapsto \{\det V_J\}_{|J|=k}$ je tedy vnořením $\mathcal{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

Poznámka o projektivních prostorech: Definujme n-**dimenzionální (reálný) projektivní prostor** takto:

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim,$$



Obrázek 9. Konstrukce projektivního prostoru $\mathbb{RP}^2$

kde relace ekvivalence $\sim$ je definována na $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ vztahem

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (x'_1, \dots, x'_{n+1}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \forall i : x_i = \alpha x'_i.$$

Ekvivalentně lze $\mathbb{RP}^n$ definovat jako množinu všech jednodimenzionálních podprostorů v $\mathbb{R}^{n+1}$. Je tedy $\mathbb{RP}^n \simeq \mathrm{Gr}_{1,n+1}$.

Dále, jsou-li $\omega \sim \omega' \in \mathcal{R}$, je zřejmě $\{\det V_J\}_{|J|=k} \sim \{\det V'_J\}_{|J|=k} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$. Tedy

$$\mathrm{Gr}_{k,n} \ \simeq\ \mathcal{R}/\sim\ \hookrightarrow\ (\mathbb{R}^{\binom{n}{k}} - \{0\})/\sim\ \simeq\ \mathbb{RP}^{(\binom{n}{k}-1)}.$$

Tedy Grassmannián $\mathrm{Gr}_{k,n}$ je vnořen pomocí Plückerových souřadnic do projektivního prostoru dimenze $\binom{n}{k} - 1$.

Uvědomte si, že projektivní prostor $\mathbb{RP}^n$ lze vyjádřit rovněž jako kvocient sféry:

$$\mathbb{RP}^n = S^n/\sim,$$

kde relace ekvivalence $\sim$ je definována na sféře $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|^2 = 1\}$ vztahem $x \sim -x$ (viz obrázek 9).

Na projektivním prostoru lze rovněž definovat strukturu hladké variety (viz 7.16(d)).

2.11. Další vlastnosti rozložitelných k-vektorů.

(a) **Dokažte:** Jsou-li $\omega_1 \in \Lambda^j(V)$ a $\omega_2 \in \Lambda^k(V)$, $j \leq k$, ω_1 i ω_2 rozložitelné a je-li $\mathrm{Ker}\,\omega_1 \subset \mathrm{Ker}\,\omega_2$, potom existuje $\eta \in \Lambda^{k-j}(V)$ taková, že $\omega_2 = \omega_1 \wedge \eta$.

(b) **Dokažte:** Jsou-li $\omega_1 \in \Lambda^j(V)$ a $\omega_2 \in \Lambda^k(V)$ rozložitelné, pak

$$\mathrm{Ker}\,\omega_1 \cap \mathrm{Ker}\,\omega_2 = 0 \iff \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0.$$

V případě splnění těchto ekvivalentních podmínek je pak $\mathrm{Ker}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{LO}(\mathrm{Ker}\,\omega_1 \cup \mathrm{Ker}\,\omega_2)$, kde LO značí lineární obal.

(c) Triviálně platí, že všechny 1-vektory i n-vektory jsou rozložitelné. Dokažte, že rovněž všechny $(n-1)$-vektory jsou rozložitelné.

(d) **Příklad nerozložitelného k-vektoru:** Z (c) plyne, že pro $n = 1, 2, 3$ jsou všechny k-vektory rozložitelné (pro všechna $k \in \{1, \dots, n\}$). Nejjednodušší příklad nerozložitelného vektoru je tedy nutno hledat v $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$. Dokažte, že takový vektor skutečně existuje. Na základě tohoto výsledku ukažte, že pro každé $n \geq 4$ a každé $k = 2, \dots, n-2$ existuje nerozložitelný vektor $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

(e) **Obecný tvar 2-vektorů:** Ukažte, že pro každé nenulové $\omega \in \Lambda^2(V)$, $n \geq 4$, existuje báze $v_1, \dots, v_n$ prostoru V a číslo r takové, že $\omega = v_1 \wedge v_2 + \cdots + v_{2r-1} \wedge v_{2r}$. Potom zřejmě platí (při označení $\omega^r = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ r-krát), že $\omega^r \neq 0$ a $\omega^{r+1} = 0$. Číslo r tedy nezávisí na volbě báze $v_1, \dots, v_n$ a nazývá se hodnost 2-vektoru. Je tedy $\omega \in \Lambda^2(V)$rozložitelné $\iff r = 1$.

(f) Rozložte dané k-vektory, tj. napište je ve tvaru $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$:

$\alpha)$ $(ae_{13} + be_{24}) \wedge (ce_{13} + de_{24}) \in \Lambda^4(\mathbb{R}^4)$

β) $(ae_1 + be_4) \wedge (ce_{123} + de_{234}) \in \Lambda^4(\mathbb{R}^4)$
γ) $e_{123} + e_{124} + e_{234} \in \Lambda^3(\mathbb{R}^4)$
δ) $e_{12345} + e_{12346} + e_{12356} + e_{12456} + e_{13456} + e_{23456} \in \Lambda^5(\mathbb{R}^6)$

(g) Jako triviální důsledek Věty 2.3(iii) platí $\omega \in \Lambda^k(V), k$ liché $\implies \omega \wedge \omega = 0$. Najděte (nutné a postačující) podmínky na k a n, aby existovalo $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ takové, že $\omega \wedge \omega \neq 0$. Jak lze potom takové ω zkonstruovat?

2.12. Hodgeův operátor v dimenzi 3.
(a) Zvolte orientaci $\mathbb{R}^3$ pomocí vektoru $\sigma = e_{123} \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ a vypočítejte hodnotu $*\lambda$ postupně pro $\lambda = e_{23}, e_{13}, e_{12}$ a pro libovolný 2-vektor λ.

(b) Dokažte, že pro všechny vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ platí

$$u \times v \ = *(u \wedge v),$$

kde $u \times v \ = [u, v]$ označuje vektorový součin na $\mathbb{R}^3$ (viz 2.9) a obecněji, pro vektory $u_1, \ldots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ je

$$[u_1, \ldots, u_{n-1}] = (-1)^{n-1} * (u_1 \wedge \ldots \wedge u_{n-1}).$$

3. Diferenciální formy na $\mathbb{R}^n$

Diferenciální formy

3.1. Definice diferenciální formy. Označme $T^*(\mathbb{R}^n)$ (zkráceně T^*) vektorový prostor, jehož bázi tvoří symboly $dx_1, \ldots, dx_n$. Přesněji řečeno

$$T^*(\mathbb{R}^n) := \{\sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx_i; \alpha_i \in \mathbb{R}\},$$

přičemž sčítání vektorů a násobení skalárem je definováno „po složkách“, tedy takto:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \, dx_i := \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \, dx_i, \qquad c \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx_i := \sum_{i=1}^n c\alpha_i \, dx_i.$$

Úmluva: **Hladkou** funkcí budeme v celých skriptech rozumět vždy $\mathcal{C}^\infty$ funkci, tedy funkci mající parciální derivace libovolného řádu.

Diferenciální forma stupně k (zkráceně k-forma) na otevřené podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je hladké zobrazení Ω do $\Lambda^k(T^*)$. Diferenciální forma $\omega : \Omega \to \Lambda^k(T^*)$ je tedy tvaru

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|I|=k} \omega_I(x_1, \ldots, x_n) \, dx_I,$$

kde $\omega_I(x_1, \ldots, x_n)$ jsou hladké funkce z Ω do $\mathbb{R}$.

Množinu všech diferenciálních forem stupně k na množině Ω budeme označovat $\mathcal{E}^k(\Omega)$. Dále označíme $\mathcal{E}^*(\Omega)$ množinu všech diferenciálních forem na Ω, tj. množinu všech hladkých zobrazení Ω do $\Lambda^*(T^*)$.

Diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ nemá tedy obecně definován stupeň – může být součtem diferenciálních forem různých stupňů. Platí však

$$\mathcal{E}^*(\Omega) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{E}^k(\Omega),$$

tedy rozklad obecné formy do homogenních sčítanců (prvků $\mathcal{E}^k(\Omega)$) je jednoznačně určen.

Připomeňme, že je $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, kde $i_1, \ldots, i_k$ jsou prvky I setříděné podle velikosti.

3.2. Definice vnějšího diferenciálu. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Pro všechna p, $0 \leq p \leq n$ definujeme zobrazení $d : \mathcal{E}^p(\Omega) \to \mathcal{E}^{p+1}(\Omega)$ takto:

(i) Je-li $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ (f je tedy funkce z Ω do $\mathbb{R}$), pak definujeme $df : \Omega \to \Lambda^1(T^*)$ předpisem

$$df(a) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i, \quad \forall a \in \Omega.$$

(ii) Buď $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$ diferenciální forma stupně p. Forma ω je tedy tvaru $\omega(x) = \sum_{|I|=p} \omega_I(x)\, dx_I$, kde $x \in \Omega$ a ω_I jsou hladké funkce z $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. Definujeme $d\omega : \Omega \to \Lambda^{p+1}(T^*)$ předpisem

$$d\omega(x) := \sum_{|I|=p} d\omega_I(x) \wedge dx_I = \sum_{|I|=p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(x)\;\, dx_i \wedge dx_I, \quad \forall x \in \Omega.$$

3.3. Poznámka o interpretaci symbolu dx_i. V definici diferenciálních forem se používají záhadné symboly dx_i, které tvoří bázi vektorového prostoru označeného $T^*(\mathbb{R}^n)$. Z definice vnějšího diferenciálu d vyplývá jednoduchá interpretace těchto symbolů – je-li $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ i-tá souřadnicová funkce na $\mathbb{R}^n$, pak $d\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\, dx_j = 1\, dx_i = dx_i$. Je možné tedy symbol dx_i interpretovat jako vnější diferenciál základní souřadnicové funkce φ_i a zvolené formální označení se pak ukáže jako vhodná mnemotechnická pomůcka pro zapamatování a jako příprava pro definici vnějšího diferenciálu d. Lze si také již teď dopředu uvědomit, jak dobře toto označení bude souhlasit s běžnými konvencemi při označení integrálu z funkce přes podmnožinu v $\mathbb{R}^n$.

3.4. Věta. *Vnější diferenciál má následující vlastnosti (pro $p, q \in \{0, \ldots, n\}$):*

(i) $\forall \omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega) : d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau.$

(ii) $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega), \tau \in \mathcal{E}^q(\Omega) : d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau.$

(iii) $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega) : d(d\omega) = 0.$

Důkaz.

ad (i) Plyne přímo z definice.

ad (ii) Nejdříve dokažme tvrzení pro diferenciální formy tvaru $\omega = \omega_I\, dx_I, \tau = \tau_J\, dx_J$, kde I je p-prvková a J q-prvková podmnožina množiny $\{1, \ldots, n\}$ a I, J jsou disjunktní.

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \tau) &= d(\omega_I \tau_J \cdot dx_I \wedge dx_J) = \\
&= d(\omega_I \tau_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\omega_I \tau_J)}{\partial x_i}\, dx_i \right) \wedge dx_I \wedge dx_J = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{i=1}^{n} \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I \right) \wedge (\tau_J\, dx_J) + (-1)^p \sum_{i=1}^{n} \omega_I\, dx_I \wedge \left(\frac{\partial \tau_J}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_J \right) = \\
&= d(\omega_I\, dx_I) \wedge \tau_J\, dx_J + (-1)^p \omega_I\, dx_I \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_J \right) = \\
&= d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau
\end{aligned}$$

Z postupu je též vidět, že pro $I \cap J \neq \emptyset$ jsou obě strany 0 a rovnost je tedy splněna triviálně. Pro obecné diferenciální formy ω, τ už tvrzení plyne z linearity operace $\wedge$, neboť

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \tau) &= d\left(\sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I \;\wedge \sum_{|J|=q} \tau_J\, dx_J \right) = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} d(\omega_I\, dx_I \wedge \tau_J\, dx_J) = \\
&= \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \big(d(\omega_I\, dx_I) \wedge \tau_J\, dx_J + (-1)^p \omega_I\, dx_I \wedge d(\tau_J\, dx_J) \big) = \\
&= d\left(\sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I \right) \wedge \left(\sum_{|J|=q} \tau_J\, dx_J \right) + (-1)^p \left(\sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I \right) \wedge d\left(\sum_{|J|=q} \tau_J\, dx_J \right) = \\
&= d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau,
\end{aligned}$$

což jsme chtěli.

ad (iii) I. Dokažme, že tvrzení platí pro prvky tvaru $\omega = \omega_I\, dx_I \in \mathcal{E}^p(\Omega)$. Postupujme indukcí.
1. indukční krok: Buď $\omega = f \cdot dx_\emptyset = f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ funkce, pak platí

$$\begin{aligned} d(\,df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_i \wedge dx_j = \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_i \wedge dx_j + \sum_{1\le j<i\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (-1)\, dx_j \wedge dx_i = \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j = 0 \end{aligned}$$

kde jsme použili vztahu $dx_j \wedge dx_i = -\,dx_i \wedge dx_j$ a rovnosti $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, která je splněna pro všechny $\mathcal{C}^2$ funkce a tím spíš pro $\mathcal{C}^\infty$ funkci f. Pro prvky $\mathcal{E}^0(\Omega)$ tedy tvrzení platí.

Speciálně tedy pro souřadnicovou funkci $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ máme $d(\,d\varphi_i)) = 0$. Podle poznámky 3.3 je $d\varphi_i = dx_i$ a tedy platí

$$d(\,dx_i) = d(\,d\varphi_i) = 0 \tag{11}$$

pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. indukční krok: Nechť tvrzení platí pro všechny ω tvaru $\omega = \omega_I\, dx_I \in \mathcal{E}^{p-1}(\Omega)$. Nyní buď $\omega = \omega_I\, dx_I \in \mathcal{E}^p(\Omega)$, kde $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ a $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$. Z (11) a indukčního předpokladu plyne:

$$\begin{aligned} d(\,d\omega) &= d(\,d(\omega_I\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p})) = d(\,d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}) = \\ &= d(\,d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{p-1}}) \wedge dx_{i_p} + \\ &+ (-1)^p (\,d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{p-1}}) \wedge d(\,dx_{i_p}) = \\ &= d(\,d(\omega_I\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{p-1}})) \wedge dx_{i_p} + 0 = 0. \end{aligned}$$

II. Pro libovolné p a libovolné $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$ nyní dostáváme

$$d(\,d\omega) = d\left(d\left(\sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I\right)\right) = \sum_{|I|=p} d\,(\,d(\omega_I \wedge dx_I)) = 0.$$

□

Přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení

V tomto paragrafu ukážeme, jak lze diferenciální formy přenášet pomocí zobrazení z jedné otevřené množiny na druhou. Inspirací pro následující definice budou postupy užité při definici integrálů z diferenciálních forem v nízkých dimenzích, o kterých pojednává úvodní kapitola. Budeme mít hladké zobrazení $\Phi : U \to \Omega$ z otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^k$ do otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Označme souřadnice v U písmeny $u_1, \ldots, u_k$ a souřadnice v Ω budeme označovat $x_1, \ldots, x_n$. Je-li tedy $x = \Phi(u)$ pro nějaká $u \in U \subset \mathbb{R}^k, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, pak $x_i = \Phi_i(u) = \Phi_i(u_1, \ldots, u_k)$, přičemž Φ_i je i-tá složka zobrazení Φ, $i = 1, \ldots, n$.

3.5. Definice. Buď $\Phi : U \to \Omega$ hladké, buďte $U \subset \mathbb{R}^k, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny. Pro každé $p \in \{1, \ldots, n\}$ definujeme zobrazení $\Phi^* : \mathcal{E}^p(\Omega) \to \mathcal{E}^p(U)$ předpisem

$$\Phi^*(\omega) := \sum_{|I|=p} (\omega_I \circ \Phi)\ \, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_p}\ \in \mathcal{E}^p(U),$$

kde $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I = \sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ je libovolný prvek $\mathcal{E}^p(\Omega)$ a kde $i_1, \ldots, i_p$ jsou vzestupně setříděné prvky množiny I.

Připomínáme, že $d\Phi_j, j = 1, \dots, n$ jsou diferenciální formy prvního stupně, viz definici vnějšího diferenciálu v odstavci 3.2. Tyto diferenciály je třeba rozepsat podle definice diferenciálu funkce 3.2(i) a výsledný výraz

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{|I|=p} (\omega_I \circ \Phi) \left(\sum_{k_1=1}^{k} \frac{\partial \Phi_{i_1}}{\partial u_{k_1}} du_{k_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{k_p=1}^{k} \frac{\partial \Phi_{i_p}}{\partial u_{k_p}} du_{k_p} \right)$$

upravit podle pravidel pro vnější násobení do základního tvaru $\Phi^*(\omega) = \sum_{|I|=p} \psi_I(u)\, du_I$, kde $\psi_I(u)$ jsou odpovídající koeficienty u symbolů du_I.

3.6. Věta. *Jsou-li ω, Φ, U, Ω jako v definici a $\tau \in \mathcal{E}^q(\Omega)$, pak*

(i) $\Phi^*(\omega + \tau) = \Phi^*(\omega) + \Phi^*(\tau)$, *pokud $p = q$.*
(ii) $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau)$, *$p, q$ libovolná.*
(iii) $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$.
(iv) *Je-li zobrazení $\Psi : V \to U$ z otevřené množiny $V \subset \mathbb{R}^s$ do U, pak $(\Phi \circ \Psi)^*(\omega) = (\Psi^* \circ \Phi^*)(\omega)$.*
(v) *Je-li $k = n$ a $\omega \in \mathcal{E}^n$, tedy $\omega = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, x = \Phi(u)$, pak*

$$\Phi^*(\omega) = \det(\operatorname{Jac} \Phi)(f \circ \Phi)\, du_1 \wedge \dots \wedge du_n,$$

kde $\operatorname{Jac}\Phi$ *je označení pro Jacobiho matici zobrazení Φ, tedy matici* $\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1}^{n}$.

Důkaz.
ad (i) Snadné, přímo z definice.

ad (ii) Nejdříve dokážeme tvrzení věty pro ω, τ speciálního tvaru $\omega = \omega_I\, dx_I, \tau = \tau_J\, dx_J$, kde ω_I, τ_J jsou funkce a I, J po řadě p-prvková a q-prvková množina indexů. Poté použijeme distributivity $\wedge$ vzhledem ke sčítání a z bodu (i) obdržíme požadované tvrzení.

Dokažme tedy tvrzení pro $\omega = \omega_I\, dx_I, \tau = \tau_J\, dx_J$. Můžeme předpokládat, že $I \cap J = \emptyset$, jinak jsou totiž obě strany rovny 0. Platí [3]

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\omega \wedge \tau) &= \Phi^*(\omega_I \tau_J\, dx_I \wedge dx_J) = \\
&= (\omega_I \circ \Phi)(\tau_J \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_p} \wedge d\Phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{j_q} = \\
&= (\omega_I \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_p} \wedge (\tau_J \circ \Phi)\, d\Phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{j_q} = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau).
\end{aligned}$$

Pro obecné ω, τ tvaru $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I$ a $\tau = \sum_{|J|=q} \tau_J\, dx_I$ stačí použít právě dokázané tvrzení spolu s bodem (i). Na ukázku vypíšeme podrobně, jak se tento důkaz provede. V dalších případech již takovéto přímočaré důkazy necháme čtenáři.

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\omega \wedge \tau) &= \Phi^* \left(\sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I \wedge \sum_{|J|=q} \tau_J\, dx_J \right) = \\
&= \Phi^* \left(\sum_{|I|=p, |J|=q} (\omega_I\, dx_I) \wedge (\tau_J\, dx_J) \right) = \\
&= \sum_{|I|=p, |J|=q} \Phi^*((\omega_I\, dx_I) \wedge (\tau_J\, dx_J)) = \\
&= \sum_{|I|=p, |J|=q} \Phi^*(\omega_I\, dx_I) \wedge \Phi^*(\tau_J\, dx_J) = \\
&= \sum_{|I|=p} \Phi^*(\omega_I\, dx_I) \wedge \sum_{|J|=q} \Phi^*(\tau_J\, dx_J) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau),
\end{aligned}$$

což jsme chtěli.

ad (iii) Stejně jako v předchozím budeme předpokládat, že $\omega = \omega_I\, dx_I$, pro obecné ω dostaneme vztah pomocí linearity Φ^* a vnějšího diferenciálu d (viz (i) a 3.4(i)). Nechť je tedy $\omega = \omega_I\, dx_I$ a označme

[3] Striktně vzato by bylo v následující úpravě třeba nejprve přepsat $dx_I \wedge dx_J$ do základního tvaru setříděného vzestupně, pak teprve použít definici Φ^* a poté přepermutovat členy zpět. Takto bychom podrobně zdůvodnili druhou rovnost (mezi prvým a druhým řádkem) v této úpravě.

$i_1, \dots, i_p$ prvky množiny I uspořádané vzestupně podle velikosti. Povšimněme si nejprve, že na levé i na pravé straně rovnosti jsou diferenciální formy na množině U. Upravujme nejdříve levou stranu rovnosti

$$\Phi^*(\,d\omega) = \Phi^*\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\,dx_i \wedge\, dx_I\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\circ \Phi\right)\, d\Phi_i \wedge\, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge\, d\Phi_{i_p}$$

Nyní budeme upravovat pravou stranu rovnosti.

$$d(\Phi^*(\omega)) = \,d((\omega_I \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge\, d\Phi_{i_p}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j}\, du_j \wedge\, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge\, d\Phi_{i_p}$$

Kdybychom věděli, že $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\circ\Phi\right)\, d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\omega_I\circ\Phi)}{\partial u_j}\, du_j$, byli bychom hotovi. Tato rovnost je však důsledkem pravidla pro derivování složené funkce, neboť platí

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j}\, du_j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\circ\Phi\cdot\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\right)\, du_j = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\circ\Phi\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\circ\Phi\right)\, d\Phi_i.\end{aligned}$$

ad (iv) Díky již dokázaným tvrzením (i) a (ii), stačí uvažovat pouze tyto dva případy[4]: $\omega = f \in \mathcal{E}^0(M)$ a případ $\omega = dx_i,\ i = 1, \dots, n$.

První případ plyne ihned z definice:

$$(\Phi\circ\Psi)^*(f) = f\circ(\Phi\circ\Psi) = (f\circ\Phi)\circ\Psi = \Psi^*(\Phi^*(f)).$$

Nechť tedy nyní $\omega = dx_i$. Pak

$$\begin{aligned}(\Phi\circ\Psi)^*(dx_i) &= \sum_{l=1}^{s}\frac{\partial(\Phi\circ\Psi)_i}{\partial t_l}\, dt_l = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\circ\Psi\right)\left(\sum_{l=1}^{s}\frac{\partial \Psi_j}{\partial t_l}\, dt_l\right) = \\ &= \Psi^*\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_j\right) = \Psi^*(\Phi^*(dx_i)).\end{aligned}$$

ad (v) Nechť je vše označeno jako ve formulaci věty. Tedy mimo jiné $\omega = f\, dx_1 \wedge ... \wedge\, dx_n$ a tedy podle definice Φ^* platí, $\Phi^*(\omega) = (f\circ\Phi)\, d\Phi_1 \wedge ... \wedge\, d\Phi_n$. V každém bodě $u \in U$ můžeme $d\Phi_i$ vyjádřit jako:

$$d\Phi_i(u) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} du_j$$

(viz definice 3.2). Podle 2.3(iv), použité pro $n = k$, je tedy

$$d\Phi_1 \wedge ... \wedge\, d\Phi_n(u) = \det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^{n} du_1 \wedge ... \wedge du_n = \det(\operatorname{Jac}\Phi(u))\; du_1 \wedge ... \wedge du_n$$

pro libovolné $u \in U$, což jsme chtěli dokázat.

□

De Rhamův komplex

3.7. Definice de Rhamova komplexu. Forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ se nazývá **uzavřená**, pokud $d\omega = 0$, a **exaktní**, pokud existuje forma $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že $d\tau = \omega$.

---

[4]Tvrzení lze též dokázat stejně přímočaře jako předchozí body. Stačí ho dokázat pro $\omega = \omega_I\, dx_I$. Tvrzení pak plyne jako v předešlých případech z linearity Φ^* a Ψ^*. Důkaz tvrzení je pak poměrně přímočarý a nepoužívá žádných triků, je však dosti technický. Pokud dosud nejste zběhlí v tomto typu důkazů, doporučujeme si provést tento důkaz vlastnoručně, naučíte se pracovat s používanou symbolikou a získáte tím přehled. Hlavní idea důkazu je toto: Povšimneme si, že si levá a pravá stranu dokazované rovnosti jsou diferenciální formy z $\mathcal{E}^p(V)$, obě strany můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci báze $\{\, dt_K\}_{|K|=p}$ prostoru $\mathcal{E}^p(V)$, nebo alespoň jako lineární kombinaci prvků tvaru $dt_{k_1} \wedge \ldots \wedge dt_{k_p}$, kde $k_1, \dots, k_p$ nejsou nutně vzestupně uspořádaná či vzájemně různá. Pokud vyjdou stejné lineární kombinace, bude tvrzení dokázáno.

3.8. Definice. Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^n$. Posloupnost

$$\mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(\Omega)$$

se nazývá **de Rhamův komplex.**

3.9. Poznámka. Věta 3.4(iii) říká, že každá exaktní forma je uzavřená. Posloupnost prostorů a zobrazení mezi nimi se nazývá komplex, pokud má tuto vlastnost, tj. pokud složení dvou po sobě následujících zobrazení je triviální.

Přirozená otázka je, jestli každá uzavřená forma je exaktní, nebo jestli existují formy, které jsou uzavřené, ale nejsou exaktní. Základní informace v tomto směru je následující Poincarého lemma.

3.10. Lemma [Poincaré]. *Nechť Ω je koule v $\mathbb{R}^n$. Pak každá uzavřená forma stupně k, $k = 1, \dots, n$, je exaktní.*

3.11. Poznámka. Speciální případ tohoto lemmatu se obvykle probírá již v analýze – jde o tzv. větu o potenciálu. Ta říká, že vektorové pole $\vec{T}$ na jednoduše souvislé oblasti (např. na kouli) je gradientem funkce, pokud platí $\frac{\partial T_j}{\partial x_i} = \frac{\partial T_i}{\partial x_j}$. Tato věta je totožná s případem $k = 1$ Poincarého lemmatu.

Důkaz Poincarého lemmatu není těžký. Je-li ω uzavřená forma, pak příslušnou exaktní formu τ lze definovat vhodným vzorečkem a ověřit přímým výpočtem, že $d\tau = \omega$ (viz cvičení 3.15(f)). Důkaz obecného Poincarého lemmatu (pro variety) je uveden v 12.25.

Je zcela podstatné si uvědomit, že Poincarého lemma je formulováno pouze pro velmi speciální oblast – pro kouli. Pro to jsou velmi dobré důvody. Stačí vyjmout z koule jeden jediný bod (např. její střed) a tvrzení přestane platit (viz například cvičení 3.15(e) a 10.13(f)). Intuitivně lze říci o hodně víc. Pokud vyjmeme jeden bod z koule $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, bude existovat (modulo exaktní formy) jediná (až na násobek) uzavřená forma stupně n, která není exaktní. Přesněji řečeno, prostor uzavřených forem stupně n modulo prostor exaktních forem je vektorový prostor dimenze 1. Pokud bychom vyjmuli z koule 5 různých bodů, bude mít příslušný faktorprostor dimenzi 5. Je tedy zřejmé, že je zde velmi zajímavá souvislost mezi faktorprostorem uzavřených forem modulo exaktní formy a topologií příslušné oblasti, na které jsou uvažované diferenciální formy definované. Přesnou formulaci této souvislosti lze nalézt v 12.20.

Příklady, úlohy a cvičení

3.12. Diferenciální formy v nízkých dimenzích, výpočet diferenciálu.

(a) Buď $\Omega = \mathbb{R}^2$. Napište obecný tvar diferenciální formy $\omega \in \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^2), k = 0, 1, 2$ a vypočtěte hodnotu vnějšího diferenciálu $d\omega$.

(b) Buď $\Omega = \mathbb{R}^3$. Napište obecný tvar diferenciální formy $\omega \in \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^3), k = 0, 1, 2, 3$ a vypočtěte hodnotu vnějšího diferenciálu $d\omega$.

(c) Vypočítejte $d\omega$, je-li:

α) $\omega = xy\,dz + yz\,dx$
β) $\omega = e^{xy}\,dy - e^{yz}\,dz$
γ) $\omega = x^2\,dy \wedge dz + yz\,dx \wedge dz$
δ) $\omega = \sin(xy)\,dx \wedge dz + \cos(xz)\,dx \wedge dy$

(d) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n, f \in C^\infty(\Omega) \simeq \mathcal{E}^0(\Omega)$. Dokažte, že $df \wedge df = 0$, a to (a) přímým výpočtem, (b) jako důsledek 2.11(g).

(e) Najděte $(n-1)$-formu ω na $\mathbb{R}^n$ takovou, že $d\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Charakterizujte všechny takové formy ω.

3.13. Gradient, rotace, divergence.
Je-li $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definujeme **gradient** f jako vektorovou funkci

$$\operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Je-li $F = (F_1, \dots, F_n)$ hladké vektorové pole na $\mathbb{R}^n$ (tj. každá funkce F_i je z $C^\infty(\mathbb{R}^n)$), definujeme **divergenci vektorového pole** F jako funkci

$$\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Je-li $F = (F_1, F_2, F_3)$ hladké vektorové pole na $\mathbb{R}^3$, definujeme **rotaci vektorového pole** F jako pole

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).$$

Zapíšeme-li operátor gradientu na prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ symbolicky jako $\operatorname{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, lze psát $\operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \times F$ ve smyslu obvyklého vektorového součinu na $\mathbb{R}^3$.

Dokažte, že

(i) $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$,
(ii) $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$

a to (a) přímým výpočtem, (b) srovnáním s výsledky 3.12(b) a užitím vztahu $d(d\omega) = 0$.

Poznámka: operátor Δ definovaný na hladkých funkcích $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jako $\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ je takzvaný Laplaceův operátor.

3.14. Přenášení diferenciálních forem.
Pro danou formu ω na $\mathbb{R}^3$ a dané zobrazení Φ definované na vhodné podmnožině $\mathbb{R}^2$ vypočítejte přenesenou formu $\Phi^*(\omega)$.

α) $\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dz$,
$\Phi(u, v) = (u + v, u - v, uv)$,
β) $\omega = xy\, dz \wedge dy - xz\, dx \wedge dz$,
$\Phi(u, v) = (u^2, v - u, 2v)$,
γ) $\omega = \cos x\, dy \wedge dz + \sin y\, dz \wedge dx + \cos z\, dx \wedge dy$,
$\Phi(u, v) = (2u, uv, 2v)$,
δ) $\omega = x\, dx + y\, dy + z\, dz$,
$\Phi(\sigma, \tau) = (\cos\sigma \cos\tau, \cos\sigma \sin\tau, \sin\sigma)$,

3.15. Uzavřené a exaktní formy.
(a) Buď ω forma sudého stupně. Ukažte, že forma $\omega \wedge d\omega$ je uzavřená (bez použití bodu (b)).

(b) Buď ω forma sudého stupně. Ukažte, že forma $\omega \wedge d\omega$ je exaktní.

(c) Buďte ω a τ uzavřené formy libovolného stupně. Ukažte, že forma $\omega \wedge \tau$ je potom také uzavřená.

(d) Buďte ω a τ exaktní formy libovolného stupně. Ukažte, že $\omega \wedge \tau$ je potom také exaktní.

(e) Ukažte, že forma

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy - \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$$

je uzavřená, ale není exaktní.

Poznámka o souvislosti s analýzou v komplexním oboru: Komplexní 1-forma $\frac{dz}{z}$ na $\mathbb{C}$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$\frac{dz}{z} = \frac{dz\bar{z}}{|z|^2} = \frac{(dx + i\, dy)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2} + i\frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}.$$

Je tedy $\omega = \operatorname{Im} \frac{dz}{z}$. Komplexní funkce $\frac{1}{z}$ však nemá primitivní funkci v $\mathbb{C} - \{0\}$, (je derivací funkce $\operatorname{Log} z$, avšak pouze v oboru $\mathbb{C} - ((-\infty, 0>)$ a funkce $\operatorname{Im}\frac{1}{z}$ je derivací funkce $\operatorname{Arg} z$ v tomtéž oboru. Funkce $\operatorname{Log} z$ a $\operatorname{Arg} z$ přitom nelze spojitě rozšířit na $\mathbb{C} - \{0\}$.

Toto tvrzení lze dokázat i pomocí Stokesovy věty – viz cvičení 10.13(e),(f).

(f) **Důkaz Poincarého lemmatu.** Nechť $\Omega = K(0,R)$ je koule o poloměru $R > 0$ v $\mathbb{R}^n$. Nechť $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, $\omega = \omega_I\, dx_I$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Definujme formu

$$\tau(x) := \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} [\int_0^1 (t^{k-1}\omega_I(tx))\, dt] x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{j-1}} \wedge dx_{i_{j+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Ukažte, že $d\tau = \omega$.

4. Řetězce

Při integraci přes křivky, plochy, atd. si integrační obor každý představuje jako regulární křivku či plochu. Bylo by možné zahrnout vhodnou definici regularity do definice integračního oboru, která následuje. Tento postup by ale vedl ke zbytečným potížím, obzvlášť při definici hranice oboru integrace nutné pro Stokesovu větu. Ve skutečnosti podmínka regularity pro parametricky zadaný integrační obor není při definici integrálu z diferenciální formy k ničemu potřebná. A intuitivně řečeno, pokud je obor integrace degenerovaný (singulární – odtud název), vyjde pak hodnota integrálu automaticky nulová.

Řetězce, singulární krychle

4.1. Definice. Označme $I_k := \langle 0,1\rangle^k \subset \mathbb{R}^k$; $I_k^0 := (0,1)^k$. Řekneme, že zobrazení $\varphi : I_k \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je **k-dimenzionální singulární krychle v** Ω, pokud existuje otevřená množina $\mathcal{O}$; $I_k \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ taková, že φ je restrikcí spojitě diferencovatelného zobrazení $\tilde{\varphi} : \mathcal{O} \to \Omega$. (tj. $\exists \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \Omega) : \varphi = \tilde{\varphi}|_{I_k}$.)

Množinu $\varphi(I_k)$ budeme označovat $<\varphi>$.

4.2. Definice.

(i) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega)$ (tj. $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$), pak definujeme

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f = \int_\Omega f\, dx_1 \ldots dx_n$$

pokud má pravá strana smysl (třeba jako Lebesgueův integrál). Pro $n = 0$ klademe $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ a pro $f \in \mathcal{E}(\{0\}) \simeq \mathbb{R}$ definujeme

$$\int_{\{0\}} f = f(0).$$

(ii) Buď $\varphi : \mathcal{O} \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ spojitě diferencovatelné zobrazení, $\mathcal{O}$ otevřená v $\mathbb{R}^k$. Buď $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Definujeme

$$\int_\varphi \omega := \int_\mathcal{O} \varphi^*(\omega).$$

(iii) Buď φ k-dimenzionální singulární krychle, pak definujeme

$$\int_\varphi \omega := \int_{I_k} \varphi^*(\omega).$$

Na právě definovaný pojem se díváme jako na integrál diferenciální formy přes singulární krychli a tudíž se jeví přirozeným, že bychom chtěli, aby pojem nezávisel na „parametrizaci“. (Změna parametrizace bude tzv. difeomorfismus mezi definičními obory příslušných množin $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ – definici tohoto pojmu najdete v 7.1.) O tom mluví následující věta.

4.3. Věta. *Buďte φ, φ' k-dimenzionální singulární krychle takové, že $\varphi' = \varphi \circ \alpha$. Přitom α je difeomorfismus $\alpha : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ (kde $\mathcal{O} \supset I_k, \mathcal{O}' \supset I_k$ a α je „změna parametrizace") s vlastností, že znaménko* $\det\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^k$ *je konstantní na celém $\mathcal{O}$ (označme hodnotu, kterou znaménko nabývá, $\theta \in \{-1, +1\}$). Pak pro každé $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ platí*

$$\int_\varphi \omega = \theta \int_{\varphi'} \omega$$

Poznámka. Místo konstantnosti θ lze předpokládat souvislost $\mathcal{O}$. Pak totiž z $\alpha, \alpha^{-1} \in C^1$ a spojitosti funkce $\det\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^k$, která navíc nikde nenabývá hodnoty 0, plyne, že znaménko $\det\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^k$ je skutečně konstantní na $\mathcal{O}$.

Důkaz. Platí

$$\int_\varphi \omega = \int_{I_k^0} \varphi^*(\omega) \tag{12}$$

a dále

$$\int_{\varphi'} \omega = \int_{I_k^0} (\varphi')^*(\omega) = \int_{I_k^0} (\varphi \circ \alpha)^* \omega = \int_{I_k^0} \alpha^*(\overbrace{\varphi^*(\omega)}^{\in \mathcal{E}^k(\Omega)}) = \theta \int_{I_k^0} \varphi^*(\omega) = \theta \int_\varphi \omega,$$

což jsme chtěli. Rovnost $\int_{I_k^0} \alpha^*(\varphi^*(\omega)) = \theta \int_{I_k^0} \varphi^*(\omega)$ plyne z věty 3.6(v) a z věty o substituci pro Lebesgueův integrál, protože je-li $x' = \alpha(x)$, $\varphi^*(\omega) = f(x')\,dx_1' \wedge \ldots \wedge dx_k'$, pak

$$\alpha^*(\varphi^*(\omega)) = \theta |\det \operatorname{Jac} \alpha| (f \circ \alpha)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k.$$

□

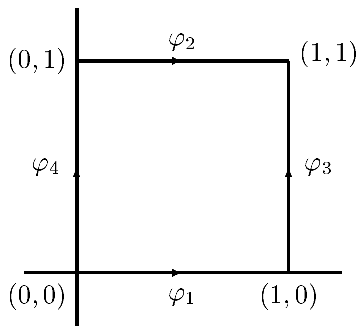
4.4. Definice řetězce. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Volnou Abelovu grupu generovanou všemi k-dimenzionálními singulárními krychlemi v Ω budeme značit $C_k(\Omega)$. Její prvky budeme nazývat **řetězce**. Libovolný prvek $c \in C_k(\Omega)$ je tedy formální suma tvaru

$$c = \sum_{i \in I} n_i \varphi_i,$$

kde I je konečná indexová množina, $n_i \in \mathbb{Z}$ a φ_i jsou k-dimenzionální singulární krychle v Ω.

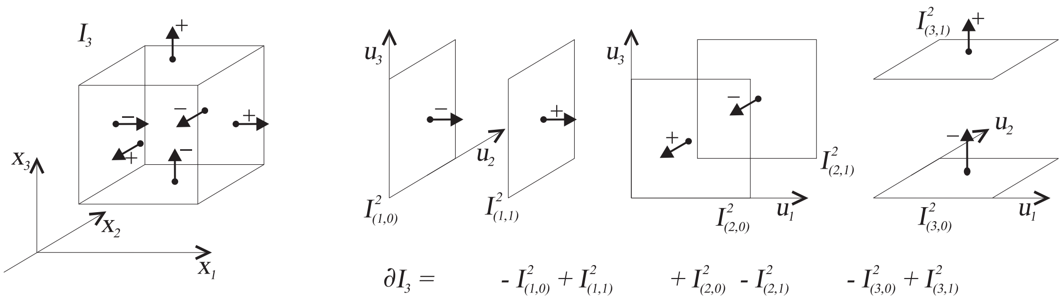
4.5. Příklad.
Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ jsou 1-dimenzionální singulární krychle dané předpisy

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &:= (u, 0) \\ \varphi_2(u) &:= (u, 1) \\ \varphi_3(u) &:= (1, u) \\ \varphi_4(u) &:= (0, u). \end{aligned}$$



Příklady 1-dimenzionálních řetězců mohou být například

$$\begin{aligned} c_1 &= 3\varphi_1 + \varphi_4 + 7\varphi_2 \\ c_2 &= \varphi_1 + (-4)\varphi_2 = \varphi_1 - 4\varphi_2 \\ c_3 &= \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_4. \end{aligned}$$



Obrázek 10. Krychle I_3 a její hranice

4.6. Definice.
(i) Označme symbolem ∂I_k $(k-1)$-dimenzionální řetězec v $\mathbb{R}^k$ daný předpisem

$$\partial I_k := \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (I^k_{(j,0)} - I^k_{(j,1)}) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} I^k_{(j,\alpha)},$$

kde $I^k_{(j,\alpha)} : I_{k-1} \to \mathbb{R}^k$ (pro $\alpha = 0, 1$) je $(k-1)$-dimenzionální singulární krychle definovaná předpisem

$$I^k_{(j,\alpha)}(u_1, \ldots, u_{k-1}) := (u_1, \ldots, u_{j-1}, \alpha, u_j, \ldots, u_{k-1}).$$

Tento řetězec[5] budeme nazývat hranice I_k (viz obr. 10).

(ii) Je-li $\varphi : I_k \to \mathbb{R}^n$ singulární krychle, pak definujeme $(k-1)$-dimenzionální řetězec $\partial\varphi$ (hranici φ) předpisem

$$\partial\varphi := \varphi \circ \partial I_k := \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (\varphi \circ I^k_{(j,0)} - \varphi \circ I^k_{(j,1)})$$

(iii) Je-li $c = \sum_{i=1}^{n} n_i \varphi_i$ k-dimenzionální řetězec, pak jeho **hranici** ∂c definujeme pomocí pojmu hranice singulární krychle jako $(k-1)$-dimenzionální řetězec daný předpisem

$$\partial c := \sum_{i=1}^{n} n_i \partial\varphi_i.$$

4.7. Definice. Je-li $c = \sum_{i=1}^{n} n_i \varphi_i$ k-dimenzionální řetězec v Ω a je-li $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, pak definujeme integrál z diferenciální formy ω přes řetězec c takto:

$$\int_c \omega := \sum_{i=1}^{n} n_i \int_{\varphi_i} \omega$$

(přitom $\int_{\varphi_i} \omega$ je definován ve 4.2).

Příklady, úlohy a cvičení

4.8. Integrace přes řetězce.
Vypočítejte integrál z dané formy ω přes danou singulární krychli (řetězec) c:

[5] Pozor, všimněte si, že symbol I_k označuje podmnožinu $\mathbb{R}^k$ (i když velmi speciální), ale symboly $I^k_{(i,\alpha)}$ označují zobrazení a symbol ∂I_k označuje řetězec v $\mathbb{R}^k$.

(a)

$$c: \begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\beta \\ z = \cos\alpha + \sin\beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta) \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle^2,$$
$$\omega = z\, dy \wedge\, dx + x\, dz \wedge\, dy + y\, dx \wedge\, dz.$$

(b)

$$c: \begin{cases} x = (s+t)^2 \\ y = (s-t)^2 \\ z = st \\ w = 2t \end{cases} \qquad (s,t) \in \langle 0, 1\rangle^2, \qquad \omega = wy\, dx \wedge\, dz.$$

(c)

$$c: \begin{cases} x = r+s \\ y = s+t \\ z = t+r \\ w = r-s+t \end{cases} \qquad (r,s,t) \in \langle 0, 1\rangle^3, \qquad \omega = w\, dx \wedge\, dy \wedge\, dz.$$

(d) Nalezněte řetězec parametrizující povrch čtyřstěnu s vrcholy v počátku a v koncových bodech vektorů $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$, orientovaný pomocí vektoru vnější normály (viz 8.24), a integrujte přes něj formu

$$\omega = (x+y)z\, dy \wedge\, dz.$$

5. Stokesova věta

Stokesova věta (v $\mathbb{R}^n$)

5.1. Věta [Stokes]. *Pro* $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega), c \in C_k(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n, k \leq n$, *platí*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega \tag{13}$$

Důkaz.
(i) Dokážeme tvrzení věty pro $k = n, c = \mathrm{Id}_{I_n}, \omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$.
Protože je ω tvaru $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$, platí

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}\, df_i \wedge\ \ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \wedge\ \ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dx_i \wedge\ \ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Pravá strana dokazovaného vztahu (13) je tedy rovna (viz definice 4.2)

$$\int_c d\omega = \int_{I_n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{14}$$

Levá strana dokazovaného vztahu (13) je podle definic 4.6 a 4.7 rovna

$$(L) = \int_{\partial c} \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^n_{(i,\alpha)}} \omega =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^n_{(i,\alpha)}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} f_j \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

integrál rozepíšeme pomocí 4.2(iii)

$$(L) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{I_{n-1}} (I^n_{(i,\alpha)})^* \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} f_j \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{I_{n-1}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (f_j \circ I^n_{(i,\alpha)})$$
$$d(I^n_{(i,\alpha)})_1 \wedge \ldots \wedge d(I^n_{(i,\alpha)})_{j-1} \wedge d(I^n_{(i,\alpha)})_{j+1} \wedge \ldots \wedge d(I^n_{(i,\alpha)})_n$$

Funkce $(I^n_{(i,\alpha)})_i$, což je i-tá složka zobrazení $I^n_{(i,\alpha)}$, je podle definice konstatní (buď 0 nebo 1). Z toho plyne $d(I^n_{(i,\alpha)})_i = 0$. Pro $i \neq j$ se mezi činiteli diferenciál $d(I^n_{(i,\alpha)})_i$ vyskytne a tudíž je celý výraz roven nule. Tedy celý součet se rovná

$$(L) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{2i+\alpha+1} \int_{I_{n-1}} (f_i \circ I^n_{(i,\alpha)})$$
$$d(I^n_{(i,\alpha)})_1 \wedge \ldots \wedge d(I^n_{(i,\alpha)})_{i-1} \wedge d(I^n_{(i,\alpha)})_{i+1} \wedge \ldots \wedge d(I^n_{(i,\alpha)})_n$$

Z definice $I_{(i,\alpha)}(u_1, \ldots, u_{n-1}) := (u_1, \ldots, u_{i-1}, \alpha, u_i, \ldots, u_{n-1})$ a z definice vnějšího diferenciálu 3.2 plyne po krátkém výpočtu $d(I^n_{(i,\alpha)})_m = du_m$ pro $1 \leq m \leq i-1$ a $d(I^n_{(i,\alpha)})_m = du_{m-1}$ pro $i+1 \leq m \leq n$, kde $u_1, \ldots, u_{n-1}$ označují souřadnice v $I_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ a tedy

$$(L) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{\alpha+1} \int_{I_{n-1}} (f_i \circ I^n_{(i,\alpha)}) \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-1}$$

Podle definice 4.2(i) je tedy

$$(L) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{\alpha+1} \int_{I_{n-1}} (f_i \circ I^n_{(i,\alpha)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{I_{n-1}} (f_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \ldots, u_n) - f_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_n))$$

a z Newtonovy formule

$$(L) = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Tím jsme dokázali, že se levá a pravá strana dokazované rovnosti (13) skutečně rovnají.

(ii) Dokážeme tvrzení pro k-dimenzionální krychli $c = \varphi$ v $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$.

Platí

$$\int_c d\omega \overset{4.2}{=} \int_{I_k^0} \varphi^*(d\omega) \overset{3.6(iii)}{=} \int_{I_k^0} d(\varphi^*(\omega)) \overset{(i)}{=} \int_{\partial I_k} \varphi^*(\omega) \overset{4.2,4.6}{=} \int_{\partial c} \omega.$$

(iii) Dokážeme tvrzení pro obecný řetězec $c = \sum_{i \in I} n_i \varphi_i \in C_k(\Omega)$.

$$\int_c d\omega = \sum_{i \in I} n_i \int_{\varphi_i} d\omega \overset{(ii)}{=} \sum_{i \in I} n_i \int_{\partial \varphi_i} \omega \overset{4.6(iii)}{=} \int_{\partial c} \omega.$$

□

Příklady, úlohy a cvičení

5.2. Stokesova věta pro řetězce.

Ověřte přímým výpočtem Stokesovu větu pro danou singulární krychli (řetězec) c a danou formu ω. (Dokažte $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$.)

(a)

$$c: \begin{cases} x = s + t \\ y = s - t \\ z = st \end{cases} \qquad (s,t) \in \langle 0,1 \rangle^2, \qquad \omega = xy\,dx.$$

(b)

$$c: \begin{cases} x = s^2 - t^2 \\ y = s^2 + t^2 \\ z = s - t \\ w = s + t \end{cases} \qquad (s,t) \in \langle 0,1 \rangle^2, \qquad \omega = xy\,dy + zw\,dw.$$

(c)

$$c: \begin{cases} x = rs \\ y = st \\ z = rt \\ w = r + s + t \end{cases} \qquad (r,s,t) \in \langle 0,1 \rangle^3, \qquad \omega = w\,dx \wedge\,dz \;+ z\,dy \wedge\,dw.$$

Kapitola III

Diferenciální formy na varietách

6. Přehled multilineární algebry

V první kapitole jsme definovali vnější algebru „klasickým způsobem“ – zavedli jsme operaci vnějšího násobení na generátorech a rozšířili ji lineárně na celou algebru. Tato definice stačila pro pochopení pojmu diferenciální formy. Nyní definujeme abstraktně tenzorovou algebru – obecný pojem, jehož vedlejším produktem bude i nová definice vnější algebry (jako podprostoru tenzorové algebry s nově definovaným násobením). Tento obecný přístup nám umožní dívat se na diferenciální formy jako na speciální případ tenzorových polí na varietě (viz oddíl 9).

Tenzorová algebra vektorového prostoru

Vektory daného vektorového prostoru umíme sčítat a násobit reálným číslem, ale neumíme je násobit mezi sebou. Tenzorová algebra je rozšířený vektorový prostor, do kterého původní vektory patří a ve kterém je jejich součin už definován. Zároveň je definován součin libovolných prvků tohoto rozšíření (tj. je to algebra). Pro jistotu zopakujme, co je to algebra.

6.1. Definice. Nechť A je (reálný) vektorový prostor, na kterém je definováno bilineární zobrazení (tradičně označované jako součin), tj. zobrazení

$$(v, w) \in A \times A \mapsto v \cdot w \in A.$$

Nechť pro tento součin platí obvyklé vlastnosti distributivnosti násobení vůči sčítání v $\mathbb{R}$ i v A. Pak prostor A s touto strukturou nazveme **algebrou** (nad $\mathbb{R}$). Řekneme, že A je algebra s jednotkou, pokud existuje element $1 \in A$ takový, že $1 \cdot v = v \cdot 1 = v, v \in A$.

Podle vlastností násobení rozlišujeme asociativní algebry (násobení je asociativní) nebo komutativní algebry (násobení je asociativní a komutativní). Na rozdíl od definice tělesa se nepředpokládá existence inverzních prvků (vůči násobení).

6.2. Poznámka.
Základní myšlenka vnoření vektorového prostoru do tenzorové algebry je prostá – vektory násobit neumíme, ale funkce ano. Každý vektor $v \in V$ je možné interpretovat jako lineární funkci na duálu V^*. Jejich součin je pak bilineární funkce na $V^* \times V^*$.

Připomínáme, že duálem vektorového prostoru V se rozumí vektorový prostor V^* všech lineárních zobrazení $\alpha : V \to \mathbb{R}$. Druhým duálem V^{**} se rozumí duál V^*, přitom existuje kanonické vnoření

$$V \hookrightarrow V^{**},$$

které vektoru $v \in V$ přiřadí zobrazení $\varphi_v \in V^{**}$ definované pomocí

$$\varphi_v(\alpha) = \alpha(v)$$

pro všechna $\alpha \in V^*$. Pro konečně dimenzionální prostor V (jiné ani neuvažujeme) je toto vnoření izomorfismem.

6.3. Definice. Nechť $V_j, j = 0, \dots, \infty$, je posloupnost vektorových prostorů. Jejich direktní součet $\oplus_{j=0}^{\infty} V_j$ je vektorový prostor všech posloupností

$$(v_0, v_1, \dots, v_j, \dots); v_j \in V_j,$$

které mají jen konečně mnoho nenulových prvků. Sčítání a násobení reálným číslem je definováno po komponentách. Jednotlivé prostory V_j jsou standardně ztotožňovány s odpovídajícími podprostory

$$\{v = \{v_i\} \in \oplus_{i=0}^{\infty} V_i; v_i = 0, i \neq j\}$$

a $\oplus_{j=0}^{\infty} V_j$ je pak opravdu direktní součet V_j, tj. každý prvek $v \in \oplus_{j=0}^{\infty} V_j$ lze napsat jednoznačně ve tvaru

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j; \quad v_j \in V_j.$$

6.4. Definice. Nechť V je (reálný) vektorový prostor konečné dimenze. Označme $V^m = V \otimes \ldots \otimes V$ (m činitelů) vektorový prostor všech multilineárních zobrazení z $V^* \times \ldots \times V^*$ (m činitelů) do $\mathbb{R}$. **Multilineárním (m-lineárním) zobrazením** se rozumí zobrazení lineární zvlášť v každé složce.

V^m se nazývá **m-tá tenzorová mocnina** prostoru V. Označíme navíc $V^0 = \mathbb{R}$ (chápeme jej jako prostor konstantních zobrazení) a ztotožníme $V^1 = (V^*)^*$ s V.

Tenzorová algebra je pak direktní součet $T(V) = \oplus_{m=0}^{\infty} V^m$ a její prvky se nazývají **tenzory**.

Násobení v tenzorové algebře je definováno takto: jsou-li $\omega \in V^n, \tau \in V^m$ dva homogenní prvky, pak je jejich součin prvek $\omega \otimes \tau \in V^{n+m}$, definovaný předpisem

$$[\omega \otimes \tau](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\tau(\beta_1, \ldots, \beta_m),$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in V^*$. Pro prvek z V^0 jde o násobení příslušnou konstantou. Je ihned vidět, že tenzorové násobení je asociativní (neboť násobení v $\mathbb{R}$ je asociativní), ale není komutativní. Tenzorový součin konečného počtu prvků z $T(V)$ se definuje indukcí (díky asociativitě násobení není třeba používat závorky, označující pořadí násobení). Tenzorová algebra je (nekonečně dimenzionální) asociativní algebra s jednotkou (je jí prvek $1 \in V^0$), obsahující V jako podprostor.

6.5. Příklad. Nechť V má bázi $e_1, \ldots, e_n$. Označme $\varepsilon^1, \ldots \varepsilon^n$ bázi V^* duální k bázi $e_1, \ldots, e_n$, tj. bázi jednoznačně určenou vztahy $\varepsilon^k(e_j) = \delta_j^k$ pro všechna $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. V dalším budeme používat k indexaci m-tice tvaru $A = (a_1, \ldots, a_m) \in \{1, \ldots, n\}^m$, označme symbolem $|A|$ počet jejích členů, tj. $|A| = m$. Pro indexovou m-tici označme

$$e_A := e_{a_1} \otimes \ldots \otimes e_{a_m}.$$

Pak

$$e_A(\varepsilon^{b_1}, \ldots, \varepsilon^{b_m}) = \delta_{a_1}^{b_1} \ldots \delta_{a_m}^{b_m},$$

kde symbol δ_a^b, tzv. Kroneckerovo delta, je definován pro libovolné dva objekty (čísla, množiny, atd.) a, b jako

$$\delta_a^b = \begin{cases} 1 \text{ pro } a = b, \\ 0 \text{ pro } a \neq b. \end{cases}$$

Označme symbolem $\varepsilon^B, B = (b_1, \ldots, b_m)$, prvek $(\varepsilon^{b_1}, \ldots, \varepsilon^{b_m}) \in V^* \times \ldots \times V^*$. Pak předchozí vztah lze stručně zapsat

$$e_A(\varepsilon^B) = \delta_A^B.$$

Podobně jako při popisu duálního prostoru, nejdříve si je třeba rozmyslit, jak je tenzorová mocnina velká, najít její vhodnou bázi. Z multilinearity prvků v tenzorové mocnině plyne ihned, že každý prvek $\omega \in V^m$ je jednoznačně určen svými hodnotami $\omega(e^B), |B| = m$. To je podstata důkazu následující věty.

6.6. Věta. *Nechť V má bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Pak množina $\{e_A; |A| = m\}$ tvoří bázi V^m. Dimenze V^m je rovna n^m. Obecný prvek $\omega \in V^m$ se tedy dá napsat ve tvaru*

$$\omega = \sum_{a_1, \ldots, a_m = 1}^{n} \omega^{a_1 \ldots a_m} e_{a_1} \otimes \ldots \otimes e_{a_m}.$$

Důkaz. Nechť $\varepsilon^1, \ldots \varepsilon^n$ je báze V^*, duální k bázi $e_1, \ldots, e_n$ prostoru V.

(i) Nejprve ukážeme, že zmíněný systém prvků generuje V^m. Je-li $\omega \in V^m$ libovolný prvek, pak pro libovolnou m-tici $B = (b_1, \ldots, b_m)$ čísel mezi 1 a n definujeme čísla $\omega^B := \omega(\varepsilon^B)$. Pak $\omega = \sum_{B, |B| = m} \omega^B e_B$, neboť levá i pravá strana mají zřejmě tytéž hodnoty na prvcích $\varepsilon^C, |C| = m$, totiž ω^c.

(ii) Množina $\{e_A; |A| = m\}$ je lineárně nezávislá, neboť je-li lineární kombinace $\sum_{A, |A| = m} \alpha_A e_A; \alpha_A \in \mathbb{R}$ triviální, jsou i čísla

$$\sum_{A, |A| = m} \alpha_A e_A(\varepsilon^B) = \alpha_B$$

rovna nule. □

6.7. Poznámka. Zobrazení

$$\varphi : (v_1, \dots, v_m) \in V \times \dots \times V \ \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_m \in V^m$$

je multilineární zobrazení, které má následující vlastnost:

Je-li W libovolný vektorový prostor a je-li $\psi : V \times \dots \times V \to W$ libovolné m-multilineární zobrazení, pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\Psi : V^m \to W$ takové, že $\Psi \circ \varphi = \psi$.

Dokonce víc, dá se ukázat, že tato vlastnost charakterizuje tenzorovou mocninu (až na izomorfismus) jednoznačně. Prostor V^m je tedy univerzální objekt mající tuto vlastnost a to bývá standardní algebraická definice tenzorové mocniny.

Podobně je možné charakterizovat (tj. definovat) celou tenzorovou algebru $T(V)$ spolu s vnořením $\iota : V \mapsto T(V)$ jako univerzální objekt s vlastností:

Pro každou asociativní algebru $\mathcal{A}$ s jednotkou a pro každé lineární zobrazení $j : V \to \mathcal{A}$ existuje právě jeden homomorfismus algeber $\Phi : T(V) \to \mathcal{A}$ takový, že $j = \Phi \circ \iota$.

Přesně stejným postupem jako se definovala tenzorová mocnina vektorového prostoru je možné také definovat tenzorový součin $V \otimes W$ dvou různých vektorových prostorů. I tento tenzorový součin by bylo možno definovat analogicky pomocí odpovídající univerzální vlastnosti.

6.8. Definice. Nechť V, W jsou dva vektorové prostory. Množinu všech bilineárních zobrazení prostoru $V^* \times W^*$ do $\mathbb{R}$ označíme symbolem $V \otimes W$ a nazveme **tenzorovým součinem** V a W. Pro dvojici $v \in V, w \in W$ se analogicky definuje tenzorový součin $v \otimes w$. Stejně jako nahoře se ukáže, že jsou-li $e_1, \dots, e_m$, resp. $f_1, \dots, f_n$ báze V, resp. W, pak prvky tvaru $e_i \otimes f_j ; i = 1, \dots n; j = 1, \dots, m$ tvoří bázi $V \otimes W$, který má tedy dimenzi $m \cdot n$.

Indukcí lze opět definovat tenzorový součin libovolného počtu prostorů. Následující definice je toho speciálním případem.

6.9. Definice. Je-li V vektorový prostor a V^* jeho duál, pak prvky prostoru

$$V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$$

(celkem s činitelů typu V a r činitelů typu V^*) se nazývají **tenzory typu** $\binom{s}{r}$ nebo **r-krát kovariantní a s-krát kontravariantní tenzory**. Speciálně, tenzory typu $\binom{s}{0}$ patří do V^s a tenzory typu $\binom{0}{r}$ patří do $(V^*)^r$.

Tradičně se tenzory popisovaly pomocí souřadnic. To jest, pokud $e_1, \dots, e_n$ je báze V a $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ je duální báze V^*, pak lze obecný tenzor α typu $\binom{s}{r}$ zapsat jednoznačně ve tvaru

$$\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_r} \alpha^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_r}.$$

Pokud $e'_1, \dots, e'_n$ je jiná báze V, $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ je duální báze V^* a pokud matice přechodu mezi těmito bázemi jsou dány pomocí $e'_i = \sum_k a^k_i e_k$, $\varepsilon'^j = \sum_l b^j_l \varepsilon^l$ (tedy matice (b^j_i) je inverzní k matici (a^j_i); dolní index je řádkový, horní sloupcový), pak

$$\alpha^{k_1 \dots k_s}_{l_1 \dots l_r} = \sum \alpha'^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} a^{k_1}_{i_1} \dots a^{k_s}_{i_s} b^{j_1}_{l_1} \dots b^{j_r}_{l_r}. \tag{15}$$

Pod pojmem tenzor se původně rozuměl systém všech souřadnicových vyjádření $\alpha^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r}$ pro všechny báze prostoru V, které se mezi sebou transformují podle pravidla (15). Zpravidla se počítalo v jedné dané bázi a pak bylo třeba ověřovat nezávislost výsledku na volbě báze.

Vnější algebra vektorového prostoru

V předchozí části jsme zkoumali multilineární zobrazení kartézského součinu k kopií vektorového prostoru do reálných čísel. Typickým příkladem byl tenzorový součin $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ vektorů, definovaný jako obyčejný součin lineárních funkcionálů $v_i \in V = (V^*)^*$. Toto násobení je (zřejmě) asociativní, ale není (zřejmě) komutativní. Velmi často se používají speciální podprostory tenzorové algebry těch multilineárních zobrazení, které se chovají předepsaným způsobem při záměně pořadí komponent prvků ve $V^* \times \dots \times V^*$. Pro nás budou nejdůležitější tzv. antisymetrická multilineární zobrazení, o symetrických multilineárních zobrazeních si řekneme jen krátkou poznámku.

6.10. Definice. Nechť S_k značí grupu všech permutací množiny $\{1,\dots,k\}$. Je-li $\pi \in S_k, B = (b_1,\dots,b_k) \in \{1,\dots,n\}^k$, označíme $\pi(B) = (b_{\pi(1)},\dots,b_{\pi(k)})$ a

$$\nu^B = (\nu^{b_1},\dots,\nu^{b_k}); \quad \nu^{\pi(B)} = (\nu^{b_{\pi(1)}},\dots,\nu^{b_{\pi(k)}}) \in V^* \times \dots \times V^*.$$

Řekneme, že $\omega \in V^k$ je **antisymetrické multilineární zobrazení**, pokud

$$\omega(\nu^{\pi(B)}) = \operatorname{sgn}\pi \cdot \omega(\nu^B)$$

pro všechna $\nu^B \in V^* \times \dots \times V^*$ a všechny permutace $\pi \in S_k$. Vektorový prostor všech antisymetrických multilineárních zobrazení označíme $\Lambda^k(V)$ a nazveme k-tá **vnější mocnina** vektorového prostoru V. Direktní součet

$$\Lambda^*(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V) \subset T(V)$$

nazveme **vnější algebrou** vektorového prostoru V. Násobení ve vnější algebře je definováno takto: je-li $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^l(V)$, pak

$$[\alpha \wedge \beta](\nu^1,\dots,\nu^{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}\pi \cdot \alpha(\nu^{\pi(1)},\dots,\nu^{\pi(k)})\beta(\nu^{\pi(k+1)},\dots,\nu^{\pi(k+l)}).$$

6.11. Poznámka. Jako pro každé multilineární zobrazení, i pro prvek $\varphi \in \Lambda^k(V)$ platí, že je jednoznačně určen svými hodnotami na k-ticích

$$\varepsilon^B = (\varepsilon^{b_1},\dots,\varepsilon^{b_k}); 1 \le b_i \le n.$$

Z antisymetrie prvků $\omega \in \Lambda^k(V)$ plyne, že pokud se v množině B některý index opakuje, je $\omega(\varepsilon^B) = 0$ a přehodíme-li pořadí prvků v k-tici, vynásobí se hodnota číslem ± 1 podle znaménka příslušné permutace. Zobrazení ω je tedy jednoznačně určeno svými hodnotami na k-ticích tvaru

$$\varepsilon^J; J = (j_1,\dots,j_k); 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n.$$

Vnější násobení má následující základní vlastnosti.

6.12. Věta.
(i) Vnější násobení je asociativní.
(ii) Pro $v_1,\dots,v_k \in V, v^1,\dots,v^k \in V^*$ platí

$$[v_1 \wedge \dots \wedge v_k](v^1,\dots,v^k) = \det(v_i(v^j))_{i,j=1}^k.$$

(iii) Nechť $\{e_1,\dots,e_n\}$ je libovolná báze V. Pro libovolnou množinu

$$J = (j_1,\dots,j_k); 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$$

označme $e_J = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$. Pak $\{e_J, |J| = k\}$ tvoří bázi $\Lambda^k(V)$.
(iv)

$$e_I \wedge e_J := \begin{cases} 0, & \textit{pokud } I \cap J \ne \emptyset, \\ \operatorname{sgn}\binom{I,J}{I \cup J} e_{I \cup J}, & \textit{pokud } I \cap J = \emptyset. \end{cases} \tag{16}$$

Důkaz. (i) Definice vnějšího násobení se dá napsat ještě trochu jinak. Zobrazení α, β jsou antisymetrická, takže můžeme v definici sloučit sčítance, které se liší jen permutací prvků uvnitř α či β a zkrátit tak faktoriály ve jmenovateli. Označíme-li $\tilde{S}_{k+l}$ množinu permutací π, pro které platí

$$\pi(1) < \dots < \pi(k); \pi(k+1) < \dots < \pi(k+l),$$

pak

$$[\alpha \wedge \beta](v^1,\dots,v^{k+l}) = \sum_{\pi \in \tilde{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\pi \cdot \alpha(v^{\pi(1)},\dots,v^{\pi(k)})\beta(v^{\pi(k+1)},\dots,v^{\pi(k+l)}).$$

To lze ještě přepsat takto:

$$[\alpha \wedge \beta](v^1,\dots,v^{k+l}) = \sum_{I,J} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I,J \\ I \cup J \end{pmatrix} \alpha(v^I)\beta(v^J),$$

kde se sčítá přes všechny rozklady $I \cup J = \{1, \dots, k+l\}, |I| = k, |J| = l$ a I, J jsou uspořádané podle velikosti. (Používáme přitom označení $\binom{I,J}{I \cup J}$ z 2.1.) Pak ale

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v^1, \dots, v^{k+l+m}) = \tag{17}$$

$$= \sum_{I,J,K} \operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I \cup J, K} \binom{I \cup J, K}{I \cup J \cup K} \alpha(v^I) \beta(v^J) \gamma(v^K) \tag{18}$$

a

$$\operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I \cup J, K} \binom{I \cup J, K}{I \cup J \cup K} = \operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I \cup J \cup K},$$

z čehož ihned plyne asociativita násobení.

(ii) Stačí použít právě dokázaný vztah pro součin tří vektorů a rozšířit jej indukcí na součin k vektorů.

(iii) Je-li $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ duální báze V^*, pak pro množiny $I, J; |I| = |J| = k$ uspořádané podle velikosti platí

$$e_I(\varepsilon^J) = \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_k}^{j_k},$$

z čehož ihned plyne (podobně jako pro tenzorový součin) požadované tvrzení.

(iv) Pro důkaz této části stačí ukázat, že

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i, i \neq j; e_i \wedge e_i = 0$$

a použít indukci. Ale tyto vztahy jsou přímým důsledkem definice vnějšího násobení, neboť

$$[e_i \wedge e_j](v^1, v^2) = e_i(v^1) e_j(v^2) - e_i(v^2) e_j(v^1).$$

□

6.13. Důsledek. Je-li V n-dimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pak platí:
(i) $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}; \dim \Lambda^*(V) = 2^n; \Lambda^k(V) = \{0\}, k > n$.
(ii) $\wedge$ je asociativní.
(iii) Je-li $\omega \in \Lambda^k(V), \tau \in \Lambda^l(V)$ pak $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$.
(iv) Buďte $v_1, \dots, v_k \in V$ vektory. Můžeme je napsat ve tvaru $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$, kde $i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\}$ a $v_i^j \in \mathbb{R}$. Pro každou k-prvkovou podmnožinu $I \subset \{1, \dots, n\}$ označme $V_I := (v_i^j)_{i \in \{1, \dots, k\}, j \in I}$ matici $k \times k$, která vznikne z matice koeficientů $(v_i^j)_{i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\}}$ vynecháním sloupců jejichž index není v množině I. Při tomto označení platí, že

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I| = k} \det V_I \cdot e_I$$

Důkaz. Viz věta 2.3. □

6.14. Symetrická algebra. Řekneme, že $\omega \in V^k$ je **symetrické multilineární zobrazení**, pokud

$$\omega(\nu^{\pi(B)}) = \omega(\nu^B)$$

pro všechna $\nu^B \in V^* \times \dots \times V^*$ a všechny permutace $\pi \in S_k$ (srovnejte s definicí 6.10). Vektorový prostor všech symetrických k-multilineárních zobrazení označíme $\operatorname{Sym}^k(V)$ (někdy se značí i $\odot^k(V)$) a nazveme k-tá **symetrická mocnina** vektorového prostoru V. Direktní součet

$$\operatorname{Sym}^*(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} \operatorname{Sym}^k(V) \subset T(V)$$

nazveme **symetrickou algebrou** vektorového prostoru V. Násobení v symetrické algebře je definováno takto: je-li $\alpha \in \operatorname{Sym}^k(V), \beta \in \operatorname{Sym}^l(V)$, pak

$$[\alpha \odot \beta](\nu^1, \dots, \nu^{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \alpha(\nu^{\pi(1)}, \dots, \nu^{\pi(k)}) \beta(\nu^{\pi(k+1)}, \dots, \nu^{\pi(k+l)}).$$

Symetrické zobrazení $\omega \in \operatorname{Sym}^k V$ je jednoznačně určeno svými hodnotami na k-ticích tvaru

$$\varepsilon^J; J = (j_1, \dots, j_k); 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n.$$

Odtud podobně jako pro vnější algebru plyne, že bází $\operatorname{Sym}^k V$ jsou prvky tvaru

$$e_J; J = (j_1, \dots, j_k); 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n.$$

Je-li tedy V n-dimenzionální prostor, má $\operatorname{Sym}^k V$ dimenzi $\binom{n+k-1}{k}$ (spočítejte sami!).

Zobrazení indukované lineárním zobrazením

6.15. Definice. Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory a nechť $f^* : W^* \to V^*$ je příslušné duální zobrazení, definované předpisem

$$[f^*(\nu)](v) = \nu(f(v)); \quad \nu \in W^*, v \in V.$$

Pak definujeme **indukované zobrazení** $f_* : T(V) \mapsto T(W)$ mezi tenzorovými algebrami předpisem

$$[f_*(\alpha)](\nu^1, \dots, \nu^k) = \alpha(f^*(\nu^1), \dots, f^*(\nu^k)); \quad \alpha \in V^k, \nu^1, \dots, \nu^k \in W^*.$$

Zaměníme-li prostory a jejich duály, dostaneme definici indukovaného zobrazení $f^* : T(W^*) \mapsto T(V^*)$. Jinak řečeno, $f^* = (f^*)_*$. Tato dvě značení nekolidují, neboť zobrazení $f^* : W^* \to V^*$ je zúžením zobrazení $f^* : T(W^*) \to T(V^*)$ na $(W^*)^1 \simeq W^*$.

Z definice je ihned vidět, že zobrazení f_* zobrazuje $\Lambda^*(V)$ do $\Lambda^*(W)$ a f^* zobrazuje $\Lambda^*(W^*)$ do $\Lambda^*(V^*)$.

Příklady, úlohy a cvičení

6.16. Vnější algebra.
Buďte $v_i \in V, u^i \in V^*$. Vypočtěte podle definice vnějšího násobení hodnoty $(v_1 \wedge v_2)(u^1, u^2)$ a $(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)(u^1, u^2, u^3)$ – tím vlastně v těchto případech dokážete tvrzení 6.12(ii).

6.17. Tenzory.
Víte už, že tenzory typu $\binom{1}{0}$ jsou vlastně vektory (prvky prostoru V) a tenzory typu $\binom{0}{1}$ jsou lineární formy (prvky prostoru V^*). Tomu odpovídají i vzorce pro změnu souřadnic při změně báze – ověřte dosazením do vzorce (15)!

Proveďte obdobný výpočet pro tenzory typu $\binom{1}{1}$ a uvědomte si, že tenzory tohoto typu jsou vlastně matice lineárních zobrazení z V do V. Přechod k jiné bázi totiž odpovídá násobení

$$L = A^{-1} \cdot L' \cdot A,$$

kde L je matice souřadnic vůči bázím (e_i) a (ε^j), L' je matice souřadnic vůči bázím (e'_i) a (ε'^j), A je matice přechodu od (e_i) k (e'_i) a A^{-1} je matice přechodu mezi duálními bázemi.

Odtud plyne identifikace

$$V \otimes V^* \simeq \mathrm{End}(V).$$

7. Variety a zobrazení

Nastává okamžik, kdy definujeme klíčový pojem variety, nutný k pochopení dalšího textu. Varieta je „topologický prostor lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^n$“. Tyto lokální homeomorfismy se nazývají mapy a stupeň hladkosti variety je dán stupněm hladkosti přechodových funkcí mezi mapami.

Variety

7.1. Definice. Buď M libovolná množina, pak **n-dimenzionální mapa** na M je dvojice (U, φ), kde $U \subset M$ a $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ je prosté zobrazení na otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^n$. (Viz obr. 11.)

Jsou-li $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ dvě mapy, pak se zobrazení $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ definované na $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ nazývá **přechodová funkce** mezi těmito mapami. (Viz obr. 12.)

Od nynějška nebudeme odlišovat případ, kdy $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, v takovém případě budeme chápat přechodovou funkci jako prázdné zobrazení, které triviálně splňuje všechny podmínky kompatibility apod. Ušetříme si tím diskusi o triviálním případě.

Řekneme, že zobrazení $\psi : U \to \mathbb{R}^n$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, je **difeomorfismus**, je-li to prosté zobrazení na $\psi(U)$ a zobrazení ψ i ψ^{-1} jsou hladká, tj. třídy $\mathcal{C}^\infty$.

Řekneme, že dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ jsou **kompatibilní**, pokud $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ a $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jsou otevřené množiny a přechodová funkce je difeomorfismus mezi nimi.

(Hladký) atlas na M je množina map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ takových, že každé dvě mapy atlasu jsou kompatibilní a že $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Je-li dán atlas na M, pak vždy definujeme **topologii na** M takto: množina $A \subset M$ je otevřená, pokud pro každou mapu (U, φ) z daného atlasu platí, že $\varphi(A \cap U)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$.

(Hladká) varieta dimenze n je množina, na které je dán atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ n-dimenzionálních map takový, že:
1) M je Hausdorffův topologický prostor,
2) M má spočetnou bázi otevřených množin.

7.2. Poznámka. Přechodové funkce splňují tzv. kocyklové pravidlo: označíme-li přechodovou funkci $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, pak pro tři mapy s indexy α, β, γ platí na průniku $\varphi_\gamma(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$ (triviálně i na prázdném)

$$\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} = \psi_{\alpha\gamma}.$$

Přechodové funkce splňující tuto podmínku a podmínku

$$\psi_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}$$

zadávají naopak atlas na varietě.

7.3. Poznámka. V dalším budeme pracovat jen s hladkými varietami (tj. s takovými, jejichž přechodové funkce jsou třídy $\mathcal{C}^\infty$) a budeme je stručně nazývat variety, stejně jako hladké atlasy budeme stručně nazývat jen atlasy. Po zavedení topologie na varietě pomocí atlasu je zřejmé z definice, že všechna zobrazení φ_α map daného atlasu jsou pak homeomorfismy $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Velmi často se však zadává diferencovatelná struktura na množině, která má již předem zadanou topologii. V tom případě se zpravidla vyžaduje, aby topologie, definovaná pomocí daného atlasu, splývala s původní topologií. To je zřejmě ekvivalentní s podmínkou, že všechna zobrazení φ_α map atlasu jsou nejen vzájemně jednoznačná, ale dokonce že to jsou homeomorfismy.

7.4. Definice. Řekneme, že mapa (U, φ) je **kompatibilní** s atlasem $\mathcal{A}$ na varietě M, pokud $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ je také atlas na M, tj. pokud (U, φ) je kompatibilní se všemi mapami atlasu $\mathcal{A}$. **Diferencovatelná struktura** je atlas, který je maximální ve smyslu inkluze.

7.5. Poznámka. Buď M varieta s atlasem $\mathcal{A}$. Na první pohled není jasné, jestli každý atlas lze rozšířit na maximální atlas. Stačí si však uvědomit, že platí

Tvrzení. *Pokud jsou mapy $\{(U, \varphi)\}, \{(U', \varphi')\}$ kompatibilní s atlasem $\mathcal{A}$, pak je i mapa $\{(U', \varphi')\}$ kompatibilní s atlasem $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$.*

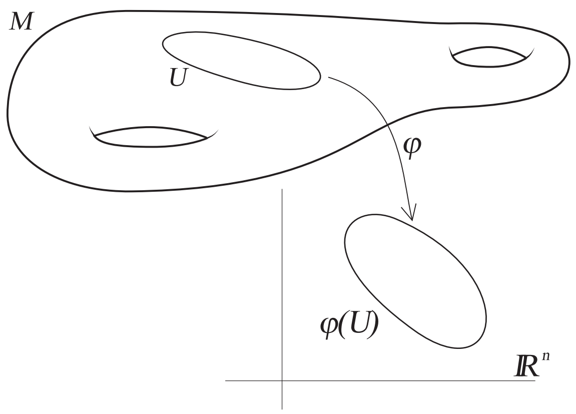
Z toho ihned plyne, že pak $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\} \cup \{(U', \varphi')\}$ je atlas; že můžeme tedy k atlasu $\mathcal{A}$ přidat všechny s ním kompatibilní mapy a dostaneme hledanou diferencovatelnou strukturu.

Důkaz. Stačí ukázat, že $\{(U, \varphi)\}$ a $\{(U', \varphi')\}$ jsou kompatibilní. Množina $\varphi(U \cap U')$ je otevřená, neboť se s použitím předpokladů snadno napíše jako sjednocení otevřených množin. Totéž pro $\varphi'(U \cap U')$. Odpovídající přechodová funkce je zřejmě prostá a na, její hladkost se opět v každém bodě dostane z hladkosti ostatních přechodových funkcí pomocí kocyklového pravidla (7.2). □

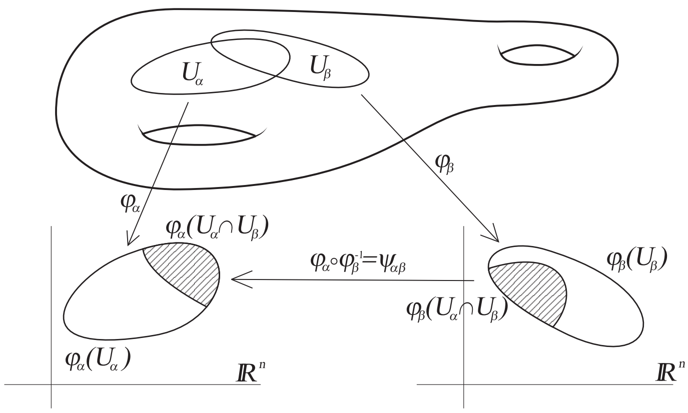
Hladkou varietou budeme tedy rozumět varietu s danou diferencovatelnou strukturou, neboť si vždy můžeme daný atlas obohatit všemi kompatibilními mapami.

7.6. Definice. Řekneme, že dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$, na M jsou **souhlasně orientovány**, pokud determinant Jacobiho matice jejich přechodové funkce je kladný na příslušném definičním oboru. Varieta M se nazývá **orientovatelná**, pokud na ní existuje atlas, jehož každé dvě mapy jsou souhlasně orientovány. V opačném případě se M nazývá **neorientovatelná varieta**. Na obrázku 13 je příklad neorientovatelné variety – tzv. Möbiova listu. Jeho model si můžete vyrobit sami z proužku papíru, přetočíte-li konce proužku vzájemně o 180^o a slepíte je.

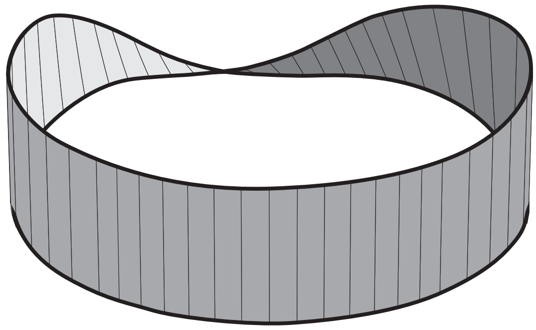
Orientovaná varieta je varieta, na níž je dán atlas, jehož každé dvě mapy jsou souhlasně orientovány. Tento atlas lze opět vždy rozšířit na maximální atlas s touto vlastností (diferencovatelná struktura se zadanou orientací).



Obrázek 11. Mapa na množině M



Obrázek 12. Přechodová funkce



Obrázek 13. Möbiův list – neorientovatelná varieta

7.7. Příklady.
(a) $\mathbb{R}^n$ a otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ jsou nejjednodušší variety dimenze n, jejich atlas se skládá z jediné mapy a identického zobrazení (viz7.15(a)). Je-li M varieta, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ atlas na M a M' otevřená podmnožina M, pak zřejmě systém

$$\{(U'_\alpha = U_\alpha \cap M', \varphi_\alpha|_{U'_\alpha}); \alpha \in A\}$$

je atlas na M' a tento atlas definuje na M' diferencovatelnou strukturu.

(b) Kružnice je varieta dimenze 1. Sféra je varieta dimenze 2 (viz cvičení 7.16(a)). Obecněji, je-li $M = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\}$, kde f je hladká funkce na $\mathbb{R}^n$ a gradient f je různý od nuly všude na M; pak lze definovat pomocí věty o implicitní funkci pokrytí množiny M mapami dimenze $n-1$. Stejně je možné postupovat i pro množiny M popsané pomocí několika rovnic. (Viz cvičení 7.15(c).)

(c) Uzavřený kruh v $\mathbb{R}^2$ (tj. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$) se standardní topologií není varieta, protože body na hranici nemají okolí homeomorfní s žádnou otevřenou množinou v $\mathbb{R}^2$. Stejně tak uzavřená koule není varietou. V obou případech je „na překážku“ hranice dané množiny, protože otevřený kruh (tj. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$) stejně jako otevřená koule varietami jsou. Později se budeme zabývat i těmito případy variety „s hranicí“.

(d) Hranice čtverce s obvyklou topologií je varieta dimenze 1. Povrch krychle s obvyklou topologií je varieta dimenze 2. Rohy ani hrany nám nevadí. Ve skutečnosti, je-li M varieta a M' je libovolná množina s ní homeomorfní, pak na M' lze pomocí tohoto homeomorfismu přenést strukturu variety z variety M. Takto je hranice čtverce homeomorfní se sférou S^1 atd.

(e) Kuželová plocha (tj. povrchy dvou vrcholem spojených nekonečných rotačních kuželů) s obvyklou topologií také není varieta. Společný vrchol kuželů nemá žádné okolí homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbb{R}^n$.

(f) Projektivní prostor $\mathbb{RP}^2$ se standardními mapami a standardní přechodovou funkcí je varieta dimenze 2. (Viz obr. 9 a cvičení 7.16(d).)

Variety s krajem

Pro účely Stokesovy věty rozšíříme uvedenou základní definici tak, aby variety mohly mít „hranici“ – kraj.

7.8. Definice. Definujme **poloprostor** H^n takto:

$$H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}.$$

Hranice ∂H^n je tvořena všemi body se souřadnicí x_1 rovnou nule. Topologie v H^n je dána jako restrikce topologie $\mathbb{R}^n$, tj. množina $U \subset H^n$ je otevřená, jestliže $U = V \cap H^n$ pro nějakou otevřenou množinu V v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce f definovaná na libovolné množině $A \subset H^n$ je **hladká**, pokud existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n, A \subset U$ a hladká funkce $\overline{f}$ na U taková, že $\overline{f}|_A = f$. Zobrazení F z A do $\mathbb{R}^n$ je hladké, pokud jsou všechny jeho složky hladké funkce na A. Derivace f v libovolném bodě H^n jsou definovány jako derivace příslušného rozšíření $\overline{f}$. Všimněte si, že tato derivace nezávisí na volbě rozšíření, neboť z existence derivace plyne, že je už jednoznačně určena z hodnot funkce f na H^n.

Jsou-li $U, U' \subset H^n$ otevřené, pak $f : U \to U'$ nazveme **difeomorfismem** U na U', pokud f je prosté zobrazení U na U' a zobrazení f i f^{-1} jsou hladké na svých definičních oborech.

V následujících definicích zobecníme pojmy užívané v definici variety (a ponecháme jim jejich stará jména).

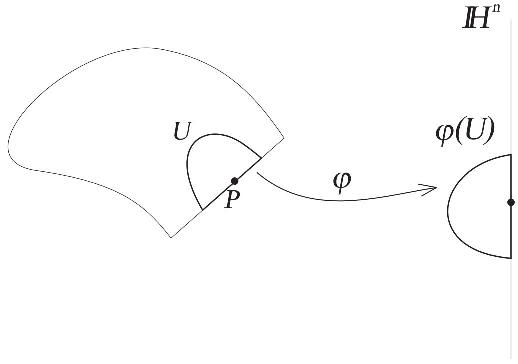
7.9. Definice. Nechť M je množina. Pak **n-dimenzionální mapa** na M je dvojice (U, φ) kde $U \subset M$ a $\varphi : U \to H^n$ je prosté zobrazení na otevřenou podmnožinu H^n. (Viz obr. 14.)

Jsou-li $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ dvě mapy, pak se zobrazení $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ definované na $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ nazývá **přechodová funkce** mezi těmito mapami.

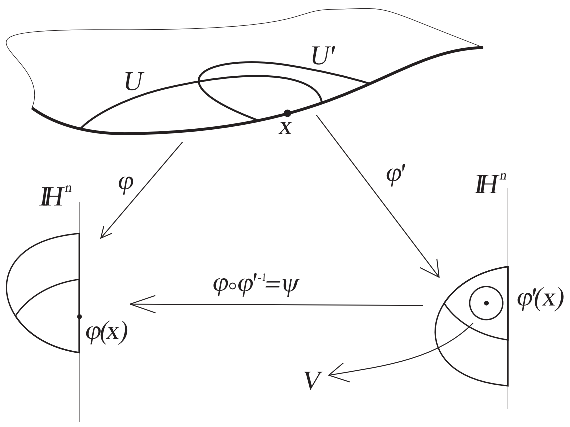
Řekneme, že dvě mapy jsou **kompatibilní**, pokud $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ a $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jsou otevřené v H^n a přechodová funkce je difeomeorfismus.

(Hladký) atlas na M je množina map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ takových, že každé dvě mapy atlasu jsou kompatibilní a že $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Je-li dán atlas na M, pak opět definujeme **topologii na** M takto: množina $A \subset M$ je otevřená, pokud pro každou mapu (U, φ) z daného atlasu platí, že $\varphi(A \cap U)$ je otevřená podmnožina H^n.

(Hladká) varieta dimenze n s krajem je množina, na které je dán atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ n-dimenzionálních map takový, že:



OBRÁZEK 14. Mapa pro varietu s krajem



OBRÁZEK 15. K Lemmatu 7.10

1) M je Hausdorffův topologický prostor,
2) M má spočetnou bázi otevřených množin.

Řekneme, že bod $m \in M$ je **bod kraje (hranice)** M, pokud pro nějakou mapu (U, φ) platí, že $\varphi(m) \in \partial H^n$. Množinu všech bodů kraje (hranice)M označíme ∂M a nazveme **krajem (hranicí)** M.

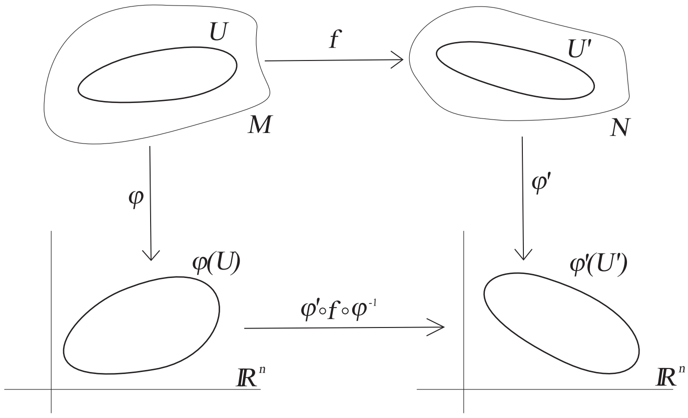
Všimněte si, že varieta bez kraje (tj. varieta pro kterou $\partial M = \emptyset$) je totéž jako varieta definovaná v první sekci této podkapitoly.

7.10. Lemma. Definice bodu kraje M nezávisí na volbě mapy.

DŮKAZ. Podle předpokladu je přechodová funkce $\psi = \varphi \circ (\varphi')^{-1}$ difeomorfismus otevřených podmnožin $\varphi(U \cap U')$ a $\varphi'(U \cap U')$ v H^n. Nechť $x \in U \cap U'$ takový, že $\varphi(x) \in \partial H^n$. Pokud by bod $\varphi'(x)$ patřil do vnitřku H^n, existovalo by jeho okolí V v $\mathbb{R}^n$, které by bylo částí $\varphi'(U \cap U')$ a $\psi(\varphi'(x))$ patřilo do množiny $\psi(V)$, která by byla otevřená v $\mathbb{R}^n$ a byla podmnožinou $\varphi(U \cap U') \subset H^n$. (Viz obr. 15.) To je ale spor s $\varphi(x) \in \partial H^n$. Tedy i $\varphi'(x) \in \partial H^n$. □

7.11. Věta. *Nechť M je varieta dimenze n s krajem. Pak lze na ∂M definovat kanonicky strukturu variety dimenze $n-1$ takto:*

Je-li $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ atlas pro varietu M, pak $\{(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}_{\alpha \in A}$ je atlas na ∂M, který definuje zmíněnou kanonickou strukturu na ∂M.



Obrázek 16. Hladké zobrazení

Je-li navíc M orientovaná varieta a $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ její orientovaný atlas, pak restrikce tohoto atlasu na ∂M má vlastnost, že její každé dvě mapy jsou souhlasně orientované a tedy podle definice 7.6 zadává (kanonickou) indukovanou orientaci na ∂M.

Důkaz. Nechť $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ je atlas na M. Hranici ∂H^n lze ztotožnit s $\mathbb{R}^{n-1}$. Pak

$$\{(U'_\alpha = U_\alpha \cap \partial M, \varphi' = \varphi_\alpha|_{U'_\alpha})|\alpha \in A\}$$

je zřejmě $(n-1)$-dimenzionální atlas na ∂M a definuje tedy na ∂M diferencovatelnou strukturu dimenze $n-1$. Pokud bychom uvažovali na M jiný kompatibilní atlas, pak je zřejmě jeho restrikce na ∂M kompatibilní s restrikcí předchozího atlasu a určují tedy oba tutéž diferencovatelnou strukturu na ∂M.

Předpokládejme dále, že zmíněný atlas je orientovaný. Potřebujeme dokázat, že kanonický atlas na ∂M je také orientovaný. Pro to stačí dokázat následující

Lemma. *Nechť $\psi : U \to U'$ je difeomorfismus otevřených množin v H^n takový, že $\psi(U \cap \partial H^n) \subset U' \cap \partial H^n$ a že ve všech bodech U je $\det(\mathrm{Jac}\,\psi)$ kladný. Nechť $\psi' := \psi|_{U \cap \partial H^n}$. Pak $\det(\mathrm{Jac}\,\psi')$ je kladný na ∂H^n.*

Důkaz lemmatu. Nechť $a \in \partial H^n$, $\psi(a) \in \partial H^n$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ označíme $x = (x_1, x')$; $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Protože $\psi_1(0, x') = 0$ pro všechny x v okolí bodu $a = (0, a')$, dostaneme $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i}(a) = 0$, $i = 2, \ldots, n$. Navíc $\psi_1(0, a') = 0$ a $\psi_1(t, a') < 0$ pro $t < 0$. Tedy $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(a) \geq 0$. Z toho ihned plyne (rozvojem podle prvního řádku Jacobiho matice), že

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(a) > 0; \quad \det(\mathrm{Jac}\,\psi')(a) > 0.$$

□

V dalším textu budeme varietou myslet varietu s krajem, nebude-li řečeno jinak, a všechny definice budou míněny pro tento obecnější případ. Všechny pojmy, ač budou vykládány na intuitivní představě variet bez kraje, jsou nastaveny tak, aby měly smysl i pro variety s krajem.

Hladká zobrazení

7.12. Definice. Nechť M a M' jsou dvě variety dimenzí n a n' a nechť $f : M \to M'$ je zobrazení. Řekneme, že f je **hladké zobrazení**, pokud pro každou mapu (U, φ) na M a každou mapu (U', φ') na M' je zobrazení $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'}$ hladké. (Viz obr. 16.)

Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je **hladká**, pokud je to hladké zobrazení variety M do variety $\mathbb{R}$. Prostor všech hladkých funkcí na M označíme $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Řekneme, že zobrazení variet $\varphi : M \to N$ je **difeomorfismus** , pokud φ je prosté a na a zobrazení φ a φ^{-1} jsou hladká.

Řekneme, že variety jsou **difeomorfní**, pokud existuje difeomorfismus $\varphi : M \to N$.

Je-li M varieta a $V \subset M$ otevřená množina, pak můžeme chápat V opět jako varietu. Takto můžeme tedy definovat hladkost i u funkcí, jejichž definičním oborem není celá varieta, ale nějaká její otevřená podmnožina.

7.13. Poznámka. Na každé množině M existuje nekonečně mnoho různých diferencovatelných struktur. Stačí vzít nějaký atlas na M, vzít si libovolné prosté zobrazení F množiny M na M, které není hladké (těch je jistě nekonečně mnoho) a uvažovat atlas $\{(F^{-1}(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F)\}_{\alpha \in A}$ na M. Na druhou stranu tyto dvě variety budou difeomorfní, neboť F je difeomorfismus variety $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A})$ na varietu $(M, \{(F^{-1}(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F)\}_{\alpha \in A})$ (viz cvičení 7.14(b)).

Podstatně zajímavější je otázka, jestli je možné na téže množině najít dvě diferencovatelné struktury, které nejsou difeomorfní. V poslední době vzbudil velkou pozornost výsledek S. Donaldsona (oceněný Fieldsovou medailí), že na $\mathbb{R}^4$ existují aspoň dvě diferencovatelné struktury, které nejsou difeomorfní. Zvláštnost výsledku spočívá mimo jiné v tom, že zatímco na $\mathbb{R}^n, n \neq 4$ jsou všechny diferencovatelné struktury difeomorfní, počet různých tříd diferencovatelných struktur na $\mathbb{R}^4$ je nekonečný.

Na sféře $S^n, n \in \mathbb{N}$ tvoří třídy ekvivalence (orientovaných) diferencovatelných struktur konečnou Abelovu grupu. Zatímco pro $n = 1, 2, 3, 5, 6,$ je tato grupa triviální, na sféře S^7 má tato grupa mohutnost 28 a pro $n = 4$ nebyla dosud určena (pro odkazy k tomuto tématu viz [**1**], citeCon a [**19**]).

Příklady, úlohy a cvičení

7.14. Poznámky k definicím.

(a) Korektnost definice topologie pomocí atlasu.

Dokažte, že topologie na varietě, zavedená v oddíle 7.1, je korektně definovaná.

(b) Dvě různé diferencovatelné struktury na $\mathbb{R}$.

Uvažujme množinu všech reálných čísel a dvě různé funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^3.$$

Dostáváme tak dva atlasy, každý sestává z právě jedné mapy: $\{(\mathbb{R}, f_1)\}$ a $\{(\mathbb{R}, f_2)\}$. Každý z těchto dvou atlasů definuje diferencovatelnou strukturu variety na $\mathbb{R}$, tj. ke každému z nich existuje podle 7.5 maximální atlas – diferencovatelná struktura. Ukažte, že tyto diferencovatelné struktury jsou různé neboli že uvedené dvě mapy jsou nekompatibilní. Na druhou stranu, variety s těmito dvěma diferencovatelnými strukturami jsou difeomorfní.

7.15. Obecné příklady variet.

(a) Regulární plocha.

Regulární plochou M dimenze k nazýváme podmnožinu $\mathbb{R}^n$, pro kterou existuje parametrizace hladkým regulárním prostým zobrazením $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ otevřená, které je homeomorfismus U na $\Phi(U) = M$. Dokažte, že každá regulární plocha je varieta dimenze k.

Položíme-li speciálně $k = n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\Phi = id_U$, dostaneme, že každá otevřená podmnožina U v $\mathbb{R}^n$ je podvarietou dimenze n.

Regulární plocha může být parametrizována pomocí různých zobrazení. Dokažte, že každé dvě parametrizace dané plochy na ní definují kompatibilní mapy.

(b) Graf zobrazení.

Grafem zobrazení $\Psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ otevřená, nazýváme množinu $\{(x, \Psi(x)); x \in U\}$. Dokažte, že graf každého takovéhoto hladkého zobrazení je varieta dimenze k.

(c) Zadání variety rovnicí.

Dokažte následující důležitou větu:

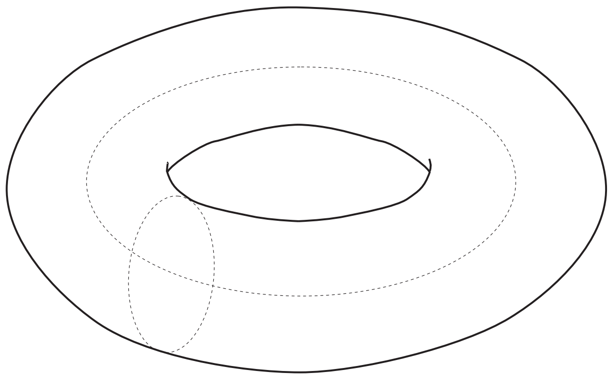
Je-li $F : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ hladké zobrazení, je-li pro nějaké $q \in \mathbb{R}^n$ množina $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+k}; F(x) = q\}$ neprázdná a má-li diferenciál $DF(x)$ hodnost n pro všechna $x \in M$, potom M je podvarieta dimenze k v $\mathbb{R}^{n+k}$.

(d) Součin dvou variet.

Jsou-li M, N dvě variety dimenze m resp. n, dokažte, že na kartézském součinu $M \times N$ lze definovat strukturu variety dimenze $m + n$.

(e) Nehausdorffovská varieta.

Sestrojte topologický prostor, který není Hausdorffův, ale je na něm definován hladký atlas tak, že všechny ostatní axiomy hladké variety jsou splněny.



OBRÁZEK 17. Torus

7.16. Příklady konkrétních variet.
(a) Sféra.
Ukažte na základě 7.15(c), že sféra

$$S^{n-1} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

je varieta dimenze $n - 1$.
Najděte pak konkrétní mapy pro S^1 a S^2.

(b) Torus.
Definujte strukturu variety na toru T^2 (viz obr. 17) pomocí vhodné parametrizace.
Uvědomte si rovněž, že torus je kartézským součinem dvou kružnic, je to tedy varieta podle (a) a 7.15(d). Obdobně lze definovat strukturu variety na obecném toru

$$T^n := S^1 \times \dots \times S^1.$$

(c) Kleinova láhev.
Obdobně jako torus, lze definovat tzv. **Kleinovu láhev** pomocí parametrizace

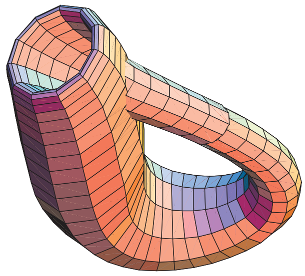
$$\begin{aligned} w &= r \sin t \sin \frac{s}{2} \\ x &= (R + r \cos t) \cos s \\ y &= r \sin t \cos \frac{s}{2} \\ z &= (R + r \cos t) \sin s, \end{aligned}$$

$s, t \in (0, 2\pi)$. Ukažte obdobně jako u toru, že se jedná o varietu dimenze 2. Na obrázku 18 je „projekce" Kleinovy láhve do třírozměrného prostoru. V $\mathbb{R}^3$ však tato plocha protíná sama sebe (v $\mathbb{R}^4$ nikoli).

(d) Projektivní prostor.
Definujte mapy pro prostor $\mathbb{RP}^n$ (definice viz 2.10(h)), popište přechodové funkce a ukažte, že jsou to difeomorfismy.

(e) Grassmannova varieta.
Definujte mapy na Grassmanniánu $\mathrm{Gr}_{k,n}$ (viz 2.10(f)) a pro případ $\mathrm{Gr}_{2,3}$ ukažte rovněž, že přechodové funkce jsou difeomorfismy. Ukažte, že $\dim Gr_{k,n} = k(n - k)$.

(f) Lieovy grupy.
Topologická grupa je topologický prostor G se strukturou grupy, která má tu vlastnost, že grupové operace součinu a inverzního prvku jsou spojité. **Lieova grupa** je topologická grupa, na níž je navíc definována struktura hladké variety tak, že grupové operace jsou hladké.



OBRÁZEK 18. Kleinova láhev

Mezi základní příklady Lieových grup patří tzv. maticové grupy:

$$\begin{aligned} M_n\mathbb{R} &:= \mathbb{R}^{n\times n} = \text{matice } n\times n \text{ s koeficienty v } \mathbb{R} \\ GL_n\mathbb{R} &:= \{A\in M_n\mathbb{R}; \det A \neq 0\} \\ SL_n\mathbb{R} &:= \{A\in M_n\mathbb{R}; \det A = 1\} \\ O_n\mathbb{R} &:= \{A\in M_n\mathbb{R}; A^t A = E\} \\ SO_n\mathbb{R} &:= \{A\in M_n\mathbb{R}; A^t A = E, \det A = 1\} \end{aligned}$$

Dokažte v každém z těchto případů, že se jedná o Lieovu grupu. Jaké jsou jejich dimenze?

8. Tečný a kotečný prostor

Tečné vektory, tečný prostor, tečný fibrovaný prostor.

8.1. Poznámka. Tečný vektor k ploše v trojdimenzionálním prostoru je pojem geometricky velmi názorný. Za předpokladu, že je známo, co to je tečný vektor ke křivce v $\mathbb{R}^3$, je možné definovat tečný prostor k ploše M v jejím bodě m jako množinu všech tečných vektorů v bodě m ke všem křivkám, které leží v ploše M a procházejí bodem m.

Analogický pojem tečného prostoru k varietě je obtížnější jak na pochopení, tak i na vysvětlení. Vzhledem k tomu, že varieta není vnořena v žádném „rovném“, tj. vektorovém prostoru, nemáme k dispozici žádný pojem tečného vektoru ke křivce a přímé zobecnění předchozí definice nefunguje.

Je třeba tedy najít jinou formulaci toho, co je to tečný vektor v klasickém případě, kterou by bylo možné zobecnit. Nápad, který funguje, je následující:

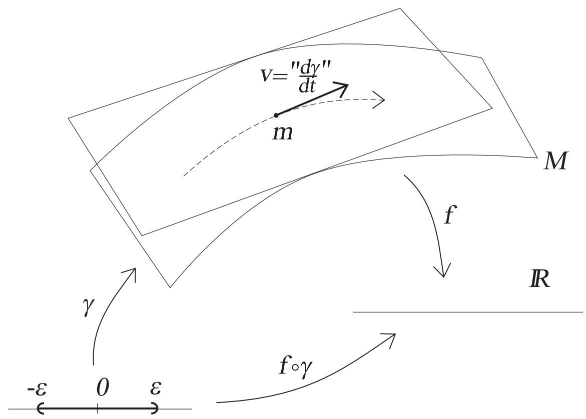
Nechť $v = (v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ je pevný vektor a $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ hladká funkce. Pak je možné (a běžné) definovat derivaci $df(v)$ libovolné funkce v bodě $v_0\in\mathbb{R}^n$ ve směru v předpisem

$$df(v) = \frac{d[f(v_0+t\cdot v)]}{dt}(0)\in\mathbb{R}.$$

Vektor v je tedy možné ztotožnit s příslušným lineárním zobrazením

$$f\mapsto df(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(v_0)\cdot v_i$$

z prostoru všech funkcí (definovaných a hladkých v okolí bodu v_0) do $\mathbb{R}$. Protože je snadné zobecnit pojem prostoru všech hladkých funkcí pro případ variety (to jsme právě udělali), je hlavní myšlenka následující definice tečného vektoru k varietě interpretovat vektor jako lineární zobrazení z $\mathcal{C}^\infty(M)$ do $\mathbb{R}$ (tj. jako prvek duálu k tomuto prostoru funkcí). Ne každý prvek duálu však bude odpovídat derivaci vzhledem k nějakému vektoru. Ty vhodné vybereme pomocí analogie tečného vektoru ke křivce. V $\mathbb{R}^n$ je možné, jak jsme poznamenali nahoře, přiřadit vektor libovolné křivce, která prochází daným bodem. Křivka na varietě se dá snadno definovat, je to hladké zobrazení z $\mathbb{R}$ do variety. Její tečný vektor ve výše uvedeném smyslu prvku z duálu k hladkým funkcím je pak možné definovat i na varietě.



Obrázek 19. Tečný vektor

8.2. Definice. Buď M varieta, $m \in M$ a nechť $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ je hladké zobrazení, pro které $\gamma(0) = m$. Řekneme, že lineární zobrazení $v : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ je **tečný vektor** ke křivce γ v bodě m, pokud

$$v(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0)$$

pro všechny funkce $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. (Viz obr 19.)

Množinu všech tečných vektorů v bodě m ke všem křivkám γ v M, pro které $\gamma(0) = m$, označíme T_mM a nazveme **tečný prostor** k M v bodě m. Disjunktní sjednocení $TM := \cup_{m\in M} T_mM$ všech tečných prostorů ve všech bodech M se obvykle nazývá **tečný fibrovaný prostor**. Spolu s ním je definována **projekce** $\pi : TM \to M$, která vektoru $v \in T_mM$ přiřadí bod $m \in M$.

8.3. Příklad. Buď $m \in M$ bod variety a (U,φ) mapa, pro kterou $m \in U$. Definujme tečný vektor $\frac{\partial}{\partial x_i}|_m \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_mM$ předpisem (viz obr. 20)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right](f) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(m)), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Tedy $\frac{\partial}{\partial x_i}$ je tečný vektor k i-té souřadnicové křivce

$$\gamma_i : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M, \quad t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(m) + t \cdot e_i),$$

kde $e_1, \ldots, e_n$ je kanonická báze $\mathbb{R}^n$.

Povšimněte si, že platí následující vztah. Je-li φ_j j-tá souřadnicová funkce, tj. j-tá komponenta zobrazení φ, pak

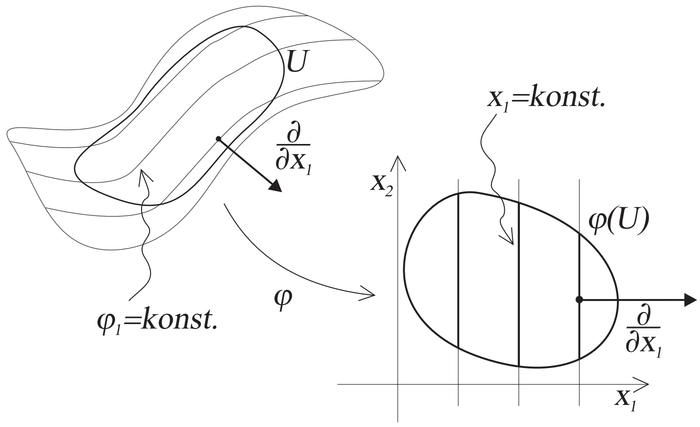
$$\varphi_j \circ \gamma_i = \varphi_j(m) + t\delta_{ij}; \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_j) = \delta_{ij}.$$

Vektory chápané jako lineární zobrazení na prostoru hladkých funkcí lze přirozeným způsobem sčítat a násobit reálným číslem (je to podmnožina duálu k lineárnímu vektorovému prostoru). Zkusme nyní dokázat, že (tak jako tomu bylo u ploch) T_mM je lineární vektorový prostor a vektory $\frac{\partial}{\partial x_i}$ tvoří jeho bázi (viz obr. 21).

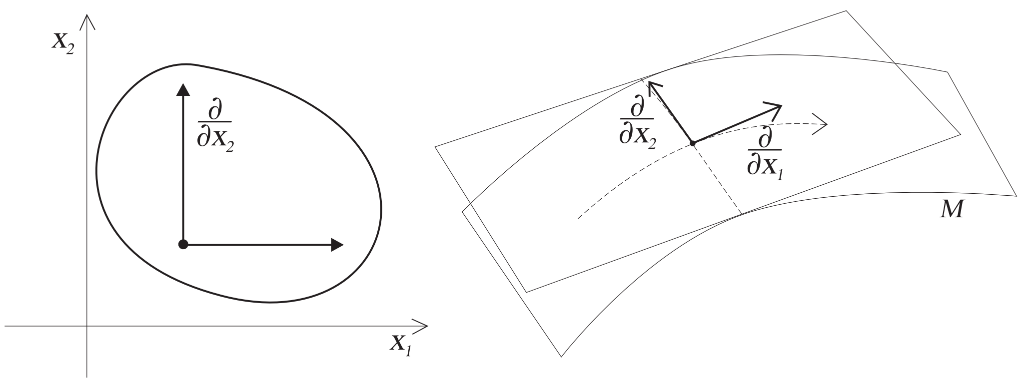
8.4. Věta. *Prostor T_mM je lineární vektorový prostor. Je-li (U,φ) mapa, pro kterou $m \in U$, pak vektory $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1,\ldots,n$, tvoří bázi T_mM.*

Důkaz. Nechť $m \in M$ je pevný a (U,φ) je nějaká mapa, $m \in U$. Nejdříve ukážeme, že každý vektor $v \in T_mM$ lze napsat jako lineární kombinaci vektorů $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Podle definice existuje křivka γ v M taková, že v je tečný vektor ke γ v bodě m. Pak pro $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ platí

$$v(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d[(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)]}{dt}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \cdot \frac{(\varphi \circ \gamma)_i}{dt}(0),$$



Obrázek 20. Tečné vektory $\frac{\partial}{\partial x_i}$



Obrázek 21. Tečný prostor a jeho báze

tedy

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \alpha_i := \frac{(\varphi \circ \gamma)_i}{dt}(0).$$

Naopak, libovolná lineární kombinace $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}; \alpha_i \in \mathbb{R}$ je zřejmě tečný vektor ke křivce

$$\gamma : \mathbb{R} \to M, \quad \gamma(t) := \varphi^{-1}(\varphi(m) + t \cdot (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i)),$$

kde $e_1, \dots, e_n$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^n$.

Vektory $\frac{\partial}{\partial x_i}$ jsou lineárně nezávislé. Vskutku, pokud existují $\alpha_i \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f) = 0, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

pak také

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_j) = \alpha_j; \quad j = 1, \dots, n.$$

□

8.5. Poznámka. Základní myšlenka definice vektoru na varietě byla interpretace vektoru jako lineárního zobrazení z prostoru hladkých funkcí do reálných čísel. Všech prvků z duálu k $\mathcal{C}^\infty(M)$ je ovšem podstatně víc než tečných vektorů (zmíněný duál je nekonečně-dimenzionální prostor, zatímco tečný prostor má konečnou dimenzi). Pojem tečného vektoru ke křivce sloužil k výběru těch lineárních zobrazení, které jsou tečné vektory. Existuje také jiná a elegantní možnost jak charakterizovat tečné vektory pomocí Leibnizovy vlastnosti derivací. Platí totiž následující tvrzení.

Tvrzení. Lineární zobrazení $v : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ patří do $T_m M$ právě když pro všechny $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ platí

$$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(m) + f(m) \cdot v(g).$$

Tuto Leibnizovu vlastnost jistě mají vektory $\frac{\partial}{\partial x_i}$ určené nějakou mapou a všechny jejich lineární kombinace. Dokázat opak je však podstatně složitější a bylo by ztrátou času to dělat v tuto chvíli. Je ale užitečné o této možnosti vědět.

8.6. Poznámka. Nechť v je pevný vektor v bodě $m \in M$. Pro každou mapu $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ takovou, že $m \in U$, lze tedy napsat v jako lineární kombinaci vektorů $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

V jiné mapě $(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})$ témuž vektoru odpovídají jiné souřadnice α'_i.

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha'_i \frac{\partial}{\partial x'_i}.$$

Je lehké spočítat, jak spolu souřadnice α_i a α'_j souvisí, jedny se dají vyjádřit pomocí druhých s použitím Jacobiho matice přechodové funkce. Pokud napíšeme přechodové zobrazení $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ pro názornost ve tvaru $x'_i = x'_i(x_1, \dots, x_n)$, pak pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial (f \circ (\varphi)^{-1})}{\partial x_i} = \frac{\partial [(f \circ (\varphi')^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})]}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x'_k}(f) \frac{\partial x'_k}{\partial x_i},$$

tj.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_k}.$$

Pro souřadnice vektoru $v \in T_m M$ v různých mapách tedy dostaneme

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x'_k},$$

tedy

$$\alpha'_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \, .$$

V začátcích diferenciální geometrie byla tato vlastnost vzata za základ definice tečného vektoru. Tenkrát se důsledně všechny pojmy vyjadřovaly vzhledem k mapám a tečný vektor se ztotožňoval s příslušnými souřadnicemi. Tečný vektor byl tedy systém vektorů v $\mathbb{R}^n$, pro každou mapu jeden, které byly spolu svázány příslušnými transformačními vztahy. Požadované operace s vektory se prováděly ve zvolené mapě a nakonec bylo třeba ověřit, že výsledek operace se správně transformuje při změně mapy. Tak například jen ověření jednoduchého faktu, že součet dvou vektorů nebo násobek vektoru číslem je opět vektor, vyžadovalo popsat mnoho papíru.

Zavedení bezsouřadnicových definic tedy bylo podstatným pokrokem ve vývoji diferenciální geometrie. Definice tečného vektoru pomocí vlastnosti derivace pro prvky duálu na prostoru funkcí je typickým příkladem bezsouřadnicové definice.

8.7. Poznámka. Uvedená definice tečného vektoru nerozlišuje mezi body variety s krajem, které patří či nepatří do hranice M. Je-li $m \in \partial M$ a $m \in U$, kde (U, φ) je mapa, pak vektory $\frac{\partial}{\partial x_i}$ jsou definovány stejně, tj. pomocí vztahu

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_m(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\varphi(m).$$

Funkce $f \circ \varphi^{-1}$ je hladká v okolí $\varphi(m) \in \partial(H^n)$ a její parciální derivace je dobře definovaná a nezávislá na jejím hladkém rozšíření, neboť je možné tuto derivaci spočítat z hodnot samotné funkce $f \circ \varphi^{-1}$ pomocí příslušné jednostranné derivace.

8.8. Poznámka. Existuje ještě jiná definice tečného vektoru. Jsou-li γ, γ' dvě křivky na varietě M procházející bodem m a $v_\gamma, v_{\gamma'}$ příslušné tečné vektory v tomto bodě (viz 8.2), definujeme

$$\gamma \equiv \gamma' \iff v_\gamma = v_{\gamma'}.$$

Tato relace je relací ekvivalence, hodnoty tečného vektoru (jakožto zobrazení prostoru $\mathcal{C}^\infty(M)$ do $\mathbb{R}$) jsou určeny právě třídou této ekvivalence a můžeme tedy abstraktně definovat tečný vektor jako třídu ekvivalence křivek. K definici lineárních operací na tečných vektorech je ovšem nutno vrátit se k jejich analytickému vyjádření z definice 8.2.

Vektorová pole

8.9. Definice. Zobrazení $X : M \to TM$ takové, že $\pi \circ X = \mathrm{Id}$ na M, se nazývá **vektorové pole na** M (π je projekce $TM \to M$, viz definice 8.2). Vektorové pole je tedy zobrazení, které každému bodu variety přiřadí nějaký tečný vektor v tomto bodě. Řekneme, že vektorové pole X je hladké, pokud pro libovolnou mapu (U, φ) platí, že koeficienty $\alpha_i(m); i = 1, \dots, n$ v rozkladu $X(m) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}|_m$ jsou hladké funkce na U. Protože hodnoty vektorových polí v každém bodě patří do vektorového prostoru, je prostor $\mathcal{X}(M)$ všech hladkých vektorových polí také vektorový prostor s operacemi definovanými takto:

$$[X + Y](m) := X(m) + Y(m)$$
$$[aX](m) := a(X(m))$$

kde $X, Y \in \mathcal{X}(M), m \in M, a \in \mathbb{R}$.

8.10. Poznámka. Pro vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ a pro hladkou funkci $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ definujeme funkci $X(g)$ předpisem

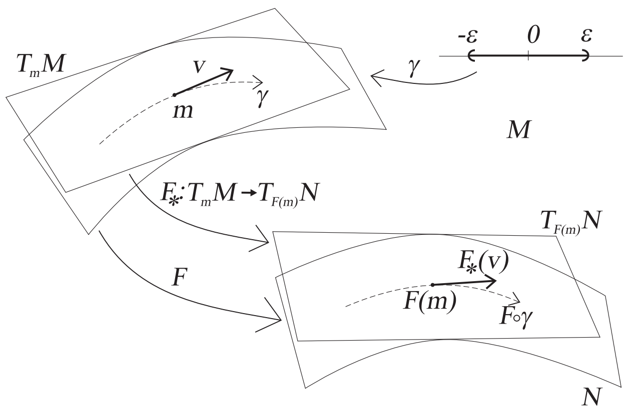
$$[X(g)](m) := [X(m)](g), \quad m \in M.$$

Pak $X(g)$ je rovněž hladká funkce (vic cvičení 8.28), tedy X má akci na prostoru hladkých funkcí $\mathcal{C}^\infty(M)$. Z poznámky 8.5 plyne, že prostor $\mathcal{X}(M)$ všech hladkých vektorových polí je právě prostor všech lineárních zobrazení $\mathcal{C}^\infty(M)$ do sebe, pro které platí

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + X(g) \cdot f.$$

8.11. Definice. Nechť X, Y jsou 2 vektorová pole na varietě M. Jejich **Lieova závorka** $[X, Y]$ je definována jako zobrazení, které každé funkci $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ přiřadí funkci

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$



Obrázek 22. Tečné zobrazení

8.12. Věta. *Pokud $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, pak $[X, Y]$ je také (hladké) vektorové pole. Lieova závorka má následující vlastnosti.*

1. $[\_, \_]$ *je bilineární zobrazení;*
2. $[X, Y] = -[Y, X]$;
3. *(Jacobiho identita)* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Důkaz. Pro každá dvě vektorová pole X, Y a libovolné dvě funkce f, g platí:

$$\begin{aligned}[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) = \\ &= X(Y(f))g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fX(Y(g)) - \\ &- Y(X(f))g - X(f)Y(g) - Y(f)X(g) - fY(X(g)) = \\ &= [X,Y](f)g + f[X,Y](g).\end{aligned}$$

Lieova závorka je tedy také vektorové pole. (Z výpočtu je vidět, že pouhé složení dvou polí vektorovým polem není, neboť členy tvaru $X(f)Y(g)$ se neodečtou.)

Vlastnosti 1.–3. se dokáží přímým výpočtem. □

8.13. Poznámka. Prostor $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ všech vektorových polí s Lieovou závorkou je jedním ze základních příkladů tzv. Lieových algeber. Podle definice je **Lieova algebra** vektorový prostor L na kterém je dáno zobrazení $[.,.] : L \times L \to L$ splňující vlastnosti 1.–3.

Klíčovou roli hrají Lieovy algebry například v teorii Lieových grup a jejich reprezentací.

Tečné zobrazení

Je-li $F : M \to N$ hladké zobrazení, pak je možné definovat v daném bodě jeho lineární aproximaci, která se nazývá tečné zobrazení. Protože vektory jsou speciální prvky v duálu k prostoru funkcí a protože F zobrazuje přirozeně funkce na N pomocí skládání na funkce na M, stačí imitovat definici duálního zobrazení.

8.14. Definice. Je-li $F : M \to N$ hladké zobrazení variet s krajem a $v \in T_mM$, pak definujeme zobrazení $F_*(m) : T_mM \to T_{F(m)}N$ předpisem

$$[F_*(m)(v)](g) = v(g \circ F),\ v \in T_mM,\ g \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

Zobrazení $F_*(m)$ se nazývá **tečné zobrazení v bodě** $m \in M$ **k zobrazení** F. (Viz obr. 22.)

8.15. Věta.
(i) Zobrazení $F_*(m): T_m M \to T_{F(m)}N$ je dobře definováno a je lineární.
(ii) Je-li $F = \mathrm{Id}_M$, pak pro každý bod $m \in M$ platí $F_*(m) = \mathrm{Id}_{T_m M}$.
(iii) $(G \circ F)_*(m) = G_*(F(m)) \circ F_*(m)$.
(iv) Je-li F difeomorfismus, pak pro každé $m \in M$ je $F_*(m)$ izomorfismus.

DŮKAZ. (i) Zde je třeba ověřit, že $F_*(m)(v)$ patří do tečného prostoru $T_{F(m)}N$ (udělejte sami!).
(ii) Plyne ihned z definice.
(iii) Pro $m \in M$ platí

$$[(G \circ F)_*(m)(v)](g) = v(g \circ G \circ F) = [F_*(m)(v)](g \circ G) = \big(\big(G_*(F(m))\big)\big(F_*(m)(v)\big)\big)(g).$$

(iv) Je-li F difeomorfismus, pak z (ii) a (iii) plyne, že

$$F_*(m) \circ (F^{-1})_*(F(m)) = \mathrm{Id}\,.$$

□

8.16. Poznámka. Nechť $F: M \to N$ je hladké zobrazení variet s krajem a nechť $m \in M$. Zvolme mapy (U, φ), resp. (U', φ') na M, resp. N tak, aby $m \in U$, $F(m) \in U'$. Pak zobrazení

$$x' = \tilde{F}(x); \;\; \tilde{F} := \varphi' \circ F \circ \varphi^{-1}$$

je souřadnicový popis zobrazení F.

Zobrazení $F_*(m)$ je lineární, je tedy možné napsat jeho matici vzhledem k bázím $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}, \{\frac{\partial}{\partial x'_j}\}$. Její tvar je vidět ihned z výpočtu

$$\left[[F_*(m)](\frac{\partial}{\partial x_i})\right](g) = \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ F) = \frac{\partial[(g \circ (\varphi')^{-1}) \circ \tilde{F}]}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x'_j}\right](g).$$

Tedy hledaná matice zobrazení F_* je Jacobiho matice jeho souřadnicového popisu $\tilde{F}$. To vysvětluje poznámku o interpretaci tečného zobrazení jako lineárního přiblížení k F v bodě m.

Kotečný prostor, kotečné zobrazení

8.17. Definice. Je-li $m \in M$, pak prostor $T^*_m M := (T_m M)^*$ nazveme **kotečný prostor k M v bodě m**. **Kotečný fibrovaný prostor** je definován jako disjunktní sjednocení $T^*M := \cup_{m \in M} T^*_m M$ spolu s projekcí $\pi: T^*M \to M$, která opět zobrazí celý kotečný prostor $T^*_m M$ do bodu m.

Je-li $F: M \to N$ hladké zobrazení, $m \in M$ pak definujeme **kotečné zobrazení** $F^*(m): T^*_{F(m)}N \to T^*_m M$ jako duální zobrazení k $F_*(m)$, tj.

$$[F^*(m)(\alpha)](v) = \alpha[F_*(m)(v)]$$

kde $\alpha \in T^*_{F(m)}N, v \in T_m M$.

Diferenciál funkce

Interpretace vektoru $v \in T_m M$ jako prvku duálu k prostoru funkcí je založena na zobrazení, které dvojici $(v, f) \in T_m M \times \mathcal{C}^\infty(M)$ přiřadí číslo $v(f) \in \mathbb{R}$. Toto zobrazení se však dá také interpretovat druhým způsobem – jako zobrazení, které každé funkci f přiřadí lineární zobrazení $v \mapsto v(f) \in \mathbb{R}$, tj. prvek kotečného prostoru $T^*_m M$. To umožňuje dát korektní matematickou interpretaci toho, co pro nás byly zatím pouze symboly – interpretaci symbolu $df, f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, a symbolů dx_i v popisu diferenciálních forem.

8.18. Definice. Nechť $f \in \mathcal{C}^\infty(M), m \in M$. Pak **diferenciál** $df(m)$ **funkce** f **v bodě** m je prvek $T^*_m M$ definovaný rovností

$$[df(m)](v) = v(f), \quad v \in T_m M.$$

Zobrazení

$$\begin{aligned} df : M &\to T^*M \\ m &\mapsto df(m) \end{aligned}$$

se nazývá **diferenciál funkce** f.

8.19. Poznámka. Tedy df je „duální“ pojem k pojmu vektorového pole. Je to speciální případ zobrazení $\omega : M \to T^*M$ takového, že $\omega(m) \in T^*_m M$, tj. $\pi \circ \omega = \mathrm{Id}$. Zobrazení tohoto druhu budeme nazývat diferenciální formy stupně 1. Od případu forem v otevřené podmnožině $\mathbb{R}^n$ se to tedy liší tím, že pro variety jsou prostory $T^*_m M$ v různých bodech různé (a také tím, že prostor $T^*_m M$ není jen symbol, ale má jasný geometrický význam).

8.20. Poznámka. Nechť (U, φ) je mapa na M. Nechť $i = 1, \ldots, n$. Pak $\frac{\partial}{\partial x_i}$ je vektorové pole na U. Podobně, označíme-li komponentu φ_i zobrazení φ jednoduše x_i, pak dx_i je diferenciální forma stupně 1 na U. Všimněte si, že

$$dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i) = \delta_{ij}.$$

Tedy v každém bodě $m \in M$ jsou $\{dx_i\}$ a $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ jsou duální báze v $T^*_m M$, resp. v $T_m M$.

Dále, je-li $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, pak lze v souřadnicích (U, φ) napsat dg v kanonické bázi

$$dg = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i, \quad \alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Pak ale

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}](g) = [dg]\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \alpha_j.$$

Tedy jsme dostali starou známou formuli, která byla jedním ze základů definice de Rhamova vnějšího diferenciálu:

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i.$$

Orientace tečného prostoru a variety

8.21. Poznámka. Pro souvislou orientovatelnou varietu M se často orientace zadává pomocí volby orientace tečného vektorového prostoru v jednom bodě variety M. Abychom toto mohli vysvětlit, je třeba si nejdřív připomenout něco málo o tom, co to je orientace vektorových prostorů.

8.22. Definice orientace vektorového prostoru. Nechť V je reálný vektorový prostor a $B(V)$ množina všech jeho bází. Řekneme, že dvě báze prostoru V jsou **ekvivalentní**, pokud matice přechodu mezi nimi má kladný determinant. **Orientace vektorového prostoru** V je výběr jedné třídy ekvivalence v $B(V)$.

8.23. Poznámka. Z cvičení 2.10 víme, že $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je báze V právě tehdy, když n-vektor $\omega(v) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ je nenulový. Dále víme, že $v \sim v' \iff v = \alpha v'$ pro nějaké $\alpha > 0$. Tedy na $B(V)$ existují právě dvě třídy ekvivalence a orientace V se dá určit výběrem prvku $\omega \in \Lambda^n(V^*) - \{0\}$. Je-li takovýto prvek ω zvolen, pak řekneme, že báze $v = (v_1, \ldots, v_n)$ je kladně orientovaná, pokud $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$.

8.24. Poznámka. Nechť je dán rozklad vektorového prostoru V na direktní součet $V = V' \oplus V''$.

(i) Je-li dána orientace prostorů V' a V'' výběrem kladně orientovaných bází $\{v'_1, \ldots, v'_n\}, \{v''_1, \ldots, v''_n\}$, orientujeme V tím, že položíme $\{v'_1, \ldots, v'_n, v''_1, \ldots, v''_n\}$ jako kladně orientovanou bázi.

(ii) Je-li dána orientace prostorů V a V', bude kladně orientovaná báze prostoru V'' taková, která podle bodu (i) spolu s kladně orientovanou bází V' určuje kladnou orientaci V.

(iii) Speciálně, je-li $V = \mathbb{R}^n$ a $\dim V' = 1$, lze zvolit na $\mathbb{R}^n$ kanonickou orientaci (tj. kanonickou bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ vybereme jako kladnou) a orientace V'' je potom určena výběrem nenulového vektoru ve V'. Tento princip **orientace nadplochy pomocí normály** hraje důležitou roli v orientaci ploch v $\mathbb{R}^3$ nebo obecněji v orientaci nadploch v $\mathbb{R}^n$.

8.25. Zadání orientace variety pomocí orientace tečného prostoru. Nechť je dána orientace tečného prostoru T_mM k varietě M v bodě $m \in M$. Je-li (U, φ) mapa, obsahující bod m, pak řekneme, že tato mapa je kladně orientovaná vzhledem k vybrané orientaci T_mM, pokud $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ je kladně orientovaná báze T_mM. Je-li M souvislá a orientovatelná, je tím už jednoznačně určena orientace variety M.

Je-li nyní M souvislá varieta dimenze k, pak je možné (a často se to dělá) zadat její orientaci výběrem jednoho bodu $m \in M$ a jednoho nenulového prvku $\alpha \in \Lambda^k(T_m^*M)$. Tento výběr určuje totiž orientaci tečného prostoru T_mM a tedy určuje i to, je-li mapa (U, φ), kde U obsahuje bod m, kladně orientovaná nebo záporně orientovaná.

Nejjednodušším příkladem takto zadané orientace je regulární křivka v $\mathbb{R}^n$, jejíž orientace se kreslí pomocí šipky, která ukazuje směr kladně orientovaného tečného vektoru v nějakém jejím bodě. V tomto případě je tuto šipku možné také interpretovat jako návod ukazující, které parametrizace jsou kladně orientované.

Pro případ nadploch, t.j. variet M dimenze $n-1$ v $\mathbb{R}^n$, se velmi často používá zadávání orientace tečného prostoru T_mM v jednom bodě $m \in M$ pomocí normálového vektoru. Tím se myslí výběr vektoru $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$, který je kolmý k T_mM. Implicitně se předpokládá volba kanonické orientace na $\mathbb{R}^n$, orientace T_mM je pak určena (viz 8.24(iii)) pomocí orientace $\mathbb{R}^n$ a orientace jednodimenzionálního podprostoru obsahujícího vektor $\vec{n}$.

8.26. Určení orientace kraje variety. Je-li zadána orientace variety, je jednoznačně určena i orientace jejího kraje – viz větu 7.11. Pro případ Greenovy věty se kreslívá orientace otevřené podmnožiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pomocí šipky znázorňující otáčení proti směru hodinových ručiček. To naznačuje v jakém pořadí se musí brát báze tečného prostoru v libovolném bodě Ω, tj. určuje orientaci $T_x\Omega$, $x \in \Omega$. Pro platnost Greenovy věty je pak důležité, aby hranice Ω byla orientovaná proti směru hodinových ručiček (odvoďte toto tvrzení z obecné Stokesovy věty!).

Stokesova věta v $\mathbb{R}^3$ je z hlediska orientací nejzajímavější. Nejpoužívanější názorné pravidlo říká, že jde-li panáček po hranici plochy ∂S ve směru probíhání hranice a ukazuje-li jeho hlava směr orientace plochy S, pak aby platila Stokesova věta (tj. aby v ní bylo správné znaménko), musí mít plochu po levé ruce. V tomto případě se orientace hraniční křivky zadává opět pomocí smyslu probíhání, ale orientace plochy S je zde zadána orientací tečného prostoru T_aS v libovolném bodě a nepřímo, pomocí výběru jednoho ze dvou směrů normálového vektoru $(\vec{n})$ k T_a v $\mathbb{R}^3$ (viz poznámka 8.24(iii)). Zkontrolujte, že tato názorná konvence plyne z obecné Stokesovy věty!

Použití těchto principů v praktickém počítání je vysvětleno v návodech ke cvičením 10.12 a 10.13.

V případě Gaussovy věty je orientace oblasti (tj. příslušného tečného prostoru v nějakém bodě) standardně zadaná pomocí pravotočivé báze (co to je?) a orientace její hranice je určena vnější normálou (viz výše). Rozmyslete si, že tato konvence plyne rovněž z obecné Stokesovy věty!

Příklady, úlohy a cvičení

8.27. Tečný fibrovaný prostor.
Dokažte, že tečný fibrovaný prostor $TM := \cup_{m \in M} T_mM$ na varietě M definovaný v 8.2 má přirozenou strukturu variety takovou, že množiny tvaru $\cup_{m \in U} T_mM$, $U \subset M$ otevřená, jsou otevřené v TM a jsou difeomorfní s $U \times \mathbb{R}^n$.

8.28. Vektorová pole.
Dokažte, že vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je hladké právě tehdy, když pro každou hladkou funkci g na M je $X(g)$ rovněž hladká (viz 8.10).

9. Tenzorová pole

Tenzorová pole na varietě.

Tenzorová algebra vektorového prostoru je jeden ze základních pojmů v multilineární algebře (viz podkapitola 6). Připomeňme si, že je-li V vektorový prostor a V^* jeho duál, pak prvky prostoru

$$V \otimes \ldots \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*$$

(celkem s činitelů typu V a r činitelů typu V^*) se nazývají **tenzory typu** $\binom{s}{r}$ nebo **r-krát kovariantní a s-krát kontravariantní tenzory**.

Podobně jako vektorové pole X na varietě M bylo definováno jako zobrazení, které každému bodu $m \in M$ přiřadí prvek $X(m) \in T_m M$, je zřejmě možné definovat tenzorové pole na varietě takto:

9.1. Definice. Nechť M je varieta s krajem, pak **tenzorové pole** T **typu** $\binom{s}{r}$ je zobrazení, které každému $m \in M$ přiřadí tenzor

$$T(m) \in T_m M \otimes \ldots \otimes T_m M \otimes (T^*_m M) \otimes \ldots \otimes (T^*_m M)$$

(celkem s činitelů typu $T_m M$ a r činitelů typu $T^*_m M$).

Řekneme, že tenzorové pole T typu $\binom{s}{r}$ je **hladké**, pokud pro každou mapu (U, φ) jsou koeficienty $T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r}$ v rozkladu

$$T = \sum_{i_1, \ldots, i_s, j_1, \ldots, j_r} T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r}$$

hladké funkce na U. Prostor všech (hladkých) tenzorových polí typu $\binom{s}{r}$ na M označíme symbolem $\mathcal{T}^s_r(M)$.

Je-li T tenzorové pole, pak uzávěr množiny $\{m \in M; T(m) \neq 0\}$ označíme $\operatorname{supp} T$ a nazveme **nosičem tenzorového pole** T.

Řekneme, že hladké tenzorové pole T typu $\binom{0}{k}$ je **(hladká) diferenciální forma stupně** k, pokud pro všechny $m \in M$ je $T(m) \in \Lambda^k(T^*_m M)$. Jinak řečeno, tenzorové pole T typu $\binom{0}{k}$ je diferenciální forma stupně k, pokud pro každou permutaci $\pi \in S_k$ platí

$$T(m)(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot T(m)(v_1, \ldots, v_k); \quad v_1, \ldots, v_k \in T_m M.$$

Prostor všech (hladkých) diferenciálních forem stupně k na M označíme symbolem $\mathcal{E}^k(M)$ a prostor všech diferenciálních forem označíme symbolem $\mathcal{E}^*(M)$, tj.

$$\mathcal{E}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{E}^k(M).$$

Nechť T je tenzorové pole typu $\binom{0}{2}$ na M. Předpokládejme dále, že pro každé $m \in M$ je bilineární forma $T(m)$ na $T_m M$ symetrická a nedegenerovaná. Pak se T nazývá **pseudo-Riemannova metrika na** M. Je-li $T(m)$ navíc pozitivně definitní pro každé $m \in M$, pak se nazývá **Riemannova metrika na** M. V tomto případě je tedy $T(m)$ skalární součin na $T_m M$.

9.2. Poznámka.

(i) Vektorové pole na M je speciální případ tenzorového pole typu $\binom{1}{0}$. Podobně, diferenciální forma stupně 1 je tenzorové pole typu $\binom{0}{1}$. Ačkoliv jsou tenzorová pole obecného typu běžně používaná v matematice a zejména v matematické fyzice, budeme se tady zajímat jen o tenzorová pole typu $\binom{0}{s}$.

Další základní příklad tenzorového pole typu $\binom{0}{2}$ je (pseudo-)Riemannova metrika, definovaná nahoře. Poznamenejme ještě, že standardní klasifikace nedegenerovaných bilineárních kvadratických forem říká, že každá taková bilineární forma je dána ve vhodné bázi diagonální maticí, která má na diagonále p-krát $+1$ a q-krát $-1; p + q = n$. Dvojici čísel (p, q) se říká signatura formy a pokud má pseudo-Riemannova metrika T stejnou signaturu (p, q) ve všech bodech M, pak tuto dvojici nazýváme signaturou příslušné metriky.

Nejdůležitějším příkladem (z hlediska fyziky) je pseudo-Riemannova metrika signatury $(1, 3)$, resp. $(3, 1)$ na čtyřdimenzionální varietě M, které se pak říká prostoročas; od dob Einsteina tento pojem hraje ústřední roli při modelování gravitace ve fyzice.

(ii) Díky vlastnostem známým o vnější algebře vektorového prostoru je zřejmé že $\mathcal{E}^k(M) = \{0\}$ pro $k > n$ a $\mathcal{E}^*(M) = \oplus_{k=0}^n \mathcal{E}^k(M)$ je algebra nad tělesem reálných čísel. Vlastnosti násobení jsou identické s vlastnostmi násobení ve vnější algebře, tj. násobení je asociativní, není komutativní obecně, ale je pro homogenní formy (tj. formy daných stupňů) buď komutativní nebo antikomutativní (viz věta 2.3(iii)).

Prostor $\mathcal{C}^\infty(M) = \mathcal{E}^0(M)$ (hladkých) funkcí na M je pak komutativní podalgebra $\mathcal{E}^*(M)$. Navíc, celá algebra $\mathcal{E}^*(M)$ může být chápána jako modul nad algebrou $\mathcal{E}^0(M)$. Tento způsob popisu má velké výhody. Připomeňme si, že vektorová pole na M lze charakterizovat jako lineární zobrazení z $\mathcal{E}^0(M)$ do $\mathcal{E}^0(M)$, která mají Leibnizovu vlastnost. Podobně, diferenciální formy stupně k na M je možné definovat jako multilineární zobrazení ω z kartézského součinu $\mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M)$ (k činitelů) do $\mathcal{E}^0(M)$, které mají vlastnost

$$\omega(X_{\pi(1)}, , \ldots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(X_1, \ldots, X_k); \quad X_1 \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M).$$

Tento způsob charakterizace forem se v diferenciální geometrii často používá.

(iii) Jako vždy při počítání s vnější algebrou budeme symbolem $I \subset \{1, \ldots, n\}$ označovat množinu čísel $\{i_1, \ldots, i_k\}$ uspořádanou podle velikosti. Symbol dx_I bude pak značit součin $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.

Je-li (U, φ) mapa na M a $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, pak lze rozložit formu ω na U do báze $dx_I, |I| = k$, kde $dx_I \in \mathcal{E}^k(U)$. Tyto formy tvoří bázi prostoru $\mathcal{E}^k(U)$, chápaného jako modul nad $\mathcal{E}^0(U)$; tj. existují jednoznačně určené funkce $\omega_I \in \mathcal{E}^0(U)$ takové, že

$$\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I.$$

Vnější diferenciál

Víme již, jak je definován diferenciál funkce. Chtěli bychom teď rozšířit definici vnějšího diferenciálu na případ forem libovolného stupně.

9.3. Věta. *Nechť M je varieta s krajem. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení*

$$d : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M), k = 0, \ldots, n-1$$

s vlastnostmi:

(i) *Pro $f \in \mathcal{E}^0(M)$ je df diferenciál funkce f;*
(ii) $d \circ d = 0$;
(iii) *Je-li $\omega \in \mathcal{E}^k(M), \tau \in \mathcal{E}^l(M)$, pak*

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge (d\tau).$$

Pro libovolnou (nehomogenní) formu $\omega \in \mathcal{E}^*(M); \omega = \sum_{k=0}^n \omega_k; \omega_k \in \mathcal{E}^k(M)$, je pak **vnější diferenciál** *$d\omega$ definován předpisem*

$$d\omega = \sum_{k=0}^{n} d\omega_k.$$

Důkaz. 1. Nejdříve ukážeme, že pokud takovéto zobrazení d existuje, je určeno jednoznačně. Je-li totiž (U, φ) libovolná mapa na M a je-li $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, pak na U lze formu ω (jednoznačně) napsat ve tvaru

$$\omega = \sum_{|A|=k} \omega_A dx_A.$$

Předpokládejme, že d je lineární zobrazení, které má požadované tři vlastnosti. Pak se indukcí podle $|A|$ z vlastnosti (iii) ihned ukáže, že $d(dx_A) = 0$. Z toho plyne, že

$$d\omega = \sum_{|A|=k} d\omega_A \wedge dx_A. \tag{19}$$

Pravá strana obsahuje jen diferenciály funkcí, které byly (jednoznačně) definovány v předchozím paragrafu. Tedy i hodnota formy $d\omega$ na levé straně je tímto vztahem jednoznačně určena na U. Totéž je možné udělat pro libovolnou mapu daného atlasu.

2. Pro vybranou mapu (U, φ) můžeme vztah (19) použít k lokální definici hledaného zobrazení d. Takto definované zobrazení má požadované tři vlastnosti, to jsme dokázali již v předchozí kapitole. Dokázanou jednoznačnost lze pak použít k ověření toho, že definice zobrazení d nezávisí na výběru mapy. Globální zobrazení d je pak definováno v každém bodě $m \in M$ pomocí libovolné mapy (U, φ) takové, že $m \in U$. □

9.4. Poznámka. Alternativní formulace předchozí věty by bylo konstatování, že existuje právě jedno lineární zobrazení

$$d : \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$$

takové, že platí vlastnosti (i) – (iii) spolu s vlastností

(iv) $d(\mathcal{E}^k(M)) \subset \mathcal{E}^{k+1}(M); k = 0, \ldots, n.$

Přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení

9.5. Definice. Je-li $F : M \to N$ hladké zobrazení, pak pro každý bod $m \in M$ je $F_*(m)$ tečné zobrazení $T_m M$ do $T_{F(m)}N$. Je-li navíc T tenzorové pole typu $\binom{0}{s}, s > 0$, na varietě N, pak definujeme tenzorové pole $F^*(T)$ typu $\binom{0}{s}$ na M předpisem

$$[F^*(T)(m)](v_1, \dots, v_s) = [T(F(m))](F_*(m)(v_1), \dots, F_*(m)(v_s)); \quad v_1, \dots, v_s \in T_m M.$$

Je-li f funkce na N, tj. tenzorové pole typu $\binom{0}{0}$, pak definujeme

$$F^*(f) = f \circ F.$$

Z definic je zřejmé, že pokud je pole T diferenciální forma stupně k na N, pak $F^*(T)$ je diferenciální forma stupně k na M. Je tedy dobře definováno zobrazení $F^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$ nazývané obvykle **přenášení diferenciálních forem.**

9.6. Věta. *Jsou-li $F : M \to N; G : K \to M$ hladká zobrazení a jsou-li ω, τ diferenciální formy na N, pak:*

(i) $F^*(\omega + \tau) = F^*(\omega) + F^*(\tau)$;
(ii) $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*(\omega) \wedge F^*(\tau)$;
(iii) $(F \circ G)^*(\omega) = G^*(F^*(\omega))$;
(iv) $d(F^*(\omega)) = F^*(d\omega)$;
(v) Nechť (U', φ') je mapa na N a nechť $U \subset M$ taková, že $F(U) \subset U'$. Nechť $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ jsou souřadnice na $\varphi'(U')$ a nechť $\varphi' = (\varphi'_1, \dots, \varphi'_m)$. Je-li $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$ taková, že $\omega = \sum_{|A|=k} \omega_A dx'_A \in \mathcal{E}^k(U')$ na U', pak

$$F^*(\omega) = \sum_{|A|=k} (\omega_A \circ F) d(\varphi' \circ F)_A,$$

na U, kde

$$A = \{i_1, \dots, i_k\}; d(\varphi' \circ F)_A = d(\varphi'_{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(\varphi'_{i_k} \circ F).$$

Důkaz. (i) Je ihned zřejmé z definice přenesení formy.

(ii) Díky bodu (i) stačí toto tvrzení dokázat pro $\omega \in \mathcal{E}^k(N), \tau \in \mathcal{E}^l(N)$. Ale pro $X_i \in \mathcal{X}(M); i = 1, \dots, l+k$ platí

$$\begin{aligned}
&[F^*(\omega \wedge \tau)](X_1, \dots, X_{k+l}) = [\omega \wedge \tau](F_*(X_1), \dots, F_*(X_{k+l})) = \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(F_*(X_{\pi(1)}), \dots, F_*(X_{\pi(k)})) \cdot \tau(F_*(X_{\pi(k+1)}), \dots, F_*(X_{\pi(k+l)})) = \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \pi \cdot F^*(\omega)(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) \cdot F^*(\tau)(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+l)}) = \\
&= [F^*(\omega) \wedge F^*(\tau)](X_1, \dots, X_{k+l})
\end{aligned}$$

(iii) Plyne ihned z definice a z toho, že pro tečná zobrazení platí $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$.

(iv) Nejprve si rozmyslíme, že dokazované tvrzení platí pro diferenciální formy stupně 0, tj. pro $\omega = f \in \mathcal{E}^0(N)$. Pro $v \in T_m M$ dostaneme (z definice d, F_* a F^*)

$$\begin{aligned}
F^*(df)(v) = df(F_*(v)) = [F_*(v)](f) = v(f \circ F) = [d(f \circ F)](v) = \\
= [d(F^*(f))](v).
\end{aligned}$$

Jako speciální případ dostaneme

$$F^*(dx'_i) \equiv F^*(d\varphi'_i) = d(\varphi'_i \circ F).$$

Z toho je zřejmé, že tvrzení (iv) platí pro $\omega = dx'_i$ (obě strany jsou rovny 0).

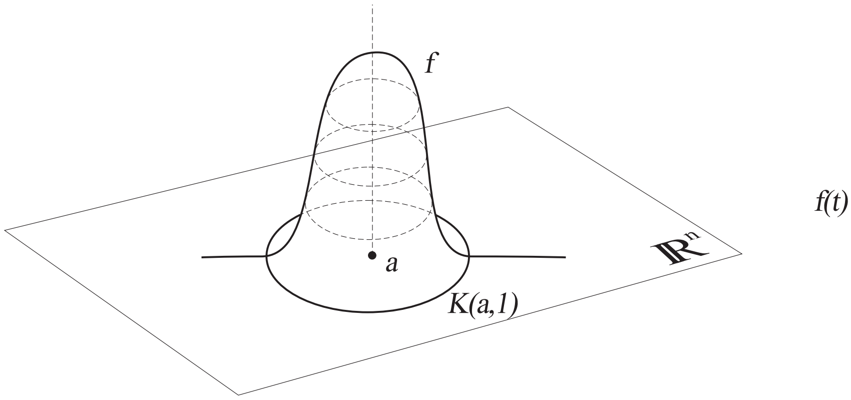
Předpokládejme dále, že $\omega = \omega_A dx'_A \in \mathcal{E}^k(U')$. Pak z vlastností zobrazení d plyne, že

$$\begin{aligned}
d(F^*(\omega)) = d[(\omega_A \circ F) d(\varphi' \circ F)_A] = d(\omega_A \circ F) \wedge d(\varphi' \circ F)_A = \\
= F^*(d\omega_A) \wedge F^*(dx'_A) = F^*(d\omega_A \wedge dx'_A) = F^*(d\omega).
\end{aligned}$$

Z bodu (i) pak snadno plyne dokazované tvrzení pro obecnou formu stupně k.

(v) Plyne ihned z již dokázaného tvrzení $F^*(dx'_i) = d(\varphi'_i \circ F)$.

$\square$



OBRÁZEK 23. Funkce f v rozkladu jednotky

10. Integrace forem

Potíž při definici integrálu z diferenciální formy přes varietu tkví v tom, že do formy je potřeba dosadit jako proměnné souřadnice, ty jsou však pouze lokální – definované vždy jen v určité mapě. Tento problém se obchází pomocí tzv. rozkladu jednotky – forma se vynásobí konstantní funkcí rovnou jedné, která je však napsána ve formě součtu hladkých funkcí, z nichž každá má nosič v některé mapě.

Rozklad jednotky

10.1. Definice. Nechť M je topologický prostor. Řekneme, že $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je **otevřené pokrytí** M, pokud U_α jsou otevřené a $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$.

Řekneme, že systém množin $\{P_\alpha\}$ je **lokálně konečný,** pokud pro každý bod $m \in M$ existuje okolí U_m takové, že $U_m \cap P_\alpha \neq \emptyset$ jen pro konečně mnoho α.

Řekneme, že pokrytí $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ je **zjemnění** pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, pokud pro každé $\beta \in B$ existuje $\alpha \in A$ takové, že $V_\beta \subset U_\alpha$.

Řekneme, že topologický prostor M je **parakompaktní,** pokud každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné zjemnění.

10.2. Věta. *Každá varieta je parakompaktní topologický prostor.*

Tato věta je potřeba pro integraci forem, jejichž nosič není kompaktní, na nekompaktních varietách. V těchto skriptech však nebudeme tyto případy uvažovat. Důkaz věty lze nalézt na straně 10 skript [**15**].

10.3. Definice. Řekneme, že soubor hladkých nezáporných funkcí $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ na M je **rozklad jednotky**, pokud systém $\{\operatorname{supp}\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je lokálně konečný a pro každý bod $m \in M$ platí

$$\sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(m) = 1.$$

Řekneme, že rozklad jednotky $\{\varphi_\beta\}_{\beta\in B}$ je **podřízen** pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, pokud pro každé $\beta \in B$ existuje $\alpha \in A$ takové, že $\operatorname{supp}\varphi_\beta \subset U_\alpha$.

10.4. Věta. *Pro každé otevřené pokrytí variety M existuje jemu podřízený rozklad jednotky.*

DŮKAZ. Větu dokážeme jen pro M kompaktní (důkaz pro obecný případ je technicky náročný a nepřináší nové myšlenky).

Nechť $K(a, r)$ označuje otevřenou kouli o středu v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru r. Existuje funkce F_a (viz obr. 23) nezáporná, hladká na $\mathbb{R}^n$ s vlastností, že F_a je kladná všude na $K(a, 1)$ a rovná nule na doplňku $K(a, 1)$. Lze ji sestrojit například pomocí $f(t) := \exp(\frac{t^2}{t^2-1}), t \in (0, 1)$ a položit $F_a(x) := f(\|x - a\|)$ pro $x \in K(a, 1)$.

Nechť $m \in M$ je zvolen pevně. Pak existuje prvek U_α daného pokrytí tak, že $m \in U_\alpha$. Je velmi jednoduché si uvědomit, že existuje mapa (U_m, φ_m) taková, že $U_m \subset U_\alpha$ a zároveň $[K(\varphi_m(m), 2) \cap$

$H^n] \subset \varphi_m(U_m)$. Stačí totiž libovolnou mapu (U, φ), pro kterou $m \in U \subset U_\alpha$ složit s vhodnou dilatací (roztažením) na $\mathbb{R}^n$ se středem ve $\varphi(m)$, abychom dostali požadovanou vlastnost.

Definujme nyní otevřené množiny V_m jako $\varphi_m^{-1}(K(\varphi_m(m), 1))$. Systém $\{V_m\}_{m\in M}$ je otevřené pokrytí M a tedy z něj lze vybrat konečné podpokrytí $\{V_{m(\beta)}\}_{\beta\in B}$. Definujme funkce $\tilde{f}_\beta; \beta \in B$ předpisem

$$\tilde{f}_\beta = \begin{cases} F_{\varphi_{m(\beta)}(m(\beta))} \circ \varphi_{m(\beta)} & \text{na } V_{m(\beta)} \\ 0 & \text{na } M - V_{m(\beta)}. \end{cases}$$

Z konstrukce plyne, že pro každý bod $m \in M$ je aspoň jedna hodnota $\tilde{f}_\beta(m)$ různá od nuly. Tedy $\sum_{\beta\in B} \tilde{f}_\beta$ je funkce všude kladná na M a tento součet má smysl, neboť lokálně obsahuje jen konečně mnoho sčítanců.

Soubor funkcí

$$\{f_\beta\}_{\beta\in B}; \quad f_\beta := \frac{\tilde{f}_\beta}{(\sum_{\beta\in B} \tilde{f}_\beta)}$$

pak splňuje požadavky věty. □

Integrace diferenciálních forem na varietě.

10.5. Definice. Nechť M je orientovaná varieta dimenze n s krajem. Nechť $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ má kompaktní nosič.

(i) Existuje-li kladně orientovaná mapa (U, φ) na M taková, že $\operatorname{supp} \omega \subset U$, pak definujeme integrál z ω přes varietu M takto:

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} [\varphi^{-1}]^*(\omega).$$

(ii) Je-li $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ kladně orientovaný atlas na M a $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ rozklad jednotky podřízený tomuto atlasu, pak definujeme

$$\int_M \omega = \sum_{\beta\in B} \int_M f_\beta \omega.$$

10.6. Poznámka. Je-li nosič ω uvnitř jedné mapy, pak není pochyb o existenci integrálu (který se převede na integrál přes $\mathbb{R}^n$ z hladké funkce s kompaktním nosičem). Díky předpokladu o kompaktním nosiči formy ω je součet v obecné definici integrálu ω přes M vždy jen konečný, všechny integrály v tomto součtu existují a jsou konečné.

Uvedená definice není nejobecnější možná; například standardní příklad formy $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, kde f je Lebesgueovsky integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^n$, není v této definici zahrnut, neboť nosič f nemusí být kompaktní. Je možné definovat integrál z diferenciální formy v podstatně obecnějším případě, ale pak např. důkaz nezávislosti integrálu na výběru rozkladu jednotky je podstatně náročnější a techničtější. To není účelné v tomto úvodním kursu.

10.7. Věta. *Definice integrálu diferenciální formy přes varietu nezávisí ani na výběru atlasu, ani na výběru příslušného rozkladu jednotky.*

Důkaz. (i) V první části je třeba si uvědomit, že je-li nosič formy ω v nějaké mapě, pak integrál $\int_M \omega$ nezávisí na výběru této mapy. Jsou-li (U, φ), resp. (U', φ') dvě mapy obsahující nosič dané formy ω, pak platí

$$[\varphi^{-1}]^*(\omega) = [\varphi' \circ \varphi^{-1}]^* \circ [(\varphi')^{-1}]^*(\omega)$$

a rovnost příslušných integrálů pak plyne z věty 4.3 o integraci forem na plochách v euklidovském prostoru.

(ii) Předpokládejme, že $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, resp. $\{(U'_{\alpha'}, \varphi'_{\alpha'})\}_{\alpha'\in A'}$ jsou dva atlasy na M, nechť $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$, resp. $\{f'_{\beta'}\}_{\beta'\in B'}$ jsou podřízené rozklady jednotky. Pak sjednocení těchto dvou atlasů je opět atlas a systém $\{f_\beta f_{\beta'}\}_{(\beta,\beta')\in B\times B'}$ je podřízený rozklad jednotky. Pak

$$\sum_{\beta\in B} \int_M f_\beta \omega = \sum_{\beta\in B} \int_M f_\beta [\sum_{\beta'\in B'} f_{\beta'}] \omega = \sum_{\beta'\in B'} \int_M f_{\beta'} [\sum_{\beta\in B} f_\beta] \omega = \sum_{\beta'\in B'} \int_M f_{\beta'} \omega.$$

□

10.8. Věta [Stokesova]. *Nechť M je orientovaná varieta dimenze n s krajem a ∂M její kraj s indukovanou orientací. Pak pro každou formu $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$ s kompaktním nosičem platí*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

DŮKAZ. (i) Nechť (U, φ) je kladně orientovaná mapa taková, že $\varphi(U)$ je omezená a $\operatorname{supp} \omega \subset U$. Pak existuje uzavřená krychle $K \subset H^n$ tak, že $\varphi(U) \subset K$ a $\varphi(U) \cap \partial K \subset \partial(H^n)$. Pak (podle Stokesovy věty pro řetězce 5.1)

$$\int_M d\omega = \int_U d\omega = \int_{\varphi(U)} [\varphi^{-1}]^*(d\omega) = \int_{\varphi(U)} d([\varphi^{-1}]^*(\omega)) = \int_K d([\varphi^{-1}]^*(\omega)) =$$
$$= \int_{\varphi(U)\cap\partial K} ([\varphi^{-1}]^*(\omega)) = \int_{\varphi(U)\cap\partial H^n} ([\varphi^{-1}]^*(\omega)) = \int_{U\cap\partial M} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

(ii) V obecném případě budeme uvažovat atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ na M; můžeme rovnou předpokládat, že pro každé $\alpha \in A$ je množina $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ omezená (jinak lze zobrazení φ_α složit s vhodným difeomorfismem H^n na sebe s omezeným obrazem).

Pak lze najít rozklad jednotky $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ podřízený tomuto atlasu a

$$\int_M d\omega = \int_M d(\sum_{\beta\in B}(f_\beta\omega)) = \sum_{\beta\in B}\int_M d(f_\beta\omega) = \sum_{\beta\in B}\int_{\partial M} f_\beta\omega = \int_{\partial M}\omega.$$

□

10.9. Poznámka. Definice integrálu pomocí rozkladu jednotky je velmi elegantní a velmi vhodná pro teorii a dokazování. Na druhou stranu, s její pomocí se nedá žádný (aspoň trochu netriviální) integrál spočítat. Tvar funkcí v rozkladu jednotky je příliš komplikovaný, než aby se příslušné integrály daly prakticky vyjádřit. Proto je potřeba mít k dispozici nějaký způsob, jak vlastně integrály z diferenciálních forem počítat.

V kapitole o diferenciálních formách v $\mathbb{R}^n$ jsme zavedli pojem řetězce v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Analogický pojem se běžně používá i pro variety. Nechť I_n označuje uzavřenou krychli v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že zobrazení c krychle I_n do variety s krajem M je hladké, pokud je c restrikce hladkého zobrazení $\tilde{c} : U \to M, I_n \subset U$, U otevřená v $\mathbb{R}^n$. Analogicky k dřívějšímu názvosloví, takovéto zobrazení c nazveme **singulární krychle dimenze n na varietě M s krajem.** Symbolem $<c>$, jako dříve, označíme obor hodnot $c(I_n)$. **Řetězec** dimenze n na varietě s krajem M je pak konečná formální lineární kombinace $c = \sum_j a_j c_j$, kde $a_j \in \mathbb{Z}$ a c_j jsou singulární krychle dimenze n; pak $<c> = \cup_j <c_j>$. V následující větě budou hrát řetězce jen pomocnou roli. Při integraci je vždy možno vynechat množinu míry nula z integračního oboru, aniž by se hodnota integrálu změnila. Pro podmnožiny variet není třeba budovat znovu teorii Lebesgueovsky integrovatelných množin. Použijeme prostě faktu, že hladké obrazy méně-dimenzionálních množin mají v libovolné mapě míru nula. Je to prostý důsledek jedné důležité a známé věty z analýzy, tzv. Sardovy věty. Ta říká, že pro libovolné diferencovatelné zobrazení F mezi euklidovskými prostory má obraz množiny kritických bodů F míru nula. (Její důkaz je možno nalézt ve skriptech [**17**].) Připomeňme, že bod x je kritický bod F, pokud hodnost Jacobiho matice F v bodě x je menší než maximální možná. Speciálně, je-li F definováno na otevřené podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ a hodnoty F leží v $\mathbb{R}^n$, pak míra množiny $F(\Omega)$ je nula, neboť je možné F považovat za zobrazení definované na $\Omega \times \mathbb{R}$, které je konstantní v poslední proměnné.

10.10. Věta. *Nechť M je varieta dimenze n s krajem, nechť $M_1, \dots, M_k$ jsou otevřené podmnožiny variety M a nechť c je řetězec dimenze $n-1$ v M takový, že M lze napsat jako disjunktní sjednocení $M = \cup_{i=1}^k M_i \cup <c>$.*

Pak pro libovolnou formu $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ s kompaktním nosičem platí

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{M_i} \omega.$$

DŮKAZ. Nechť $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ je rozklad jednotky podřízený atlasu $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ na M. Tedy pro každé $\beta \in B$ existuje $\alpha(\beta) \in A$ takové, že $\operatorname{supp} f_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$. Nechť ω je diferenciální forma stupně n s kompaktním nosičem. Ze Sardovy věty (viz předchozí poznámka) plyne, že pro každé α je míra množiny $\varphi_\alpha(<c>)$ rovna nule. Pak ale

$$\int_M \omega = \sum_{\beta \in B} \int_M f_\beta \omega = \sum_{\beta \in B} \int_{\varphi_{\alpha(\beta)}(U_{\alpha(\beta)})} [\varphi^{-1}_{\alpha(\beta)}]^*(f_\beta \omega) =$$

$$= \sum_{\beta \in B} \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi_{\alpha(\beta)}(M_i \cap U_{\alpha(\beta)})} [\varphi^{-1}_{\alpha(\beta)}]^*(f_\beta \omega) = \sum_{i=1}^{k} [\int_{M_i} (\sum_{\beta \in B} f_\beta \omega)] = \sum_{i=1}^{k} \int_{M_i} \omega.$$

□

10.11. Poznámka. V praxi se otevřené podmnožiny M_i volí tak, aby se každá z nich vešla do množiny U pro vhodnou mapu (U, φ). Pro nejběžnější případy variet M, které jsou vnořeny do euklidovského prostoru $\mathbb{R}^l$, lze většinou najít mapu (U, φ) takovou, že $M = U \cup <c>$.

Příklady, úlohy a cvičení

10.12. Integrál diferenciálních forem přes variety.
Vypočtěte integrál z dané diferenciální formy ω přes varietu M s danou orientací.
(a)

$$\omega = dx \wedge dy,$$

M je sféra S^2, orientovaná pomocí vnější normály.
(b)

$$\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dz,$$

M je „poloviční elipsoid“

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z > 0\}, a, b, c > 0$$

orientovaný pomocí vnější normály.
(c)

$$\omega = xz \, dx \wedge dy,$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 = y^2 + z^2 + 1, x \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle\},$$

orientovaná normálou, která má (v libovolném bodě) první složku kladnou.
(d)

$$\omega = dz \wedge dx,$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 2z \ , x, y > 0, z < \frac{1}{2}\},$$

orientovaná normálou, jejíž třetí složka je všude na M nekladná.

10.13. Stokesova věta na varietách.
(a) Použijte Stokesovu větu na výpočet integrálu z příkladu 10.12(a).
(b) Použijte Stokesovu větu na výpočet integrálu

$$\int_\Omega (x^2 + y^2) \, dx \wedge dy,$$

kde podmnožina Ω roviny $\mathbb{R}^2$ je dána jako

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 4\} - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

s orientací indukovanou orientací $\mathbb{R}^2$.

(c) Dokažte přímým výpočtem Stokesovu větu pro formu $\omega = yz \, dx$ na $\mathbb{R}^3$ a pro válcovou plochu parametrizovanou

$$\Phi : \quad \begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \\ z = t \end{cases}$$

$\varphi \in (0, 2\pi), t \in \langle a, b \rangle$, orientovanou pomocí vnější normály (kraj plochy se skládá ze dvou kružnic).

(d) Dokažte přímým výpočtem Stokesovu větu pro formu $\omega = (y+z)\,dx$ na $\mathbb{R}^3$ a pro sférickou výseč parametrizovanou

$$\Phi : \quad \begin{cases} x = \cos\varphi\cos\theta \\ y = \cos\varphi\sin\theta \\ z = \sin\varphi \end{cases}$$

$\varphi \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle, \theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, orientovanou pomocí vnější normály ke sféře.

(e) Ukažte pomocí Stokesovy věty (pro křivky v $\mathbb{R}^2$), že forma

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$$

(viz cvičení 3.15(e)) není exaktní.

(f) Pro každé n zkuste napsat formu $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{(0,\dots,0)\})$, která je uzavřená, ale nikoli exaktní. Dokažte její neexaktnost alespoň pro $n = 3$ obdobným způsobem jako v případě (e) – pomocí Stokesovy věty pro plochy v $\mathbb{R}^3$.

11. Integrace funkcí na Riemannových varietách

Integrace na Riemannových varietách.

11.1. Poznámka. Riemannovy variety patří mezi nejdůležitější speciální typy variet. Jejich význam plyne z toho, že jsou základním modelem prostorů, ve kterých je možné měřit vzdálenosti a úhly. Přesněji řečeno, je velmi dobře známo z elementární geometrie, že měřit velikosti vektorů a jejich úhly v lineárním vektorovém prostoru V je možné, pokud je na V dán skalární součin. Riemannovy variety jsou variety s dodatečnou strukturou, kterou je výběr (pozitivně definitního) skalárního součinu na T_mM pro každé $m \in M$. To pak umožňuje měřit délky vektorů a úhly křivek na takovéto varietě. Jako další důsledek této struktury je možné také měřit velikosti objemů a definovat integrál z funkcí přes Riemannovy variety. Vzhledem k tomu, co už v tuto chvíli známe, je možné definovat integrály z funkcí pomocí integrálů z diferenciálních forem. K tomu stačí definovat tzv. formu objemu.

11.2. Definice. Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n. Nechť je na V dán pozitivně definitní skalární součin a orientace. Nechť $e_1, \dots, e_n$ je libovolná kladně orientovaná ortonormální báze V a $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ duální báze V^*. Pak prvek

$$\omega := \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n \in \Lambda^n(V^*)$$

nezávisí na výběru báze a nazývá se **element objemu na** V.

11.3. Lemma. Element objemu nezávisí na výběru kladně orientované báze. Jsou-li navíc $v_1, \dots, v_n$ libovolné lineárně nezávislé vektory, pak číslo $|\omega(v_1, \dots, v_n)|$ je rovno objemu rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory.

DŮKAZ. Stačí dokázat jen druhé tvrzení, neboť objem příslušného rovnoběžnostěnu nezávisí na volbě báze. Nechť $e_1, \dots, e_n$ je libovolná kladně orientovaná ortonormální báze. Pak pro libovolné vektory $v_i = \sum_j v_i^j e_j, i = 1, \dots, n$, platí

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \det(v_i^j)\omega(e_1, \dots, e_n) = \det(v_i^j).$$

Je dobře známo, že číslo $|\det(v_i^j)|$ je pak rovno objemu příslušného rovnoběžnostěnu. Je také známo, že tento objem lze vypočítat také jako $\sqrt{g}$, kde $g = \det(g_{ij}), g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ (Grammova matice, Grammův determinant) – viz cvičení 11.8. □

11.4. Definice. Nechť M je varieta s krajem dimenze n. Nechť je na M dáno hladké tenzorové pole g typu $\binom{0}{2}$ s následující vlastností – pro každé $m \in M$ je bilineární forma $g(m)$ na $T_mM \times T_mM$ symetrická, nedegenerovaná se signaturou $(p,q), p+q=n$. Pak g nazýváme **pseudo-Riemannovou metrikou signatury** (p,q). Samotná varieta se pak nazývá **pseudo-Riemannovou varietou.** Ve speciálním případě signatury $(n,0)$ se metrika nazývá **Riemannova metrika**, pro signaturu $(1,n-1)$ se nazývá **Minkowského metrika**. Varieta s Riemannovou metrikou se nazývá **Riemannova varieta**. Ve speciálním případě dimenze 4 a signatury $(1,3)$ se příslušná varieta obvykle nazývá **prostoročas**.

Nechť M je orientovatelná Riemannova varieta dimenze n. Pro danou orientaci o variety M definujeme **formu objemu** $\omega_o \in \mathcal{E}^n(M)$ požadavkem, že pro každé $m \in M$ je $\omega_o(m)$ element objemu na T_mM vzhledem k uvažované orientaci o. Označme pro tuto chvíli symbolem $\int_{M,o}\omega$ integrál z formy ω přes varietu M se zvolenou orientací o. Je-li f libovolná hladká funkce s kompaktním nosičem na M, pak definujeme

$$\int_M f dS := \int_{M,o} f\omega_o.$$

Tento integrál se nazývá **integrál 1. druhu z funkce f přes Riemannovu varietu M**.

11.5. Věta.

(i) Integrál $\int_M f dS$ nezávisí na výběru orientace na varietě M a je tedy jednoznačně určen strukturou Riemannovy variety.

(ii) Je-li (U,φ) mapa na M a $\operatorname{supp} f \subset U$, pak pro funkce

$$\tilde{g}_{ij}(x) := g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \circ \varphi^{-1}(x);\ \tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ij})$$

platí

$$\int_M f dS = \int_{\varphi(U)} (f \circ (\varphi)^{-1}) \cdot \sqrt{\tilde{g}} dx_1 \dots dx_n.$$

Důkaz. (i) Z definice formy objemu ω_o plyne, že $\omega_{-o} = -\omega_o$. Tedy

$$\int_{M,-o} f\omega_{-o} = -\int_{M,o} f\omega_{-o} = \int_{M,o} f\omega_o.$$

(ii) Podle definice je

$$\int_M f dS = \int_{\varphi(U)} [\varphi^{-1}]^*(f\omega_o).$$

Je-li $\{e_1, \dots, e_n\}$ kanonická báze $\mathbb{R}^n$, pak

$$[\varphi^{-1}]^*(\omega_o)(e_1, \dots, e_n) = \omega_o([\varphi^{-1}]_*(e_1), \dots, [\varphi^{-1}]_*(e_n)) = \omega_o(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}).$$

Ale číslo $\omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ je rovno velikosti rovnoběžnostěnu, který je určen vektory $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ v T_mM. Totéž číslo je ale dáno výrazem $\sqrt{g}$, kde g je determinant Grammovy matice skalárních součinů $g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$. Ale $\tilde{g} = g \circ \varphi^{-1}$, tedy je toto číslo zároveň rovno $\sqrt{\tilde{g}}$. □

11.6. Poznámka. Podstatná informace, obsažená v předchozí větě je význam symbolu „dS" v označení integrálu 1. druhu z funkce. Symbolicky

$$„dS = \sqrt{g}\, dx_1 \dots dx_n\text{“},\ g = \det(g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}))_{ij}.$$

To je návod, jak se integrál $\int_M f dS$ počítá v lokálních souřadnicích.

Speciální případ, který se často vyskytuje, je situace, kdy $M \subset \mathbb{R}^n$ je varieta dimenze k zadaná pomocí $n-k$ rovnic (splňujících v každém bodě $m \in M$ předpoklady věty o implicitním zobrazení). Tečné prostory T_mM se pak chápou jako podprostory $\mathbb{R}^n$ a Riemannova metrika na T_mM je pak dána zúžením z $\mathbb{R}^n$.

Přesněji řečeno, je-li (U,φ) mapa na M, pak $\Phi = \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je parametrizace U jakožto regulární plochy dimenze k v $\mathbb{R}^n$.

Tečný prostor T_mM má podle obecné definice bázi

$$\frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_k};\ u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Na druhou stranu, pro parametricky zadané plochy dimenze k v $\mathbb{R}^n$ jsme definovali tečný prostor jako podprostor $\mathbb{R}^n$ generovaný vektory

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}.$$

Pro vektory v $\mathbb{R}^n$ je definován kanonický euklidovský skalární součin. Stačí tedy si uvědomit, že (viz 8.3)

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial u_i};\ i = 1, \dots, k$$

a na $T_m M$ je tímto ztotožněním indukován skalární součin. Tímto způsobem je standardně definována struktura Riemannovy variety na varietách $M \subset \mathbb{R}^n$ tohoto typu.

Pak ale

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \rangle,\ g = \det(g_{ij}),\ dS = \sqrt{g}\, du_1 \dots du_k.$$

V případě dvourozměrné plochy se tato čísla klasicky označují jako

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle, \\ F &= \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle, \\ G &= \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle, \end{aligned}$$

kde Φ_u, Φ_v značí parciální derivace Φ podle proměnných u, v. Potom

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

11.7. Variety dimenze $n-1$ v $\mathbb{R}^n$. Nejčastěji se vyskytuje speciální způsob právě popsané situace, kdy M je nadplocha, tj. je zadaná jen jednou rovnicí $f = 0$ v $\mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že je na M dána orientace. Ta, jak víme, může být dána buď pomocí orientovaného atlasu, nebo (hladkým) vektorovým polem $\vec{N}$ jednotkových normálových vektorů.

Obecná forma stupně $n-1$ na $\mathbb{R}^n$ má tvar

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} T_i\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Koeficienty $\{T_i\}$ této formy jsou často ztotožňovány s vektorovým polem $\vec{T} = (T_1, \dots, T_n)$ (formálně vzato lze $\vec{T}$ vyjádřit pomocí Hodgeova operátoru jako $\vec{T} = (-1)^{n-1} * \omega$ – viz cvičení 2.12). Pokud definiční obor vektorového pole $\vec{T}$ obsahuje M, pak se definuje **integrál 2. druhu** $\int_M \vec{T} d\vec{S}$ předpisem

$$\int_M \vec{T} d\vec{S} = \int_M \omega = \int_M \sum_i (-1)^{i+1} T_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

V tomto případě pak existuje jednoduchá souvislost mezi integrálem 1. a 2. druhu. Symbolicky se tato souvislost dá popsat vztahy

$$d\vec{S} = \vec{N} dS, \quad \vec{N} d\vec{S} = dS.$$

Přesněji, pro každou funkci f a vektorové pole $\vec{T}$ platí

$$\int_M \vec{T} d\vec{S} = \int_M \langle \vec{T}, \vec{N} \rangle dS$$

a

$$\int_M f dS = \int_M [f\vec{N}] d\vec{S}.$$

Abychom se přesvědčili, že je to pravda, zvolme libovolnou kladně orientovanou mapu (U, φ) na M. Pak $\Phi = \varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ je parametrický popis U. Označme

$$\vec{R} = (-1)^{n-1} * (\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n-1}}) = [\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n-1}}]$$

(vnější součin – viz cvičení 2.9), vektorové pole $\vec{N}$ je dáno vztahem

$$\vec{N} = \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}.$$

Pak stačí si uvědomit, že pro

$$\omega_i = (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

platí

$$\Phi^*(\omega_i) = (-1)^{i+1} \det \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_{i-1}, \Phi_{i+1}, \dots, \Phi_n)}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})} du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1} = \|\vec{R}\| \cdot N_i \, du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1},$$

tedy pro všechny hladké funkce f na M s kompaktním nosičem platí

$$\int_M f\omega_i = \int_M f \cdot N_i \, dS.$$

Symbolicky tedy

$$N_i \, dS = (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n = (d\vec{S})_i.$$

Příklady, úlohy a cvičení

11.8. Objem rovnoběžnostěnu.
Jsou-li $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$ vektory v $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, označme $V := (v_i^j)$ matici jejich koeficientů vůči kanonické bázi a $g_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$ prvky Grammovy matice G. Dokažte, že

$$\sqrt{\det G} = |\det V|,$$

což je objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $v_i, i = 1, \dots, n$.

11.9. Integrál prvního druhu.
(a) Vypočtěte délku kružnice a plochu sféry, tj. integrály

$$\int_{S^1} dS \quad \text{a} \quad \int_{S^2} dS \; .$$

Vypočtěte integrál prvního druhu z funkce f přes varietu M.
(b)

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1},$$

M je šroubová plocha (helikoid), zadaná parametrizací

$$\Phi : \quad \begin{cases} x = r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \\ z = \varphi \end{cases}$$

$r \in (0, R), R > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$.
(c)

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^4,$$

M je kuželová plocha zadaná rovnicí $x^2 + y^2 = z^2, z \in (0, T), T > 0$.
(d)

$$f(x, y, z) = x + y + z,$$

M je válcová plocha zadaná rovnicí $x^2 + y^2 = r^2, r > 0, z \in (a, b)$.

12. Algebraické a topologické vlastnosti diferenciálních forem

Algebra forem

12.1. Poznámka. V moderní diferenciální geometrii hraje důležitou roli algebraická formulace mnoha základních vlastností variety M. Na prvním místě jsou to vlastnosti algebry funkcí $\mathcal{E}^0(M)$ (požadavky na regularitu či hladkost mohou být různé, např. spojitost či hladkost). Samotná varieta M může být za určitých okolností zrekonstruována ze znalosti této algebry, což je slavný výsledek Gelfandův (viz např. [**4**]). V této závěrečné kapitole skript probereme některé základní informace o vlastnostech (gradované) algebry diferenciálních forem a o jejich použití v topologii.

12.2. Algebra $\mathcal{E}^*(M)$. Algebra $\mathcal{E}^*(M) = \oplus_k \mathcal{E}^k(M)$ má, jako reálný vektorový prostor, nekonečnou dimenzi. Zajímavější je uvažovat ji jako modul nad algebrou $\mathcal{A} = \mathcal{E}^0(M)$. V jednoduchém případě, např. pro $M = \mathbb{R}^n$, je algebra $\mathcal{E}^*(M)$ volný modul dimenze 2^n nad $\mathcal{A}$ s bází $\{dx_J\}$. Je-li M kompaktní, pak je $\mathcal{E}^*(M)$ konečně generovaný modul nad $\mathcal{A}$ (stačí použít libovolné konečné pokrytí mapami a odpovídající rozklad jednotky). Je užitečné si uvědomit, že tedy na kompaktní varietě lze každou formu $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ napsat ve tvaru konečného součtu $\omega = \sum_j f_j dg_{j1} \wedge \ldots \wedge dg_{jk}$, kde $f_j, g_{ji} \in \mathcal{E}^0(M)$. Pro obecnou varietu je možné dokázat podobné tvrzení pomocí rozkladu jednotky, který však již bude jen lokálně konečný. Přesněji, pomocí libovolného lokálně konečného atlasu a příslušného rozkladu jednotky ukážeme, je-li potřeba, že každou formu $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ lze napsat jako součet $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha$, kde součet přes α je lokálně konečný, t.j. pro každý bod $m \in M$ existuje okolí $U(m)$ takové, že $U(m) \cap \operatorname{supp}(\omega_\alpha) \neq \emptyset$ jen pro konečně mnoho indexů α. Každou formu ω_α pak je možné pomocí souřadnic rozložit do kanonického tvaru.

Základní algebraickou vlastností $\mathcal{E}^*(M)$ je její gradace $\mathcal{E}^*(M) = \oplus_k \mathcal{E}^k(M)$ a to, že je tzv. gradovaně komutativní, t.j. že platí

$$\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$$

pro všechny $\omega \in \mathcal{E}^k(M), \tau \in \mathcal{E}^l(M)$. Tuto vlastnost je možné také formulovat pomocí $\mathbb{Z}_2$-gradace. Označme $\mathcal{E}^+(M)$, resp. $\mathcal{E}^-(M)$ podprostor všech forem sudého, resp. lichého stupně, pak $\mathcal{E}^*(M) = \mathcal{E}^+(M) \oplus \mathcal{E}^-(M)$ a je-li $\omega \in \mathcal{E}^a(M), \tau \in \mathcal{E}^b(M);\ a, b \in \{\pm 1\}$, pak

$$\omega \wedge \tau = ab\tau \wedge \omega.$$

Tato vlastnost algebry $\mathcal{E}^*(M)$ je zřejmě důsledkem téže vlastnosti vnější algebry $\Lambda^*(V)$ libovolného vektorového prostoru V. To vše přirozeně patří do teorie superprostorů a superalgeber, která se pod vlivem teoretické fyziky rychle rozvíjí v posledních desetiletích, víc informací lze nalézt např. v [**3**].

Připomeňme si (viz poznámku 8.10), že množina $\mathcal{X}(M)$ vektorových polí se dá charakterizovat jako množina všech derivací (t.j. lineárních zobrazení s Leibnizovou vlastností) algebry $\mathcal{A}$. Každá diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ je k-lineární antisymetrické zobrazení vektorových polí do sebe (viz pozn. 9.2). V řeči multilineárních zobrazení modulů nad algebrou $\mathcal{A}$ lze definici vnějšího součinu $\omega \wedge \tau, \omega \in \mathcal{E}^k(M), \tau \in \mathcal{E}^l(M)$ alternativně popsat pomocí

$$\omega \wedge \tau(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \tau(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)}).$$

Je užitečné si uvědomit následující popis vícenásobného součinu 1-forem jako multilineárního zobrazení.

12.3. Věta. *Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{E}^1(M)$, pak pro libovolná pole $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ platí*

$$[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k](X_1, \ldots, X_k) = \det(\alpha_i(X_j))_{i,j=1}^k.$$

Důkaz. Stačí použít indukci vzhledem ke k. Pro $k = 2$ je tvrzení okamžitý důsledek definice vnějšího součinu. Přepokládejme, že je tvrzení pravdivé pro součin $k-1$ forem stupně 1. Pak

$$\begin{aligned}
&[\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \ldots \wedge \alpha_k)](X_1, \ldots, X_k) = \\
&= (1/(k-1)!) \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \alpha_1(X_{\sigma(1)}) [\alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k](X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) = \\
&= (1/(k-1)!) \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \alpha_1(X_{\sigma(1)}) \sum_{\tau \in S_{k-1}} \operatorname{sgn} \tau \alpha_2(X_{\tau\sigma(2)}) \ldots \alpha_k(X_{\tau\sigma(k)}) = \\
&= (1/k!) \sum_{\sigma' \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma' \alpha_1(X_{\sigma'(1)}) \ldots \alpha_k(X_{\sigma'(k)}) = \\
&= \det(\alpha_i(X_j))_{i,j=1}^k.
\end{aligned}$$

□

Gradované derivace na algebře forem

12.4. Poznámka. De Rhamův diferenciál d má dvě vlastnosti, které jsou charakteristické a které se vyskytují i u dalších lineárních operátorů z prostoru diferenciálních forem $\mathcal{E}^*(M)$ do sebe. První z nich je vzorec pro derivaci součinu dvou forem, který (až na ev. změnu znaménka) je Leibnizova vlastnost derivace součinu. Druhý je fakt, že zvyšuje stupeň formy o jedničku. To je inspirací pro následující definici.

12.5. Definice. Nechť j je celé číslo a nechť $D : \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ je lineární zobrazení. Označme $\mathcal{E}^l(M) = \{0\}$ pro $l \in Z$, $l \notin \{0, \dots, n\}$. Řekneme, že D je **gradovaná derivace stupně** j pokud platí:

1. $D\left(\mathcal{E}^k(M)\right) \subset \mathcal{E}^{k+j}(M)$, $k = 0, \dots, n$.
2. Pro všechny $\omega \in \mathcal{E}^k(M), \tau \in \mathcal{E}^*(M)$ platí

$$D(\omega \wedge \tau) = D(\omega) \wedge \tau + (-1)^{jk} \omega \wedge D(\tau).$$

12.6. Poznámka. De Rhamův diferenciál d je tedy gradovaná derivace stupně 1. Všimněte si, že gradované derivace stupně j menší než -1 jsou nutně triviální. Takovéto zobrazení by nutně každé funkci a 1-formě přiřadilo formu záporného stupně, to jest nulu, a z vlastnosti 2) by ihned plynulo, že obraz libovolné formy je nula. Za chvíli si ukážeme další příklady gradovaných derivací.

12.7. Definice. Nechť X je hladké vektorové pole na M. Pak definujeme lineární zobrazení ι_X : $\mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k-1}(M)$ předpisem

$$[\iota_X(\omega)](X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1});$$

kde $X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathcal{X}(M); \omega \in \mathcal{E}^k(M)$. Zobrazení ι_X se nazývá **kontrakce** vzhledem k vektorovému poli X.

12.8. Příklad. Pro rozložitelnou formu $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \mathcal{E}^k(M)$ a pro každé $X_1 \in \mathcal{X}(M)$ platí

$$\iota_{X_1}\omega = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \alpha_l(X_1) \alpha_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha_l} \wedge \dots \wedge \alpha_k,$$

kde stříška nad α_l znamená, že tento faktor v součinu chybí. Toto tvrzení ihned plyne z definice kontrakce a z rozvoje determinantu matice $(\alpha_i(X_j))_{i,j=1}^k$ podle prvního sloupce.

12.9. Věta. *Nechť X je libovolné vektorové pole na M. Pak kontrakce ι_X je gradovaná derivace stupně -1 na $\mathcal{E}^*(M)$.*

Důkaz. Stačí zřejmě ověřit jenom druhou vlastnost z definice. Zobrazení ι_X je lineární, stačí tedy ověřit vlastnost

$$\iota_X(\omega \wedge \tau) = \iota_X(\omega) \wedge \tau + (-1)^{-k} \omega \wedge \iota_X(\tau)$$

pro rozložitelné formy. Předpokládejme tedy, že $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \mathcal{E}^k(M)$, $\tau = \alpha_{k+1} \wedge \dots \wedge \alpha_{k+l} \in \mathcal{E}^l(M)$. Pak

$$[\iota_{X_1}(\omega \wedge \tau)](X_2, \dots, X_{k+l}) = \det(\alpha_i(X_j))_{i,j=1}^{k+l}.$$

Nyní stačí rozvinout determinant podle prvního sloupce a použít popis kontrakce rozložitelné formy v předchozím příkladu. □

12.10. Poznámka. Jak je obvyklé pro derivace, složení dvou derivací (prvního řádu) již není derivace (prvního řádu). U vektorových polí jsme viděli, že ale komutátor dvou vektorových polí je opět vektorové pole (viz 8.12). Podobně je tomu s gradovanými derivacemi. Jejich složení není gradovaná derivace; ukážeme si však nyní, že vhodný gradovaný komutátor dvou gradovaných derivací je opět gradovaná derivace. To je také systematický způsob, jak konstruovat nové gradované derivace pomocí již známých gradovaných derivací.

12.11. Věta. *Nechť D_1 je gradovaná derivace stupně j_1 a D_2 je gradovaná derivace stupně j_2. Pak jejich gradovaný komutátor $[D_2, D_1]$ definovaný pomocí vzorce*

$$[D_2, D_1] := D_2\, D_1 - (-1)^{j_1 j_2} D_1\, D_2$$

je gradovaná derivace stupně $j_1 + j_2$.

DŮKAZ. Nechť $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, $\tau \in \mathcal{E}^l(M)$. Pak

$$\begin{aligned}
&[D_2, D_1](\omega \wedge \tau) = \\
=&D_2[D_1(\omega) \wedge \tau + (-1)^{j_1 k} \omega \wedge D_1(\tau)] - (-1)^{j_1 j_2} D_1[D_2(\omega) \wedge \tau + (-1)^{j_2 k} \omega \wedge D_2(\tau)] = \\
=&D_2\, D_1(\omega) \wedge \tau + (-1)^{j_2(k+j_1)} D_1(\omega) \wedge D_2(\tau) + \\
&+ (-1)^{j_1 k} D_2(\omega) \wedge D_1 \tau + (-1)^{(j_1+j_2)k} \omega \wedge D_2\, D_1(\tau) + \\
&+ (-1)^{j_1 j_2 + 1}[D_1\, D_2(\omega) \wedge \tau + (-1)^{j_1(k+j_2)} D_2(\omega) \wedge D_1(\tau) + \\
&+ (-1)^{j_2 k} D_1(\omega) \wedge D_2 \tau + (-1)^{(j_1+j_2)k} \omega \wedge D_1\, D_2(\tau)] = \\
=&[D_2, D_1](\omega) \wedge \tau + (-1)^{(j_1+j_2)k} \omega \wedge [D_2, D_1](\tau).
\end{aligned}$$

□

12.12. Definice. Nechť X je vektorové pole na M. Pak **Lieova derivace** L_X na prostoru diferenciálních forem $\mathcal{E}^*(M)$ je definována jako gradovaný komutátor de Rhamova diferenciálu a kontrakce vzhledem k vektorovému poli X :

$$L_X := [d, \iota_X] = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d. \tag{20}$$

Lieova derivace je tedy gradovaná derivace na $\mathcal{E}^*(M)$ stupně 0.

12.13. Příklad. Ihned z definice je možné spočítat, jak vypadá Lieova derivace funkce či 1-formy. Je-li X vektorové pole a f funkce na M, pak

$$L_X(f) = \iota_X(df) = df(X) = Xf.$$

Je-li $\omega = df$ exaktní 1-forma, pak

$$L_X(df) = d(\iota_X(df)) = d(Xf).$$

Leibnizovo pravidlo umožňuje redukovat výpočet Lieovy derivace forem vyšších stupňů postupně až na výše uvedené dva případy.

12.14. Poznámka. Tradiční geometrická definice Lieovy derivace je jiná, je založená na pojmu jednoparamterické grupy transformací, generované příslušným vektorovým polem. Pokud je použita tato geometrická definice, pak je výše uvedený vztah 20 pro Lieovu derivaci ekvivalentní definicí (příslušný vztah se obvykle nazývá Cartanův vzorec). Podrobnější komentář ke geometrické definici Lieovy derivace (obecných) tenzorových polí je možno nalézt níže.

Přirozená otázka je, jestli není možné pomocí gradovaných komutátorů Lieovy derivace s kontrakcemi zkonstruovat další gradované derivace. Něco o tom říká následující tvrzení.

12.15. Věta. *Jsou-li X, Y dvě vektorová pole na M, pak*

$$[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]};\ [L_X, d] = 0;\ [L_X, L_Y] = L_{[X,Y]};\ [\iota_X, \iota_Y] = 0.$$

DŮKAZ. Levé i pravé strany příslušných rovností jsou gradované derivace, stačí tedy (díky Leibnizově vlastnosti) ověřit tyto rovnosti pro funkce a exaktní 1-formy.

V prvním vztahu jsou obě strany derivace stupně -1. Pro funkce jsou tedy obě strany rovné nule a je-li $\omega = df$, pak

$$\begin{aligned}
[L_X, \iota_Y](df) &= L_X(df(Y)) - \iota_Y(L_X(df)) = X(Yf) - [d(Xf)](Y) = \\
&= [X, Y](f) = \iota_{[X,Y]}(df).
\end{aligned}$$

Druhý vztah plyne z toho, že

$$L_X \circ d = d \circ \iota_X \circ d = d \circ L_X.$$

Protože L_X a d komutují, stačí třetí vztah ověřit pouze pro funkce, kde plyne ihned z definice.

Poslední tvrzení je důsledkem toho, že $[\iota_X, \iota_Y]$ je gradovaná derivace stupně -2, která je nutně triviální. $\square$

Následující věta popisuje způsob, jak vypočítat hodnotu Lieovy derivace, resp. de Rhamova diferenciálu jako multilineárního zobrazení, t.j. hodnoty na zvolené k-tici vektorových polí. Tyto formule jsou velmi užitečné a často se používají při globálních výpočtech. Jejich výhodou je, že (na rozdíl od obvyklé definice de Rhamova diferenciálu) nepoužívají lokální souřadnice. Globální formule pro $d\omega$, uvedená v následující větě je předobraz a inspirace formule pro diferenciál komplexu, kterým se definuje homologie Lieových algeber a zaslouží si zvláštní pozornost.

12.16. Věta. *Pro vektorová pole $X, X_0, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ a formu $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ platí*

$$[L_X\omega](X_1, \dots, X_k) = \\ = L_X[\omega(X_1, \dots, X_k)] - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \dots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \dots, X_k).$$

a

$$[d\omega](X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i[\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)] + \\ + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

Důkaz. První tvrzení se dá přeformulovat ve tvaru

$$\iota_{X_k} \dots \iota_{X_1} L_X = \\ L_X \iota_{X_k} \dots \iota_{X_1} - \sum_{i=1}^{k} \iota_{X_k} \dots \iota_{X_{i+1}} \iota_{[X, X_i]} \iota_{X_{i-1}} \dots \iota_{X_1}.$$

To ale snadno plyne indukcí s použitím vztahu $[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}$.

Druhé tvrzení dokážeme indukcí podle stupně formy ω. Je-li $\omega = f$ funkce, pak se tvrzení redukuje na samozřejmý vztah $df(X) = Xf$. Předpokládejme tedy platnost tvrzení pro formy, jejichž stupeň je menší než k. Nechť $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$. Pak (s použitím indukčního předpokladu pro $(k-1)$-formu $\iota_{X_0}(\omega)$)

$$\begin{aligned}
[d\omega](X_0, \dots, X_k) &= \iota_{X_k} \dots (\iota_{X_0}(d\omega)) = \\
&= \iota_{X_k} \dots (\iota_{X_1}[L_{X_0}\omega - d(\iota_{X_0}(\omega))] = \\
&= L_{X_0} \iota_{X_k} \dots \iota_{X_1}(\omega) - \sum_{i=1}^{k} \iota_{X_k} \dots \iota_{X_{i+1}} \iota_{[X_0, X_i]} \iota_{X_{i-1}} \dots \iota_{X_1}(\omega) - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} X_i[\omega(X_0, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)] - \\
&\quad - \sum_{1 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega(X_0, [X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) = \\
&= X_0[\omega(X_1, \dots, X_k)] + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i X_i[\omega(X_0, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)] + \\
&\quad + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k).
\end{aligned}$$

12.17. Poznámka. Geometrická interpretace Lieovy derivace.

Důležitý pojem v analýze na varietách je jednoparametrická grupa difeomorfismů. Nechť pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje difeomorfismus $\Phi_t : M \to M$ tak, že

$$\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}; \ s, t, s+t \in \mathbb{R}.$$

Pak $\{\Phi_t\}$ nazveme **jednoparametrickou grupou difeomorfismů.** Jí odpovídá vektorové pole X dané vztahem

$$X_m(f) = \frac{d(f \circ \Phi_t(m))}{dt}(0).$$

Křivky $\gamma_m(t) := \Phi_t(m)$ jsou pak tzv. **integrální křivky** vektorového pole X. (Připomeňme, že integrální křivka $\varphi_m(t)$ vektorového pole X procházející bodem $m \in M$ je řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic $\frac{d\varphi_m}{dt}(t) = X(\varphi_m(t))$ splňující počáteční podmínku $\varphi_m(0) = m$.) Za určitých předpokladů (např. pro kompaktní variety) je možno dokázat pro dané vektorové pole X existenci jednoparametrické grupy difeomorfismů generované (v uvedeném smyslu) vektorovým polem X. Pro obecnou varietu je třeba zavést poněkud obecnější pojem lokální jednoparametrické grupy difeomorfismů, pro kterou je příslušný difeomorfismus Φ_t definován pro dost malé t, což stačí pro definici odpovídajícího vektorového pole X určeného touto lokální jednoparametrickou grupou. Pak je možné dokázat (viz např. [**21**]), že pro každé vektorové pole na M lze najít přílušnou lokální jednoparametrickou grupu transformací, která generuje toto vektorové pole.

Existence (lokální) jednoparametrické grupy difeomorfismů umožňuje definovat Lieovu derivaci obecně pro libovolné tenzorové pole (kovariantní, kontravariantní či smíšené). My se zde omezíme jen na pole kovariantní, (ostatní případy je možné najít např. v knize [**21**]) a ukážeme, že pro takto definovanou geometrickou Lieovu derivaci platí Cartanův vzorec 20 (který jsme výše použili při definici Lieovy derivace diferenciálních forem).

12.18. Definice. Nechť X je hladké vektorové pole na M a nechť existuje jednoparametrická grupa difeomorfismů Φ_t generovaná vektorovým polem X. Pak pro každé (hladké) tenzorové pole T na M typu $\binom{0}{s}$ definujeme tenzorové pole $\mathcal{L}_X T$ téhož typu předpisem

$$[\mathcal{L}_X T](m) = \lim_{t\to 0} \frac{[\Phi_t^* T](m) - T(m)}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ([\Phi_t^*(T)](m)) .$$

Je zřejmé, že pro danou formu $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ je rovněž $\mathcal{L}_X\omega \in \mathcal{E}^k(M)$.

12.19. Věta. *Nechť X je hladké vektorové pole na M a nechť existuje jednoparametrická grupa transformací Φ_t generovaná vektorovým polem X. Pak pro každou formu ω platí*

$$\mathcal{L}_X(\omega) = L_X(\omega).$$

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že $\mathcal{L}_X$ je gradovaná derivace stupně 0. Jsou-li ω, τ libovolné formy, pak platí

$$\mathcal{L}_X(\omega\wedge\tau)(m) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ([\Phi_t^*(\omega)](m) \wedge [\Phi_t^*(\tau)](m)) = [\mathcal{L}_X(\omega)\wedge\tau](m) + [\omega\wedge\mathcal{L}_X(\tau)](m).$$

(Pro odůvodnění druhé rovnosti by, striktně vzato, bylo třeba vyhodnotit všechny formy na příslušném množství vektorových polí a pak použít vlastnost derivace součinu funkcí.) Přenášení diferenciálních forem komutuje s vnějším diferenciálem. Z definice Lieovy derivace $\mathcal{L}_X$ plyne tedy ihned, že i ona komutuje s vnějším diferenciálem. Zbývá tedy ověřit tvrzení pro případ forem stupně 0, t.j. pro funkce:

$$\mathcal{L}_X(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Phi_t^*(f)) = Xf = L_X(f).$$

□

De Rhamovy kohomologické grupy, homotopická invariance.

Z hlediska algebraické topologie a nekomutativní geometrie hraje důležitou roli tzv. **de Rhamův komplex.** Jeho definice je identická s definicí zmíněnou v kapitole o diferenciálních formách na $\mathbb{R}^n$ (viz 3.8).

Připomeňme si, že de Rhamův diferenciál d zobrazuje $\mathcal{E}^k(M)$ do $\mathcal{E}^{k+1}(M)$ a že $d \circ d = 0$. Pak pro $k = 0, \ldots, n$ definujeme **k-tou de Rhamovu kohomologickou grupu**

$$H^k_{DR}(M) := \{\omega \in \mathcal{E}^k(M); d\omega = 0\}/\{\omega = d\tau; \tau \in \mathcal{E}^{k-1}(M)\}.$$

Grupovou operací budeme rozumět sčítání tříd uzavřených forem indukované sčítáním uzavřených forem. Uvědomte si, že tato operace je dobře definována – součet dvou exaktních forem je exaktní.

De Rhamovy grupy popisují topologické vlastnosti variety M. Tento fakt úzce souvisí s homotopickou invariancí de Rhamových grup. Tím se myslí jejich následující velmi důležitá vlastnost.

12.20. Věta [o homotopii]. *Je-li $F : M \to N$ hladké zobrazení, pak zobrazení $F^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$ indukuje zobrazení $F^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$.*

Jsou-li zobrazení $F, G : M \to N$ (hladce) homotopická, tj. pokud existuje hladké zobrazení

$$h : \langle 0,1\rangle \times M \to N$$

takové, že

$$h(0,m) = F(m),\ h(1,m) = G(m);\ m \in M,$$

pak pro všechny k platí

$$F^* = G^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M).$$

Dříve než probereme důkaz uvedené věty, je třeba zavést několik pojmů.

12.21. Definice.

Nechť M je varieta, pak součin $\langle 0,1\rangle \times M$ je varieta s krajem. Je-li F hladká funkce na $\langle 0,1\rangle \times M$, pak F lze integrovat podle proměnné $t \in \langle 0,1\rangle$. Přesněji řečeno, každé funkci $F \in \mathcal{E}^0(\langle 0,1\rangle \times M)$, přiřadíme funkci $f(x) = \int_0^1 F\,dt \in \mathcal{E}^0(M)$ předpisem

$$f(x) = \int_0^1 F(t,x)dt.$$

Označme $\frac{\partial}{\partial t}$ kanonické vektorové pole na $\langle 0,1\rangle \times M$. Budeme definovat operátor

$$L : \omega \in \mathcal{E}^p(\langle 0,1\rangle \times M) \longrightarrow \mathcal{E}^{p-1}(M)$$

předpisem

$$[L\omega](X_2,\dots,X_p) = \int_0^1 \omega(\frac{\partial}{\partial t}, X_2,\dots,X_p)dt.$$

Je zřejmé, že $L\omega$ je antisymetrické multilineární zobrazení vektorových polí na M, t.j. $(p-1)$-forma na M.

12.22. Příklad. V lokálních souřadnicích se operátor L snadno popíše. Předpokládejme, že $M = \mathbb{R}^n$. Pak se forma ω dá napsat ve tvaru

$$\omega = \sum_{|I|=p-1} \alpha_I(t,x)dt \wedge dx_I + \sum_{|J|=p} \beta_J(t,x)dx_J.$$

a

$$\omega(\frac{\partial}{\partial t}, X_2,\dots,X_p) = \sum_I \alpha_I(t,x)dx_I(X_2,\dots,X_p);\ L\omega = \sum_I(\int_0^1 \alpha_I(t,x)dt)dx_I.$$

12.23. Věta. *Označme symbolem $s_i, i = 0,1$, zobrazení variety M do $\langle 0,1\rangle \times M$ daná předpisem*

$$s_0(x) = (0,x);\ s_1(x) = (1,x).$$

Pak pro libovolnou formu $\omega \in \mathcal{E}^p(\langle 0,1\rangle \times M)$ platí

$$L(d\omega) + d(L\omega) = s_1^*\omega - s_0^*\omega.$$

Důkaz. Všechny operátory používané v dokazovaném vztahu (operátory L, d, s_i^*) jsou lineární. Pokud rozložíme formu ω pomocí rozkladu jednotky na lokálně konečný součet $\sum_\alpha \omega_\alpha$, pak $L\omega = \sum_\alpha L\omega_\alpha$ je také lokálně konečný součet a totéž platí i pro ostatní operátory. Je tedy možné předpokládat, že ω má nosič v $\langle 0,1\rangle \times U$, kde $U \subset M$ je nějaké souřadnicové okolí.

V příslušných lokálních souřadnicích $(x_1,\dots,x_n)$ stačí uvažovat dva případy:

1) $\omega = \beta dx_J, |J| = p$,

2) $\omega = \alpha dt \wedge dx_I, |I| = p-1$.

V prvním případě je $L\omega = 0$ (neboť ω neobsahuje diferenciál dt) a

$$L(d\omega) = \left(\int_0^1 \left(\frac{d\beta}{dt}\right) dt\right) \wedge dx_J = s_1^*\omega - s_0^*\omega.$$

V druhém případě forma ω obsahuje diferenciál dt, tedy zřejmě $s_i^*\omega = 0$, $i = 0,1$, (neboť $s_i^*(dt) = 0$). Podle definice operátoru L dostaneme

$$d(L\omega) = d(\int_0^1 \alpha(t,x)dt) \wedge dx_I = \sum_i(\int_0^1 \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}dt) \wedge dx_i \wedge dx_I$$

a

$$L(d\omega) = L(\sum_i \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_J) = -\sum_i (\int_0^1 \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} dt) dx_i \wedge dx_J.$$

□

12.24. Důkaz věty o homotopii. Nejdříve si rozmyslíme, že indukované zobrazení F je dobře definované. Vzhledem k tomu, že d komutuje s F^*, je pro každou uzavřenou formu ω forma $F^*(\omega)$ také uzavřená a definuje třídu $[F^*(\omega)]$, která je obrazem třídy $[\omega]$. Pokud se dvě formy ω, τ liší o exaktní formu, t.j. pokud existuje $\nu, \omega - \tau = d\nu$, pak $F^*(\omega) - F^*(\tau) = F^*(d\nu) = d(F^*(\nu))$.

Je-li h homotopie mezi zobrazeními F, G a je-li ω uzavřená forma, pak

$$G^*\omega - F^*\omega = s_1^* h^*\omega - s_0^* h^*\omega = d(L(h^*\omega)).$$

Tedy $G^*\omega$ a $F^*\omega$ určují tentýž prvek de Rhamovy kohomologické grupy. □

Řekneme, že varieta M je jednoduše souvislá, pokud je Id_M homotopická s konstantním zobrazením na M. (Zkuste porovnat s definicí jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kterou pravděpodobně znáte z komplexní analýzy.) Jednoduchým důsledkem homotopické invariance je pak fakt, že pro jednoduše souvislé variety jsou de Rhamovy grupy triviální. Speciálním případem je pak tzv. Poincarého lemma.

12.25. Věta.
1) Je-li hladké zobrazení F variety M do variety N homotopické s konstantním zobrazením, pak je zobrazení

$$F^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$$

triviální pro každé $k \geq 1$.
2) **Poincarého lemma** *Nechť M je varieta. Pak je lokálně každá uzavřená forma exaktní, t.j. pro každý bod $m \in M$ existuje okolí U bodu m takové, že $H^k_{DR}(U) = 0$ pro každé $k = 1, \dots, n$.*

Připomeňme si, že ve cvičení 3.15(f) byla popsána pro případ $M = \mathbb{R}^n$ explicitní konstrukce formy τ, pro kterou $d\tau = \omega$.

Důkaz. První část věty plyne z toho, že je-li G konstantní zobrazení, pak ihned z definice přenášení diferenciálních forem plyne, že $G^*(\omega) = 0$ pro každou formu ω kladného stupně.

Druhá část je důsledkem faktu, že pro každý bod $m \in M$ lze najít mapu (U, φ) tak, že $m \in U$ a $\varphi(U)$ je konvexní množina v $\mathbb{R}^n$. Tedy na U je identita homotopická s konstatním zobrazením. Tedy zobrazení Id^* je triviální. Ale zobrazení Id^* indukované identickým zobrazením na $\mathcal{E}^k(M)$ je identické zobrazení na $H^k_{DR}(M)$. □

Příklady, úlohy a cvičení

12.26. Kohomologické grupy.
Příklady některých kohomologických grup:

$$\begin{array}{rr}
H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^2) = 0 & H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = 0 \\
H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^2) = 0 & H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \simeq \mathbb{Z} \\
H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^2) = 0 & H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = 0 \\
H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = 0 & H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^3 - \mathbb{R}) = 0 \\
H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = 0 & H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^3 - \mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z} \\
H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^3 - \{0\}) \simeq \mathbb{Z} & H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^3 - \mathbb{R}) = 0 \\
H^3_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = 0 & H^3_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^3 - \mathbb{R}) = 0
\end{array}$$

Vztah $H^k_{\mathrm{DR}}(\Omega) = 0$, znamená, že každá uzavřená k-forma na Ω je exaktní. Ve cvičení 3.15e) je uveden příklad zástupce z netriviální třídy v $H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^2 - \{0\})$. Pokuste se najít zástupce z dalších netriviálních grup.

Mnoho dalších příkladů lze najít v [**2**].

Kapitola IV

Řešení úloh a návody ke cvičením

Vnější algebra $\mathbb{R}^n$

2.8 Kanonické báze vnějších mocnin $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$:

n	2	3	4
$k=0$	1	1	1
1	e_1, e_2	e_1, e_2, e_3	e_1, e_2, e_3, e_4
2	e_{12}	e_{12}, e_{13}, e_{23}	$e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}$
3		e_{123}	$e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}$
4			e_{1234}

2.9 Je-li $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$, je

$$w \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = \left(\sum_{i=1}^n a_i w_i \right) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \langle [v_1, \ldots, v_{n-1}], w \rangle e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

a zároveň

$$w \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = \det[w, v_1, \ldots, v_{n-1}] e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

2.10(b) Pro $k > n$ jsou obě strany výroku zřejmě splněny. Buď tedy $k \leq n$. Jsou-li vektory $v_1, \ldots, v_k \in V$ lineárně závislé, lze psát např. $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$. Potom $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k-1} \wedge \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i \right) = 0$. Naopak, dle 2.3(iv) je

$$0 = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = \sum_{|J|=k} \det V_J \cdot e_J$$

a tedy, jelikož prvky $e_J, |J| = k$, tvoří bázi $\Lambda^k(V)$, jsou všechny $k \times k$-determinanty $\det V_J = 0$. Z toho plyne, že hodnost matice W je menší než k a vektory $v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně závislé.

2.10(d) Inkluze $\mathrm{LO}(v_1, \ldots, v_k) \subset \operatorname{Ker} \omega$ je zřejmá. Opačná inkluze plyne z (b) takto: $v \in \operatorname{Ker} V \implies v \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = 0$, tedy vektory $v, v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně závislé. Jelikož však $v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně nezávislé, je $v \in \mathrm{LO}(v_1, \ldots, v_k)$.

2.10(e) Implikace „$\Leftarrow$“ je triviální. Opačnou implikaci dokážeme takto: podle (d) existují dvě báze $v_1, \ldots, v_k$ a $v'_1, \ldots, v'_k$ prostoru $\operatorname{Ker} \omega = \operatorname{Ker} \omega'$ tak, že $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ a $\omega' = v'_1 \wedge \ldots \wedge v'_k$. Odtud plyne dle (a), že $\omega = \det A\, \omega'$, přičemž $\det A \neq 0$.

2.11(a) Stačí zvolit bázi $v_1, \ldots, v_k$ prostoru $\operatorname{Ker} \omega_2$ takovou, že $v_1, \ldots, v_j$ je báze $\operatorname{Ker} \omega_1$, a položit $\eta = v_{j+1} \wedge \ldots \wedge v_k$.

2.11(b) Označme $l = \dim(\operatorname{Ker} \omega_1 \cap \operatorname{Ker} \omega_2)$. Zvolme báze $v_1, \ldots, v_j$ v $\operatorname{Ker} \omega_1$ a $w_1, \ldots, w_k$ v $\operatorname{Ker} \omega_2$ tak, že $v_i = w_i$ pro $i = 1, \ldots, l$. Potom $\omega_1 \sim v_1 \wedge \ldots \wedge v_j$ a $\omega_2 \sim w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$. Odtud zřejmě $l > 0 \iff \omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Dále, je-li $l = 0$, je zřejmě $v_1, \ldots, v_j, w_1, \ldots, w_k$ báze $\operatorname{Ker}(\omega_1 \wedge \omega_2)$.

2.11(c) Buď $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_n \in \Lambda^{n-1}(V)$. Pro libovolný vektor $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ je $v \wedge \omega = (\sum_{i=1}^n v_i a_i) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Tedy množina $L := \{v \in V; \sum_{i=1}^n v_i a_i = 0\}$ je lineární prostor dimenze $n-1$ a existuje v něm báze $w_1, \ldots, w_{n-1}$. Položíme-li $\omega' = w_1 \wedge \ldots \wedge w_{n-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_i e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_n$, je podle 2.9 $[w_1, \ldots, w_{n-1}] = (a'_1, \ldots, a'_n)$ vektor kolmý na L, a tedy $\exists \alpha \neq 0$ takové, že $(a_1, \ldots, a_n) = \alpha(a'_1, \ldots, a'_n)$, a tedy i $\omega = \alpha \omega'$.

2.11(d) Položme například $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$. Pokud by tento 2-vektor byl rozložitelný, jeho jádro by podle 2.10(d) mělo dimenzi 2. Je-li vektor tvaru $v = \sum \lambda_i e_i$ v jádře ω, je $0 = v \wedge \omega = \lambda_1 e_{134} + \lambda_2 e_{234} + \lambda_3 e_{312} + \lambda_4 e_{412}$ a tedy $\lambda_i = 0$ pro všechna i, což znamená $\operatorname{Ker} \omega = 0$. Pro $n \geq 4$ a $k = 2, \ldots, n-2$ položme analogicky $\omega = (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) \wedge e_5 \wedge \ldots \wedge e_{k+2} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Potom obdobně dostaneme $\dim \operatorname{Ker} \omega = k - 2$, což u rozložitelného k-vektoru nastat nemůže.

2.11(e) Návod pro případ $n = 4$: Prvky kanonické báze e_i lze přečíslovat tak, že koeficient u $e_1 \wedge e_2$ je nenulový. Potom lze psát $\omega = (\alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4) \wedge (\beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4) + \omega' = v_1 \wedge v_2 + \omega'$, kde ω' už neobsahuje e_1 a e_2, tedy $\omega' = \gamma e_3 \wedge e_4$. Na základě tohoto postupu se tvrzení dokáže pro vyšší n indukcí.

2.11(f)

α) $-(ad + bc) e_{1234}$
β) $(ad - bc) e_{1234}$
γ) $(e_1 + e_4) \wedge e_2 \wedge (e_3 + e_4)$
δ) $(e_1 + e_2) \wedge (e_2 + e_3) \wedge (e_3 + e_4) \wedge (e_4 + e_5) \wedge (e_5 + e_6)$

2.11(g) Takový k-vektor existuje právě tehdy, když $2 \leq k \leq n/2$ a k je sudé. Potom lze psát např. $\omega = e_1 \wedge \ldots \wedge e_k + e_{k+1} \wedge \ldots \wedge e_{2k}$ a platí $\omega \wedge \omega = 2 e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2k}$. Každý k-vektor s požadovanou vlastností musí být nerozložitelný, ale ne každý nerozložitelný k-vektor (byť pro k splňující výše uvedené podmínky) má tuto vlastnost.

2.12(a) Buď $\lambda = e_{23}$. Jelikož $*\lambda \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$, existují reálná čísla a, b, c taková, že $*\lambda = ae_1 + be_2 + ce_3$. Z definice Hodgeova operátoru dostáváme $e_{23} \wedge \mu = \langle ae_1 + be_2 + ce_3, \mu\rangle e_{123}$ pro všechny vektory $\mu \in \mathbb{R}^3$. Dosazením $\mu = e_2, e_3$ dostáváme $b = c = 0$ a pro $\mu = e_1$ vztah $e_{231} = ae_{123}$, tedy $a = 1$. Pro další bázové vektory $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ postupujeme obdobně a dostáváme:

$$*e_{23} = e_1, \qquad *e_{13} = -e_2, \qquad *e_{12} = e_3,$$

pro obecný 2-vektor tedy:

$$*(c_1e_{23} + c_2e_{13} + c_3e_{12}) = c_1e_1 - c_2e_2 + c_3e_3.$$

2.12(b) Podle (a) a známých vztahů pro vektorový součin v $\mathbb{R}^3$ platí zřejmě rovnost $u \times v = *(u \wedge v)$ pro všechny $u, v \in \{e_1, e_2, e_3\}$ a díky linearitě pro všechny dvojice vektorů z $\mathbb{R}^3$.

V obecném případě je pro každý vektor $v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\langle [u_1, \ldots, u_{n-1}], v\rangle\sigma &= \det(v, u_1, \ldots, u_{n-1})\sigma = v \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = \\ &= (-1)^{n-1} u_1 \wedge \ldots \wedge u_{n-1} \wedge v = (-1)^{n-1}\langle *(u_1 \wedge \ldots \wedge u_{n-1}), v\rangle\sigma\end{aligned}$$

Diferenciální formy na $\mathbb{R}^n$

3.12(a)

$$\begin{aligned}
k = 0 &: \omega = a \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ d\omega = \frac{\partial a}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}\,dx_2,\\
k = 1 &: \omega = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2,\\
&\quad d\omega = \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_2 =\\
&\quad\quad = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2,\\
k = 2 &: \omega = a_{12}\,dx_1 \wedge dx_2,\\
&\quad d\omega = \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 0.
\end{aligned}$$

Samozřejmě vztah $\omega \in \mathcal{E}^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow d\omega = 0$ plyne též z toho, že $d\omega \in \mathcal{E}^3(\mathbb{R}^2) = 0$.

3.12(b)

$$\begin{aligned}
k = 0 &: \omega = a \in C^\infty(\mathbb{R}^3),\ d\omega = \frac{\partial a}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3}\,dx_3,\\
k = 1 &: \omega = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + a_3\,dx_3,\\
&\quad d\omega = \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\,dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\,dx_3 \wedge dx_2 +\\
&\quad\quad + \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_3 =\\
&\quad\quad = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 +\\
&\quad\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2,\\
k = 2 &: \omega = a_{23}\,dx_2 \wedge dx_3 + a_{31}\,dx_3 \wedge dx_1 + a_{12}\,dx_1 \wedge dx_2,\\
&\quad d\omega = \left(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\\
k = 3 &: \omega = a_{123}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\ d\omega = 0.
\end{aligned}$$

Poznámka: Jelikož jsme v definici diferenciálních forem připustili jen prvky tvaru $a_I\,dx_I$, kde I je uspořádaná vzestupně, není symbol $a_{31}\,dx_3 \wedge dx_1$ striktně vzato definován, znamená však $a_{13}\,dx_1 \wedge dx_3$, kde $a_{13} = -a_{31}$. Tato konvence byla zvolena z důvodů zřejmé symetrie zápisu.

3.12(c)

α) $d\omega = x\,dy \wedge dz - z\ dx \wedge dy$

β) $d\omega = ye^{xy}\,dx \wedge dy - z\ e^{yz}\,dy \wedge dz$

$\gamma)$ $d\omega = (2x - z)\, dx \wedge dy \wedge dz$
$\delta)$ $d\omega = -x(\cos(xy) + \sin(xz))\, dx \wedge dy \wedge dz$

3.12(d)

$$df \wedge df = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j = \sum_{i,j=1, i<j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\, dx_i \wedge dx_j + dx_j \wedge dx_i) = 0$$

3.12(e) Hledáme-li formu ω ve tvaru $\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} a_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$, vyjde z požadovaného vztahu nutná a postačující podmínka $a_i = x_i + c_i$, kde c_i jsou konstanty.

3.14

$\alpha)$ $\Phi^*(\omega) = (u + v - 2)\, du \wedge dv,$
$\beta)$ $\Phi^*(\omega) = (2u^2(v - u) - 8u^3 v)\, du \wedge dv,$
$\gamma)$ $\Phi^*(\omega) = (2v \cos 2u - 4 \sin uv + 2u \cos 2v)\, du \wedge dv,$
$\delta)$ $\Phi^*(\omega) = 0.$

3.15(a) $d(\omega \wedge d\omega) = d\omega \wedge d\omega + \omega \wedge d\, d\omega = 0$, neboť forma $d\omega$ je lichého stupně (viz2.11g).

3.15(b) Je-li $\eta = \omega \wedge \omega$, je $d\eta = d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega$, neboť ω je forma sudého stupně. Dále platí $d\omega \wedge \omega = \omega \wedge d\omega$ pro libovolnou formu ω a tedy $d(\frac{1}{2}\eta) = \omega \wedge d\omega$.

3.15(c) $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau \pm \omega \wedge d\tau = 0$

3.15(d) Je-li $d\alpha = \omega$ a $d\beta = \tau$, pak $d(\alpha \wedge d\beta) = d\alpha \wedge d\beta \pm \alpha \wedge d\, d\beta = \omega \wedge \tau$.

3.15(e) Uzavřenost se ověří snadno výpočtem. Kdyby forma ω byla exaktní, existovala by funkce $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Integrováním dostáváme z první rovnice $f(x, y) = -\operatorname{arctg}(\frac{x}{y}) + c_1(x)$ a z druhé $f(x, y) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + c_2(y)$, tedy funkce f musí být (až na aditivní konstantu) rovna $f(x, y) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$. Tuto funkci však nelze spojitě definovat v celém $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, tedy forma ω není exaktní (jakožto forma na $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$).

3.15(f) Definujme lineární operátory A_k a L z $\mathcal{E}^k(\Omega)$ do sebe vztahy

$$A_k(\omega_I dx_I) = [\int_0^1 t^{k-1}\omega_I(tx)dt]dx_I,$$

$$L(\omega_I dx_I) = [k\omega(x) + \sum_1^n x_i \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}]dx_I.$$

Definujme lineární operátor $\iota : \mathcal{E}^k(\Omega) \to \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ vztahem

$$\iota(\omega_I dx_I) = \omega_I \sum_{j=1}^{k}(-1)^j x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{j-1}} \wedge dx_{i_{j+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Ukažte postupně, že $\alpha = A_{k-1} \circ \iota(\omega)$, $A_k \circ L = \mathrm{Id}$, $A_k \circ d = d \circ A_{k-1}$ a $L = \iota \circ d + d \circ \iota$. Z toho již okamžitě plyne, že $d\omega = 0$ implikuje $\omega = d\alpha$.

Řetězce

4.8(a) K výpočtu $\int_c \omega$ je nejprve nutno znát $\varphi^*(\omega)$ – přenos formy ω pomocí zobrazení definujícího singulární krychli c. Zapisujeme-li symbolicky $\varphi^*(\, dx) = dx$ a podobně pro ostatní proměnné, dostáváme $dx = \cos\alpha\, d\alpha$, $dy = -\sin\beta\, d\beta$, $dz = -\sin\alpha\, d\alpha + \cos\beta\, d\beta$ a $\varphi^*(\omega) = (\sin\beta + \cos\alpha)\, d\alpha \wedge d\beta$. Pořadí proměnných α, β je zadáno, dostáváme tedy

$$\int_c \omega = \int_{\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle^2} (\sin\beta + \cos\alpha)\, d\alpha \wedge d\beta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\beta + \cos\alpha)\, d\alpha\, d\beta = \pi.$$

4.8(b) $\frac{-2}{15}$.
4.8(c) 1.

4.8(d) Jednotlivé stěny čtyřstěnu jsou parametrizovány např. takto:

$$c_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = s(1-t) \\ z = t \end{cases} \qquad c_2 : \begin{cases} x = s(1-t) \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad c_3 : \begin{cases} x = s(1-t) \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$c_4 : \begin{cases} x = 1 - s(1-t) \\ y = s(1-t) \\ z = t \end{cases}$$

(definiční obory pro s i t jsou vždy $\langle 0,1\rangle$). Při volbě pořadí proměnných s,t dostáváme orientaci první stěny směrem dovnitř, je totiž

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial s} = (0, 1-t, 0), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = (0, -s, 1) \text{ a } \frac{\partial\varphi_1}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = (1-t, 0, 0),$$

což je vektor směřující dovnitř čtyřstěnu. Je tedy nutno brát první stěnu se znaménkem $-$. Celkově dostáváme $c = -c_1 + c_2 - c_3 + c_4$ a

$$\int_c \omega = -\int_{c_1} \omega + \int_{c_4} \omega = \frac{1}{8}.$$

Stokesova věta

5.2(a) Ze vztahů $d\omega = -x\,dx \wedge dy$, $dx = ds + dt$, $dy = ds - dt$, $dz = t\,ds + s\,dt$, vypočítáme

$$\int_c d\omega = -\int_{\langle 0,1\rangle^2} (s+t)(\,ds + \,dt) \wedge (\,ds - \,dt) = 2\int_0^1 \int_0^1 (s+t)\,ds\,dt = 2.$$

(Zvolili jsme s jako první a t jako druhou proměnnou.) Pro výpočet druhé strany musíme určit okraj c. Tím bude řetězec $\partial c = -c_{s,0} + c_{s,1} + c_{t,0} - c_{t,1}$, kde jednodimenionzální krychle $c_{s,\alpha}, c_{t,\alpha}$ vzniknou (pro $\alpha = 0,1$) dosazením $s = \alpha$ resp. $t = \alpha$ (v souladu s volbou s jako první a t jako druhé proměnné). Je tedy:

$$c_{s,0} : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad c_{s,1} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad c_{t,0} : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} \quad c_{t,1} : \begin{cases} x = s + 1 \\ y = s - 1 \\ z = s \end{cases}$$

(definiční obory pro s i t jsou vždy $\langle 0,1\rangle$). Nyní

$$\int_{\partial c} \omega = -\int_{c_{s,0}} \omega + \int_{c_{s,1}} \omega + \int_{c_{t,0}} \omega - \int_{c_{t,1}} \omega =$$
$$= -\int_0^1 -t^2\,dt + \int_0^1 (1-t^2)\,dt + \int_0^1 s^2\,ds - \int_0^1 (s^2 - 1)\,ds = 2.$$

5.2(b) Ze vztahů $d\omega = y\,dx \wedge dy + w\,dz \wedge dw$, $dx = 2r\,dr - 2s\,ds$, $dy = 2r\,dr + 2s\,ds$, $dz = dr - ds$, $dw = dr + ds$, vypočítáme

$$\int_c d\omega = \int_{\langle 0,1\rangle^2} (r^2 + s^2)(2r\,dr - 2s\,ds) \wedge (2r\,dr + 2s\,ds) +$$
$$+ (r+s)(\,dr - \,ds) \wedge (\,dr + \,ds) = 2\int_0^1 \int_0^1 (4rs(r^2 + s^2) + r + s)\,dr\,ds = 4.$$

Okrajem c je řetězec $\partial c = -c_{r,0} + c_{r,1} + c_{s,0} - c_{s,1}$, kde

$$c_{r,0} : \begin{cases} x = -s^2 \\ y = s^2 \\ z = -s \\ w = s \end{cases} \quad c_{r,1} : \begin{cases} x = 1 - s^2 \\ y = 1 + s^2 \\ z = 1 - s \\ w = 1 + s \end{cases} \quad c_{s,0} : \begin{cases} x = r^2 \\ y = r^2 \\ z = r \\ w = r \end{cases} \quad c_{s,1} : \begin{cases} x = r^2 - 1 \\ y = r^2 + 1 \\ z = r - 1 \\ w = r + 1 \end{cases}$$

(definiční obory pro r i s jsou vždy $\langle 0,1\rangle$). Nyní

$$\int_{\partial c} \omega = -\int_0^1 (-2s^5 - s^2)\, ds \;+ \int_0^1 (2s(1-s^4) + (1-s^2))\, ds \;+$$
$$+ \int_0^1 (2r^5 + r^2)\, dr - \int_0^1 (2r(r^4-1) + (r^2-1))\, dr = 4.$$

5.2(c) Snadno vypočteme $d\omega = dz \wedge dw \wedge (dx - dy)$ a $\int_c d\omega = -\frac{1}{3}$ pro orientaci zvolenou pořadím proměnných r, s, t. Této orientaci odpovídá vyjádření okraje $\partial c = -c_{r,0} + c_{r,1} + c_{s,0} - c_{s,1} - c_{t,0} + c_{t,1}$. Obvyklým způsobem vyjádříme tyto řetězce a dostáváme $\int_{\partial c} \omega = -\frac{1}{3}$.

Přehled multilineární algebry

6.16

$$(v_1 \wedge v_2)(u^1, u^2) = v_1(u^1)v_2(u^2) - v_1(u^2)v_2(u^1),$$

$$\begin{aligned}(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)(u^1, u^2, u^3) =& v_1(u^1)v_2(u^2)v_3(u^3) - v_1(u^2)v_2(u^1)v_3(u^3) + \\ &+ v_1(u^2)v_2(u^3)v_3(u^1) - v_1(u^3)v_2(u^2)v_3(u^1) + \\ &+ v_1(u^3)v_2(u^1)v_3(u^2) - v_1(u^1)v_2(u^3)v_3(u^2)\end{aligned}$$

Variety a zobrazení

7.14(b) Přechodové zobrazení $\varphi = f_2 \circ f_1^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce $\varphi(x) = x^3$, což zřejmě není difeomorfismus (φ^{-1} nemá v bodě 0 konečnou derivaci). Ovšem zvolíme-li homeomorfismus $\psi : (\mathbb{R}, f_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, f_2)$ definovaný jako $\psi(x) = x^{\frac{1}{3}}$, je zobrazení $\varphi = f_2 \circ \psi \circ f_1^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ rovno identitě, což je difeomorfismus – dané diferencovatelné struktury jsou tedy ekvivalentní.

7.15(a) Atlas variety se bude skládat z jediné mapy $(\Phi(U), \Phi^{-1})$, jediné možné přechodové zobrazení je $\Phi^{-1} \circ \Phi = id_U$, tedy difeomorfismus. Pro jinou parametrizaci $\Psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^k$ otevřená, je přechodové zobrazení $\Psi^{-1} \circ \Phi : U \longrightarrow V$ hladké(!), mapy dané Φ a Ψ jsou tedy kompatibilní.

Proč je však $\Psi^{-1} \circ \Phi$ hladké? Na první pohled by stačilo říci, že Ψ^{-1} je hladké, neboť Ψ je hladké, regulární a prosté. Ovšem Ψ^{-1} je definováno na ploše M, a hladkost takovéhoto zobrazení ani není definována. Ψ je regulární, tedy podle definice je hodnost jeho Jacobiho matice všude na V maximální. Lze tedy v každém bodě $v \in V$ vybrat indexy $i_1, \dots, i_k$ takové, že

$$\frac{\partial \Psi_{i_1}, \dots, \Psi_{i_k}}{\partial v_1, \dots, v_k}(v) \neq 0.$$

Označme $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ projekci $x \in \mathbb{R}^n$ na souřadnice $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in \mathbb{R}^k$. Potom $\pi \circ \Psi$ má nenulový determinant Jakobiánu v bodě $v \in V$ a podle věty o inverzním zobrazení existuje $(\pi \circ \Psi)^{-1}$ na nějakém okolí bodu $\pi(\Psi(v))$. Pak ale $\Psi^{-1} \circ \Phi = (\pi \circ \Psi)^{-1} \circ (\pi \circ \Phi)$ je hladké zobrazení v bodě $\Phi^{-1}(\Psi(u))$.

7.15(b) Zobrazení $\Phi(x) = (x, \Psi(x)) : U \longrightarrow \mathbb{R}^{k+n}$ je zřejmě hladké, prosté a regulární, tedy podle 7.15(a) je $\Phi(U)$ k-dimenzionální podvarieta v $\mathbb{R}^{k+n}$.

7.15(c) Dle věty o implicitních funkcích, známé z diferenciálního počtu funkcí více proměnných, existuje pro každé $x \in M$ jeho otevřené okolí $U(x)$ v $\mathbb{R}^{n+k}$ a hladká funkce $g_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že $M \cap U(x)$ je grafem zobrazení g_x restringovaného na nějakou otevřenou množinu Ω_x v $\mathbb{R}^k$. Pokryjeme M (spočetně mnoha) množinami $U(x)$, ty pak spolu se zobrazeními g_x^{-1} tvoří atlas. Přechodové funkce jsou totiž tvaru $g_y^{-1} \circ g_x$, což jsou difeomorfismy.

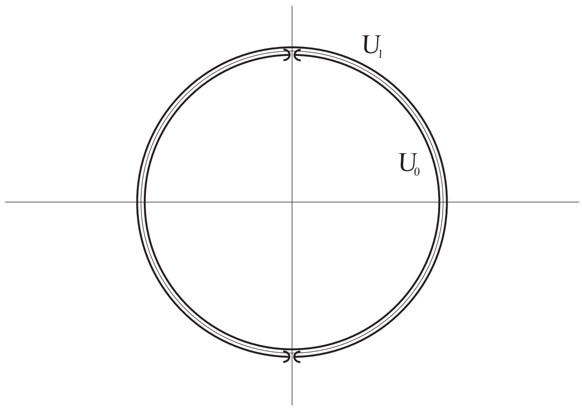
7.15(d) Nechť $(U_\alpha, f_\alpha)_\alpha$ je atlas na varietě M a $(V_\beta, g_\beta)_\beta$ atlas na varietě N. Pak se dá přímočaře ukázat, že $(U_\alpha \times V_\beta, h_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$, kde zobrazení $h_{\alpha\beta}$ jsou definována předpisem

$$h_{\alpha\beta}(x, y) = (f_\alpha(x), g_\beta(y)),$$

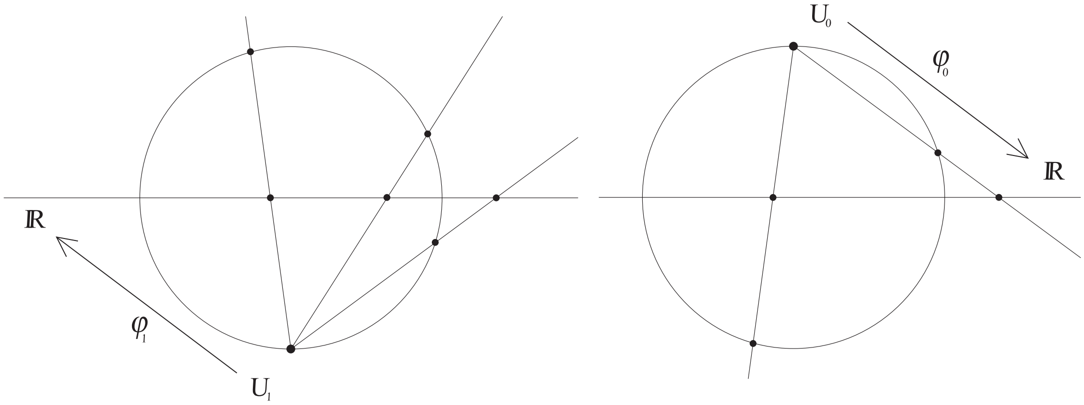
tvoří atlas na $M \times N$.

7.15(e) Použijeme jednoduché topologické konstrukce nehausdorffovského prostoru. Buď p libovolný bod, který nenáleží do $\mathbb{R}$ a položme $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$. Definujeme atlas na M sestávající ze dvou map takto:

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}, & f_1(x) &= x \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}, \\ U_2 &= \mathbb{R} - \{0\} \cup \{p\}, & f_2(x) &= x \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R} - \{0\}, \\ & & f_2(p) &= 0. \end{aligned}$$



OBRÁZEK 24. Mapy pro kružnici S^1



OBRÁZEK 25. Stereografická projekce kružnice S^1 na přímku $\mathbb{R}^1$

Potom jediné přechodové zobrazení je identita na množině $\mathbb{R} - \{0\}$, což je difeomorfismus, tedy prostor M s touto strukturou splňuje axiomy variety, ale není Hausdorffův (body 0 a p nelze oddělit disjunktními okolími).

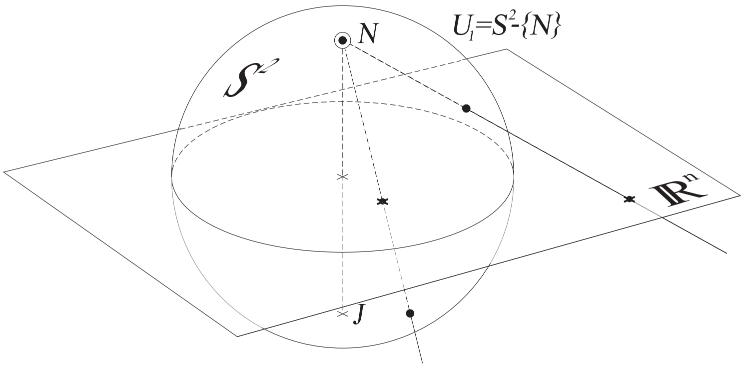
7.16(a) Uvažujme zobrazení $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Potom $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; F(x) = 1\}$. Podle 7.15(c) stačí ukázet, že pro všechny body $x \in S^{n-1}$ má zobrazení F maximální hodnost, tedy 1. Dostáváme $\operatorname{grad} F = (2x_1, \dots, 2x_n) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Pro body sféry je tedy $\operatorname{grad} F \neq 0$ a sféra S^{n-1} je tedy podvarieta dimenze $n-1$ v $\mathbb{R}^n$.

Pro kružnici $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ lze volit mapy například takto: buď $g(t) = (\cos t, \sin t)$ a $g_0 = g|(0, 2\pi), g_1 = g|(-\pi, \pi)$. Potom $\{(U_0 = S^1 - \{1\}, g_0^{-1}), (U_1 = S^1 - \{-1\}, g_1^{-1})\}$ tvoří atlas (viz obr. 24), neboť přechodová funkce $\psi = g_2^{-1} \circ g_1$ je zobrazení

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x \qquad\quad \text{pro } x \in (0, \pi) \\ \psi(x) &= x - 2\pi \text{ pro } x \in (\pi, 2\pi), \end{aligned}$$

což je difeomorfismus na každé komponentě svého definičního oboru.

Pro sféru S^k lze užít i tzv. stereografické projekce. Pro „severní pól“ $S = (0, \dots, 0, 1)$ i „jižní pól“ $J = (0, \dots, 0, -1)$ sféry sestrojíme zobrazení φ_S, φ_J, která každému bodu sféry (vyjma pólu samotného) přiřadí průsečík přímky procházející pólem a daným bodem s nadrovinou $\mathbb{R}^k$, proloženou „rovníkem“ sféry (viz obr. 25, 26).



Obrázek 26. Stereografická projekce sféry S^2 na rovinu $\mathbb{R}^2$

Např. projekci φ_S lze vyjádřit jako

$$(x_1,\ldots,x_{k+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{k+1}},\ldots,\frac{x_k}{1-x_{k+1}}\right).$$

Získáváme tak atlas složený ze dvou map – přechodové funkce jsou difeomorfismy, neboť mapy jsou lineární lomená zobrazení v každé složce, definovaná na celé sféře bez pólu.

7.16(b) Zvolme parametrizaci toru takto následujícím způsobem: buď

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos t)\cos s \\ y &= r\sin t \\ z &= (R + r\cos t)\sin s \end{aligned}$$

parametrické vyjádření funkce f na $\mathbb{R}^2$ a položme $f_1 :=$ restrikce f na množinu $Q_1 = (0,2\pi)\times(0,2\pi)$. Rozmyslete si, že zobrazení f_1 je na Q_1 prosté a že jeho obrazem je torus bez dvou kružnic, které se protínají v jednom bodě, $(f_1(Q_1), f_1^{-1})$ je tedy mapa. Obdobným způsobem definujeme $Q_2 := (\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3})\times(\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3})$ $Q_3 := (\frac{4\pi}{3},\frac{10\pi}{3})\times(\frac{4\pi}{3},\frac{10\pi}{3})$ a $f_2 = f|_{Q_2}, f_3 = f|_{Q_3}$. Množiny $f_1(Q_1)$, $f_2(Q_2)$, $f_3(Q_3)$ pokrývají torus (méně map k jeho pokrytí nestačí!) a nyní již snadno nahlédneme, že mapy $(f_1(Q_1), f_1^{-1})$, $(f_2(Q_2), f_2^{-1})$, $(f_3(Q_3), f_3^{-1})$ tvoří atlas na T^2, neboť přechodové funkce jsou vyjádřeny takto: např.

$$\begin{aligned} \psi_{12} = f_2^{-1}\circ f_1 : Q_1 - ((0,2\pi)\times\{\frac{2\pi}{3}\}\cup\{\frac{2\pi}{3}\}\times(0,2\pi)) \to \\ \to Q_2 - ((\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3})\times\{2\pi\}\cup\{2\pi\}\times(\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3})) \end{aligned}$$

je definovaná na komponentách svého definičního oboru tak, jak je naznačeno na obrázku 27

Na každé komponentě se jedná o prosté lineární zobrazení, které je vždy difeomorfismus, tedy přechodová funkce je rovněž difeomorfismus.

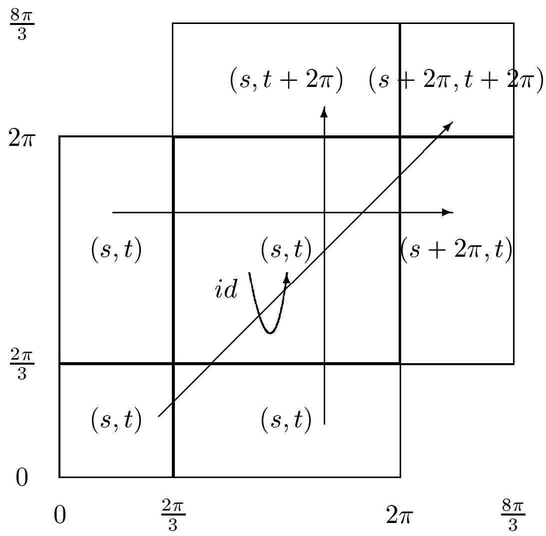
7.16(d) Symbol $[x]$ bude označovat prvek $\mathbb{RP}^n$ jakožto třídu ekvivalence $\sim$ příslušnou prvku x. Tedy $[x] = [y]$ právě tehdy když $\exists\lambda \neq 0; y = \lambda x$. Definujme mapy:

$$V_i := \{[x_1,\ldots,x_{n+1}]; x_i \neq 0\}, i = 1,\ldots,n+1,$$

$$\begin{gathered} f_i : V_i \to \mathbb{R}^n \\ [x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}] \mapsto (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+1}) \end{gathered}$$

Zobrazení f_i je tedy definováno pomocí toho reprezentanta třídy $[x]$, pro nějž je $x_i = 1$. Zřejmě je $\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i$ a f_i je prosté zobrazení V_i na $\mathbb{R}^n$. Přechodové funkce jsou pak určeny takto: pro $i < j$, $[x] \in V_i \cap V_j$ pišme

$$[x] = [x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}] = [\frac{x_1}{x_j},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_j},\frac{1}{x_j},\frac{x_{i+1}}{x_j},\ldots,1,\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_j}].$$



Obrázek 27. Přechodové funkce pro torus

Je tedy

$$f_i([x]) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$$
$$f_j([x]) = (\frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_j}).$$

Je zřejmě

$$f_i(V_i \cap V_j) = \mathbb{R}^n - \{u_{j-1} = 0\},$$
$$f_j(V_i \cap V_j) = \mathbb{R}^n - \{u_i = 0\}.$$

Přechodová funkce $\psi_{ji} = f_j \circ f_i^{-1}$ je tedy definována jako

$$\psi_{ji}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, \ldots, u_n) = (\frac{u_1}{u_{j-1}}, \ldots, \frac{u_{i-1}}{u_{j-1}}, \frac{1}{u_{j-1}}, \frac{u_i}{u_{j-1}}, \ldots, \frac{u_n}{u_{j-1}}).$$

Pro názornost uvažujme případ $n = 2$. Máme zde například pro $i = 1, j = 2$:

$$[x] = [1, y, z] = [\frac{1}{y}, 1, \frac{z}{y}],$$

$$f_i([x]) = (y, z)$$
$$f_j([x]) = (\frac{1}{y}, \frac{z}{y})$$

a tedy

$$\psi_{21}(u_1, u_2) = (\frac{1}{u_1}, \frac{u_2}{u_1}).$$

Zobrazení ψ_{21} je definováno na $\mathbb{R}^2 - \{u_1 = 0\}$, na této množině je prosté a každá z jeho složek je hladká, tedy ψ_{21} je hladké a ψ_{21}^{-1} zřejmě také, je to tedy difeomorfismus. Tuto úvahu lze zopakovat pro ostatní kombinace $i < j$ a analogické tvrzení lze dokázat stejným způsobem v případě $\mathbb{RP}^n$ pro obecné $n \in \mathbb{N}$.

7.16(e) Popišme si prvky $\tau \in \mathrm{Gr}_{2,3}$ jako $\tau = \mathrm{LO}(v_1, v_2)$, kde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé. Definujme pak mapy

$$V_{ij} := \{\tau \in \mathrm{Gr}_{2,3}; x \in \tau \implies x_i \neq 0 \vee x_j \neq 0\}$$

Definujme zobrazení $f_{ij} : V_{ij} \to \mathbb{R}^2$ např. pro $i = 2, j = 3$ takto: $V_{23} = \{\tau \in \mathrm{Gr}_{2,3}; (1,0,0) \notin \tau\}$ a tedy

$$\forall \tau \in \mathrm{Gr}_{2,3} \quad \exists! x_2; (x_2, 1, 0) \in \tau$$
$$\exists! x_3; (x_3, 0, 1) \in \tau.$$

Klademe tedy

$$f_{23} : V_{23} \to \mathbb{R}^2$$
$$\tau \mapsto (x_2, x_3)$$

Obdobným způsobem definujeme mapy pro indexy 12 a 13. Přechodové funkce pak jsou definovány takto: buď např. $\alpha = 12, \beta = 23$

$$V_\alpha \cap V_\beta = \{\tau; (1,0,0) \notin \tau \& (0,0,1) \notin \tau\}.$$

Pak lze psát

$$\tau = \mathrm{LO}((1,0,z_1),(0,1,z_2)) = \mathrm{LO}((x_3,0,1),(x_2,1,0)),$$

kde navíc $z_1 \neq 0$ a $x_3 \neq 0$. Protože se jedná o dva různé zápisy téže nadroviny v $\mathbb{R}^3$, dostáváme snadným výpočtem

$$x_3 = \frac{1}{z_1}$$
$$x_2 = -\frac{z_2}{z_1}$$

Potom

$$f_{12}(\tau) = (z_1, z_2)$$
$$f_{23}(\tau) = (x_2, x_3) = (-\frac{z_2}{z_1}, \frac{1}{z_1})$$

Je tedy zřejmě

$$\psi_{\beta\alpha}(z_1,z_2) = f_{23}(f_{12}^{-1}(z_1,z_2)) = (-\frac{z_2}{z_1}, \frac{1}{z_1}),$$

což je zřejmě difeomorfismus množiny $\mathbb{R}^2 - \{u_1 = 0\}$ na $\mathbb{R}^2 - \{u_2 = 0\}$.

Pro obecnou varietu $\mathrm{Gr}_{k,n}$ zavedeme mapy obdobným způsobem: položme pro každou k-prvkovou podmnožinu K množiny $\{1,\dots,n\}$

$$V_K := \{\tau \in \mathrm{Gr}_{k,n}; x \in \tau \implies \exists i \in K, x_i \neq 0\}$$

Buď nyní $K = \{i_1 < \dots < i_k\}$ zvolena pevně a uvažujme $l \in \{1,\dots,k\}$. Rozmyslete si, že pro každé $\tau \in V_K$ existuje právě jedna $(n-k)$-tice čísel

$$X^l = (x^l_{j_1},\dots,x^l_{j_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n-k}$$

tak, že

$$(x^l_{j_1},\dots,0,\dots,1,\dots,0,\dots,x^l_{j_{n-k}}) \in \tau$$

(na k místech indexovaných množinou K jsou nuly (s výjimkou i_l-tého místa, kde je jednička), zbylých $n-k$ míst je obsazeno čísly $x^l_{j_1},\dots,x^l_{j_{n-k}}$). Tuto úvahu učiníme pro všechna $l \in \{1,\dots,k\}$ a nakonec klademe

$$f_K(\tau) := (X^1,\dots,X^k) \in \mathbb{R}^{(n-k)k}.$$

7.16(f)

$GL_n\mathbb{R}$: jelikož funkce $\det : M_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, je množina $\{A \in M_n\mathbb{R}; \det A = 0\}$ uzavřená, $GL_n\mathbb{R}$ je tedy otevřená v $\mathbb{R}^{n^2}$ a podle 7.15(a) je to tedy varieta dimenze n^2.

$SL_n\mathbb{R}$: stačí dokázat, že zobrazení $\det : M_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je regulární na $SL_n\mathbb{R} = \det^{-1}(1)$, potom podle 7.15(c) je $SL_n\mathbb{R}$ varieta dimenze $n^2 - 1$.

Determinant je (nelineární) funkce n^2 proměnných a jeho diferenciál je lineární zobrazení $D\det : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$, jehož ij-tá složka má tvar

$$(D\det)_{ij} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \det(A + tX_{ij}),$$

kde X_{ij} je matice s jedničkou na místě ij a s nulami jinde. Rozvineme-li determinant uvnitř tohoto výrazu podle j-tého sloupce, dostaneme

$$(D\det)_{ij} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\det(A) + t\det\tilde{A}_{ij}) = \det\tilde{A}_{ij},$$

kde $\tilde{A}_{ij}$ je submatice vzniklá vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce z matice A. Jelikož však $\det A = 1$, existuje index ij takový, že submatice $\tilde{A}_{ij}$ má nenulový determinant, tedy alespoň jedna složka zobrazení $D\det$ je nenulová, tedy toto zobrazení má maximální hodnost 1.

$O_n\mathbb{R}$: Ztotožněme prostor všech symetrických matic $n \times n$

$$Sym_n\mathbb{R} = \{A \in M_n\mathbb{R}; A^t = A\}$$

s prostorem $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$. Uvažujme zobrazení

$$F : M_n\mathbb{R} \longrightarrow Sym_n\mathbb{R}$$
$$A \mapsto A^tA.$$

Potom $O_n\mathbb{R} = F^{-1}(E)$. Stačí dokázat, že zobrazení F je regulární na $O_n\mathbb{R}$, potom podle 7.15(c) je $O_n\mathbb{R}$ varieta dimenze $n^2 - \binom{n+1}{2} = \binom{n}{2}$.

Diferenciál zobrazení F je lineární zobrazení

$$DF : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$$
$$X \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(A + tX).$$

Stačí a je třeba dokázat, že pro $A \in O_n\mathbb{R}$ je DF zobrazení na $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}} \simeq Sym_n\mathbb{R}$. Vyjádřeme tedy

$$DF(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(A + tX) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A + tX)^t(A + tX) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A^tA\ + A^ttX + tX^tA\ + t^2X^tX) = A^tX + X^tA.$$

Je tedy třeba dokázat, že pro každou matici $A \in O_n\mathbb{R}$ a každou matici $B \in Sym_n\mathbb{R}$ existuje matice X taková, že

$$B = A^tX + X^tA.$$

Jelikož je matice B symetrická, lze psát $B = C+C^t$, kde koeficienty matice C jsou dány pomocí koeficientů matice B takto:

$$c_{ij} = b_{ij}, \qquad i < j$$
$$c_{ij} = \frac{1}{2}b_{ij}, \quad i = j$$
$$c_{ij} = 0, \qquad i > j.$$

Potom $A^tX = C$ právě tehdy když $X^tA\ = C^t$, matice X je tedy dána rovnicí $A^tX = C$. Jelikož A je regulární matice, má tato soustava právě jedno řešení $X = (A^t)^{-1}C$. Zobrazení DF je tedy surjektivní, tzn. má maximální hodnost.

$SO_n\mathbb{R}$: Pro každou matici $A \in O_n\mathbb{R}$ platí $\det A = \pm 1$. Ovšem determinant je spojitá funkce, Lieova grupa $O_n\mathbb{R}$ má tedy dvě komponenty dané hodnotami ± 1 tohoto determinantu. Každá z komponent je však sama o sobě varietou stejné dimenze (je to otevřená podmnožina variety). $SO_n\mathbb{R} = \{A \in O_n\mathbb{R}; \det A\ = 1\}$ je tedy varieta a Lieova podgrupa, její doplněk $\{A \in O_n\mathbb{R}; \det A\ = -1\}$ je však pouze podvarieta, ale nikoli podgrupa – není uzavřený na násobení.

Dokázat, že všechny uvedené příklady jsou zároveň Lieovými grupami, je snadné. Stačí totiž dokázat hladkost grupových operací násobení a inverzní matice v $GL_n\mathbb{R}$, jejich hladkost pro podgrupy je pak rovněž zaručena. Hladkost násobení je zřejmá, hladkost inverze lze odvodit z Cramerova pravidla (prvky inverzní matice jsou vyjádřeny jako podíly subdeterminantů a determinantu celé matice).

Tečný a kotečný prostor

8.27 Buď (U, φ) mapa na M, $m \in M$ a $h_m : T_mM \to \mathbb{R}^n$ zobrazení, které tečnému vektoru $\frac{\partial}{\partial x_i}$ přiřadí vektor e_i kanonické báze $\mathbb{R}^n$. Lze ztotožnit

$$\cup_{m\in U}T_mM \simeq U \times \mathbb{R}^n.$$

Definujme mapu $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pomocí $\tilde{\varphi} = (\varphi, h_m)$, pro nějaký bod $m \in U$. Potom přechodová funkce pro U, U' takové, že $m \in U \cap U'$ je

$$\tilde{\varphi}' \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\varphi' \circ \varphi^{-1}, h'_m \circ h_m^{-1}).$$

Její první složka je přechodová funkce pro M, tedy difeomorfismus, druhá složka je „změna souřadnic“ $x'_i = x'_i(x_1, \ldots, x_n)$. Platí ovšem

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_k},$$

tedy i toto zobrazení je difeomorfimus.

TM je tedy varieta dimenze $2n$.

8.28 Je-li X hladké vektorové pole, je podle definice

$$[X(g)](m) = [X(m)](g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(m) \frac{\partial g}{\partial x_i}(m)$$

pro každou mapu (U, φ) na M, přičemž funkce α_i jsou na U hladké. Funkce $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ jsou ovšem také hladké (pro g hladkou) a tedy i $X(g)$ je hladká.

Na druhou stranu, v dané mapě (U, φ) definujeme funkce $g_k(m) := x_k$, $k = 1, \dots, n$, potom

$$X(g_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(m) \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \alpha_k,$$

tedy funkce α_k jsou hladké na U.

Integrace forem

10.12(a) Podle poznámky 10.9 počítáme integrál přes řetězec, který parametrizuje sféru S^2 s výjimkou podmnožiny dimenze 1. Za takový řetězec můžeme volit sférické souřadnice:

$$\Phi : \quad \begin{cases} x = \cos\varphi \cos\theta \\ y = \cos\varphi \sin\theta \\ z = \sin\varphi \end{cases}$$

$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \theta \in (0, 2\pi)$. Potom $\Phi_\varphi = (-\sin\varphi\cos\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, $\Phi_\theta = (-\cos\varphi\sin\theta, \cos\varphi\cos\theta, 0)$. Tedy při označení $dx = \Phi^* \, dx$ atd. dostáváme přenos

$$\begin{aligned} dx &= -\sin\varphi\cos\theta \, d\varphi - \cos\varphi \sin\theta \, d\theta \\ dy &= -\sin\varphi \sin\theta \, d\varphi + \cos\varphi\cos\theta \, d\theta \\ dz &= \cos\varphi \, d\varphi \\ \Phi^*\omega &= -sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \wedge \, d\theta \end{aligned}$$

Zvolené pořadí proměnných φ, θ určuje směr normály: zvolme např. bod $(0, \pi)$ v parametrické množině, v tomto bodě je $\Phi_\varphi(0, \pi) = (0, 0, 1)$ a $\Phi_\theta(0, \pi) = (0, -1, 0)$. Tedy

$$\Phi_\varphi(0, \pi) \times \Phi_\theta(0, \pi) = (1, 0, 0),$$

což je normála směřující v bodě $\Phi(0, \pi) = (-1, 0, 0)$ dovnitř. Pro zvolené pořadí proměnných je tedy nutno brát výsledný integrál s opačným znaménkem. Je tedy

$$\int_{S^2} dx \wedge \, dy = -\int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)} \Phi^*\omega = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi \, d\theta = 0.$$

10.12(b) Zde můžeme volit modifikované sférické souřadnice:

$$\Phi : \quad \begin{cases} x = a\cos\varphi \cos\theta \\ y = b\cos\varphi \sin\theta \\ z = c\sin\varphi \end{cases}$$

$\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}), \theta \in (o, 2\pi)$. Výsledek: πab.

10.12(c) Zde můžeme volit parametrizaci:

$$\Phi : \quad \begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = t\cos u \\ z = t\sin u \end{cases}$$

$t \in (0, 1), u \in (0, 2\pi)$. Výsledek: $-\frac{\pi}{4}$.

10.12(d) Zde můžeme volit parametrizaci:

$$\Phi : \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = \frac{1}{2}r^2 \end{cases}$$

$r \in (0, 1), \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Výsledek: $\frac{1}{3}$.

10.13(a) Podle Stokesovy věty je $\int_{S^2} \omega = \int_{B^3} d\omega$, kde B^3 značí jednotkovou kouli v R^3, jejíž okrajem je právě S^2. Pro $\omega = dx \wedge dy$ je však $d\omega = 0$.

10.13(b) Podle Stokesovy věty je $\int_\Omega \omega = \int_{\partial\Omega} \tau$ pro některou formu τ, pro niž $d\tau = \omega$. Píšeme-li $\tau = f(y)\,dx + g(x)\,dy$, dostáváme ze vztahu $d\tau = \omega$ soustavu diferenciálních rovnic, kterou řeší například $f(y) = -\frac{1}{3}y^3$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Okraj Ω lze zapsat jako řetězec $\partial\Omega = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - c$, kde

$$\begin{aligned} d_1 &= 4(1-t, t) \\ d_2 &= 4(-t, 1-t) \\ d_3 &= 4(t-1, -t) \\ d_4 &= 4(t, t-1) \\ c &= e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

přičemž vždy $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Potom

$$\int_{\partial\Omega} \tau = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

10.13(c) Uvědomte si, že kraj válcové plochy je řetězec $\partial M = c_a - c_b$, kde c_x je kružnice

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = x \end{cases}$$

$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, x = a, b$. (Viz pravidlo levé ruky 8.26.) Potom $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \pi(b-a)$.

10.13(d) Kraj M je řetězec $c_1 + c_2 - c_3$, kde jednotlivé sčítance dostaneme postupně dosazením $\varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = 0$. Potom $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = -\frac{1}{4}$.

10.13(e) Buď

$$\varphi(t) := (\cos t, \sin t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

křivka parametrizující jednotkovou kružnici. Potom

$$\int_\varphi \omega = \int_\varphi \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \int_\varphi \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t\,dt = 2\pi.$$

Pokud by však existovala f taková, že $df = \omega$, měli bychom dle Stokesovy věty

$$\int_\varphi \omega = \int_\varphi df = \int_{\partial\varphi} f = f(1) - f(1) = 0,$$

což je spor.

10.13(f) Můžeme psát např.

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x_i}{r^n}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \in \mathcal{E}^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{(0, \ldots, 0)\}),$$

kde

$$r = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Užijeme-li vztahu

$$\frac{\partial r^n}{\partial x_i} = n r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x_i} = x_i n r^{n-2},$$

dostáváme

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{r^n - x_i \frac{\partial r^n}{\partial x_i}}{r^{2n}}\,dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{r^n - x_i^2 n r^{n-2}}{r^{2n}} (-1)^{i-1}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0. \end{aligned}$$

Pro $n = 3$ je speciálně

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,dy\,dz \; - y\,dx\,dz \; + z \; dx\,dy).$$

Kdyby forma ω byla exaktní, existovala by forma $\tau \in \mathcal{E}^{n-2}(\mathbb{R}^n - \{(0,\ldots,0\})$ taková, že $d\tau = \omega$. Označíme-li S_1 a S_2 horní a dolní polosféru jednotkové sféry S^2, je podle Stokesovy věty

$$\int_{S^2} \omega = \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega = \int_{\partial S_1} \tau + \int_{\partial S_2} \tau.$$

Zvolíme-li orientaci polosfér S_1 a S_2 v obou případech ven, je jejich společná hranice (rovník) ∂S_1 resp. ∂S_2 orientována opačně, symbolicky $\partial S_1 = -\partial S_2$. Je tedy

$$\int_{\partial S_1} \tau + \int_{\partial S_2} \tau = 0.$$

Ukážeme však, že

$$\int_{S^2} \omega \neq 0.$$

Parametrizujme sféru S^2 sférickými souřadnicemi takto: Zobrazení

$$\Phi : \Omega \longrightarrow S^2$$

definované na množině

$$\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$$

jako

$$\begin{aligned} x &= \cos u \ \cos v \\ y &= \cos u \ \sin v \\ z &= \sin u \end{aligned}$$

je prosté regulární zobrazení Ω na S^2 „bez jednoho poledníku a pólů“. $d\Phi$ lze potom vyjádřit jako

$$\begin{aligned} dx &= -\sin u \ \cos v \ du \ -\cos u \ \sin v \ dv \\ dy &= -\sin u \ \sin v \ du \ +\cos u \ \cos v \ dv \\ dz &= \cos u \ du \ . \end{aligned}$$

Přenos diferenciální formy ω na Ω pomocí zobrazení Φ je pak

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega &= (\cos u \ \cos v \ (-\cos^2 u \ \cos v) + \cos u \ \sin v \ (-\cos^2 u \ \sin v) + \\ &+ \sin u \ (-\sin u \ \cos u \ \cos^2 v \ -\sin u \ \cos u \ \sin^2 v))\, du \ \wedge \ dv \ = \\ &= -(\cos^2 u \ + \sin^2 u) \cos u \ du \ \wedge \ dv \ = -\cos u \ du \ \wedge \ dv, \end{aligned}$$

což umožňuje spočítat integrál

$$\int_{S^2} \omega = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Phi^*\omega = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} -\cos u \ dv \right) du \ = -2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \ du \ = -4\pi.$$

Integrace funkcí na Riemannových varietách

11.8 Je zřejmě $V \cdot V^T = G$ a z věty o násobení determinantů plyne $(\det V)^2 = \det G$.

11.9(a) Pro kružnici volíme parametrizaci $\gamma : x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, potom $\|\gamma'\| = 1$ a tedy $dS = d\varphi$ a

$$\int_{S^1} dS = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi.$$

Pro sféru volíme stejnou parametrizaci jako v příkladu 10.12(a) Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_\varphi, \Phi_\varphi \rangle = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \\ F &= \langle \Phi_\varphi, \Phi_\theta \rangle = 0 \\ G &= \langle \Phi_\theta, \Phi_\theta \rangle = \cos^2\varphi \end{aligned}$$

Odtud $dS = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\theta = \cos\varphi\, d\varphi\, d\theta$ a

$$\int_{S^2} dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi\, d\theta = 4\pi.$$

11.9(b) Při zadané parametrizaci Φ je $\Phi_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ a $\Phi_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 1)$. Tedy

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_r, \Phi_r \rangle = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \\ F &= \langle \Phi_r, \Phi_\varphi \rangle = -r\cos\varphi\sin\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi = 0 \\ G &= \langle \Phi_\varphi, \Phi_\varphi \rangle = r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + 1 = r^2 + 1 \end{aligned}$$

Odtud $dS = \sqrt{EG - F^2}\, dr\, d\varphi = \sqrt{r^2+1}\, dr\, d\varphi$ a

$$\int_M f\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2+1)\, dr\, d\varphi = 2\pi \left(\frac{R^3}{3} + R \right).$$

11.9(c) Volíme např. parametrizaci $x = t\cos\varphi$, $y = t\sin\varphi$, $z = t$, $t \in (0, T)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Potom $E = 2$, $F = 0$, $G = t^2$ a

$$\int_M f\, dS = \frac{\sqrt{2}\pi T^6}{3}.$$

11.9(d) Volíme např. parametrizaci $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = t$, $t \in (a, b)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Potom $E = r^2$, $F = 0$, $G = 1$ a

$$\int_M f\, dS = \pi r(b^2 - a^2).$$

Rejstřík

Literatura

[1] M. Atiyah, New invariants of 3 and 4 dimensional manifolds, in: The Mathematical Heritage of Hermann Weyl, Proceedings Symposia Pure Math 48(1988), 285-299.

[2] R. Bott, L. W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1980.

[3] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, Heat Kernels and Dirac Operators, Springer-Verlag, 1992.

[4] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.

[5] L. Conlon, Differentiable Manifolds, Second Edition, Birkhäuser 2001

[6] M. do Carmo, Differential geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.

[7] R. W. R. Darling, Differential Forms and Connections, Cambridge University Press 1994.

[8] H. Flanders, Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Dover, New York, 1989.

[9] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1978.

[10] K. Jänich, Vektoranalysis, Springer-Verlag, 1992 (německé vydání), Vector Analysis, Springer-Verlag, 2000 (anglické vydání).

[11] I. Kolář, P. W. Michor, J. Slovák, Natural operations in differential geometry, Springer-Verlag, 1993.

[12] J. Kopáček, Příklady z matematiky pro fyziky III, skriptum, UK 1988.

[13] O. Kowalski, Základy matematické analýzy na varietách, skriptum, UK 1973 (1. vydání), 1975 (2. vydání).

[14] O. Kowalski, Elemente der Analysis auf Mannigfaltigkeiten, Teubner-Texte zur Mathematik, Band 39, Leipzig, 1981.

[15] O. Kowalski, Úvod do Riemannovy geometrie, skriptum, UK 1995 (1. vydání), UK 2001 (2. vydání).

[16] J. Lukeš, J. Malý, Míra a integrál, skriptum, UK 1993.

[17] J. Malý, Integrál pro pokročilé, Připravené skriptum, MFF UK.

[18] S. Rosenberg, The Laplacian on a Riemannian Manifold, LMSST, 1997.

[19] R. J. Stern, Instantons and the Topology of 4-Manifolds, The Mathematical Intelligencer, Vol. 5, No. 3, 1983, 39–44.

[20] J. A. Thorpe, Elementary topics in Differential Geometry, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1979.

[21] F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer-Verlag, 1983.