PROBLÉMY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

Jaroslav Lukeš a kolektiv

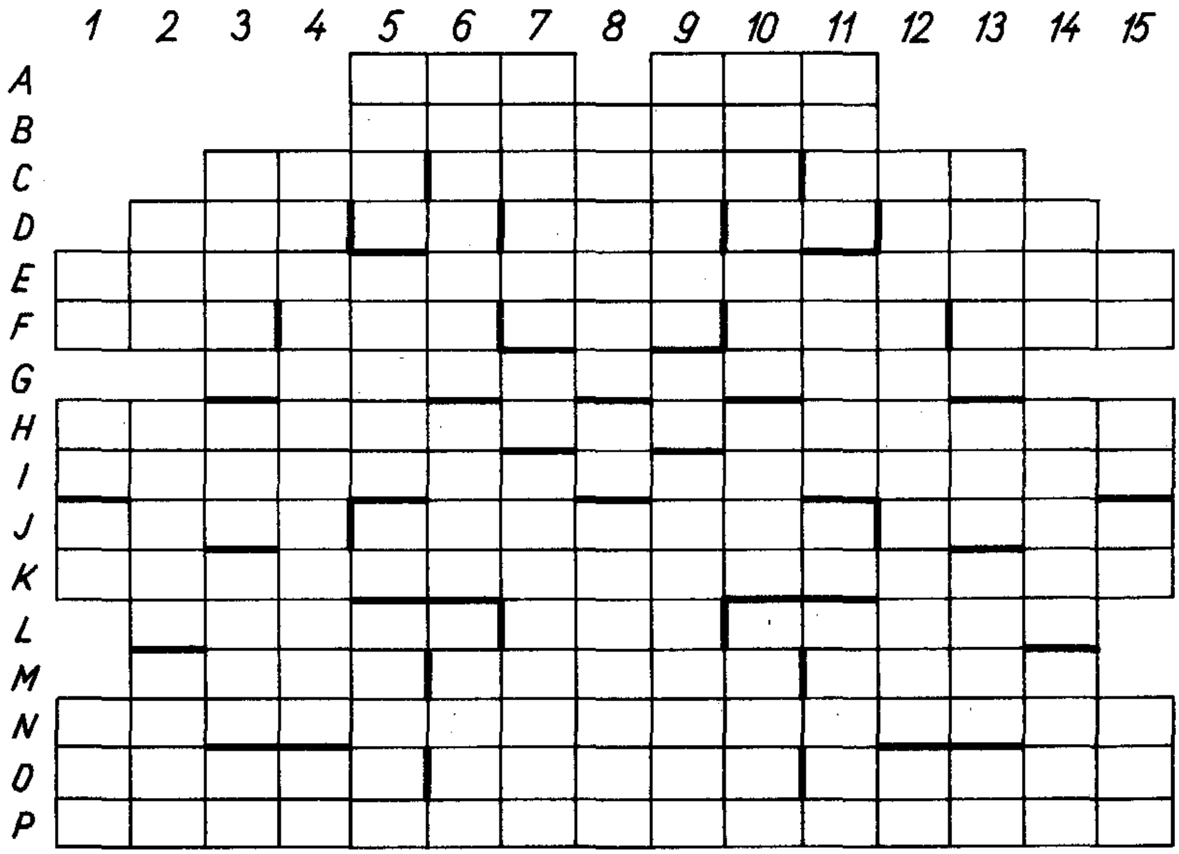
F. Bubník, J. Čížek, S. Fučík, J. Hnilica, O. John,
J. Milota, I. Netuka, B. Novák, J. Pachl, D. Preiss, V. Šťastnová,
L. Vašák, J. Veselý

Praha 1982

Katedra matematické analýzy
matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy

Vedoucí katedry: doc. RNDr. Břetislav Novák, CSc.

MOTTO:



L e g e n d a

<u>Vodorovně:</u> A. Pražská čtvrť; španělské ženské jméno. B. Bývalý hannoverský dvorní rada - filosof a matematik. C. Pohled (franc.); značka žárovek; spodní část nádoby. D. Meta; dřívější mezinárodní označení našich automobilů; zkratka telefonu; bůh slunce; závod na výrobu elektrospotřebičů.
E. M o t t o. F. Poblíž Ludolfova čísla; čaj (angl.); australská letecká společnost; tvrdá stupnice; vysoká škola v Brně. G. Proklatě rychlá žena.
H. M o t t o. I. Velmistr opět prohrál. J. Arabské mužské jméno; manželka má narozeniny (povzdech manžela); zařízení koupelny. K. M o t t o. L. sečí stroj; křovinatá step; kardinální číslo (lidově). M. Lesní zvíře; zpěvy; jádro (něm.). N. Nehoda pekařky Kateřiny. O. Povzdech při potopě světa; známý autor axiomatiky přirozených čísel; jméno sluhy Dona Quijota. P. M o t t o.

<u>Svisle:</u> 1. Pobídka; zkratka obchodu ovocem a zeleninou; část vozu; mys.
2. Kozel (sloven.); anglické mužské jméno; druh dortu. 3. Zná lépe; jugoslávská řeka; vyorávač brambor; česky ano (a anglicky ne). 4. Odlét i s oblaky; veletok v SSSR. 5. Kosodřevina; z mnoha; značka albánských cigaret; mužské jméno. 6. Přístroj na změnu odporu; stát (franc.); P A .
7. Zbavovat špíny; řeka v SSSR; drolí půdu. 8. A u t o r m o t t a; předložka; oslavuj Otakara. 9. n_{α} ; cizí zkratka čísla; vlakové zásilky. 10. Náruživí lovci; část postroje; zpíval Pegas. 11. Snad (sloven.); ručení; pst; výprodej. 12. Malý král pouště nehnul brvou; západočeské město.
13. Zlatonosná řeka; η ; dráha vzruchu v těle; záporka. 14. Čin (angl.); franc. malíř; noc (něm.). 15. Zájmeno (lat.); státní poznávací značka Ústí nad Labem; příslovce; německé zvolání.

P ř e d m l u v a

V roce 1970 vydala Universita Karlova skripta "Referáty a praktika z matematické analýzy", která již na jaře 1971 byla rozebrána. Od autorů skript, k nimž přibyli RNDr Oldřich John a RNDr David Preiss, jsem během roku získal další materiály a řadu nových námětů. Tyto pak sloužily spolu s "Referáty a praktiky" za základ novému učebnímu textu, který jsme připravili pod názvem "Problémy z matematické analýzy". Kromě od autorů skript jsem bohužel neobdržel k"Referátům a praktikům"téměř žádné připomínky. V této souvislosti bych chtěl poděkovat některým posluchačům MFF KU, jejichž ročníkové práce a myšlenky jsme v těchto skriptech použili.

Mariánská, září 1971

Jaroslav Lukeš

Předmluva k"Referátům a praktikům"

Ve školním roce 1968-69 byla na MFF KU započata výuka podle nových, podstatně upravených studijních plánů. Potřeby současného bouřlivého rozvoje matematiky si v těchto učebních plánech vynutily nejen podstatné rozšíření učební látky, zejména z matematické analýzy, nýbrž i vytýčení kvalitativně nového způsobu zvládnutí látky.

V matematické analýze byl důraz položen nejen na získání zběhlosti v technické části, nýbrž hlavně na osvojení teoretických částí aktivním způsobem, směřující k samostatnému řešení lehčích problémů, samostatné schopnosti studovat z časopisecké literatury a k cvičení schopnosti srozumitelně a logicky správně své poznatky v písemné i ústní formě reprodukovat.

Tento náročný úkol byl řešen v podstatě trojím způsobem:

a) od prvního ročníku byly na cvičeních zařazovány jednotlivé referáty dle uvážení přednášejících a cvičících, v nichž šlo především o zvládnutí menšího úseku doplnujícího látku, který byl v bodech s náznaky důkazů zadán,

b) ve čtvrtém semestru bylo zařazeno dvouhodinové praktikum, v němž byly referovány obsáhlejší a obtížnější celky zadané obdobným způsobem a navíc bylo vyžadováno samostatné řešení řady lehčích i těžších problémů,

c) na začátku čtvrtého semestru bylo jednotlivým posluchačům zadáno téma ročníkové práce spolu s podrobnější osnovou a některými problémy; úkolem pak bylo podrobné písemné zpracování, přičemž hlavní důraz byl položen na přesný a správný písemný projev.

Kolektiv pracovníků kateder matematické analýzy, který po dobu dvou let výuku matematické analýzy vedl, shromáždil všechny náměty pro referáty, praktika i ročníkové práce do předložených skript, aby byly v kompaktní formě k dispozici přednášejícím, cvičícím a studentům v příštích letech.

1014-7781

Na přípravě těchto skript se podíleli asistenti MFF KU, Dr Svatopluk FUČÍK, Dr Jaroslav MILOTA, Dr Ivan NETUKA, Dr Břetislav NOVÁK, CSc, Dr Věna ŠŤASTNOVÁ, Dr Jiří VESELÝ, CSc. Za cennou pomoc děkuji též posluchačům MFF KU Františku BUBENÍKOVI, Jiřímu ČÍŽKOVI, Janu PACHLOVI, Luboši VAŠÁKOVI a Jiřímu HNILICOVI, z nichž poslední kromě toho vydatně pomohl při technickém zpracování skript. Některými náměty a připomínkami dále přispěli Dr Pavel AKSAMIT, Dr David PREISS, Dr František ŠTĚPÁNEK, CSc.

Praha, Mariánská
září 1968 - září 1970

Jaroslav LUKEŠ

1014-7781

Ú V O D

V předmluvě bylo řečeno, jaké pohnutky nás vedly k sepsání těchto skript. Sledovali jsme zhruba čtyři základní cíle:

1. naučit posluchače pracovat s literaturou,
2. naučit posluchače v ústní i písemné formě předávat své vědomosti ostatním,
3. ukázat, že matematická analýza, zrovna tak jako ostatní matematická odvětví, není uzavřeným celkem, nýbrž se neustále rozvíjí formulováním a řešením problémů,
4. pro lepší posluchače možnost individuálním studiem si prohlubovat své znalosti z přednášek.

Je třeba, aby se posluchači MFF KU uměli brzo přizpůsobit rychlému rozvoji matematických disciplin. Jedním z prostředků, jak tohoto dosáhnout, je práce s literaturou, převážně studium nových článků z různých časopisů. Na přednáškách a ve skriptech či učebnicích není možno ukazovat na všechny problémy a nuance různých oborů matematiky. Tyto si právě musí posluchač sám doplňovat převážně z literatury. Neméně důležité je, aby každý pak uměl tyto nastudované znalosti reprodukovat, ať již v ústní či písemné formě, a předávat dalším. Řekli jsme, že matematická analýza není uzavřeným celkem. Liší se však od ostatních oborů a disciplin zejména tím, že neřešené problémy jsou mnohem těžší a složitější a vyžadují nový, originální přístup. Zkušenosti z posledních let na naší fakultě ukazují, že zejména mladí zájemci, kteří se nezaleknou systematické práce, mohou významnou měrou přispět k dalšímu rozvoji matematické analýzy řešením důležitých otázek, které odolávaly úsilí i významných světových matematiků.

Podle našich zkušeností jsme si vědomi toho, že je lépe jednu věc udělat pořádně, do všech možných detailů, s naprostým pochopením, než několik věcí rychle, bez hlubšího zkoumání. Proto upozorňujeme všechny posluchače, aby si vždy jednotlivá témata důkladně promysleli, detailně zpracovali a nesnažili se pouze o kvantitativní zvládnutí látky. Znovu připomínáme, že heslo "Čím více, tím lépe" v tomto případě může pouze uškodit. Výběr referátů bude zpravidla prováděn jednak přednášejícím, jednak asistenty na cvičeních, kteří též mohou jednotlivé body doplňovat.

Chceme též upozornit, že "Problémy z matematické analýzy" nemají v žádném případě nahradit počítání příkladů z osvědčených sbírek úloh k diferenciálnímu a integrálnímu počtu. Měli byste je používat spolu s vynikajícími knihami Vojtěcha Jarníka, kde ve cvičeních je řada dalších námětů pro vaši práci.

A nyní ještě několik rad; nechceme však, aby vyzněly jako fráze či jako předpisy pro obsluhu počítacího stroje. Jednotlivá témata se dají využít jednak jako referáty na cvičeních, jednak při praktiku ve IV. semestru a jednak při přípravě ročníkové práce. Nyní trochu podrobněji:

REFERÁTY

jsou většinou kratší problémové celky vybrané z jednotlivých témat, úzce se vztahující k probírané látce a na mnohých místech ji doplňující. Je možno jich používat již od druhého semestru. Pro referujícího posluchače uveďme několik rad.

1. Referující posluchač by si měl uvědomit, že vykládá pro své kolegy, kteří referovanou látku slyší asi poprvé. Není třeba přednášet pro cvičícího, ten by to měl znát.

1014-7781

2. Hlasitost vašeho projevu má vliv na pozornost a ospalost ostatních posluchačů.

3. Vyvarujte se dvou extrémů:

- neustále mluvit a nic nepsat na tabuli,
- pořád psát na tabuli a nic nemluvit.

4. Před zahájením referátu vždy formulujte problémy, z kterých váš referát vychází a naznačte, k čemu směřujete. Totéž platí před započetím důkazu.

5. Nebojte se diskuse s ostatními. Tito by se vás měli ptát, kdykoliv něčemu nerozumějí. Rovněž tak formulujte problémy, které vás napadly, a které třeba vůbec neumíte řešit.

6. Je dobré být na referát dokonale připraven.

PRAKTIKUM

ve IV. semestru je určeno k referování delších problémových celků. Přednášející a cvičící zadávají témata praktik, není nikterak nutné probrat vždy celé téma.

ROČNÍKOVÉ PRÁCE

Jako součást praktika ve IV. semestru je zařazeno sepsání ročníkové práce. Její téma vám sdělí cvičící na začátku semestru, může přitom podstatně použít těchto skript. Stupeň obtížnosti a podrobnost návodu volí pochopitelně asistent podle úrovně posluchače. Během semestru pak pracujete na ročníkové práci. Nezapomeňte konsultovat se cvičícími všechny problémy! Rovněž tak předložte před koncem semestru "první versi" své práce cvičícímu k posouzení. Jeho připomínky zpracujte!

- - -

Nakonec uveďme ještě pár vysvětlivek. Na začátku skript jsou uvedeny sylaby přednášek z matematické analýzy a z metrických prostorů, podle nichž bylo přednášeno v letech 1968-70.

Příklady označené (*) jsou poněkud obtížnější, problematika odstavců uváděných (**) je již velmi těžká. Symbolu (??) jsme použili tam, kde řešení jistého problému nám nebylo zcela známo.

Přejeme vám ve studiu mnoho úspěchů!

1014-7781

0. Úvod DO MATEMATIKY

0.1 Základní logické pojmy

definice, axiom, věta, nutná a postačující podmínka, axiomatické vybudování teorie.

0.2 Reálná čísla - intuitivní teorie

přirozená, racionální, reálná čísla (označme E_1), pravidla počítání, uspořádání, absolutní hodnota.

0.3 Množiny

množina, prvky množiny, rovnost množin, podmnožiny, tvoření nových množin (sjednocení, průnik, rozdíl, kartézský součin).

0.4 Výroky

výrok, tvoření nových výroků (negace, konjunkce, disjunkce, alternativa, implikace, ekvivalence), kvanfitikátory, souvislost s množinami.

Poznámka

Výklad 0. kapitoly je proveden "intuitivně", teorie není budována přesně. Posluchači jsou pouze informativně upozorněni na problémy; o některých partiích se dozvědí až v dalších semestrech (kupř. teorie reálných čísel).

V dalším se tedy předpokládá, že je známo:

1) teorie množin,
2) teorie reálných čísel,
3) základní logické pojmy a pravidla.

I. ZOBRAZENÍ - ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

I.1 Zobrazení

základní pojmy (zobrazení, definiční obor, obraz, vzor, graf),
rovnost zobrazení,
funkce (= zobrazení do E_1).

I.2 Operace s funkcemi

parciální a složené zobrazení, součet, rozdíl, součin, podíl funkcí, absolutní hodnota funkce, uspořádání funkcí.

I.3 Základní typy zobrazení

prosté zobrazení, inversní zobrazení, identické a konstantní zobrazení, monotonní funkce, nezáporné funkce, sudé a liché funkce, mocniny, polynomy, racionální funkce, věta o existenci a jednoznačnosti n-té odmocniny (bez důkazu), funkce $[x]$, $\sqrt[n]{x}$, Dirichletova a Riemannova funkce.

1014-7781

II. LIMITY FUNKCE, SPOJITOST FUNKCE

II.1 Vlastní limity ve vlastních bodech, spojitost funkce

okolí bodu, redukované okolí, jednostranné okolí,
limita, jednostranné limity, existence a jednoznačnost limity,
spojitost funkce v bodě, jednostranná spojitost, omezená funkce, základní věty o limitách a spojitosti (součet, součin, rozdíl, podíl, absolutní hodnota, složená funkce, nerovnosti),
spojitost funkce v intervalu,
spojitost inversní funkce,
axiomatické zavedení goniometrických funkcí (bez důkazu - existence a jednoznačnost), základní vlastnosti, cyklometrické funkce.

II.2 Ostatní limity

nevlastní limity ve vlastním bodě, jednostranné - existence a jednoznačnost, limity v nevlastních bodech, základní věty o těchto limitách.

III. DERIVACE FUNKCE

III.1 Derivace

derivace v bodě, jednostranné derivace, nevlastní derivace, derivace jakožto funkce, vztah spojitosti a derivace, derivace elementárních funkcí.

III.2 Vlastnosti derivace

derivace součtu, součinu, násobku, podílu, derivace složené funkce, derivace inversní funkce, příklady na derivaci v "nepříjemných" bodech, vztah sign (f´(x)) a monotonie (bez důkazu), derivace elementárních funkcí.

III.3 Elementární funkce

axiomatické zavedení logaritmu a exponenciály - základní vlastnosti,
obecná mocnina,
hyperbolické funkce - inversní funkce k nim.

IV. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI SPOJITÝCH FUNKCÍ

IV.1 Reálná čísla (axiomaticky)

axiomy teorie reálných čísel (axiomy tělesa, axiomy o uspořádání, axiom o supremu), definice suprema a infima - základní vlastnosti, jednoznačnost, vybudování přirozených a racionálních čísel, těleso reálných čísel (induktivní množiny, přirozená čísla - jejich základní vlastnosti, princip matematické indukce, Archimedova vlastnost reálných čísel, hustota racionálních a iracionálních čísel), racionální čísla - základní vlastnosti.

IV.2 Základní vlastnosti spojitých funkcí

limity monotonních funkcí,

omezenost spojité funkce na intervalu,
plížívé lemma,
existence absolutních extrémů spojitých funkcí,
Darbouxova vlastnost spojitých funkcí, spojitý obraz intervalu.

IV.3 Rolleova věta a její důsledky

funkce monotonní v bodě, vztah monotonie v bodě a monotonie na intervalu, souvislost monotonie funkce a znaménka derivace, Rolleova věta, Lagrangeova věta, Cauchyova věta, l'Hospitalovo pravidlo, Darbouxova vlastnost derivace, věta o lim f'(x), symboly o, O, asymptotika (úvod).

IV.4 Konvexita a konkavita funkce

derivace vyšších řádů, konvexita a konkavita v intervalu, základní vlastnosti konvexních funkcí (spojitost, derivace, jednostranné derivace), konvexita a konkavita v bodě, asymptoty grafu funkce.

IV.5 Stejnoměrná spojitost funkce

Borelova pokrývací věta, stejnoměrná spojitost v intervalu, vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti, myšlenky důkazů vět o spojitých funkcích - klasické metody, důkazy na základě Borelovy věty, důkazy podle plížívého lemmatu.

V. PRIMITIVNÍ FUNKCE

primitivní funkce - definice, základní vlastnosti, vztah primitivní funkce a spojitosti, primitivní funkce k elementárním funkcím, metody výpočtu primitivních funkcí (per partes, substituce, integrace racionálních funkcí).

VI. POSLOUPNOSTI A ŘADY ČÍSEL

VI.1 Posloupnosti reálných čísel

posloupnosti čísel (jako speciální příklad zobrazení) - základní pojmy, limity posloupnosti, vztah limity funkce a limity posloupnosti, základní vlastnosti limit posloupností, konvergentní, omezené, monotonní posloupnosti - jejich vztah, Cantorův princip vložených intervalů.

VI.2 Řady reálných čísel

řady reálných čísel (pozor na rozdíl mezi "řadou" a "součtem řady"), konvergentní a divergentní řady, nutná podmínka konvergence řady, základní vlastnosti řad, kriteria konvergence řad, srovnávací kriterium, Cauchyovo a d'Alembertovo kriterium, integrální kriterium.

VI.3 Posloupnosti a řady komplexních čísel

definice, základní pojmy a vztahy.

VI.4 Posloupnosti čísel - hlubší věty

vztah konvergence a omezenosti, Bolzano-Weierstrassova věta, Bolzano-Cauchyova podmínka, hromadná hodnota posloupnosti, definice lim sup a lim inf posloupnosti,
Heineho definice limity,
Bolzano-Cauchyova podmínka pro existenci vlastní limity funkce.

VI.5 Řady čísel - hlubší věty

Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci řad, absolutní a neabsolutní konvergence, Abelova parciální sumace, Dirichletovo, Abelovo a Leibnizovo kriterium pro neabsolutní konvergenci řad,
přerovnávání řad, násobení absolutně a neabsolutně konvergentních řad.

VII. POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

VII.1 Posloupnosti funkcí

konvergence a stejnoměrná konvergence - jejich vztah a základní vlastnosti,
Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci,
spojitost limitní funkce,
lokálně stejnoměrná konvergence,
Moore-Osgoodova věta o záměně limit,
derivace limitní funkce, primitivní funkce k limitní funkci,
poznámky o Baireových funkcích.

VII.2 Řady funkcí

přenesení vět z posloupností na řady, majorantní řady, Weierstrassovo kriterium, Dirichlet-Abelovo kriterium.

VII.3 Mocninné řady

definice a základní vlastnosti mocninných řad (poloměr konvergence, konvergenční kružnice),
stejnoměrná konvergence mocninné řady,
spojitost mocninné řady, derivování mocninných řad,
Abelova věta.

VII.4 Sčítací metody

úvod do problematiky zobecněných limit a součtů, regulární sčítací metody - jako příklad Cesarova a Abelova sčítací metoda,
poznámka o univerzální sčítací metodě.

VII.5 Taylorův rozvoj

Taylorův konečný a nekonečný rozvoj, tvary zbytků,
Taylorova mocninná řada - její konvergence, analytické funkce v bodě,
zavedení elementárních funkcí řadami,
symboly o, O, slabá a silná srovnatelnost, asymptotika, škály srovnání.

VIII. URČITÝ INTEGRÁL

VIII.1 Riemannův integrál

horní a dolní součty, definice Riemannova integrálu, nutné a postačující podmínky integrability,
základní vlastnosti Riemannova integrálu - linearita, absolutní konvergence, monotonie, funkce intervalu,
Riemannův integrál jako limita posloupnosti součtů,
Riemannův integrál jako funkce horní meze - existence primitivní funkce ke spojité funkci,
derivace Riemannova integrálu podle horní meze,
problematika dalšího rozšíření integrálu,
vztah integrálu k "ploše".

VIII.2 Newtonův integrál

definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu,
linearita, monotonie, neabsolutní konvergence,
integrace per partes a substituční metody, věty o střední hodnotě,
vyšetřování existence Newtonova integrálu, srovnávací kriterium, Abelovo a Dirichletovo kriterium,
plocha, délka křivky.

VIII.3 Dodatky k prvnímu ročníku (podle časových možností)

zobecněný Newtonův integrál,
Riemann-Stieltjesův integrál,
srovnání integrálu a řad.

MATEMATICKÁ ANALÝZA - II. ročník

IX. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

IX.1 Spojitost a derivace funkcí více proměnných

spojitost a limita funkce více proměnných - základní vlastnosti,
derivace funkce ve směru, parciální derivace,
funkce diferencovatelné - totální diferenciál funkce v bodě (jako lineární forma),
vztah spojitosti, diferencovatelnosti a existence derivací funkce v bodě,
derivace vyšších řádů, záměnnost parciálních derivací,
definice funkcí třídy $C^{(k)}$, základní vlastnosti,
extrémy funkce více proměnných, lokální extrémy, kritické body funkce.

IX.2 Transformace z E_r do E_s

spojitost a limita zobrazení, lineární transformace z E_r do E_s,
hodnost, jádro, nulita, norma lineární transformace,

diferenciál, transformace třídy $C^{(k)}$, základní vlastnosti diferencovatelných transformací, věta o střední hodnotě, totální diferenciál složeného zobrazení, parciální derivace složené funkce, jacobián zobrazení,
věta o inversním zobrazení (lokálního charakteru), věta o implicitních funkcích,
regulární zobrazení, difeomorfismus.

Podle časových možností lze teorii funkcí více proměnných přednášet obecněji jako diferenciální počet na normovaném lineárním prostoru. V tomto případě je stručný obsah následující:

A. Lineární prostor

definice, lineární závislost a nezávislost, báze, dimense, direktní součet podprostorů, přímka a nadrovina.

B. Lineární zobrazení

definice, isomorfismus lineárních prostorů, prostor lineárních zobrazení a forem, dimense prostoru lin. forem na konečně-dimensionálním prostoru, vztah lineárních forem a nadrovin, hodnost a nulita, podmínky existence inversního zobrazení k lineárnímu, maticové vyjádření lin. zobrazení pro konečně-dimensionální prostory.

C. Normovaný lineární prostor

norma, ekvivalentní normy, ekvivalence norem na konečně-dimensionálním prostoru, Banachův prostor, kompaktnost v konečně-dimensionálním prostoru.

D. Spojitá zobrazení

definice, spojitá zobrazení na kompaktních množinách, základní věta algebry, ekvivalentní podmínky pro lineární zobrazení, norma lineárního zobrazení, topologický isomorfismus norm. lin. prostorů, úplnost prostoru spojitých lineárních zobrazení, otevřenost podmnožiny spojitě invertabilních spojitých lin. zobrazení.

E. Diferenciál zobrazení

definice derivace ve směru, parciální derivace, záměnnost parc. derivací, definice diferenciálu, vyjádření pro zobrazení z E_n do E_m, vztah ke spojitosti a parc. derivacím, diferenciál složeného zobrazení, vyšší diferenciály, věta o střední hodnotě pro zobrazení do E_1, Taylorova formule, lokální extrémy.

F. Věta o inversním zobrazení

Banachův princip kontrakce, věta o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice n-tého řádu, abstraktní věta o inversním zobrazení, regulární zobrazení, abstraktní věta o implicitních funkcích, případ zobrazení z E_n do E_m, Ljusternikova věta o vázaných extrémech, Lagrangeova věta o multiplikátorech, vlastní čísla symetrické matice, uvedení kvadratické formy na diagonální tvar.

IX.3 Variety

definice variety, vytváření variet,
tečné vektory, tečný prostor, normální vektor, tečná rovina,
extrémy funkcí na varietách ("vázané extrémy"), metoda
Lagrangeových multiplikátorů.

X. TEORIE INTEGRÁLU

X.1 Abstraktní teorie integrálu (Daniellova metoda)[1]

systém funkcí C_1, Riemannův integrál pro funkce ze systému C_1 -
- základní vlastnosti,
definice základního prostoru (Z,A) - příklady, systémy Z^R, Z^K, Z^*
a rozšíření integrálu na systém Z^*, vlastnosti Z^*,
horní a dolní integrál, systém $\mathcal{L}$ a integrál pro funkce z $\mathcal{L}$ -
jejich základní vlastnosti (charakteristika $\mathcal{L}$, linearita,
monotonní přechody), systémy $\mathcal{L}^R, \mathcal{L}^K, \mathcal{L}^*$ a integrál na systému $\mathcal{L}^*$,
systém Λ všech měřitelných funkcí,
charakteristická funkce množiny - základní vlastnosti,
nulové množiny, pojem skoro všude, ekvivalentní funkce,
věty o limitních přechodech (Levi, Lebesgue),
základní vlastnosti systémů $\mathcal{L}^*$ a Λ,
měřitelné množiny, míry množin, vnější míra, integrál přes podmnožiny.

X.2 Lebesgueův integrál v E_1

speciální případ abstraktní teorie se základním prostorem
$(C_1, (R)\int_{E_1})$,
polospojité funkce, charakteristika systémů Z^R a Z^K,
měřitelnost otevřených a uzavřených podmnožin E_1, měřitelnost
spojitých funkcí, nulovost spočetných množin,
vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu,
výpočet Lebesgueova integrálu pomocí primitivní funkce, vztah
k Newtonovu integrálu,
aproximace měřitelných množin otevřenými či uzavřenými množinami,
klasická definice míry množin, Jordan-Peanův objem,
struktura funkcí majících Newtonův a nemajících Lebesgueův integrál,
"maximalita" Lebesgueova integrálu mezi absolutně konvergentními
integrály.

X.3 Riemannův a Lebesgueův vícerozměrný integrál

Riemannův integrál v E_n - přenesení základních vlastností z E_1,
Fubiniova věta pro Riemannův integrál,
systém funkcí C_r a Riemanův integrál pro funkce ze systému C_r
jako další příklad základního prostoru,
Fubiniova věta pro Lebesgueův integrál, geometrický význam integrálu, věta o substituci pro Lebesgueův integrál,
integrály závislé na parametru - spojitost a derivace.

[1] Teorii integrálu lze budovat buďto Daniellovou metodou rozšířením funkcionálu (kap. X.1) anebo na základě teorie míry (kap. XI.4) dle časových možností a uvážení přednášejícího.

1014-7781

X.4 **Riemann-Stieltjesův a Lebesgue-Stieltjesův integrál**

Riemann-Stieltjesův integrál, základní vlastnosti, rozšíření podle Daniellovy metody, Stieltjesova míra v E_1.

XI. TEORIE MÍRY

XI.1 **Abstraktní teorie míry**

třídy množin - množinový okruh, algebra, σ-okruh, σ-algebra, vytváření množinových systémů (generované systémy), borelovské množiny,
množinová funkce, abstraktní míra, úplná míra,
abstraktní vnější míra - nulové množiny,
systém měřitelných množin podle Caratheodoryho,
vytváření vnější míry, pokrývací systém, Hopfova věta o rozšíření míry z algebry na σ-algebru,
regulární vnější míra,
"maximalita" systému všech měřitelných množin (podle Caratheodoryho) rozšíření a zúplnění míry.

XI.2 **Lebesgueova míra v E_n**

dvě metody konstrukce Lebesgueovy míry v E_n,
metrická vnější míra,
charakteristika měřitelných množin v E_n,
existence neměřitelných množin v E_1.

XI.3 **Měřitelné funkce**

měřitelný prostor $(X, \mathcal{S})$,
$\mathcal{S}$-měřitelné funkce - základní vlastnosti,
jednoduché funkce, aproximace měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi,
prostor s mírou, pojem skoro všude.

XI.4 **Abstraktní teorie integrálu (na základě míry)**

integrál z jednoduchých funkcí na prostoru s mírou,
rozšíření integrálu ze systému jednoduchých funkcí (pomocí Daniellovy metody či přímo) na širší systém integrovatelných funkcí,
základní vlastnosti integrálu - jako v odstavci X.1.

XI.5 **Dodatky**

Jegorovova a Luzinova věta,
součin měr a Fubiniova věta,
další rozšíření integrálu (informativně o neabsolutně konvergentních integrálech).

XII. LEBESGUEŮV INTEGRÁL V E_1

XII.1 **Funkce konečné variace**

definice lim sup a lim inf funkce, Diniho derivace,
variace funkce, funkce s konečnou variací - základní vlastnosti,
Jordanova věta o rozkladu,
zavedení metriky do prostoru funkcí s konečnou variací,
Riemann-Stieltjesův integrál podle funkce s konečnou variací,

Vitaliovo pokrytí, Vitaliova věta,
Lebesgueova věta o derivaci monotonní funkce, Cantorova funkce.

XII.2 **Neurčitý Lebesgueův integrál**

absolutně spojité funkce - základní vlastnosti,
derivace "neurčitého" Lebesgueova integrálu,
deskriptivní definice integrálu,
lebesgueovské body funkce,
integrace per partes pro Lebesgueův integrál, věty o střední hodnotě pro Lebesgueův integrál.

XIII. FOURIEROVY ŘADY

XIII.1 **Fourierovy řady v E_1**

definice Fourierovy řady, integrální vyjádření částečného součtu Fourierovy řady, Dirichletovo jádro, nutná a postačující podmínka konvergence Fourierovy řady z integrálního vyjádření,
Riemann-Lebesgueovo lemma, Riemannova věta o lokalizaci,
Dirichlet-Jordanovo kriterium,
sčítání Fourierových řad metodou aritmetických průměrů, integrální vyjádření aritmetického průměru Fourierovy řady,
Fejérovo jádro, Fejérova věta,
důkaz Weierstrassovy věty o hustotě polynomů pomocí Fejérovy věty,
sčítatelnost Fourierovy řady v lebesgueovských bodech.

XIII.2 **Ortogonální systémy a Fourierovy řady**

systém funkcí $\mathcal{L}^2_M$, ortogonální systémy, skalární součin,
Besselova nerovnost, úplné ortogonální systémy, Parsevalova rovnost, Riesz-Fischerova věta, Hilbertův prostor.

XIV. PLOŠNÝ INTEGRÁL (dle časových možností)

XIV.1 **Úvod**

multilineární formy, tensory, diferenciální formy, regulární transformace na varietách, souřadnicové systémy na varietách.

XIV.2 **Integrace na varietách**

míra na varietách (existence, jednoznačnost),
integrace na varietách - základní vlastnosti,
rozklad jednotky.

XIV.3 **Stokesova věta a její důsledky**

orientace diferenciálních forem, vnější normála,
Stokesova formule a její důsledky.

METRICKÉ PROSTORY - 2. semestr

(Partie označené (*) jsou zařazovány podle časových možností.)

I. ÚVOD DO TEORIE MNOŽIN

I.1 Množiny a operace s nimi

množina, prvky množiny, rovnost množin, podmnožiny, systém množin, systém podmnožin dané množiny,
určení množiny pomocí platnosti výroku, prázdná množina, průnik, sjednocení, rozdíl množin - operace s nimi - de Morganova pravidla.

I.2 Zobrazení

definice zobrazení, zobrazení na, prosté, inverzní zobrazení, obraz a vzor množiny - základní vlastnosti, složené zobrazení, vztah ekvivalence - rozklad množiny na třídy,
spočetné a nespočetné množiny, sjednocení spočetného systému spočetných množin, racionální a reálná čísla.

II. METRICKÉ PROSTORY - ZÁKLADY

II.1 Definice metrického prostoru

definice, příklady metrických prostorů - E_n (různé metriky), omezené funkce na $<a,b>$, spojité funkce, ℓ^2, c, diskrétní prostor.

II.2 Průměr množiny, vzdálenost dvou množin

definice průměru množiny, omezené množiny, sjednocení omezených množin, definice vzdálenosti dvou množin.

II.3 Okolí bodu, otevřené množiny

definice okolí jako otevřené koule,
definice otevřené množiny (příklady - E_1, E_n ; diskrétní prostor),
otevřená koule je otevřená množina,
sjednocení a průnik otevřených množin - příklady,
báze otevřených množin,
vnitřek množiny - vlastnosti,
klasifikace bodů vzhledem k množině (vnitřní, vnější, hraniční),
(*) úplná soustava okolí bodu a množiny, první axiom spočetnosti.

II.4 Uzavřené množiny, uzávěr, hranice

definice uzavřené množiny jako doplňku otevřené (příklady - uzavřená koule),
Cantorovo diskontinuum - základní vlastnosti,
uzávěr množiny - různé ekvivalentní definice (průnik uzavřených, pomocí vzdálenosti, pomocí vnějšku, nejmenší uzavřená),
vlastnosti uzávěru, vlastnosti uzavřených množin,
oddělení uzavřených množin otevřenými množinami (normalita),
definice hranice, vyjádření uzávěru pomocí hranice,
podmínka uzavřenosti a otevřenosti pomocí hranice,
otázka neprázdnosti hranice.

1014-7781 27566 Z2

II.5 Konvergence v metrickém prostoru

definiçe konvergentní posloupnosti, vlastnosti, příklady (E_n, C, l^2, c, diskrétní),
(*) vytvoření metriky pomocí konvergence (zavedení prostoru s; bodová konvergence funkcí),
charakteristika uzávěru pomocí konvergence,
hromadné body, omezená posloupnosti v E_n (Bolzano-Weierstrassova věta) a obecné (např. diskrétní prostor),
dokonalé množiny (Cantorovo diskontinuum),
dokonalé množiny v E_1.

II.6 Spojitá zobrazení metrických prostorů

definice spojitého zobrazení v bodě, v prostoru, Heineho podmínka, nutné a postačující podmínky se vzory otevřených a uzavřených množin (též pomocí báze otevřených množin, speciálně pro zobrazení do E_1 - intervaly),
složení spojitých zobrazení,
isometrické zobrazení, metrické vlastnosti, ekvivalentní metriky,
homeomorfní zobrazení - topologické vlastnosti, (zobrazení libovolného prostoru homeomorfně na omezený prostor), stejnoměrně spojitá zobrazení,
rozšíření spojité funkce z uzavřené množiny na celý prostor - - funkcionální oddělitelnost.

II.7 Podprostory metrického prostoru

definice podprostoru,
relativizace všech předcházejících pojmů (explicitně spojitost vzhledem k množině).

II.8 Kompaktní prostory - základy

definice kompaktního prostoru - relativizace, dědičnost,
vztah kompaktnosti, uzavřenosti a omezenosti,
kompaktní množiny v E_n,
Cantorova věta,
spojitý obraz kompaktního prostoru,
spojité zobrazení na kompaktu (stejnoměrná spojitost),
homeomorfní zobrazení,
vzdálenost uzavřené a kompaktní množiny.

II.9 (*) Konečné kartézské součiny

definice kartézského součinu, projekce, metrizace,
spojitost projekce, kartézský součin uzavřených, otevřených kompaktních množin.

METRICKÉ PROSTORY - 3. semestr

III. SEPARABILNÍ PROSTORY

III.1 Husté a řídké množiny

definice husté a řídké množiny, příklady (Cantorovo diskontinuum),
podmínky pro hustou a řídkou množinu pomocí otevřených množin - též pomocí báze otevřených množin, speciálně v E_1.

III.2 Separabilní prostory

definice separabilního prostoru, separabilita speciálních prostorů, dědičnost, ekvivalentní definice pomocí báze otevřených množin,
definice bodu kondenzace, existence bodu kondenzace pro nespočetné množiny, dokonalost množiny bodů kondenzace,
isolovaná množina v separabilním prostoru,
Lindelöfova věta o pokrytí.

IV. ÚPLNÉ PROSTORY

IV.1 Množiny typu G_δ, F_σ

definice množin typu G_δ, F_σ - základní vlastnosti (spočetné sjednocení a průnik, poznámka o $G_{\delta\sigma}$ atd.)
otevřené a uzavřené množiny typu G_δ i F_σ,
definice σ-okruhu, průnik σ-okruhů, borelovské množiny jako nejmenší σ-okruh obsahující otevřené množiny,
(informativní poznámky o vytvoření borelovských množin),
množina bodů spojitosti reálné funkce.

IV.2 Úplné prostory

definice úplného prostoru, dědičnost,
normovaný lineární prostor, Banachův prostor (příklady),
netopologičnost tohoto pojmu,
(*) G_δ podmnožiny úplného prostoru jsou homeomorfní s úplným prostorem,
Cantorova věta o průniku monotonní posloupnosti uzavřených množin jako nutná a postačující podmínka úplnosti,
rozšíření spojitého zobrazení do úplného prostoru na uzávěr.

IV.3 Úplný obal metrického prostoru

konstrukce úplného obalu,
zmínka o Cantorově metodě výstavby reálných čísel.

IV.4 Množiny 1. a 2. kategorie, Baireova věta

definice množiny 1. a 2. kategorie, příklady,
Baireova věta a její důsledky (speciálně na G_δ podmnožiny E_1, racionální čísla nejsou G_δ, neexistence funkce spojité jen v racionálních bodech),
Baireovy funkce 1.třídy v E_1 - nutná a postačující podmínka pomocí restrikce na uzavřené množiny a pomocí vzorů uzavřených a otevřených množin,
zmínka o Baireových funkcích a borelovských množinách,
metoda kategorií - existence spojité funkce bez derivace.

IV.5 Věta o pevném bodě

definice lipschitzovského a kontrahujícího zobrazení,
definice pevného bodu zobrazení, Banachova věta (příklad).

1014-7781

V. KOMPAKTNÍ PROSTORY

V.1 Pokračování kompaktních prostorů

definice totálně omezeného prostoru,
vztah úplnosti, totální omezenosti a kompaktnosti (ε-síť),
Borelova věta jako nutná a postačující podmínka pro kompaktnost.

V.2 Prostory spojitých zobrazení na kompaktním prostoru

definice prostoru $\mathscr{C}(T)$ (T kompakt), úplnost a separabilita,
Arzelova věta - aplikace,
Stone-Weierstrassova věta - aplikace (speciálně trigonometrické polynomy),
Diniho věta,
(*) polynomy nejlepší aproximace, ε-entropie, úloha o nejlepší aproximaci.

V.3 (*) Lokálně kompaktní prostory

definice lokálně kompaktního prostoru - příklady,
vyjádření separabilního lokálně kompaktního prostoru,
jednobodová kompaktifikace lokálně kompaktního prostoru - aplikace na komplexní rovinu.

VI. SOUVISLÉ PROSTORY

definice pomocí oddělitelnosti, ekvivalentně pomocí otevřených a uzavřených množin a neprázdné hranice,
souvislé množiny na přímce,
sjednocení souvislých množin,
definice komponenty, definice lokálně souvislého prostoru (příklady), komponenty otevřených a uzavřených množin, oblasti v E_n (lomené čáry - nutnost předpokladu otevřenosti), spojitý obraz souvislého prostoru, poznámka o darbouxovských funkcích,
(*) kontinua, oblouky, uspořádání na oblouku, Peanova křivka, lokálně souvislá kontinua jako spojitý obraz intervalu.

1014-7781

Přehled symbolů

(A) Ve skriptech je použito bez bližšího vysvětlení symbolů známých z přednášky matematické analýzy. Upozornění na některé:

E_1 ...... množina reálných čísel,

E_1^* ...... množina reálných čísel rozšířená o symboly $+\infty$, $-\infty$ s obvyklými operacemi,

E_n ...... eukleidovský n-rozměrný prostor,

N ...... množina přirozených čísel,

R ...... množina racionálních čísel,

$\{x_n\}$ .... posloupnost prvků x_n,

$f : M \to N$ ...... zobrazení množiny M do množiny N,

$f : x \mapsto f(x)$, $x \in M$ ...... "předpis" přiřazující každému $x \in M$ hodnotu $f(x)$,

$f|M$ ..... restrikce (zúžení) funkce f na množinu M,

$f * g$ .... složená funkce ($f * g(x) = f(g(x))$),

c_A ...... charakteristická funkce množiny A,

$f(a_+)$, $f(a_-)$ .... limity funkce f v bodě a zprava, zleva ($\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$),

ν_n ...... Jordan-Peanův objem v E_n.

λ_n ...... Lebesgueova míra v E_n.

$\tilde{\lambda}_n$ ...... Lebesgueova vnější míra v E_n.

s.v. .... skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře),

$[x]$ ..... celá část reálného čísla x,

$f_n \rightrightarrows f$ na M ...... stejnoměrná konvergence,

$\bar{M}$ ...... uzávěr množiny M,

$M^\circ = \mathrm{Int}.M$ ...... vnitřek množiny M,

hr M .... hranice množiny M,

dist (x,F) ...... vzdálenost bodu x od množiny F,

diam A .. průměr množiny A,

$A \setminus B$ ... rozdíl množin A, B,

$U(x_0)$... okolí bodu x_0,

1014-7781

$U(x_0, \delta)$ ..... okolí bodu x_0 o poloměru δ,

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$ ..... prostor spojitých funkcí na množině M.

(B) Přehled ještě <u>některých</u> (častěji se vyskytujících) dalších symbolů definovaných v textu:

osc_f .... oscilace funkce f (5.7 - tamtéž Lim sup, Lim inf),

D^+f, D_+f, D^-f, D_-f, $\bar{D}f$, $\underline{D}f$ ...... Diniho derivace (7.8)

B_n, B_∞, B ... Baireovy třídy (12.14, 12.16)

AC (< a,b >) ... absolutně spojité funkce (23.1)

BV (< a,b >) ... funkce s konečnou variací (19.1)

$\mathcal{H}_\alpha(M)$ .... α-hölderovské funkce (14.1)

$Lip_1(M)$ .... lipschitzovské funkce (14.1)

$\mathcal{H}_n(G)$ .... harmonické funkce (37.1)

BC (< a,b >) ... funkce omezené konvexity (23.31)

$A(x_0)$, A(G) .... analytické funkce (21.5)

$\mathcal{C}^\infty(x_0)$, $\mathcal{C}^\infty(G)$ ..... nekonečně derivovatelné funkce (21.1)

R (< a,b >), N ((a,b)), $\mathcal{L}(M)$ ..... riemannovsky, newtonovsky, lebesgueovsky integrovatelné funkce (23.51)

$\mathcal{P}$ .... funkce mající primitivní (23.40)

$C(x, \delta)$ ...... krychle (33.11),

$C_n = C(0, \frac{1}{2})$ ..... jednotková krychle v E_n (35.15)

1014-7781

T É M A 1

O axiomech a definicích

Obsah: A. Axiomatické teorie.
B. Definice.
C. Nutné a postačující podmínky.

A. AXIOMATICKÉ TEORIE

V tomto tématu se pokusíme nastínit některé problémy spadající do samých základů matematiky. Nemůže jít samozřejmě o žádnou precizní teorii, více se o těchto problémech dozvíte až ve vyšších ročnících v příslušných speciálních přednáškách. Můžete si též číst v knize A. Tarski, Úvod do logiky a metodologie deduktivních metod (Praha, 1966).

1.1 Kde začít? Při výkladu matematiky je třeba z něčeho vyjít. Není to však nikterak lehké. Zdálo by se, že postačí pár definic a lze budovat libovolnou matematickou teorii. Vezměme si kupř. geometrii, jejímiž základními pojmy jsou bod, přímka a rovina. A zkusme podat definici - třeba - kružnice: "Kružnice je množina bodů v rovině, které mají od daného bodu stále stejnou vzdálenost". Definice je na první pohled zcela vhodná. Ale ptáme se po základech matematiky, musíme tedy definovat, co je to "množina, bod, vzdálenost, rovina" a co se rozumí pojmem "mít stále stejnou" (vzdálenost). A tak se dostáváme k základním pojmům - bod, přímka, rovina. I u těchto pojmů by bylo možné dát uspokojivou definici, ale v ní bychom museli opět použít některých pojmů, které ještě nemáme zavedeny. Museli bychom tedy opět tyto pojmy dále definovat, k tomu bychom však potřebovali další nové pojmy, atd. Tímto způsobem bychom mohli neustále pokračovat. Jsou nyní dvě možnosti. Buď bychom takto pokračovali neustále, stále by se objevovaly nové a nové pojmy v definicích předcházejících, ale kde skončit? Anebo se musíme postavit na stanovisko, že některé pojmy "a priori" známe a z nich pak budeme vytvářet další.

Kupříklad v geometrii si představíme, že víme (intuitivně), co je to bod, přímka a rovina a pomocí těchto pojmů budeme definovat další - - kružnici, tečnu, rovnoběžky aj. a vytvoříme celou teorii. Abychom však stáli na solidních základech - nelze přeci nechat na vůli jednotlivce, aby si každý pod pojmem bod, přímka, rovina představoval co chtěl - musíme se domluvit, jak s těmito základními pojmy (někdy se jim též říká "primitivní pojmy") budeme pracovat, tj. musíme sepsat ve formě vět jistá "pravidla počítání" s těmito pojmy. Tyto věty pak nazveme axiomy a vycházíme z nich při budování další teorie.

Ještě jednou - abychom mohli budovat nějakou matematickou teorii, musíme jisté pojmy vzít za základ, sepsat ve formě axiomů pravidla počítání s těmito pojmy; pak můžeme celou další teorii budovat a odvozovat čistě logickými úvahami (otázku, co se tímto vlastně přesně myslí, zde nebudeme zkoumat). Uveďme si příklad. Chtěli bychom pořádně vybudovat geometrii - za základní pojmy můžeme vzít třeba tyto pojmy: "bod", "přímka", "rovina" a dále předpokládáme, že víme, co znamená výrok "bod leží na přímce", "bod leží v rovině", "přímka leží v rovině" (vztahy incidence). Na tyto základní pojmy položíme následující požadavky-axiomy:

axiom 1: Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, na které tyto body leží.

axiom 2: Leží-li dva různé body přímky p v rovině ϱ, leží všechny body přímky p v rovině ϱ.

Nyní můžeme budovat teorii. Z axiomu 1 lehko odvodíme následující větu:

věta 1: Dvě různé přímky mají buď jediný společný bod anebo žádný společný bod.

Na základě této věty můžeme vyslovit následující definici:

definice 1: Dvě různé přímky nazýváme

a) různoběžné, mají-li společný jeden bod,
b) rovnoběžné, nemají-li společný žádný bod a existuje-li rovina, která tyto dvě přímky obsahuje,
c) mimoběžné, nejsou-li ani různoběžné ani rovnoběžné.

A opět můžeme odvozovat další věty a definovat další nové pojmy. Celá teorie ovšem stojí na našich prvotních pojmech a na našich axiomech. Samozřejmě bychom mohli vzít za základ jiné axiomy, tím bychom ovšem mohli dostat jiné teorie.

Z uvedeného příkladu je vidět, že můžeme vybudovat vcelku libovolný počet matematických teorií; otázkou je, zda je toto rozumné. Pochopitelně se vždy snažíme budovat takové teorie, které by odpovídaly našim konkrétním "představám".

Další otázkou, kterou se budeme zabývat, je otázka, jaké axiomy máme brát za základ našich teorií a kolik axiomů můžeme vzít. Také se zmíníme o problému, zda lze vždy vytvořit z daných axiomů matematickou teorii.

1.2 Zebry. Úlohu formulujme takto: Jsou tři přátelé - Pavel, Jirka a Jarda, jeden z nich je kuchař, jeden inženýr a jeden zahradník. Jedou spolu v tramvaji a sedí vedle sebe. Přitom víme, že

(1) Jarda nesedí vlevo,
(2) Pavel je kuchař,
(3) uprostřed není zahradník,
(4) vpravo je Jirka.

Otázka zní - čím je Jarda? Úlohu rozřešíme v následujících krocích:

(5) Jarda sedí uprostřed,
(6) Pavel sedí vlevo,
(7) vpravo sedí zahradník,
(8) Jarda je inženýr.

Tím máme celou úlohu rozřešenu, víme, kde kdo sedí a kdo kým je.

Podívejme se na naši úlohu z hlediska matematické teorie. Podle našich předchozích úvah můžeme říci, že máme dány tyto prvotní (primitivní) pojmy - "Jarda, Jirka, Pavel, inženýr, zahradník, kuchař, sedět vlevo, sedět uprostřed, sedět vpravo" a dále máme dány základní vztahy mezi těmito pojmy - axiomy (1) - (4). Z těchto axiomů jsme pak jistými "logickými úvahami" odvodili věty (5) - - (8). Naše úloha byla jednoznačně vyřešena.

Na tomto místě připojme následující nenápadnou, leč velmi důležitou p o z n á m k u. Nikde jsme neřekli, nikde jsme nedefinovali, co se rozumí pod pojmem Pavel či třeba pod pojmem zahradník. Uvedli jsme pouze v z t a h y (axiomy) mezi těmito pojmy. Každý si mohl Pavla představit jak chtěl - jeden jako mladíka, druhý jako dědečka, zrovna tak bělocha jako černocha. Pouze naše životní zkušenost nám dává představu "Pavla", každý ji má zřejmě jinou. Nakonec, proč bychom si nemohli představit, že Pavel je vlčák, Jarda teriér, Jirka je jezevčík; zahradník že má smysl "černý pes", inženýr "bílý pes" a kuchař že je "hnědý pes". Přeformulujeme-li úlohu do nového obsahu těchto pojmů, otázka pak zní - "jaké barvy je teriér?". Z naší teorie pak vyplývá, že "teriér je bílé barvy". Toto jest problém tzv. interpretace primitivních (prvotních) pojmů, problém konkrétního modelu dané teorie.

1.3 Soustavy axiomů. Zkusme nyní rozřešit následující zebru, prvotní pojmy necháme stejné jako dříve. Axiomy jsou následující:

(1) Jarda nesedí vlevo,
(2) Pavel je kuchař,
(3) uprostřed není zahradník,
(4) vpravo je Jirka,
(5) Pavel sedí vlevo.

Srovnáme-li tuto zebru s předcházející, vidíme, že 5.axiom je zde již naprosto zbytečný, neboť se dá odvodit z prvních čtyř axiomů. Je zřejmé, že se vždy snažíme mít axiomů co možná nejméně (pokud to ovšem někdy není kupříkladu na úkor srozumitelnosti) a hlavně se je snažíme volit tak, aby na sobě nebyly závislé, tj. aby některý z nich se nedal logicky odvodit ze zbývajících. To je problém tzv. nezávislosti axiomů.

Pokračujme nyní v dalších zebrách, prvotní pojmy jsou stále stejné. Pouze axiomy měníme, kupř. takto:

(1) Jarda nesedí vlevo,
(2) Pavel je kuchař,
(3) uprostřed není zahradník,
(4) Jirka je uprostřed,
(5) inženýr je vpravo.

Opět logickými úvahami dospíváme postupně k následujícím tvrzením:

(6) Jarda sedí vpravo,
(7) Pavel sedí vlevo,
(8) Jarda je inženýr,
(9) kuchař je vpravo,
(10) zahradník je uprostřed.

Najednou vidíme, že jsme se dostali do sporu. Axiom (3) totiž odporuje vyvozenému tvrzení (10). Je zřejmé, že úloha nemá žádné řešení, dané axiomy nedávají žádnou teorii, neboť již svým zadáním - ač to není na první pohled vidět - si navzájem odporují. Při volbě axiomů musíme být nanejvýš opatrní, nelze je volit zcela libovolně. Jedná se o problém tzv. bezespornosti soustavy axiomů, kterýžto zvláště u složitějších matematických teorií nemusí být zdaleka snadný.

Uveďme konečně poslední typ zebry, prvotní pojmy jsou stejné, axiomy následující:

(1) Jarda nesedí vlevo,
(2) Pavel je kuchař,
(3) inženýr sedí vpravo,
(4) Jarda není zahradník.

Lehko zjistíme, že

(5) Jarda sedí vpravo,

a to je asi vše. Úloha není jednoznačná, máme volbu dvou možností:

(6_1) Pavel sedí vlevo či (6_2) Pavel sedí uprostřed.

Podle toho potom dostáváme, že

(7_1) Jirka je zahradník, či (7_2) Jirka je zahradník.

Je vidět, že jsme se dostali do zajímavé situace, naše úloha není v jistém smyslu jednoznačná. Z axiomů nikterak neplyne, kde by měl sedět Pavel. Jsou dvě možnosti, dvě teorie - v jedné Pavel sedí vlevo, v druhé uprostřed. Povšimněte si přitom, že v každém případě - ať již Pavel sedí vlevo či uprostřed - vychází, Jirka je zahradník a Jarda inženýr. Abychom ovšem dosáhli úplné jednoznačnosti naší úlohy, museli bychom k axiomům (1) - (4) přidat buďto jako axiom tvrzení (6_1) anebo tvrzení (6_2). Tím pak dostáváme již dvě jednoznačné teorie.

Viděli jsme, že naše soustava axiomů nebyla úplná, k dosažení jednoznačnosti jsme potřebovali ještě některé axiomy přidat. Je to tzv. problém úplnosti soustavy axiomů. Jako příklad uveďme v této souvislosti tzv. "pátý Eukleidův postulát o rovnoběžkách". Vyjdeme opět z axiomů (1) - (2) pro geometrii, jak jsme je uvedli v 1.1 na začátku, definujeme pojem rovnoběžek a zajímáme se, zda platí následující tvrzení:

(axiom o rovnoběžkách): "Daným bodem lze vést k dané přímce právě jednu rovnoběžku" (je snad jasné, co se tím míní).

Ukážeme, že z axiomů (1) - (2) nelze toto tvrzení, tento "axiom" ani dokázat, ani vyvrátit - tedy soustava axiomů (1) - (2) není úplná. Zkonstruujeme příklad tzv. Lobačevského geometrie. Prvotní pojmy "rovina, přímka, bod" interpretujeme následovně (kreslete!):

"rovina" = vnitřek kruhu v rovině,
"přímky" = tětivy této kružnice (bez krajních bodů),
"body" = vnitřní body tohoto kruhu.

Lehko se ukáže, že axiomy (1) - (2) jsou splněny a že daným "bodem" lze vést k dané "přímce" více než jednu "rovnoběžku" (dokonce jich lze vést nekonečně mnoho).

Vidíme zároveň, že axiomy (1) - (2) zdaleka necharakterizují pojmy, pod kterými si obvykle představujeme "bod, přímku, rovinu". Abychom toho docílili, je zřejmě nutné přidat k axiomům (1) a (2) ještě některé další axiomy. Jedním by byl asi "axiom o rovnoběžkách" (tím pak dostaneme tzv. eukleidovské geometrie). Nebudeme se těmito problémy nikterak zabývat, poznamenejme pouze, že k axiomům (1) a (2) můžeme také přidat negaci axiomu o rovnoběžkách, tj. axiom, že k dané přímce lze vést daným bodem více rovnoběžek - anebo též žádnou rovnoběžku (tím pak dostaneme tzv. neeukleidovské geometrie).

1014-7781

B. DEFINICE

1.4 Existence a jednoznačnost definovaných pojmů

Věnujme se nyní dalšímu problému, a to budování matematických teorií. Předpokládejme, že máme dány některé prvotní primitivní pojmy a soustavu axiomů o těchto pojmech. V teorii nyní můžeme z axiomů odvozovat další věty, můžeme definovat nové pojmy a pracovat s nimi. Existují různé typy definic - ať již pro zavádění nových pojmů, pro vymezení jistých jejich vlastností - v přednášce z logiky se naučíte klasifikovat definice podle různých kritérií. Těmito problémy se zde zabývat nebudeme, na příkladech však ukážeme, s jakými úskalími se můžete při definování pojmů setkat.

(a) Uveďme si příklad z geometrie. Předpokládejme, že již víme, co je to trojúhelník v rovině a co je kružnice. Chceme definovat pojem "kružnice trojúhelníku opsaná". Vyslovíme definici a tím ovšem naše práce nekončí. Musíme zkoumat dvě důležité věci:

1) je-li kružnice trojúhelníku opsaná již jednoznačně určená, tj. neexistuje-li takových kružnic více,

2) existuje-li ke každému trojúhelníku kružnice jemu opsaná - není-li tomu tak, pak se snažíme alespoň najít třídu trojúhelníků, ke kterým existuje.

V prvním případě jsme tedy zkoumali jednoznačnost a v druhém existenci nově definovaného pojmu.

(b) Uveďme ještě příklad. Představte si, že byste definovali symbol $\sqrt{2}$ takto:

" $\sqrt{2}$ je takové racionální číslo x, pro které platí $x^2 = 2$ ". Sami jistě víte (viz třeba 46.8a), že žádné racionální číslo x se žádanou vlastností neexistuje. Zkusili byste tedy definici jinou:

"Symbolem $\sqrt{2}$ označíme takové reálné číslo x, pro které platí $x^2 = 2$ ".

V tomto případě lze dokázat, že takové číslo sice existuje, ale není určeno jednoznačně.

Z obou příkladů je tedy vidět, že je užitečné vždy zkoumat existenci a jednoznačnost definovaných pojmů.

1.5 Korektnost. Na dalších příkladech ukážeme, že v řadě definic musíme být nanejvýš obezřetní.

(a) Představte si, že chcete definovat jistou spojitou funkci f na množině všech reálných čísel a znáte již funkční hodnoty této funkce pro všechna racionální čísla. Zvolíte nyní libovolné reálné číslo $\xi \in E_1$ a chcete definovat hodnotu $f(\xi)$. To zařídíte kupříkladu následovně - vezmete takovou posloupnost racionálních čísel $\{r_n\}$ tak, aby $\lim r_n = \xi$ a definujete $f(\xi) = \lim f(r_n)$.

Co musíte všechno ověřit, aby tato definice byla v pořádku:

(I) musíte si především uvědomit, že ke <u>každému</u> reálnému číslu ξ můžete nalézt posloupnost racionálních čísel s uvedenou vlastností,

(II) musíte ukázat, že limita $\lim f(r_n)$ existuje vlastní (tak tomu bude například, je-li funkce f "monotonní" na množině racionálních čísel - objasněte podrobněji!),

(III) musíte ukázat, že hodnota $f(\xi)$ nezávisí na "výběru" posloupnosti $\{r_n\}$, víte dobře, že k danému ξ můžete sestrojit více posloupností racionálních čísel s uvedenou vlastností, tj. musíte dokázat toto:

"jsou-li $\{r_n\}$, $\{p_n\}$ dvě posloupnosti racionálních čísel s vlastností $\lim r_n = \lim p_n = \xi$, potom $\lim f(r_n) = \lim f(p_n)$",

(IV) musíte si konečně uvědomit, že hodnota $f(\xi)$ byla již definována pro ξ racionální, proto je nutné ověřit, že "nová" definice předepisuje stejnou hodnotu $f(\xi)$ i v tomto případě, tj. musíte dokázat toto:

"je-li ξ racionální a je-li $\{r_n\}$ posloupnost racionálních čísel taková, že $\lim r_n = \xi$, potom $f(\xi) = \lim f(r_n)$".

Vidíme tedy, že v bodech (I) a (II) jsme se zabývali existencí, zatímco body (III) a (IV) vyjadřují to, čemu obvykle říkáme korektnost definice.

(b) A ještě jeden příklad. Definujte pojem: "Funkce F je primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b)."

Sami jistě dobře víte, že

(I) ne ke každé funkci existuje primitivní funkce (problém existence),

(II) primitivní funkce není určena jednoznačně, každá funkce určuje celou třídu primitivních funkcí, z nichž každé dvě se liší o konstantu na daném <u>intervalu</u> (problém jednoznačnosti).

Zamysleme se nyní nad symbolem $\int f(x)\,dx$. Co znamená? Jednu z primitivních funkcí k funkci f? Anebo celou třídu primitivních funkcí?

1014-7781

Co tedy pak rozumíme zápisem

$$\int \sin x \quad dx = - \cos x + K \qquad v\ E_1 \quad ???$$

Vlevo v této "rovnosti" je jedna funkce anebo třída funkcí? A jak chápat rovnost

$$\int (f(x) + g(x)\ )\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx \quad ?$$

Vrcholem všeho je pak asi "obrázek"

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \log |x| + K \qquad \text{pro} \quad x \neq 0 \quad .$$

Co je na něm "podezřelého" ??? Proto se opět zamyslete nad korektností zaváděného symbolu a operací s ním.

C. NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY

$\boxed{1.6}$ **Příklad.** Definujte pojem vlastní limity posloupnosti reálných čísel. Ukažte, že

(I) pokud existuje $\lim x_n$, je jednoznačně určena (jednoznačnost),

(II) limita $\lim x_n$ nemusí vždy existovat; je-li posloupnost $\{x_n\}$ omezená a monotonní, pak $\lim x_n$ existuje (existence).

Všimněme si nyní podrobněji druhého bodu. Vidíme, že $\lim x_n$ může, ale nemusí vždy existovat. Úkolem, který před námi stojí, je určit třídu všech posloupností, které mají vlastní limitu. Hledáme tudíž nutné či postačující (nejraději nutné a postačující) podmínky pro existenci vlastní limity.

Ukažte, že

(α) omezenost posloupnosti $\{x_n\}$ je nutnou, ale nikoliv postačující podmínkou existence vlastní $\lim x_n$,

(β) omezenost a monotonie $\{x_n\}$ je postačující, ale nikoliv nutnou podmínkou existence vlastní $\lim x_n$,

(γ) Bolzano-Cauchyova podmínka je nutnou a postačující podmínkou.

Nalezněte ještě nějaké další postačující či nutné podmínky!

$\boxed{1.7}$ **Příklad.** V příkladu 1.5.b jsme zkoumali primitivní funkci k dané funkci na intervalu. Uvědomte si ještě, že

(a) ne ke každé funkci existuje primitivní funkce,

(b) ke každé spojité funkci existuje primitivní funkce (spojitost funkce je tedy postačující podmínka pro existenci primitivní

1014-7781

funkce; třída funkcí, majících primitivní funkci obsahuje tedy třídu všech funkcí spojitých),

(c) primitivní funkce může existovat i v případě, kdy f není spojitá na (a,b),

(d) má-li funkce f mít primitivní funkci na (a,b), musí nutně f být na (a,b) dabouxovská, tedy darbouxovskost funkce je nutnou podmínkou existence primitivní funkce,

(e) je-li f darbouxovská na (a,b), nemusí mít ještě primitivní funkci (použijte třeba 11.6); darbouxovskost f není tedy postačující podmínkou pro existenci primitivní funkce,

(f) má-li f primitivní funkci, musí být nutně první Baireovy třídy (viz 12.2),

(g)* lze sestrojit funkci 1.Baireovy třídy, která je darbouxovská, ale ještě nemá primitivní funkci (viz 4.17a).

1.8 Cvičení. Buďte (a,b), (c,d) disjunktní intervaly v E_1, nechť funkce f je definována v $(a,b)\cup(c,d)$. Řekněme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f v $(a,b)\cup(c,d)$, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)\cup(c,d)$. Zkoumejte existenci a jednoznačnost takto definované primitivní funkce (vzpomeňte si též na "obrázek" z 1.5.b).

1.9 Cvičení. Buďte opět (a,b),(c,d) disjunktní intervaly v E_1. Řekneme, že funkce F je P-funkcí k funkci f v $(a,b)\cup(c,d)$, jestliže buďto $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$ anebo $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (c,d)$ a funkce f, F jsou definovány v $(a,b)\cup(c,d)$.

Zkoumejte existenci a jednoznačnost P-funkcí.

1.10 Cvičení

(a) Buď $M \subset E_1$ množina reálných čísel. Číslo $a \in E_1$ nazveme středem množiny M, jestliže pro každou dvojici $x,y \in M$, $x<y$ platí $x<a<y$.

Zkoumejte existenci a jednoznačnost takto definovaného pojmu, tj. nalezněte třídu množin M, které mají střed a vyšetřete, zda tento střed je jednoznačně určen.

(b) Nechť funkce f je definována na intervalu $\langle a,b\rangle$. Středem funkce f nazveme každé číslo $\xi \in a,b$, pro něž $f'(\xi) = 0$. Proveďte diskusi jako v předchozím bodě!

1.11 Cvičení. Zkoumejte existenci a jednoznačnost následujících pojmů: poloměr konvergence mocninné řady, funkce riemannovsky, newtonovsky či lebesgueovsky integrovatelné, supremum a infimum, inversní funkce, limita posloupnosti funkcí.

V dalších tématech budete mít dostatek příležitostí zkoumat nové pojmy. Nezapomeňte vždy provést důkladný rozbor jejich definic!

TÉMA 2

Formulace problémů

Obsah: A. Hledání problémů.
B. Úplná charakterizace.

A. HLEDÁNÍ PROBLÉMŮ

V tomto oddíle chceme ilustrovat (většinou na příkladech), že matematická analýza vznikla formulováním a řešením jistých problémů; pokusíme se naznačit, jak další problémy, které se zcela přirozeně objevují v průběhu rozvoje matematické analýzy, hledat a formulovat.

2.1 Příklad. Znáte větu, že "spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá na něm svého maxima". Vznikají přirozené otázky:

(a) zda i nespojité funkce musejí na uzavřeném intervalu nabývat svého maxima,

(b) je-li odpověď na (a) negativní, zda tedy nespojité funkce mohou nabývat maxima,

(c) zda uzavřenost intervalu je v uvedené větě podstatná,

(d) jak může vypadat množina bodů, v nichž spojitá funkce nabývá maxima (co se tím rozumí, vysvětlíme v oddíle B).

Takovým způsobem byste měli vždy postupovat a probírané věty analyzovat.

2.2 Příklad. Napíšeme-li definici spojitosti funkce f v bodě x_0 pomocí kvantifikátorů

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; \big(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \big),$$

vzniká otázka, co se stane, přehodíme-li v uvedené definici první dva kvantifikátory, tj. definujeme-li třeba (viz též téma 8.A):

Funkce f je "silně spojitá" v bodě x_0, jestliže

$$\exists \delta > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \forall x \; \big(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \big).$$

Má tato definice smysl? A jak vypadají funkce, které jsou "silně spojité"? Je dobré si tento problém promyslet, zodpovědět jej a tak si vlastně ujasnit, proč definujeme spojitost funkce právě výše uvedeným způsobem.

2.3 Příklad. V tématu 9 ukážeme, jak je možno zobecňovat pojem spojitosti funkce a zavedeme tzv. symetrickou spojitost. A v této souvislosti vyvstane celá řada otázek. Od problémů jednoduchých až po problémy třeba i dodnes neřešené. Uveďme některé:

(a) jak je to se symetrickou spojitostí složené funkce?
(b) platí "Rolleova věta" i pro symetrickou spojitost?
(c) je každá symetricky spojitá funkce darbouxovská?
(d) je každá symetricky spojitá funkce měřitelná?

2.4 Algebraické operace.

(a) Definujeme-li jistou vlastnost pro nějakou třídu funkcí (kupř. hölderovskost, riemannovskou integrovatelnost, omezenost, monotonii), můžeme se vždy ptát, zda součet dvou funkcí či násobek funkce s touto vlastností má též danou vlastnost.

(b) Totéž můžeme zkoumat pro skládání funkcí. Je známo, že složení dvou spojitých funkcí je spojitá funkce (uveďte přesně příslušnou větu!), zatímco již třeba složení dvou absolutně spojitých funkcí nemusí být absolutně spojitá funkce. Je proto nutné hledat nějaké další podmínky, aby toto již platilo.

(c) Obdobný problém lze zkoumat též pro limitní přechody; ptáme se třeba, zda limita posloupnosti spojitých funkcí je spojitá funkce či zda je nutné opět přidat ještě další podmínky pro platnost této implikace.

B. ÚPLNÁ CHARAKTERIZACE

V tomto oddíle se pokusíme vysvětlit, co se rozumí pojmem "úplná charakterizace" (snad česky hezčí by bylo "úplná charakteristika").

2.5 Příklad. Lze ukázat, že množina hromadných hodnot posloupnosti reálných čísel je vždy uzavřená. Nabízí se otázka, zda naopak každá uzavřená množina je množinou hromadných hodnot nějaké posloupnosti. Či zda pouze isolované nebo kompaktní uzavřené množiny mají tuto vlastnost. O tomto konkrétním problému se dočtete v 39.6.b.

2.6 Příklad. Je známo, že reálná konvexní funkce na intervalu I má v tomto intervalu s výjimkou snad spočetné množiny všude vlastní derivaci. Lze ukázat, že tato charakterizace je úplná - zadáme-li v intervalu I spočetnou množinu S, existuje konvexní funkce,

1014-7781

která má derivaci právě ve všech bodech $I \setminus S$ (viz téma 13). Po zavedení konvexity pro funkce více proměnných lze položit analogickou otázku - charakterizovat množinu bodů, kde konvexní funkce nemá totální diferenciál. Lze ukázat, že tato množina nemusí být spočetná, ale musí být nulová a první kategorie. Poslední charakterisace není úplná; zdá se, že dodneška tato otázka není rozřešena.

2.7 Cvičení.

(a) Pokuste se podat úplnou charakterisaci množiny bodů spojitosti libovolné funkce (viz téma 5).

(b) Podejte úplnou charakterisaci množiny bodů nespojitosti monotonní funkce.

(c) Buď (P, ρ) metrický prostor. Zřejmě $\rho(P \times P) \subset \langle 0, +\infty)$. Nalezněte úplnou charakterisaci těchto množin, tj. rozřešte úlohu, zda ke každé množině $M \subset \langle 0, +\infty)$ existuje metrický prostor (P, ρ) tak, že $\rho(P \times P) = M$.

1014-7781

T É M A 3

Lokální a globální vlastnosti

Obsah: A. Lokální a globální vlastnosti.
B. Lokalizace metrických vlastností.

A. LOKÁLNÍ A GLOBÁLNÍ VLASTNOSTI

3.1 Příklady. V tomto tématu se pokusíme - především na příkladech - ukázat rozdíl mezi lokálními a globálními vlastnostmi jistých pojmů. Začneme s jednoduchými příklady.

(a) V prvním semestru se definuje pojem spojitosti funkce v bodě (zopakujte definici!). Víme-li již, co je to spojitost funkce v bodě a máme-li funkci f definovanou na intervalu $(a,b) \subset E_1$, řekneme, že funkce f je spojitá na množině (a,b), jestliže je spojitá v každém bodě intervalu (a,b).

(b) Naopak, mějme nyní funkci f definovanou na množině $M \subset E_1$, buď $x_0 \in M$. Definujte pojem "funkce f nabývá na množině M svého maxima v bodě x_0". Víme-li nyní, co znamená pojem nabývat maxima na množině a máme-li funkci f definovanou na intervalu (a,b) a $x_0 \in (a,b)$, můžeme definovat pojem "funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního maxima", a to takto:

Funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního maxima, jestliže existuje okolí $U(x_0) \subset (a,b)$ bodu x_0 tak, že funkce f nabývá na množině $U(x_0)$ svého maxima v bodě x_0.

Vidíme zde jisté rozdíly. "Spojitost funkce v bodě" a "nabývání lokálního maxima" jsou lokální vlastnosti, zatímco "spojitost funkce na množině" a "nabývání maxima na množině" jsou globální vlastnosti. A ještě jeden rozdíl je v příkladech (a) a (b) - "spojitost funkce" jsme nejdříve definovali v bodě, potom na množině, naopak "nabývání maxima" jsme definovali nejdříve na množině, a teprve potom v bodě.

3.2 Poznámky.

(a) Mějme nyní definovánu jistou vlastnost (V) funkce f v bodě (definice lokálního charakteru). Chceme definovat i vlastnost (V) funkce f na množině (globálně). Obyčejně definici vyslovíme takto: "Funkce f má vlastnost (V) na množině M, jestliže funkce f má vlastnost (V) v každém bodě množiny M".

(b) Máme-li naopak definovánu jistou vlastnost (W) funkce f na množině a chceme definovat i vlastnost (W) funkce f v bodě, obvykle definujeme: "Funkce f má vlastnost (W) v bodě x_o, jestliže existuje okolí $U(x_o)$ bodu x_o tak, že funkce f má vlastnost (W) na množině $U(x_o)$".

(c) Přecházíme-li od definice lokálního charakteru k definici globálního charakteru (případ (a)), nemusíme na množinu M klást žádné zvláštní požadavky. Naproti tomu při přechodu od globálních vlastností k lokálním potřebujeme v uvedeném typu definice (b) pojem okolí, musíme proto uvažovat pouze podmnožiny E_1 či alespoň podmnožiny nějakého metrického prostoru (kde víme, co je to "okolí").

3.3 Problémy.

(a) Uvažujme opět případ (a) - máme definován nejdříve lokální pojem v bodě, poté definujeme podle 3.2a globální pojem na množině. Nyní ale můžeme opět použít 3.2.b a definovat lokální pojem. Dostaneme tentýž pojem, z kterého jsme vyšli? Uveďme raději příklad.

(α) Nejdříve definujeme "spojitost funkce v bodě".

(β) Dále definujeme "spojitost funkce na množině" (jako spojitost v každém bodě).

(γ) Konečně se pokusíme definovat (na základě znalostí z (β)): "Funkce f je "spojitá" v bodě, existuje-li okolí tohoto bodu tak, že f je spojitá na tomto okolí."

Dávají definice (α) a (γ) tytéž pojmy? Jinými slovy, platí věta:

"Funkce f je spojitá v bodě x, právě když je spojitá v jistém okolí tohoto bodu." ?

(b) Úvahy odstavce (a) můžeme provést i v druhém případě. Naznačíme pouze schematicky:

definice globální vlastnosti $\longrightarrow$ definice lokální vlastnosti (pomocí okolí z globální vlastnosti) $\longrightarrow$ opět definice globální vlastnosti (z lokální vlastnosti v každém bodě).

Dostaneme totéž? Rozhodněte! Uveďte ještě nějaké příklady k (a) i (b)!

3.4 Problém. Leckdy v matematické analýze definujeme jistý pojem (V) "globálně" i "lokálně" nezávisle na sobě. Ptáme se pak vždy, zda platí věty typu:

(I) Funkce f má vlastnost (V) na množině M, právě když má tuto vlastnost v každém bodě.

(II) Funkce f má vlastnost (V) v bodě, právě když existuje okolí, kde má f vlastnost (V).

Ilustrujte toto na následujících příkladech, rozhodněte, zda platí věty typu (I) a (II):

(a) "funkce f je rostoucí v bodě" a "funkce f je rostoucí na intervalu",

(b) "funkce f je spojitá v bodě" a "funkce f je spojitá na intervalu",

(Jak definovat spojitost funkce na intervalu bez spojitosti funkce v bodě?),

(c) "posloupnost f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na množině" a "posloupnost f_n konverguje stejnoměrně k funkci f v bodě" (viz kupř. 29.B).

Poznámka. V posledním příkladu nejde již o vlastnost jedné funkce, nýbrž se definuje jista vlastnost posloupnosti funkcí!

3.5 Poznámka. Uvědomte si, že jisté pojmy se definují někdy pouze globálně, nikoliv lokálně (či naopak) - bylo by sice možné je definovat i lokálně, ale definice by nebyla příliš užitečná (viz kupř. pojmy z 3.6c či e).

3.6 Cvičení. Zkoumejte následující pojmy. V případě, že znáte pouze jejich globální (lokální) definice, pokuste se ve smyslu 3.2a a 3.2.b i o definice lokálního (globálního) charakteru a zkoumejte užitečnost takto nově definovaných pojmů:

(a) konvexita funkce v bodě a na intervalu,
(b) omezenost funkce,
(c) stejnoměrná spojitost funkce,
(d) Darbouxova vlastnost derivace,
(e) existence primitivní funkce,
(f) konstantnost funkce.

3.7 Poznámka. Uvědomte si též, že některé definice vlastnosti funkcí jsou závislé na chování funkce v jednom bodě a některé naopak ne. Ilustrujte to na následujících příkladech:

(a) pojmy z 3.6,
(b) monotonie funkce,

(c) funkce f má Riemannův či Newtonův integrál,
(d) spojitost funkce na množině.

B. LOKALIZACE METRICKÝCH VLASTNOSTÍ

3.8 **Definice.** V teorii metrických prostorů máme definovánu řadu pojmů: otevřenost a uzavřenost, omezenost, kompaktnost, separabilitu, souvislost, konvexitu (v E_n) aj. Pokusíme se nyní o lokalizaci těchto pojmů.

Buď (V) nějaká vlastnost definovaná pro třídu metrických prostorů. Buď (P,ρ) metrický prostor, $a \in P$. Řekneme, že (P,ρ) má v bodě a lokální

(V1) vlastnost, jestliže existuje okolí U bodu a tak, že (U,ρ) má vlastnost (V),

(V2) vlastnost, jestliže ke každému okolí W bodu a existuje okolí $U \subset W$ bodu a tak, že (U,ρ) má vlastnost (V),

(V3) vlastnost, jestliže existuje okolí W bodu a tak, že pro každé okolí $U \subset W$ bodu a prostor (U,ρ) má vlastnost (V).

3.9 **Cvičení.**

(a) Dokažte, že $(V3) \Longrightarrow (V2) \Longrightarrow (V1)$.

(b) Nechť (P,ρ) má vlastnost (V). Pro které i $(i=1,2,3)$ má lokální (Vi) vlastnost v každém bodě $a \in P$?

(c) Připomeňme kupříkladu pojmy:
lokálně souvislý prostor, lokálně kompaktní prostor
a zkoumejte, pomocí jakých lokálních (Vi) vlastností vznikly.

(d) Metrický prostor (P,ρ) se nazývá l o k á l n ě ú p l n ý, jestliže ke každému bodu existuje okolí, které je úplné. Ukažte, že v tomto případě $(V1) \Longleftrightarrow (V2)$.

3.10 **Lokální separabilita.** Metrický prostor je lokálně separabilní, jestliže je v každém bodě lokálně separabilní ve smyslu (V1).

(a) Kartézský součin separabilního a nespočetného diskrétního prostoru je lokálně separabilní a není separabilní. Dokažte!

(b) Buď $P = E_2$. Položte

1014-7781

$$d([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} |y_1 - x_1| , & \text{jestliže } x_2 = y_2 , \\ \sqrt{1 + (x_1 - y_1)^2} & \text{pro } x_2 \neq y_2 \end{cases}$$

a ukažte, že (E_2,d) je lokálně separabilní neseparabilní metrický prostor.

(c) Buď (P,ρ) metrický prostor. Pro každé $x\in P$ položme $\varphi(x) = \sup\{r\in E_1;\ U(x,r) \text{ je separabilní}\}$. Existuje-li $x\in P$ pro něž $\varphi(x) = +\infty$, je $\varphi \equiv +\infty$. Dokažte!

Je-li (P,ρ) lokálně separabilní prostor, který není separabilní, potom

$0<\varphi(x) < +\infty$ pro každé $x\in P$,

$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \rho(x,y)$ pro každé $x,y\in P$, speciálně funkce φ je spojitá na P,

$U(x, \varphi(x))$ je separabilní prostor (vzhledem k metrice ρ).

Dokažte!

(d) Buď (P,ρ) lokálně separabilní a souvislý prostor. Potom (P,ρ) je separabilní. Dokažte!

N á v o d. Nechť (P,ρ) není separabilní. Buď $A\subset P$ separabilní. Buď $f(A)\subset A$ spočetná a hustá v A. Položme $\Phi(A) = \bigcup_{x\in f(A)} U(x, \varphi(x))$. $(\Phi(A),\rho)$ je separabilní, $\Phi(A)$ je otevřená v P, $f(A) \subset \Phi(A)$. Buď $a_0\in P$ a položme $A_0 = \{a_0\}$, $A_{n+1} = \Phi(A_n)$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Množina B je neprázdná a otevřená. Ale B je také uzavřená.

3.11 Literatura. O obecných principech lokalizace metrických vlastností, jakož i o konkrétních případech (lokální uzavřenost, lokálně první kategorie aj.) se lze dočíst v K. Kuratowski, Topology I (ruský překlad z roku 1966).

1014-7781

TÉMA 4

Příklady množin a funkcí

Obsah: A. Množiny.
B. Funkce.

V tomto tématu je uvedena řada příkladů množin a funkcí v E_1 (jednoduchých i poněkud složitějších), které jsou poučné nejen samy o sobě, ale jsou také užitečné např. při konstrukci dalších příkladů množin a funkcí. Zároveň také ilustrují složitost reálné osy.

Další příklady tohoto druhu se vyskytují v mnoha jiných tématech; nemá smyslu je zde všechny opakovat.

A. MNOŽINY

4.1 Racionální čísla. Množina R všech racionálních čísel v E_1 má tyto vlastnosti:

(i) R je spočetná,

(ii) R je hustá v E_1,

(iii) R je množina typu F_σ a není typu G_δ,

(iv) $\lambda_1 R = 0$.

N á v o d. K důkazu, že R není typu G_δ, užijte Baireovy věty o kategoriích.

4.2 Cvičení. Na základě 4.1 odvoďte některé vlastnosti množiny všech iracionálních čísel.

4.3 Příklad. Nechť $\{r_n\}$ je posloupnost všech racionálních čísel v E_1.

Položme $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \dfrac{1}{m\,2^n}\,,\ r_n + \dfrac{1}{m\,2^n}\right)$, $B = E_1 \setminus A$.

Dokažte, že množiny A, B mají následující vlastnosti:

(i) A je množina typu G_δ, která není množinou typu F_σ,

(ii) B je množina typu F_σ, která není množinou typu G_δ,

(iii) A je hustá v E_1,

(iv) $\lambda_1 A = 0$,

(v) A je nespočetná, B je nespočetná.

4.4 Příklad. Existuje množina $M \subset E_1$, která není ani typu F_σ ani typu G_δ.

N á v o d. Položte $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = R \cap (0, 1/2)$, $M_2 = (1/2, 1) \setminus R$.

4.5 Cantorovo diskontinuum. Označme $R_0 = \langle 0,1\rangle$,

$R_1 = \langle 0,1\rangle \setminus (1/3,2/3) = \langle 0,1/3\rangle \cup \langle 2/3,1\rangle$,

$R_2 = R_1 \setminus [(1/9,2/9) \cup (7/9,8/9)] = \langle 0,1/9\rangle \cup \langle 2/9,1/3\rangle \cup \langle 2/3,7/9\rangle \cup \cup \langle 8/9,1\rangle$, ... atd.;

máme-li již sestrojenou množinu R_n, dostaneme množinu R_{n+1} tak, že ze všech intervalů množiny R_n vynecháme prostřední třetiny - - podejte přesnou definici pomocí matematické indukce!

Zřejmě $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots$ a všechny tyto množiny jsou uzavřené.

Označme $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$ (Cantorovo diskontinuum).

Dokažte:

(a) $C = \langle 0,1\rangle - \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$, kde M_n je sjednocení disjunktních otevřených intervalů $M_{n,i}$ $(i=1,2,\dots 2^{n-1})$, délka každého intervalu $M_{n,i}$ je 3^{-n} a každý interval $M_{n,i}$ je "umístěn" v prostřední třetině některého z n disjunktních uzavřených intervalů, které tvoří množinu $\langle 0,1\rangle \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} M_j$.

(b) Množina C má tyto vlastnosti:

(i) C je uzavřená

(ii) $\lambda_1 C = 0$,

(iii) $x \in C \Longleftrightarrow x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, kde $a_n \neq 1$ pro každé $n \in N$, (triadický rozvoj x),

(iv) množina C je nespočetná,

(v) množina C je řídká,

(vi) množina C je dokonalá.

4.6 Diskontinua kladné míry. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje řídká uzavřená množina $F \subset \langle 0,1\rangle$ taková, že $\lambda_1 F > 1 - \varepsilon$.

N á v o d. Položte $F = \langle 0,1\rangle \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$, kde $\{r_n\}$ je posloupnost všech racionálních čísel z $\langle 0,1\rangle$.

Jiný návod. Protože $\lambda_1(\langle 0,1\rangle \setminus R) = 1$, plyne z vlastností Lebesgueovy míry existence uzavřené množiny $F \subset \langle 0,1\rangle \setminus R$, pro niž $\lambda_1 F > 1 - \varepsilon$.

4.7 Příklad. Pro každé $\alpha \in \langle 0,1)$ existuje řídká uzavřená množina $F \subset \langle 0,1\rangle$ tak, že $\lambda_1 F = \alpha$.

Návod. Zvolte $H \subset \langle 0,1\rangle$, $\lambda_1 H > \alpha$ podle předchozího příkladu a položte $F = H \setminus \langle 0, \eta\rangle$, kde η je vhodné kladné číslo.

Jiný návod. Nechť $\{s_n\}$ je posloupnost kladných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} s_n \leq 1$. Z intervalu $\langle 0,1\rangle$ vynecháme otevřený interval délky s_1 se středem 1/2. Dostaneme dva intervaly; levý z nich označíme P_0 a pravý P_1. Předpokládejme, že jsme již definovali uzavřené intervaly $P_{a_1,\ldots,a_n}$, kde $\{a_1,\ldots,a_n\}$ je libovolná n-tice vytvořená z čísel 0,1. Z intervalu $P_{a_1,\ldots,a_n}$ vynecháme otevřený interval o středu splývajícím se středem intervalu $P_{a_1,\ldots,a_n}$ a o délce s_{n+1}. Levý z intervalů, které obdržíme, označíme $P_{a_1,\ldots,a_n,0}$, pravý $P_{a_1,\ldots,a_n,1}$. Označme R_n sjednocení všech intervalů $P_{a_1,\ldots,a_n}$, kde $\{a_1,\ldots,a_n\}$ je n-tice vytvořená z čísel 0,1. Definujme $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$. Potom F je řídká uzavřená množina, pro niž $\lambda_1 F = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} s_n$.

Poznámka. Položíme-li speciálně $s_n = 1/3^n$, obdržíme Cantorovo diskontinuum ze 4.5.

4.8 Cvičení. Uvažte, zda lze v předchozím případu volit též $\alpha = 1$.

4.9 Poznámka. Rozmyslete si, jaké znáte klasifikace "velikosti" množin v E_1. Je to jednak klasifikace podle počtu prvků (mohutnosti - prázdná, konečná, nekonečná spočetná, nespočetná), klasifikace topologická (prázdná, řídká, první kategorie, hustá, reziduální) a klasifikace podle míry (prázdná, míry nula, konečné míry, plné míry - tj. míra doplňku je nula). Povšimněte si podrobně následujících vztahů mezi těmito klasifikacemi:

(i) konečná množina je řídká a má míru nula,
(ii) nekonečná spočetná množina nemusí (ale může - uveďte příklad)

být řídká, je však vždy první kategorie a míry nula,

(iii) nespočetná množina může být řídká, může být též hustá, první kategorie a též reziduální,

(iv) nespočetná množina může mít míru nula, libovolnou konečnou míru nebo může být plné míry,

(v) řídká množina může mít míru nula, libovolnou konečnou míru, avšak nemůže být plné míry v žádném intervalu,

(vi) množina první kategorie může být plné míry.

N á v o d. Použijte 4.6.

(vii) reziduální množina může mít míru nula.

Rozmyslete si též ostatní vztahy mezi těmito klasifikacemi (viz také [G - O]).

$\boxed{4.10}$ Příklad. Je-li F uzavřená množina, existuje uzavřená množina $\Phi \subset F$ taková, že $\lambda_1(F \setminus \Phi) = 0$ a $\lambda_1(\Phi \cap I) > 0$ pro každý interval I, pro který $I \cap \Phi \neq \emptyset$.

N á v o d. Nechť G je sjednocení všech "racionálních intervalů" J, pro něž $\lambda_1(J \cap F) = 0$. Stačí položit $\Phi = F \setminus G$.

$\boxed{4.11^*}$ Příklad. Existuje měřitelná množina $A \subset E_1$ taková, že pro každý otevřený interval $I \subset E_1$ platí $\lambda_1(I \cap A) > 0$, $\lambda_1(I \setminus A) > 0$.

N á v o d. Nechť $\{I_n\}$ je posloupnost všech intervalů v E_1 s racionálními krajními body. Zvolte řídkou uzavřenou množinu F_1^1 kladné míry, $F_1^1 \subset I_1$; dále zvolte řídkou uzavřenou množinu kladné míry $F_1^2 \subset I_2 \setminus F_1^1$. Indukcí definujte řídké uzavřené množiny F_n^1, F_n^2 $(n \in N)$ kladné míry tak, aby platilo

(i) $F_n^1 \subset I_n \setminus \bigcup_{k<n} (F_k^1 \cup F_k^2)$,

(ii) $F_n^2 \subset I_n \setminus (F_n^1 \cup \bigcup_{k<n} (F_k^1 \cup F_k^2))$.

Pak stačí položit $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^1$.

J i n ý n á v o d. Nechť $I = \langle 0,1 \rangle$ a nechť C_0 je řídká uzavřená množina míry $1/3$ obsažená v I (viz 4.7). Jestliže $P \subset I$ je největší ze styčných intervalů množiny C_0 v I, buď C_1 řídká uzavřená množina míry $1/3^2$ obsažená v P. V nejdelším z omezených styčných intervalů množiny $C_0 \cup C_1$ zkonstruujeme uzavřenou řídkou

1014-7781

množinu C_2 míry $1/3^3$ atd. Označme $A_o = \bigcup_n C_n$ a buď A množina všech bodů $x + n$, kde $x \in A_o$, $n \in N$.

Poznámka. V obou případech je množina A dokonce typu F_σ.

4.12* Příklad. Existuje nekonečná posloupnost disjunktních měřitelných množin $A_n \subset E_1$ taková, že pro každý otevřený interval $I \subset E_1$ platí $\lambda_1(I \cap A_n) > 0$.

N á v o d. Podobně jako v předchozím příkladu zvolte $F_n^i \subset I_n \setminus (\bigcup_{j<i} F_n \cup \bigcup_{k<n} \bigcup_{j \leq k} F_k^j)$ pro $i, n \in N$, $i \leq n$ řídké uzavřené množiny kladné míry a položte $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} F_k^n$.

Poznámka. A_n jsou dokonce množiny typu F_σ.

4.13 Cvičení. (a)* Neexistuje měřitelná množina $A \subset E_1$ taková, že $\lambda_1(I \cap A) = \frac{1}{2} \lambda_1(I)$ pro libovolný otevřený interval $I \subset E_1$.

N á v o d: Použijte větu o hustotě (viz 8.19).

(b) Existuje nespočetný disjunktní systém měřitelných množin $\mathcal{M}$ takový, že pro každou množinu $M \in \mathcal{M}$ a pro každý otevřený interval $I \subset E_1$ platí $\lambda_1(I \cap M) > 0$?

(c) Sjednocení libovolného (třeba i nespočetného) počtu intervalů (nedegenerovaných libovolného druhu) je měřitelná množina v E_1.

N á v o d: Buď $G = \bigcup_\alpha \mathrm{Int}\,(I_\alpha)$. Protože G je otevřená, lze psát $G \subset \bigcup_\alpha I \subset G \cup \bigcup_n \{a_n, b_n\}$, kde $G = \bigcup_n (a_n, b_n)$ (důkaz lze provést také pomocí Vitaliovy věty).

4.14* Cvičení. Buďte $p, q \in N$, $q \geq 2$, $0 \leq p \leq q - 1$. Potom množina těch x, jejichž q-adický rozvoj neobsahuje číslici p, má míru nula.

B. FUNKCE

4.15 Dirichletova funkce. Nechť $D : x \longmapsto 0$ pro $x \in E_1$ iracionální, $D : x \longmapsto 1$ pro x racionální. Potom platí:

(i) D je nespojitá v každém bodě $x \in E_1$,

(ii) D nemá Riemannův integrál na žádném podintervalu E_1,

(iii) $D = 0$ s.v. v E_1,

(iv) D je funkce druhé Baireovy třídy, avšak není funkcí první Baireovy třídy.

Je-li φ spojitá funkce na E_1, zjistěte, ve kterých bodech je funkce $\varphi.D$ spojitá.

Sestrojte funkci $f : E_1 \longrightarrow E_1$ tak, aby f byla spojitá právě v bodech dané konečné množiny.

$\boxed{4.16}$ <u>Riemannova funkce.</u>

(a) Položte $\varphi(x) = 0$ pro x iracionální, $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ pro x racionální, $x = \frac{p}{q}$ (p,q celá nesoudělná, $q > 0$), $\varphi(0) = 1$. Potom

(i) φ je spojitá právě ve všech iracionálních bodech,

(ii) φ má Riemannův integrál přes libovolný interval,

(iii) φ nemá nikde derivaci.

N á v o d. Pro x iracionální použijte 46.6.a.

(iv) φ je funkce první Baireovy třídy.

Zkoumejte, pro která $k \in N$ má funkce φ^k konečnou variaci na intervalu $\langle 0,1 \rangle$!

(b)* Nechť $\{r_n\}$ je posloupnost všech radionálních čísel, nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Položte $\psi(x) = 0$ pro x iracionální, $\psi(r_n) = a_n$. (Takto definované funkce se nazývají zobecněné Riemannovy funkce.) Platí:

(i) Jestliže $a_n \longrightarrow 0$, je ψ spojitá ve všech iracionálních bodech (platí toto tvrzení "obráceně"?).

(ii)* Je-li $a_n \neq 0$ pro každé n, nemá funkce ψ derivaci v reziduální podmnožině E_1.

N á v o d. Položte $G_n = \{x \in E_1;$ existují r_k tak, že $|x - r_k| < n^{-1}$, $|a_n| > |x - r_n|\}$. Potom je G_n otevřená podmnožina a pro každé iracionální $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ neexistuje $\psi'(x)$.

(iii)* Existuje posloupnost $\{a_n\}$, $a_n > 0$ tak, že funkce ψ má derivaci na husté podmnožině v E_1.

N á v o d. Je-li $S \subset E_1 \setminus R$ spočetná podmnožina hustá v E_1 (uveďte příklad takové množiny) a je-li $\{s_n\}$ posloupnost všech jejích prvků, položte $a_n = \min\{(r_n - s_1)^2, \dots, (r_n - s_n)^2\}$.

(iv)* Existuje posloupnost $\{a_n\}$, $a_n > 0$ tak, že funkce ψ má derivaci s.v. v E_1.

1014-7781

N á v o d. Jsou-li $F_n \subset E_1 \setminus R$ uzavřené množiny takové, že $\lambda_1(E_1 \setminus \bigcup_n F_n) = 0$ (proč existují?), položte:

$a_n = \min\{(\mathrm{dist}\,(r_n,F_1))^2,\dots,(\mathrm{dist}(r_n,F_n))^2\}$. Funkce ψ má pak derivaci ve všech bodech množiny $\bigcup_n F_n$.

4.17 Cvičení.

(a) Funkce $\varphi : x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$, $x \in E_1$, $x \neq 0$, $\varphi(0) = 1$ je darbouxovská funkce první Baireovy třídy, ale nemá primitivní funkci.

(b) Položte $f : x \longmapsto x^\alpha \sin x^\beta$ pro $x \neq 0$,

$f : x \longmapsto 0$ pro $x = 0$. Zjistěte, pro které α, β je funkce f spojitá (resp. absolutně spojitá na $\langle -1,1\rangle$, resp. má konečnou variaci na $\langle -1,1\rangle$, resp. je lipschitzovská, resp. hölderovská, resp. má derivaci na E_1, resp. primitivní funkci na E_1, resp. je darbouxovská apod.).

4.18 Příklady. Nechť $\{r_n\}$ je posloupnost všech racionálních čísel.

(a) Položte $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-r_n)^{1/3}}{2^n}$. Dokažte, že

(i) f je spojitá na E_1,

(ii) f' existuje na E_1,

(iii) $f'(x) = +\infty$ pro x racionální,

(iv) $f(E_1) = E_1$,

(v) f je rostoucí na E_1,

(vi)* existuje iracionální číslo x tak, že $f'(x) = +\infty$.

N á v o d. Lze užít Baireovy věty o kategoriích.

(b) Funkce $g : x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-r_n}{2^n}$ je spojitá na E_1, má derivaci v iracionálních bodech, ale nemá derivaci v racionálních bodech.

(c) Funkce $h : x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n(x)}{2^n}$, kde $h_n(x) = (x-r_n)^2 \sin^2 \frac{1}{x-r_n}$ pro $x \neq r_n$, $x \in E_1$, $h(r_n) = 0$, je spojitá na E_1, vlastní derivace f' existuje na E_1 a f' je nespojitá v každém racionálním bodě. (Je f' omezená?)

4.19 Příklad.

(a) Nechť f je funkce ze 4.18a. Buď φ inversní funkce k funkci f.

1014-7781

Pak φ je spojitá funkce definovaná na E_1, má vlastní derivaci všude a obě množiny $\{x\in E_1;\ \varphi'(x) = 0\}$, $\{x\in E_1;\ \varphi'(x) > 0\}$ jsou husté v E_1.

(b)* Existuje dokonce taková spojitá funkce φ, která má všude v E_1 vlastní derivaci a obě množiny $\{x\in E_1;\ \varphi'(x) < 0\}$ a $\{x\in E_1;\ \varphi'(x) > 0\}$ jsou husté v E_1 (viz 8.35c).

4.20 Příklady.

(a) Nechť $F\subset E_1$ je neprázdná řídká uzavřená omezená množina. Nechť $E_1 \setminus F = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \cup \bigcup_n (a_n, b_n)$, kde sjednocení vpravo je disjunktní. Položme

$$f: x \longmapsto (x-a_n)^2 (x-b_n)^2 \sin \frac{1}{(x-a_n)(x-b_n)(b_n-a_n)}$$

pro $x\in(a_n,b_n)$ a $f: x\mapsto 0$ pro $x\in(-\infty,a)\cup(b,+\infty)\cup F$.

Dokažte, že

(i) f je spojitá na E_1,

(ii) f má omezenou derivaci na E_1,

(iii) f' je nespojitá právě ve všech bodech množiny F;

(b) Je-li $F\subset\langle 0,1\rangle$ uzavřená řídká množina kladné míry (viz 4.6) a f je funkce sestrojená v bodě (a), je funkce $f'|\langle 0,1\rangle$ omezená, má Newtonův, ale nemá Riemannův integrál (použijte Lebesgueovu charakterizaci R-integrovatelných funkcí). Tento příklad pochází od V. Volterry.

(c) Je-li $A\subset E_1$ množina první kategorie typu F_σ, existuje funkce f definovaná na E_1, mající všude vlastní derivaci taková, že f' je nespojitá právě v bodech množiny A.

N á v o d. Buď $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, F_n omezené, uzavřené a řídké. Nechť f_n jsou funkce sestrojené v (a) (pro množinu F_n). Položte $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{3^n}$.

(d) Zformulujte (c) jako charakterizaci množin bodů nespojitosti funkcí, majících primitivní funkci.

N á v o d. Víte, že derivace je první Baireovy třídy. Dále užijte charakteristiku množiny bodů spojitosti (viz 5.12).

4.21 Příklady.

(a) Existuje spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$, která nemá v žádném bodě derivaci (viz téma 20).

(b) Existuje spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$, která nemá konečnou variaci na žádném podintervalu $\langle 0,1\rangle$.

N á v o d. Tuto vlastnost má např. každá funkce z (a).

(c) Existuje spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$, která není monotonní na žádném podintervalu $\langle 0,1\rangle$.

N á v o d. Tuto vlastnost má např. každá funkce z (b).

(d) Existuje absolutně spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$, která není monotonní na žádném podintervalu $\langle 0,1\rangle$.

N á v o d. Tuto vlastnost má např. neurčitý integrál funkce $(c_A - \frac{1}{2})$, kde A je množina ze 4.11.

(e)* Existuje absolutně spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$, která není na žádném podintervalu lipschitzovská.

N á v o d. Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost množin sestrojená ve 4.12. Ukažte, že z posloupnosti $\{A_n\}$ lze vybrat posloupnost $\{A_{n_k}\}$ takovou, že $\lambda_1 (\langle 0,1\rangle \cap A_{n_k}) \leq \frac{1}{k^3}$. Položte $\varphi(x) = k$ pro $x \in \langle 0,1\rangle \cap A_{n_k}$, $\varphi(x) = 0$ pro $x \in \langle 0,1\rangle \setminus \bigcup_k A_{n_k}$.

Ukažte, že neurčitý Lebesgueův integrál funkce φ má požadované vlastnosti.

4.22 Cantorova funkce. (a) Buď C Cantorovo diskontinuum ze 4.5. Nechť $M_{n,i}$ mají stejný význam jako ve 4.5, $M_{n,i} = (a_{n,i}, b_{n,i})$ a předpokládejme navíc, že $b_{n,i} < a_{n,j}$ kdykoliv $i < j$. Položme $f(x) = \frac{2i-1}{2^n}$ pro $x \in M_{n,i}$, $i=1,\dots,2^{n-1}$.

Dále položme $f(0) = 0$ a pro $y \in C$ $(= \langle 0,1\rangle - \bigcup_{i,n} M_{n,i})$ buď $f(y) = \sup_{x<y,\, x\notin C} f(x)$. Potom funkce f takto definovaná na $\langle 0,1\rangle$ se nazývá Cantorova funkce a má následující vlastnosti:

(i) f je nekonstantní, neklesající a spojitá na $\langle 0,1\rangle$,

(ii) $f' = 0$ s.v. v $\langle 0,1\rangle$,

(iii) f není absolutně spojitá,

(iv) $f(C) = \langle 0,1\rangle$

(v)* existuje $Q \subset \langle 0,1\rangle$ míry nula tak, že $f(Q)$ je neměřitelná množina,

(vi) je-li $x \in C$, je $\bar{D} f(x) = +\infty$ (viz 7.B),

(vii)* v nespočetné podmnožině C je $f' = +\infty$, (viii)* v nespočetné podmnožině C je $\underline{D} f = 0$,

(ix) funkce $g = -f$ není neklesající, ale je $g' \geqq 0$ s.v.

(b) Vlastnosti (i) a (v) má též funkce $\varphi : x \mapsto f(x)+x$, $x \in \langle 0,1 \rangle$, která je navíc rostoucí na $\langle 0,1 \rangle$. Funkce φ zobrazuje C na množinu kladné míry.

4.23 Cvičení.

(a) Existuje omezená lebesgueovsky integrovatelná funkce f definovaná na $\langle 0,1 \rangle$ taková, že $\int_0^1 | f - g | > 0$ pro libovolnou riemannovsky integrovatelnou funkci.

N á v o d. Zvolte za f charakteristickou funkci množiny $A \cap \langle 0,1 \rangle$, kde A je množina ze 4.11. (Pro důkaz nerovnosti užijte toho, že g je s.v. spojitá.)

(b) Buď $\varepsilon > 0$. Potom rozhodněte, zda existuje omezená lebesgueovsky integrovatelná funkce f definovaná na $\langle 0,1 \rangle$ tak, aby pro libovolnou R-integrovatelnou funkci g platilo $\int_0^1 | f - g | > \varepsilon$.

4.24 Příklady.

(a) Existuje funkce f definovaná na $\langle 0,1 \rangle$, která je R-integrovatelná, ale není baireovská.

N á v o d. Tuto vlastnost má např. funkce definovaná v 12.15e.

(b) Existuje (omezená) zdola polospojitá funkce, která není R-integrovatelná na $\langle 0,1 \rangle$.

N á v o d. Uvažujte funkci $(- c_F)$, kde F je řídká, uzavřená množina kladné míry v $\langle 0,1 \rangle$.

4.25* Cesarova funkce. Položme $\omega(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, $x \in E_1$, jestliže $x - [x] = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{2^n}$, kde $a_n = 0$ nebo $a_n = 1$ (vylučujeme rozvoje, které od jistého místa obsahují pouze jedničky). Funkce ω zobrazuje každý interval na interval $\langle 0,1 \rangle$. Platí, že ω je druhé Baireovy třídy a není první třídy.

4.26* Příklad. Existuje funkce, která každý interval $I \subset E_1$ zobrazuje na E_1. (Existuje tedy funkce darbouxovská, která není spojitá v žádném bodě.)

N á v o d. Definujme funkce g, h takto:

Jestliže dvojkový rozvoj čísla $x - [x]$ je

$$x - [x] = 0,a_0a_1\dots a_k0\overbrace{11\dots1}^{m}0\overbrace{11\dots1}^{n}0\overbrace{11\dots1}^{p}0\overbrace{11\dots1}^{q}0b_00b_10b_2\dots,$$

kde k,m,n,p,q jsou nezáporná celá čísla, $q \geq 2$, $a_i = 0,1$, $b_j = 0,1$ ($i = 0,1,\dots,k$, $j = 0,1,2,\dots$), položme

$g(x) - m + n = 0,b_1b_3b_5\dots$,

$h(x) - p + q = 0,b_0b_2b_4\dots$,

(vpravo je dvojkový rozvoj). Jestliže $x - [x]$ není uvedeného tvaru, buď $g(x) = h(x) = 0$ (připomeňme, že při dvojkovém rozvoji užíváme stejné konvence, jako v 4.25).

Funkce g a h mají periodu jedna a obě zobrazují **k a ž d ý** interval na E_1.

(Další vlastnosti těchto funkcí jsou studovány v 11.6a, 23.13b, 23.26, 23.28c, 24.5a a v 24.6c.)

T É M A 5

Body nespojitosti funkce

Obsah: A. Klasifikace bodů nespojitosti.
B. Oscilace funkce.
C. Charakterisace množiny bodů nespojitosti.

A. KLASIFIKACE BODŮ NESPOJITOSTI

5.1 Cvičení. Ukažte na příkladech, že existují reálná funkce f definovaná v E_1 taková, že

(a) f je nespojitá v právě jednom bodě,

(b) f je nespojitá v nekonečné množině a spojitá v nekonečné množině,

(c) f je nespojitá v každém bodě E_1.

Z těchto příkladů plyne, že o počtu bodů nespojitosti funkce nelze nic říci. Proveďme bližší klasifikaci bodů nespojitosti.

5.2 Definice.

(a) Nechť existuje vlastní $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a nechť funkce f není spojitá v bodě a (tj. buď $a \in D(f)$ nebo $f(a)$ je různé od A). Pak říkáme, že bod a je bodem odstranitelné nespojitosti funkce f.

(b) Neexistuje-li vlastní $\lim_{x\to a} f(x)$, pak říkáme, že bod a je bodem neodstranitelné spojitosti funkce f. Rozdělme tento případ dále.

(α) Existují-li vlastní, ale různé $\lim_{x\to a_-} f(x)$, $\lim_{x\to a_+} f(x)$, pak říkáme, že bod a je bodem nespojitosti prvého druhu a hodnotu $f(a+) - f(a-)$ nazýváme skokem funkce f v bodě a.

(β) Jestliže některá z jednostranných limit buď neexistuje nebo není vlastní, pak říkáme, že bod a je bodem nespojitosti druhého druhu.

5.3 Cvičení. Ukažte na příkladech, že případy (a), (b,α), (b,β) z předchozí definice mohou skutečně nastat a že funkce může mít takových bodů nekonečně mnoho.

$\boxed{5.4}$ Věta. Nechť $f: E_1 \longrightarrow E_1$ a nechť M je množina jejích bodů nespojitosti prvého druhu. Pak M je spočetná.

Návod. Označme $M_1 = \{x \in M;\ f(x-) < f(x+)\}$, $M_2 = M \setminus M_1$. Stačí dokázat, že M_1 je spočetná, neboť důkaz pro M_2 je analogický. Nechť $M_1 \neq \emptyset$. Každému $x \in M_1$ přiřaďme $r_x \in (f(x-), f(x+))$, r_x racionální (proč existuje?). Takto vzniklé zobrazení φ nemusí být prosté. Tato potíž se obejde takto: Stačí dokázat (proč?), že množina $\varphi^{-1}(\{r\})$ je spočetná pro každé racionální číslo r. Ke každému $x \in \varphi^{-1}(\{r\})$ nalezněte $\delta_x > 0$ tak, že $f(y) > r$ pro $y \in (x, x+\delta_x)$. Pro $x_1, x_2 \in \varphi^{-1}(r)$, $x_1 \neq x_2$ je $(x_1, x_1 + \delta_x) \cap (x_2, x_2 + \delta_x) = \emptyset$. Vybráním racionálního čísla z každého intervalu $(x, x + \delta_x)$ dokažte potřebné tvrzení. (Viz též [D II], kap. V, § 3, věta 71.)

$\boxed{5.5}$ Věta. Nechť $M \subset E_1$ je spočetná množina. Pak existuje funkce $f: E_1 \longrightarrow E_1$ taková, že M je množinou právě všech jejích bodů nespojitosti prvého druhu.

Návod. Nechť $\{a_n\}$ je libovolné uspořádání prvků množiny M. Položte $f(x) = \sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n}$.

$\boxed{5.6}$ Cvičení. Rozhodněte, zda věty obdobné předchozím větám platí i pro případy (a), (b, β) definice 5.2.

B. OSCILACE FUNKCE

$\boxed{5.7}$ Definice. Je-li reálná funkce f definovaná na okolí bodu $x_0 \in E_1$, položme $\operatorname*{Limsup}_{x \to x_0} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup_{t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(t)$, $\operatorname*{Liminf}_{x \to x_0} f(x) = -\operatorname*{Limsup}_{x \to x_0}(-f(x))$, $\operatorname{osc}_f(x_0) = \inf_{\delta > 0} \sup_{t_1, t_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(t_1) - f(t_2)|$. Poslední výraz se nazývá oscilací funkce f v bodě x_0.

$\boxed{5.8}$ Cvičení.

(a) Porovnejte definici $\operatorname*{Limsup}_{x \to x_0} f(x)$ s obvyklou definicí $\limsup_{x \to x_0} f(x)$!

(b) Jaký je vztah mezi $\operatorname{osc}_f(x_0)$, $\operatorname*{Limsup}_{x \to x_0} f(x)$, $\operatorname*{Liminf}_{x \to x_0} f(x)$?

1014-7781

(c) Je-li funkce f definovaná na okolí bodu $x \in E_1$, potom f je spojitá v bodě x, právě když $\operatorname{osc}_f x = 0$.

(d) Je-li funkce f definovaná na okolí bodu $x_0 \in E_1$, pak f je spojitá v bodě x_0, právě když $\operatorname{Limsup}_{x \to x_0} f(x) = \operatorname{Liminf}_{x \to x_0} f(x)$.

(e) Vypočtěte $\operatorname{osc}_f x$ pro Dirichletovu a Riemannovu funkci!

5.9 Cvičení. Nechť f je reálná funkce definovaná na otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Pak platí:

(a) Pro každé $\alpha \in E_1$ je $\{x \in I;\ \operatorname{osc}_f(x) < \alpha\}$ otevřená.

(b) Množina $\{x \in I;\ f$ je spojitá v bodě $x\}$ je typu G_δ.

5.10* Tvrzení. Nechť f je reálná funkce definovaná na otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby existovala hustá podmnožina $H \subset I$ taková, že f je spojitá v každém bodě H je, aby pro každá reálná čísla $a < b$ a každý otevřený interval $J \subset I$ byla nejvýše jedna z množin $\{x \in J;\ f(x) > b\}$, $\{x \in J;\ f(x) < a\}$ hustá v J.

N á v o d. Je-li f nespojitá v každém bodě intervalu $J \subset I$, položte $M_{r,s} = \{x_0 \in J;\ \operatorname{Liminf}_{t \to x_0} f(x) < r < s < \operatorname{Limsup}_{t \to x_0} f(x)\}$ pro $r, s \in R$, $r < s$. Pak $\bigcup_{\substack{r,s \in R \\ r < s}} M_{r,s} = J$, tedy existuje $J_0 \subset J$ tak, že $M_{r,s} \cap J_0$ je hustá v J_0 pro vhodná r, s.

C. CHARAKTERIZACE MNOŽINY BODŮ NESPOJITOSTI

5.11 Cvičení.

(a) Neexistuje reálná funkce f definovaná na E_1, která je spojitá právě ve všech racionálních bodech.

N á v o d. Použijte 4.1(iii) a 5.9b.

(b) Existuje reálná funkce f definovaná na E_1, která je nespojitá právě ve všech racionálních bodech.

N á v o d. Uvažujte Riemannovu funkci.

5.12 Věta. Buď $M \subset E_1$. Potom existuje funkce f definovaná na E_1, jejíž množina bodů spojitosti je rovna M, právě když M je množina typu G_δ.

N á v o d. Pro jednu implikaci použijte 5.9b. Je-li M typu G_δ, zvolte $F_n \subset E_1$ uzavřené, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E_1 \setminus M$ a položte:

1014-7781

$f(x) = 0$ pro $x \in M$,
$f(x)$ je nejmenší přirozené číslo m takové, že $x \in F_m$ pokud $x \notin M$.

$\boxed{5.13^*}$ Poznámka. Tvrzení odstavců 5.8, 5.9, 5.12 platí i pro libovolný metrický prostor. Tvrzení 5.10 platí v libovolném úplném metrickém prostoru. Pokuste se o jejich přesnou formulaci (nezapomeňte na to, že se též mění definice osc_f atd.!) a o jejich důkaz!

$\boxed{5.14}$ Definice. Bod $x \in M$ množiny $M \subset E_1$ nazýváme oboustranným bodem kondenzace množiny M, jestliže pro každé $\delta > 0$ obsahují oba intervaly $(x - \delta, x)$, $(x, x + \delta)$ nespočetně mnoho bodů množiny M.

$\boxed{5.15}$ Lemma. Jestliže $M \subset E_1$ je nespočetná množina, jsou všechny její body až na spočetně mnoho oboustranné body kondenzace množiny M.

Návod. Přiřaďte každému bodu $x \in M$, který není oboustranným bodem kondenzace největší interval a_x, b_x , $a_x \leq x \leq b_x$, který obsahuje spočetně mnoho bodů množiny M; zkoumejte vlastnosti takto vzniklého systému intervalů.

$\boxed{5.16}$ Definice. Nechť je dána funkce $f : E_1 \rightarrow E_1$. Bod nespojitosti x funkce f nazveme bodem nespojitosti třídy (A), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $osc_f(y) < \varepsilon$ pro všechny body s výjimkou spočetně mnoha v alespoň jednom z intervalů $(x - \delta, x), (x, x + \delta)$.
Bod nespojitosti x funkce f nazveme bodem nespojitosti třídy (B), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $osc_f(y) < \varepsilon$ pro skoro všechna y v některém z intervalů $(x-\delta, x)$, $(x, x+\delta)$.

$\boxed{5.17}$ Věta. Funkce $f : E_1 \rightarrow E_1$ má spočetně mnoho bodů nespojitosti, právě když každý její bod nespojitosti je bodem nespojitosti třídy (A).

$\boxed{5.18^*}$ Věta. Funkce $f : E_1 \rightarrow E_1$ má množinu bodů nespojitosti míry nula, právě když každý její bod nespojitosti je bodem nespojitosti třídy (B).

$\boxed{5.19}$ Důsledek. Funkce $f : \langle a, b \rangle \longrightarrow E_1$ omezená je z třídy $R(\langle a, b \rangle)$ (viz 23.51), právě když jsou všechny její body nespojitosti z třídy (B).

$\boxed{5.20??}$ Problém. Podejte charakteristiku bodů nespojitosti měřitelné funkce konečné s.v. v E_1.

1014-7781

T É M A 6

Lokální extrémy funkce

Obsah: A. Základní vlastnosti.
B. Charakterizace množin lokálních extrémů.

A. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

6.1 **Definice.** Definujte lokální extrém funkce $f : E_1 \to E_1$, definujte též lokální extrémy funkce $f : M \to E_1$ ($M \subset E_1$) vzhledem k množině M. (Viz třeba [D I], kap. X, § 3.)

6.2 **Příklady.** Ukažte, že existuje reálná funkce f definovaná na E_1 taková, že

(a) f nemá žádný lokální extrém,

(b) f má lokální extrém (minimum) v každém bodě množiny A, lokální maximum v každém bodě množiny B a nemá lokální extrém v žádném bodě množiny C, přičemž A,B,C jsou nekonečné množiny a $A \cup B \cup C = E_1$,

(c) f má lokální minimum v A, lokální maximum v B, A,B jsou nekonečné a $A \cup B = E_1$,

(d) f má v každém bodě lokální minimum.

Z těchto příkladů plyne, že o počtu lokálních extrémů nelze nic říci. Všimněme si proto případu ostrých lokálních extrémů.

B. CHARAKTERIZACE MNOŽIN LOKÁLNÍCH EXTRÉMŮ

6.3 **Věta.** Nechť $f : E_1 \to E_1$, A (resp. B) je množina všech bodů, ve kterých f má ostré lokální maximum (resp. minimum). Pak množiny A, B jsou spočetné.

N á v o d. Ke každému $c \in A$ existuje $n \in N$ tak, že $f(x) < f(c)$ pro každé $x \in (c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n})$, $x \neq c$. Položme $A_n = \{c \in A;$ $f(x) < f(c)$ pro $x \in (c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n})$, $x \neq c\}$. Metodou důkazu odstavce 5.17 dokažte, že všechny množiny A_n jsou spočetné. Jak lze ihned z tvrzení pro množinu A dokázat tvrzení pro B?

6.4 **Věta.** Pro každé dvě disjunktní spočetné množiny A, $B \subset E_1$

1014-7781

existuje funkce $f : E_1 \to E_1$ taková, že nabývá ostrého lokálního maxima (resp. minima) právě v bodech A (resp. B).

N á v o d. Nechť $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$ (posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mohou být i konečné nebo prázdné). Položte $f(a_n) = \frac{1}{n}$, $f(b_n) = -\frac{1}{n}$, $f(x) = 0$ pro $x \notin A \cup B$.

6.5 Věta. Nechť $f : E_1 \to E_1$ je taková funkce, která má v každém bodě E_1 lokální minimum. Pak f nabývá pouze spočetně mnoha hodnot.

N á v o d. Položte $A_n = \{x \in E_1;$ pro každé $t \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ platí $f(t) \geq f(x)\}$. Dokažte, že $f(x) = f(y)$ pro libovolná $x, y \in A_n$, $|x - y| < \frac{1}{n}$. Z toho tvrzení ihned plyne.

6.6 Poznámka. Stejnou metodou jako v 6.5 dokážeme, že platí také následující tvrzení:

Nechť $M \subset E_1$, $f : M \to E_1$ taková funkce, která v každém bodě $x \in M$ nabývá lokálního minima vzhledem k M. Pak $f(M)$ je spočetná. Pomocí tohoto tvrzení dokažte též větu 6.3.

N á v o d. Položte $M = B$ a ukažte, že f nabývá každé hodnoty pouze ve spočetně mnoha bodech množiny B.

1014-7781

T É M A 7

Derivace funkce

Obsah: A. Jednostranné derivace.

B. Diniho derivace.

C. Derivace funkce.

A. JEDNOSTRANNÉ DERIVACE

7.1 Cvičení. Nechť f je reálná funkce na E_1, označte $M = \{x \in E_1;\ f'_+(x)$ neexistuje$\}$. Ukažte na příkladech, že mohou nastat případy:

(a) f je spojitá a M je jednobodová,

(b) f je spojitá a M je nekonečná,

(c) $M = E_1$. (I v tomto případě je možno sestrojit f spojitou, ale konstrukce je neobyčejně obtížná - viz A. Besikovitch, Bull. Acad. Sci. de Russie 19 (1925), 527-540, či téma 20.)

Z těchto příkladů plyne, že ani pro spojitou funkci nelze nic říci o počtu bodů, kde f'_+ existuje. Uvažujme proto současně derivace f'_+, f'_-. Ani v tomto případě nelze nic říci. (Jak lze dostat výsledky analogické pro f'_-?)

7.2 Věta. Buď f funkce definovaná na E_1 a označme množinu $M = \{x \in E_1;$ existují $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ a $f'_+(x) \neq f'_-(x)\}$. Pak M je spočetná.

N á v o d.

(a) Označme $M_1 = \{x \in M;\ f'_-(x) < f'_+(x)\}$ a $M_2 = M \setminus M_1$. Stačí dokázat, že M_1, M_2 jsou spočetné. Dokažte to např. o množině M_1 následujícím způsobem. Každému $x \in M_1$ přiřaďte racionální číslo $r_x \in (f'_-(x), f'_+(x))$ a označte toto zobrazení jako φ. Stačí dokázat, že pro každé racionální číslo r je množina $\varphi^{-1}\{r\}$ spočetná. (Srovnejte s metodou důkazu v odstavci 5.4.) Pro tento účel studujte lokální extrémy funkce $g_r : x \longrightarrow f(x) - rx$ a použijte větu 6.3.

(b) Ještě j i n ý n á v o d, tentokráte pro množinu M_2. Najděte r_x jako nahoře, dále najděte racionální čísla s_x, t_x tak, aby $a < s_x < x < t_x < b$; $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > r_x$

pro každé $y \in (s_x, x)$ a $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < r_x$, pro každé $y \in (x, t_x)$. Z nerovností odvoďte, že $y \in (s_x, t_x)$, $y \neq x \Longrightarrow f(y) - f(x) < r_x\,(y - x)$. Definujte funkci $\psi : M_2 \longrightarrow E_3$ předpisem $\psi\,(x) = [r_x, s_x, t_x]$.

K důkazu spočetnosti stačí ukázat, že ψ je prosté. Buď tedy $x, y \in M_2$, $x \neq y$, $\psi\,(x) = \psi\,(y)$. Potom $(s_x, t_x) = (s_y, t_y)$ a x, y leží v tomto intervalu. Tedy $f(y) - f(x) < r_x\,(y - x)$, $f(x) - f(y) < r_y\,(x - y)$. Jelikož $r_x = r_y$, plyne odtud, že $0 < 0$.

$\boxed{7.3}$ <u>Věta.</u> Poslední větu lze "obrátit", takže dostáváme úplné řešení problému. Platí totiž:

Nechť $M \subset E_1$ je spočetná množina. Pak existuje funkce f definovaná na E_1 taková, že $\{x \in E_1;\ f'_-(x),\ f'_+(x)$ existují a $f'_-(x) \neq f'_+(x)\} = M$.

N á v o d. Případ M prázdná nebo konečná je triviální. Nechť $\{x_n\}$ je srovnání množiny M v prostou posloupnost. Položte $f(x_n) = 1/n$, $f(x) = 0$ pro $x \in E_1 \setminus M$. Ukažte, že $f'_+(x_n) = -\infty$, $f'_-(x_n) = +\infty$ a pro $x \notin M$ buď alespoň jedna jednostranná derivace neexistuje nebo je $f'(x) = 0$.

$\boxed{7.4}$ <u>Věta.</u> Z věty v odstavci 7.2 odvoďte:

(a) Nechť f je funkce na intervalu (a,b) a v žádném bodě intervalu (a,b) nemá derivaci. Pak množina bodů, ve kterých alespoň jedna jednostranná derivace neexistuje, je hustá v (a,b) (tj. v libovolném otevřeném podintervalu intervalu (a,b) existuje alespoň jeden takový bod.

(b) Nechť $f : (a,b) \to E_1$ je konvexní na intervalu (a,b). Pak f' existuje na $(a,b) \setminus M$, kde M je spočetná mnpžina.

N á v o d. Uvažte, že konvexní funkce má v každém bodě vlastní obě jednostranné derivace - viz [DII], kap. V, § 11 nebo též téma 13.

$\boxed{7.5}$ <u>Problém.</u> Je možno tvrzení 7.4.b obrátit v tomto smyslu: <u>Nechť M je spočetná podmnožina intervalu (a,b). Pak existuje konvexní</u> funkce na intervalu (a,b), která má derivaci právě v bodech $(a,b) \setminus M$? Odpověď na tento problém je formulována v odstavci 7.7.

7.6 Lemma. Nechť f_n jsou spojité funkce na intervalu (a,b), $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b); nechť existuje vlastní derivace zprava $(f_n)'_+(x)$ pro každé $x \in (a,b)$ a každé $n \in N$ a nechť $(f_n)'_+ \rightrightarrows g$ na (a,b). Nechť pro každé $n \in N$ existuje vlastní derivace $f_n'(x)$ pro $x \in (a,b) \setminus K_n$, kde K_n je konečná množina. Potom má funkce f na intervalu (a,b) vlastní derivaci zprava a platí

$$f'_+(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n)'_+(x) \quad \text{pro každé } x \in (a,b).$$

Obdobná věta platí pro derivaci zleva. Dokažte!

Návod. Pro $x_0 \in (a,b)$ definujte funkce φ_n na intervalu $(0, b-x_0)$ (resp. $(0,+\infty)$ v případě, že $b = +\infty$) takto:

$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h}.$$

Pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky a 26.8.b dokažte, že

$$\varphi_n \rightrightarrows \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$ Potom užijte Moore-Osgoodovu větu.

7.7 Příklad.

(a) Buď (a,b) omezený interval a posloupnost $\{a_n\}$ uspořádání dané spočetné množiny M. Definujte pro každé $i \in N$ funkci f_i takto:

$$f_i : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (a,a_i) \\ 2^{-i}(x-a_i) & \text{pro } x \in (a_i,b). \end{cases}$$

Nechť $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$. Pomocí 7,6 ukažte, že existují vlastní derivace f'_+, f'_- na (a,b) a ukažte, že $f'_+(x) = f'_-(x)$, právě když $x \in (a,b) \setminus M$. Zkonstruovaná funkce je navíc neklesající a konvexní na (a,b).

(b) Pokuste se "vylepšit" příklad z (a) tak, aby funkce f byla navíc rostoucí.

(c) Pokuste se problém vyřešit i pro neomezený interval (a,b)!

B. DINIHO DERIVACE

7.8 Definice. Buď f reálná funkce definovaná na okolí bodu $x_0 \in E_1$.

Položme

$$D^+ f(x_0) = \limsup_{y \to x_0+} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0},$$

$$D_+ f(x_0) = \liminf_{y \to x_0+} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0},$$

$$D^- f(x_0) = \limsup_{y \to x_0-} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0},$$

$$D_- f(x_0) = \liminf_{y \to x_0-} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

Čísla $D^+ f(x_0)$, $D_+ f(x_0)$, $D^- f(x_0)$, $D_- f(x_0)$ se nazývají derivovaná čísla funkce f v bodě x_0. Je-li funkce f definovaná na intervalu (a,b), potom funkce D^+f, D_+f, D^-f, D_-f (nabývající i nevlastních hodnot) nazýváme Diniho derivacemi funkce f na intervalu (a,b). Konečně buď horní a dolní derivace definována jako

$$\underline{D} f(x_0) = \min (D_+f(x_0), D_-f(x_0)) = \liminf_{y \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0},$$

$$\overline{D} f(x_0) = \max (D^+f(x_0), D^-f(x_0)) = \limsup_{y \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

7.9 Cvičení. Ukažte, že

(a) Derivace $f'(x_0)$ existuje, právě když $\underline{D} f(x_0) = \overline{D} f(x_0)$, tj. právě když se všechna derivovaná čísla funkce f v bodě x_0 rovnají.

(b) Jsou-li čísla $D_+f(x_0)$, $D^+f(x_0)$ konečná, je funkce f spojitá v bodě x_0 zprava. Obdobně zleva.

(c) Nechť funkce f je lipschitzovská na intervalu I. Potom Diniho derivace D_+f, D^+f, D_-f, D^-f jsou omezené funkce na I. Pokuste se tuto větu "obrátit"!

(d) Je-li f neklesající funkce na intervalu I, jsou všechna derivovaná čísla funkce f v každém bodě intervalu I nezáporná. Platí i tvrzení obrácené - viz 27.1.c, 27.4.a.

(e) Vypočtěte Diniho derivace Dirichletovy a Riemannovy funkce!

(f) Vypočítejte Diniho derivace funkce $f: x \to \sin 1/x$, $f(0) = 0$.

(g)* Vypočtěte Diniho derivace funkcí g,h z 4.26.

7.10 **Věta.** Nechť $f:(a,b)\longrightarrow E_1$. Potom $\{x\in(a,b);\ D^-f(x) < D_+f(x)\}$ je spočetná. Dokažte!

N á v o d. Postupujte stejně jako v odstavci 7.2.

7.11* **Poznámka.** Diniho derivace lze definovat i pro zobrazení E_1 do libovolného metrického prostoru (P,ρ). $|D^+|\,f(a) = \limsup_{x\to a+} \frac{\rho(f(x),f(a))}{|x-a|}$ - zjistěte, jaký je vztah mezi těmito Diniho derivacemi a Diniho derivacemi definovanými v 7.8 v případě $P = E_1$. Lze dokázat např. analogii předchozího tvrzení.

Literatura k tomuto problému: A.P. Baisnab: On the absolute Dini derivatives, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 15 (1970), 1593-1597.

7.12* **Věta.** Buď f spojitá funkce na E_1. Pak $M = \{x\in E_1;\ D_+f(x) \neq D_-f(x)\}$ je první kategorie v E_1.

N á v o d. Buď $M_1 = \{x\in E_1;\ D_+f(x) > D_-f(x)\}$, $M_2 = M\setminus M_1$. Stačí dokázat, že množina M_1 je první kategorie v E_1. Položte

$$A_{k,r,s} = \Big\{x\in E_1;\ D_-f(x) \leq r < s \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \text{ pro každé } y,\ x<y<x+1/k\Big\}$$

pro $k\in N$, $r,s\in R$, $r<s$. Stačí dokázat, že každá z množin $A_{k,r,s}$ je řídká v E_1 (proč?). Z předpokladu, že $A_{k,r,s}$ je hustá v nějakém intervalu (c,d) vyvoďte, že $D_+f \geq s$ na (c,d); Užitím tvrzení 27.1.c dokažte, že funkce $f(x) - sx$ je neklesající na intervalu (c,d) a tedy $D_-f \geq s$ v každém bodě intervalu (c,d), což je ve sporu s definicí množiny $A_{k,r,s}$.

7.13* **Věta** (Saks). Buď f reálná funkce definovaná na otevřeném intervalu I. Buď $M = \{x\in I;\ D_+f(x) = +\infty\}$. Potom $\lambda_1(M) = 0$.

N á v o d. Buď $M_n = \{x\in I;\ f(x) < f(y)$ pro libovolné y, $x<y<y+1/n\}$.

Pak $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Tedy stačí dokázat, že pro každý interval $J\subset E_1$, $\lambda_1(J) < 1/n$ platí $\lambda_1(M\cap M_n\cap J) = 0$.

Zvolme takový interval J. Funkce $f/M_n\cap J$ je neklesající a tedy existuje interval J_0, $M_n\cap J\subset J_0\subset J$ a neklesající funkce ψ definovaná na intervalu J_0, $\psi(x) = f(x)$ pro $x\in M_n\cap J$ (viz 16.16).

Buď $A_1 = \{x\in J_0;\ \psi$ nemá v bodě x konečnou derivaci$\}$,

$A_2 = \{x\in M_n\cap J;$ existuje $\delta > 0$ tak, že $(x,x+\delta)\cap M_n = \emptyset\}$.

Potom $\lambda_1(A_1) = 0$, A_2 je spočetná, a tedy $\lambda_1(A_1 \cup A_2) = 0$. Nyní stačí dokázat, že $M \cap M_n \cap J \subset A_1 \cup A_2$.

7.14* **Poznámka.** Předcházející věta je speciálním případem následujícího tvrzení (tzv. Denjoy- Young- Saksova věta, jejíž důkaz se nachází např. v knize S. Saks: Theory of the integral, Warszawa - Lwów, 1937).

Nechť f je konečná funkce definovaná na intervalu $I \subset E_1$. Potom existuje nulová množina $A \subset I$ taková, že pro každý bod $x \in I \setminus A$ nastává jedna z následujících možností:

(i) Existuje vlastní $f'(x)$.

(ii) $D^+f(x) = D_-f(x) \in E_1$, $D^-f(x) = +\infty$, $D_+f(x) = -\infty$.

(iii) $D^-f(x) = D_+f(x) \in E_1$, $D^+f(x) = +\infty$, $D_-f(x) = -\infty$.

(iv) $D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty$, $D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$.

Nakreslete si, jak vypadají funkce, které v daném bodě splňují některou z možností (i) - (iv)! Zjistěte, které případy a v kterých bodech nastávají pro Dirichletovu funkci a pro funkce g,h ze 4.26.

C. DERIVACE FUNKCE

7.15 **Cvičení.** Sestrojte reálnou funkci definovanou na E_1, která má vlastní derivaci:

(a) právě ve všech bodech dané konečné množiny,
(b) právě ve všech bodech nějaké nekonečné spočetné množiny,
(c) právě ve všech bodech dané otevřené množiny,
(d) právě ve všech bodech dané uzavřené množiny.

N á v o d. Položte $f(x) = [\text{dist}\,(x,F)]^2 \cdot D(x)$ pro každé $x \in E_1$, kde F je daná uzavřená množina a D je Dirichletova funkce.

7.16* **Věta.** Nechť f je libovolná funkce definovaná na E_1. Potom množina $D_f = \{x \in E_1;$ ve kterých existuje vlastní $f'(x)\}$ je typu $F_{\sigma\delta}$.

N á v o d. Položte $M_{k,r_1,r_2} = \{x \in E_1;\ r_1 \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq r_2$ pro $0 < |h| < 1/k\}$ pro $k \in N$, $r_1, r_2 \in R$, $r_1 < r_2$. Je-li $\{x_n\} \subset M_{k,r_1,r_2}$, $x_n \to x$, uvažujte pro každé h, $0 < |h| < 1/k$

1014-7781

dostatečně velká $n \in N$ tak, že platí $r_1 \leq \frac{f(x)+h) - f(x_n)}{x + h - x_n} \leq r_2$,

$r_1 \leq \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \leq r_2$. Z těchto nerovností snadno dokážete,

že platí $$D_f = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{r_1, r_2 \in R \\ r_1 < r_2 \\ r_2 - r_1 < m}} \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{k, r_1, r_2}.$$

7.17* **Příklad.** Nechť $M \subset E_1$ je množina typu G_δ a nulové míry, která je hustá v E_1. Pak neexistuje funkce f definovaná na E_1 taková, že $M = D_f$.

N á v o d. Předpokládejte, že taková funkce f existuje. Předpokládejte dále, že platí:

Pro každé $k \in N$ a pro každý otevřený interval $J \subset E_1$ existují $x_1, x_2 \in J$, $x_1 \neq x_2$ tak, že $|f(x_1) - f(x_2)| \geq k |x_1 - x_2|$.
Označte $L_k = \{[x_1, x_2] \in E_2;\ x_1 < x_2,\ |f(x_1) - f(x_2)| \geq k |x_1 - x_2|\}$.
Položte $G_{n,k} = \bigcup_{\substack{[x_1, x_2] \in L \\ |x_1 - x_2| < \frac{1}{n}}} (x_1, x_2)$. Potom $G_{n,k}$ jsou husté v E_1,

tedy $\bigcap_{n,k} G_{n,k} \cap M \neq \emptyset$. Spor obdržíte tak, že dokážete, že v žádném bodě množiny $\bigcap_{n,k} G_{n,k}$ nemůže mít funkce f vlastní derivaci.

Tedy existuje $k \in N$ a interval $J \subset E_1$ tak, že $|f(x_1) - f(x_2)| < k |x_1 - x_2|$ pro $x_1, x_2 \in J$. Vidíme, že funkce f je lipschitzovská na intervalu J, a tedy f' existuje vlastní skoro všude na J. To je ovšem spor, neboť $\lambda_1 (D_f) = 0$.

7.18 **Poznámka.** Z předcházejícího příkladu plyne, že tvrzení 7.16 není definitivní, tj. existuje množina M typu $F_{\sigma\delta}$, pro kterou neexistuje funkce f tak, že $D_f = M$. Naskýtá se problém charakterizace těch množin M, pro něž existuje funkce f tak, že $D_f = M$. Tento problém řešil Zahorski (Punktmengen in welchen eine stetige Funktion nicht differenzierbar ist, Rec. Math. Mat. Sbornik, 9, 51 (1941), 485-510), který dokázal následující větu:

Buď $M \subset E_1$. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby existovala funkce f definovaná na E_1 tak, že $M = D_f$ je, aby množina $E_1 \setminus M$ byla sjednocením množiny typu G_δ a množiny typu $G_{\delta\sigma}$ míry nula.

Podobný úplný výsledek dokázal Tzodiks (On sets of points where the derivative is equal to $+\infty$ or $-\infty$ respectively, Mat.

Sbornik, N.S. 43 (85) (1957) 429-450) pro případ nevlastních derivací.

7.19* **Věta.** Nechť g je libovolná reálná funkce definovaná na E_1, která má všude vlastní nebo nevlastní derivaci. Potom

(a) g je spojitá všude s výjimkou spočetné množiny,

(b) $g' \in B_1(E_1)$.

(Uvědomte si, že zde připouštíme jako funkce první Baireovy třídy i funkce nabývající nekonečných hodnot - viz poznámku 12.20.)

N á v o d.

(a) Je-li f nespojitá na nespočetné množině ukažte, že existují čísla $r < s$ tak, že množina $M = \{x \in E_1;\ \operatorname{Liminf}_{y \to x} f(y) \leq r < s \leq \operatorname{Limsup}_{f \to x} g(y)\}$ (označení viz 5.7) je nespočetná. Je-li $x \in M$ oboustranný hromadný bod množiny M (tj. pro každé $\delta > 0$ je $(x, x + \delta) \cap M \neq \emptyset$, $(x - \delta, x) \cap M \neq \emptyset$ - dokažte existenci!), ukažte, že $f'(x)$ neexistuje.

(b) Použijte odstavce 12.9 a dokazujte tvrzení sporem. Buď F neprázdná uzavřená množina, $\alpha < \beta$ taková, že množiny $\{x \in F;\ f'(x) < \alpha\}$, $\{x \in F;\ f'(x) > \beta\}$ jsou obě husté v F. Položte $G_n = \{x \in F;$ existují $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x - 1/n < x_1 < x < x_2 < x + 1/n$, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \beta\}$, $H_n = \{x \in F;$ existují $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x - 1/n < x_1 < x < x_2 < x + 1/n$, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \alpha\}$ a dokažte, že všechny množiny G_n, H_n jsou otevřené a husté v F.

Z Baireovy věty o kategoriích plyne, že existuje $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Dokažte, že $f'(x_0)$ neexistuje. Tím obdržíte spor.

7.20** **Věta.** Nechť g je libovolná funkce mající všude na E_1 derivaci. Potom množina $\{x \in E_1;\ g'(x) = +\infty\}$ je typu G_δ a míry nula.

N á v o d. Použijte předcházející větu, 12.23 a 7.13.

7.21 **Poznámka.** Nechť $M \subset E_1$ je množina typu G_δ a míry nula. Vzniká otázka, zda existuje funkce f definovaná na E_1, která má všude na E_1 derivaci tak, že $M = \{x \in E_1;\ f'(x) = +\infty\}$. Částečné řešení tohoto problému podal V. Jarník, který dokázal, že existuje funkce g definovaná na E_1 tak, že $M = \{x \in E_1;\ g(x) = +\infty\}$ a pro každé $x \in E_1 \setminus M$ má funkce g konečná všechna derivovaná čísla.

Úplné řešení podal Z. Zahorski, který dokázal, že taková funkce f existuje.

$\boxed{7.22}$ Literatura. Zájemce odkazujeme na článek A.M. Brukner - J.L. Leonard, Derivatives, [AMM] 73 (1966), 24-56, kde se mohou dočíst o dalších zajímavostech a výsledcích v přehledné formě a na původní článek Z. Zahorski, Sur la première derivée, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 1 - 54.

1014-7781

T É M A 8

Jiné druhy spojitosti

V prvním ročníku se definuje pojem spojitosti funkce v bodě a pojem spojitosti funkce v intervalu. Zopakujte příslušné definice. V tomto referátu se budeme zabývat obdobnými pojmy při "trochu pozměněných" definicích.

A. SILNÁ SPOJITOST

8.1 **Definice.** Nechť funkce f je definována na jistém okolí bodu $x_0 \in E_1$. Řekneme, že f je silně spojitá v bodě x_0, jestliže platí:

$$\exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \ (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Řekneme, že funkce f definovaná na otevřeném intervalu $J \subset E_1$ je silně spojitá na J, je-li silně spojitá v každém bodě intervalu J.

8.2 **Poznámka.** Uvědomte si, čím se liší definice silné spojitosti od obvyklé definice spojitosti.

Definujte obdobně "silnou spojitost zleva" a "silnou spojitost zprava".

8.3 **Cvičení.**

(a) Funkce f je silně spojitá v bodě x_0, právě když je konstantní v jistém okolí bodu x_0.

(b) Funkce f je silně spojitá v otevřeném intervalu J, právě když je v tomto intervalu konstantní.

Je vidět, že definice silné spojitosti, ač má dobrý smysl, není vcelku k ničemu. Přehozením dvou kvantifikátorů v definici spojitosti jsme obdrželi definici třídy silně spojitých funkcí, přičemž tato třída splývá s třídou konstantních funkcí. Pokusíme se nyní zobecnit definici silné spojitosti na zobrazení v metrických prostorech.

8.4 Cvičení. Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory, $f: P \to Q$ zobrazení P do Q. Připomeňte definici spojitosti zobrazení f v bodě $x_0 \in P$ a definici spojitosti f na P. Dále si uvědomte ekvivalenci následujících podmínek:

(i) f je spojité na P;

(ii) $f^{-1}(G)$ je otevřená množina v P pro každou otevřenou množinu G v (Q,σ);

(iii) $F \subset Q$ uzavřená $\Longrightarrow f^{-1}(F)$ uzavřená v (P,ρ);

(iv) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ pro každou množinu $A \subset P$.

8.5 Definice. Nechť f je zobrazení (P,ρ) do (Q,σ). Řekneme, že zobrazení f je silně spojité, jestliže $f(\bar{A}) \subset f(A)$ pro každou množinu $A \subset P$.

8.6 Cvičení. Ukažte, že každé silně spojité zobrazení je spojité a sestrojte příklad spojitého zobrazení, které není silně spojité.

8.7 Cvičení. Dokažte ekvivalenci následujících výroků:

(i) zobrazení f je silně spojité;

(ii) $f(\bar{A}) = f(A)$ pro každou množinu $A \subset P$;

(iii) $f(A') \subset f(A)$ pro každou množinu $A \subset P$ (A' znamená derivaci množiny A, tj. množinu všech hromadných bodů množiny A);

(iv) $f^{-1}(B)$ je uzavřená množina pro libovolnou množinu $B \subset Q$;

(v) $f^{-1}(B)$ je otevřená množina pro libovolnou množinu $B \subset Q$;

(vi) $f^{-1}(B)$ je obojetná (tj. zároveň otevřená i uzavřená) množina pro libovolnou množinu $B \subset Q$.

8.8 Cvičení.

(a) Buď $f: (P,\rho) \to (Q,\sigma)$ silně spojité zobrazení, buď $A \subset P$ neprázdná souvislá množina. Potom $f(A)$ je jednobodová množina.

(b) Ukažte na příkladě, že zobrazení f nemusí být silně spojité, zobrazuje-li každou souvislou množinu na jednobodovou množinu.

(c) Buď (P,ρ) lokálně souvislý metrický prostor (připomeňte definici); nechť zobrazení f převádí každou souvislou neprázdnou podmnožinu prostoru P na jednobodovou množinu. Potom f je silně spojité.

8.9 **Problém.** Charakterizujte všechna silně spojitá zobrazení ve smyslu definice 8.5 intervalu $J \subset E_1$ do E_1. Porovnejte také s definicí z 8.1.

B. SLABÁ SPOJITOST

8.10 **Definice.** Řekneme, že $f: E_1 \to E_1$ je slabě spojitá, jestliže množina bodů nespojitosti funkce f má míru nula.

8.11 **Cvičení.** Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) f je slabě spojitá;

(ii) je-li $G \subset E_1$ otevřená množina, potom existují množiny H, A, kde H je otevřená a A nulová, a platí $f^{-1}(G) = H \cup A$;

(iii) je-li $F \subset E_1$ uzavřená množina, potom existuje uzavřená množina T a nulová množina B tak, že $f^{-1}(F) = T \setminus B$.

8.12 **Problémy.** Vyšetřujte další vlastnosti slabě spojitých funkcí. Je např. součet slabě spojitých funkcí slabě spojitá funkce? Podobně pro součin či skládání takových funkcí. Můžete také zkoumat integrovatelnost, měřitelnost apod.

8.13 **Cvičení.** Ukažte, že neplatí následující tvrzení:

Jsou-li f, g slabě spojité funkce, potom je $f * g$ slabě spojitá funkce.

N á v o d. Buď g Riemannova funkce a f nechť je charakteristická funkce množiny $\{1/n\}$.

8.14 **Cvičení.** Je-li f spojitá, g slabě spojitá, potom je $f * g$ slabě spojitá funkce.

8.15 **Cvičení.** Nechť f a g jsou slabě spojité funkce a předpokládejme, že funkce g má následující vlastnost:

$$\lambda_1(A) > 0 \Longrightarrow \lambda_1(g(A)) > 0.$$

Potom je funkce $f * g$ slabě spojitá.

C. APROXIMATIVNÍ SPOJITOST

8.16 **Definice.** Nechť $M \subset E_1$ je lebesgueovsky měřitelná množina a nechť $x_0 \in E_1$. Jestliže existuje

$$(\clubsuit)\quad \lim_{h\to 0+} \frac{\lambda_1[M\cap\langle x_0-h, x_0+h\rangle]}{2h} = D(M,x_0),$$

řekneme, že <u>hustota množiny</u> M v bodě x_0 je rovna $D(M,x_0)$.

Je-li $D(M,x_0) = 1$, říkáme, že bod x_0 je <u>bodem hustoty</u> množiny M.

8.17 <u>**Poznámky.**</u>

(a) Zřejmě $0 \le D(M,x_0) \le 1$. Limita v $(\clubsuit)$ nemusí vždy existovat - sestrojte příklad!

(b) Bod x_0 ovšem nemusí ležet v M; jestliže však x_0 je vnitřním bodem množiny M, je bod x_0 bodem hustoty množiny M.

(c) Je-li x_0 bodem hustoty množiny M a $Q = E_1 \setminus M$, potom $D(Q,x_0) = 0$. Někdy se také říká, že bod x_0 je <u>bodem řídkosti</u> množiny Q.

8.18 <u>**Cvičení.**</u> Nechť $M\subset E_1$ je lebesgueovsky měřitelná množina, nechť $x_0\in E_1$. Potom x_0 je bodem hustoty množiny M, právě když

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda_1[M\cap(x_0, x_0+h)]}{h} = 1$$

(zde klademe $(a,b) = (b,a)$ pro $b < a$).

8.19 <u>**Lebesgueova věta o hustotě.**</u> Nechť M je lebesgueovsky měřitelná množina v E_1. Potom skoro všechny body množiny M jsou body hustoty množiny M. Speciálně: Je-li $\lambda_1(M) > 0$, potom existuje $x_0\in M$ tak, že $D(M,x_0) = 1$.

N á v o d. Bod x je bodem hustoty množiny M, právě když neurčitý Lebesgueův integrál charakteristické funkce množiny M má v bodě x derivaci rovnou jedné.

8.20 <u>**Cvičení.**</u> Nechť M je množina konečné míry. Definujme funkci

$$\alpha_M : x \longmapsto \lambda_1[M\cap(-\infty, x\rangle],\ x\in E_1.$$

Potom platí:

(a) Funkce α_M je absolutně spojitá na každém uzavřeném intervalu $J\subset E_1$ a α_M je neklesající na E_1.

(b) Je-li $\lambda_1(M) > 0$, není α_M ani konvexní ani konkávní na E_1.

(c) Bod $x_0\in E_1$ je bodem hustoty množiny M tehdy a jen tehdy, když $\alpha_M'(x_0) = 1$.

8.21 **Definice.** Nechť $x_0 \in E_1$ a nechť funkce f je definovaná na okolí bodu x_0. Řekneme, že funkce f je aproximativně spojitá v bodě x_0, jestliže existuje množina $M \subset E_1$ tak, že $D(M,x_0) = 1$ a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} f(x) = f(x_0)$.

Řekneme, že f je aproximativně spojitá na intervalu (a,b), je-li f aproximativně spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

8.22** **Věta** (Denjoy). Nechť f je skoro všude konečná funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom je f měřitelná tehdy a jen tehdy, když je aproximativně spojitá ve skoro všech bodech intervalu $\langle a,b \rangle$.

N á v o d. Je-li f měřitelná a $\varepsilon > 0$, existuje podle Luzinovy věty spojitá funkce g na intervalu $\langle a,b \rangle$ tak, že množina $A_\varepsilon = \{x \in \langle a,b \rangle ; f(x) = g(x)\}$ má míru větší než $b - a - \varepsilon$. Pro všechna $x_0 \in A_\varepsilon \cap \langle a,b \rangle$, které jsou body hustoty této množiny, je f aproximativně spojitá v x_0 (za množinu M z definice lze vzít A_ε). Odtud plyne, že množina B všech $x \in \langle a,b \rangle$, v nichž je f aproximativně spojitá, je měřitelná a $\lambda_1(B) = b-a$.

Jestliže f je aproximativně spojitá s.v. v $\langle a,b \rangle$, je f měřitelná. Stačí vyšetřit případ, že f je omezená. (Jinak bychom psali $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$, kde $f_n = \min(\max(f,-n),n)$.) Nechť $K \in E_1$ a $|f| < K$ na intervalu $\langle a,b \rangle$. Nechť Φ je systém všech funkcí φ na $\langle a,b \rangle$ takových, že $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(x) \geq (f(x)$ s.v., $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$ pro všechna $x,y \in \langle a,b \rangle$.
Položte $F : x \longmapsto \inf\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(x)$ a dokažte, že F je lipschitzovská na $\langle a,b \rangle$. Potom ukažte, že $F' = f$ na množině bodů aproximativní spojitosti funkce f.

8.23 **Příklady**

(a) Funkce spojitá v bodě x je aproximativně spojitá v tomto bodě.

(b)* Nechť f je nespojité řešení rovnice $f(x+y) = f(x)+f(y)$ (viz 18.11). Potom f není aproximativně spojitá v žádném bodě E_1.

N á v o d. Kdyby f byla aproximativně spojitá v nějakém bodě , byla by omezená na jisté množině kladné míry. Nyní užijte 18.22.

(c) Nechť $g : x \longmapsto \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $g(0) = 0$. Potom g není aproximativně spojitá v bodě nula.

1014-7781

8.24 Cvičení. Označme $\mathcal{A}$ systém všech měřitelných množin $M \subset E_1$ takových, že každý bod $x \in M$ je bodem hustoty množiny M. Nechť f je konečná funkce na E_1. Potom je f aproximativně spojitá, právě když pro každé $a \in E_1$ platí

$$\{x \in E_1;\ f(x) > a\} \in \mathcal{A}, \quad \{x \in E_1;\ f(x) < a\} \in \mathcal{A}.$$

8.25 Cvičení.

(a) Vyšetřete množinové vlastnosti systému $\mathcal{A}$ (uzavřenost na jednotlivé operace).

(b) Nechť $c \in E_1$ a f, g jsou funkce aproximativně spojité na E_1. Potom jsou funkce $f+g$, cf, fg aproximativně spojité na E_1.

(c) Rozhodněte, zda limita stejnoměrně konvergentní posloupnosti aproximativně spojitých funkcí na $\langle a, b \rangle$ je aproximativně spojitá funkce.

8.26 Tvrzení. Každá omezená aproximativně spojitá funkce má primitivní funkci.

N á v o d. Ukažte, že taková funkce je všude rovna derivaci svého neurčitého Lebesgueova integrálu.

8.27 Příklad. Funkce g z 8.23(c) má primitivní funkci, ale není aproximativně spojitá.

8.28 Poznámky. Z 8.26 plyne, že každá omezená aproximativně spojitá funkce f je první Baireovy třídy. Toto tvrzení platí i pro neomezené aproximativně spojité funkce - lze např. užít 12.9. Speciálně jsou tedy množiny $\{x \in E_1;\ f(x) > a\}$, $\{x \in E_1;\ f(x) < a\}$ typu F_σ pro každá $a \in E_1$.

8.29 Označení. Jsou-li $E, F \subset E_1$ měřitelné množiny, pišme $F \Subset E$, je-li $F \subset E$ a každý bod množiny F je bodem hustoty množiny E.

8.30* Lemma. Nechť $E \subset E_1$ je měřitelná množina, $F \Subset E$ uzavřená množina. Potom existuje uzavřená množina $H \subset E_1$ tak, že $F \Subset H \Subset E$.

N á v o d. Nechť $F \neq \emptyset$ a nechť $\{(a_n, b_n)\}$ je posloupnost všech styčných intervalů množiny F. Označme $\alpha_n = a_n$, pokud $a_n \in E_1$, $\alpha_n = b_n - 1$, pokud $a_n = -\infty$; $\beta_n = b_n$, pokud $b_n \in E_1$, $\beta_n = a_n + 1$, pokud $b_n = +\infty$. Pro každé $n \in N$ položme $c_n^0 = \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)$ a indukcí definujeme c_n^k pro $k > 0$

1014-7781

tak, aby $c_n^k \in (c_n^{k-1}, \beta_n)$ a $c_n^k - c_n^{k-1} = (\beta_n - c_n^k)^2$.

Dále definujeme indukcí c_n^k pro $k < 0$ tak, aby

$c_n^k \in (\alpha_n, c_n^{k+1})$ a $c_n^{k+1} - c_n^k = (c_n^k - \alpha_n)^2$. Nechť $\widetilde{E}$ je množina všech bodů množiny E, které jsou jejími body hustoty.

Zvolme $H_n^k \subset \widetilde{E} \cap (c_n^k, c_n^{k+1})$ uzavřenou tak, aby

$$\lambda_1 ([\widetilde{E} \cap (c_n^k, c_n^{k+1})] \setminus H_n^k) \leq 2^{-n-|k|} (c_n^{k+1} - c_n^k).$$

Pak stačí položit $H = F \cup \bigcup_{k,n} H_n^k$.

8.31* <u>Tvrzení.</u> Nechť $E \in \mathcal{R}$ a nechť E je typu F_σ. Pak existuje aproximativně spojitá funkce φ definovaná na E_1 tak, že $\varphi(x) = 0$ pro $x \notin E$ a $0 < \varphi(x) \leq 1$ pro $x \in E$.

N á v o d. Nechť $E \neq \emptyset$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, F_n uzavřené a neprázdné. Položme $H_1 = F_1$ a indukcí definujme uzavřené množiny H_n tak, aby $\bigcup_{k=1}^{n} F_k \cup H_{n-1} \Subset H_n \Subset E$. Dále definujeme množiny H_r pro všechna čísla tvaru $p/2^q$, $q = 0,1,2,\dots$, $p = 2^q, 2^q+1, 2^q+2,\dots$ (indukcí podle q; pro $q = 0$ jsou již definovány). Je-li $r = (2p+1)/2^{q+1}$, volíme H_r uzavřenou tak, aby $H_{r'} \Subset H_r \Subset H_{r''}$, kde $r' = p/2^q$ a $r'' = (p+1)/2^q$. Položme

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin E, \\ \dfrac{1}{\inf\{r;\ x \in H_r\}} & \text{pro } x \in E. \end{cases}$$

Snadno se dokáže, že φ má požadované vlastnosti.

Předchozí tvrzení spolu s odstavcem 8.26 dává možnost konstrukce takových funkcí, které mají malou množinu bodů spojitosti a mají primitivní funkci na E_1.

8.32* <u>Tvrzení.</u> Existuje omezená funkce φ na E_1 mající primitivní funkci taková, že množina bodů spojitosti funkce φ má míru nula.

N á v o d. Nechť $\{r_n\}$ je posloupnost všech prvků množiny R. Položte $G_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - 1/k2^n, r_n + 1/k2^n)$, $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, $E = E_1 \setminus G$. Potom $E \in \mathcal{R}$ a E je typu F_σ. Funkce sestrojená podle 8.31 má požadované vlastnosti.

1014-7781

8.33* **Tvrzení.** Existuje spojitá a nikde monotonní (tj. která není monotonní na žádném intervalu) funkce na E_1, která má na E_1 omezenou derivaci.

N á v o d. Nechť A je množina definovaná v 4.11. Nechť $\widetilde{A}_1$ (resp. $\widetilde{A}_2$) je množina všech bodů množiny A (resp. $E_1 \setminus A$) které jsou body hustoty této množiny. Nechť $A_i \subset \widetilde{A}_i$ jsou množiny typu F_σ takové, že $\lambda_1(\widetilde{A}_i \setminus A_i) = 0$ $(i = 1,2)$.

Nyní stačí sestrojit funkce φ_1, φ_2 k množinám A_1, A_2 podle tvrzení 8.31. Primitivní funkce k $\varphi_1 - \varphi_2$ má požadované vlastnosti.

8.34* **Tvrzení.** Buď F neprázdná řídká uzavřená množina kladné míry. Pak existuje nekonstantní neklesající funkce φ mající omezenou derivaci na E_1 taková, že φ je konstantní na každém styčném intervalu množiny F.

N á v o d. Nalezněte množinu $E \subset F$, $E \in \mathcal{R}$, E je typu F_σ, tak, aby $\lambda_1(F \setminus E) = 0$. Pak stačí volit φ jako primitivní funkci k funkci sestrojené podle 8.31.

8.35 **Cvičení.**

(a) Funkce φ z 8.32 nemá Riemannův integrál na žádném omezeném intervalu $J \subset E_1$, přičemž má Newtonův integrál na J. Podobnou vlastnost má derivace funkce z 8.33.

(b) Je-li Φ primitivní funkce k funkci φ z 8.32, pak obě množiny $\{x \in E_1;\ \Phi'(x) > 0\}$ a $\{x \in E_1;\ \Phi'(x) = 0\}$ jsou husté v E_1. Stejnou vlastnost má inversní funkce z 4.19a. (Funkce, které mají na E_1 vlastní derivaci a uvedené množiny jsou husté v E_1, se nazývají Pompeiuovy funkce.)

(c) Funkce sestrojená v 8.32 má následující vlastnost: Množiny $\{x \in E_1;\ f'(x) > 0\}$, $\{x \in E_1;\ f(x) = 0\}$, $\{x \in E_1;\ f'(x) < 0\}$ jsou husté v E_1.

D. DALŠÍ SPOJITOSTI

8.36 **Symetrická spojitost.** Tomuto důležitému pojmu a jeho základním vlastnostem je věnováno téma 9.

8.37 **Další definice.** Zkoumejte ještě tyto pojmy "spojitosti", u nichž podáváme pouze definice.

1014-7781

(a) Funkce f je kvazispojitá v bodě x, jestliže ke každému okolí $U(x)$ bodu x a každému okolí $V(f(x))$ bodu $f(x)$ existuje otevřená neprázdná množina $\emptyset \neq G \subset U(x)$ tak, že $f(G) \subset V(f(x))$.

(b) Funkce f je "cliquish" (český termín?) v bodě x, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ a každému okolí $U(x)$ existuje otevřená neprázdná množina $\emptyset \neq G \subset U(x)$ tak, že $\rho(f(u), f(v)) < \varepsilon$ pro každé $u, v \in G$.

1014-7781

T É M A 9

Symetrická spojitost a derivace

Obsah: A. Symetrická spojitost.

B. Symetrická derivace.

C. Druhá Schwarzova derivace.

První dva oddíly tohoto tématu mají problémový charakter. Jsou definovány nové pojmy - obdobné pojmům spojitosti a derivace a zkoumá se, které známé vlastnosti z "klasické" analýzy se přenášejí i na tyto pojmy. V této souvislosti je možné si klást i řadu dalších otázek; toto přenecháváme iniciativě čtenáře.

A. SYMETRICKÁ SPOJITOST

9.1 Definice. Nechť funkce f je definována na okolí bodu $x_0 \in E_1$. Řekneme, že f je symetricky spojitá v x_0, jestliže

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] = 0.$$

Řekneme, že funkce f je symetricky spojitá v intervalu (a,b), jestliže je symetricky spojitá v každém bodě intervalu (a,b).

Řekneme, že funkce f je symetricky spojitá v uzavřeném intervalu $\langle A,B \rangle$, jestliže je symetricky spojitá v (A,B) a spojitá zleva (resp. zprava) v bodě B (resp. A).

9.2 Cvičení. V dalším zkoumejte, zda platí následující implikace (většinou platné pro obyčejnou spojitost); v případě, že některé tvrzení neplatí, uveďte protipříklad a pokuste se nalézt nutné či postačující podmínky pro platnost takového tvrzení:

(a) f spojitá v $x_0 \Longrightarrow f$ symetricky spojitá v x_0,

(b) f symetricky spojitá v $x_0 \Longrightarrow f$ spojitá v x_0,

(c) f, g symetricky spojité v $x_0 \Longrightarrow \alpha f + \beta g$, $\max(f,g)$, $f.g$ symetricky spojité v x_0,

(d) symetrická spojitost složené funkce - příslušná tvrzení formulujte,

(e) f_n symetricky spojité (resp. spojité) v x_0, $f_n \to f \Longrightarrow f$ symetricky spojitá v x_0,

1014-7781

(f) f_n symetricky spojité v (a,b), $f_n \rightrightarrows f$ v $(a,b) \Longrightarrow f$ symetricky spojitá v (a,b),

(g) f symetricky spojitá v $\langle a,b\rangle \Longrightarrow f$ omezená v $\langle a,b\rangle$,

(h) f symetricky spojitá (a omezená) v $\langle a,b\rangle \Longrightarrow f$ nabývá maxima v $\langle a,b\rangle$,

(i) f symetricky spojitá v $(a,b) \Longrightarrow f$ darbouxovská v (a,b),

(j) f symetricky spojitá v 0, f vyhovuje funkcionální rovnici $F(x+y) = F(x)+F(y) \Longrightarrow f$ lineární na E_1 (srovnej téma 18).

$\boxed{9,3^*}^*$ Tvrzení. Nechť f je symetricky spojitá funkce na otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Potom existuje hustá podmnožina intervalu I tak, že f je spojitá v každém jejím bodě.

N á v o d. Předpokládejte, že f je nespojitá v každém bodě nějakého otevřeného intervalu $J \subset I$. Pak existuje otevřený interval $J_o \subset J$ a reálná čísla $r_1 < r_2$ tak, že množiny $\{x \in J_o;\ f(x) > r_2\}$, $\{x \in J_o;\ f(x) < r_1\}$ jsou husté v intervalu J_o (srovnej 12.9). Pro každé $x \in J_o$ zvolme takové $\delta_x > 0$, aby pro každé h, $0 < h < \delta_x$ bylo $|f(x+h) - f(x-h)| < \frac{1}{4}(r_2 - r_1)$. Z Baireovy věty dokážete existenci otevřeného intervalu $J_1 \subset J_o$ a $\varepsilon > 0$ takových, že množina $\{x \in J_1;\ \delta_x > \varepsilon\}$ je hustá v J_1. Zvolte $x_o \in J_1$, $u v \in J_1$, $x_o < u < v$, $v - x_o < \varepsilon$, $f(v) > r_2$, $f(u) < r_1$. Položte $s = \frac{1}{2}(u+v)$, $s_o = x_o + \frac{1}{2}(v-u)$ a zvolte s_1 tak, aby $|s_1 - \frac{1}{2}(x+s)| < \frac{1}{2}\delta_{s_o}$, $\delta_{s_1} > \varepsilon$. Dále položte $u' = 2s_1 - u$, $v' = 2s_1 - v$, $u_1 = 2s_o - u'$. Pak platí: $|f(u) - f(v)| \le |f(u) - f(u')| + |f(u') - f(u_1)| +$

$$+ |f(u_1) - f(v')| + |f(v') - f(v)| ;$$

výrazy na pravé straně odhadněte postupně ze symetrické spojitosti v bodech s_1, s_o, x_o, s_1.

$\boxed{9.4}$ Lemma. Nechť f je omezená symetricky spojitá funkce na otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Potom funkce osc_f (viz 5.7) je symetricky spojitá na I. Dokažte!

$\boxed{9.5^*}^*$ Věta. Nechť f je symetricky spojitá funkce na otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Potom f je skoro všude spojitá v I (viz D. Preiss, Čas. pěst. mat. 1971).

1014-7781

N á v o d. Lze předpokládat, že f je omezená. Podle 9.4 je funkce osc_f symetricky spojitá na I a je měřitelná (viz 10.4.b). Podle 9.3 je $osc_f(x) = 0$ pro každé x z husté podmnožiny intervalu I. Předpokládejte, že existuje $\varepsilon > 0$, že $\lambda_1 \{x \in I;\ osc_f(x) > \varepsilon\} > 0$. Zvolte $P \subset I$ uzavřenou tak, aby pro každý otevřený interval $J \subset I$ bylo $\lambda_1(J \cap P) > 0$ a $osc_f(x) > \varepsilon$ pro každé $x \in P$. Podobně jako v důkaze 9.3 ukažte, že existuje otevřený interval $J \subset I$ a $\eta > 0$ tak, že $P_0 = J \cap P \neq \emptyset$ a $\{x \in P_0;$ pro každé $h,\ 0 < h < \eta$, platí $|osc_f(x+h) - osc_f(x-h)| < \frac{\varepsilon}{4}\}$ je hustá v P_0.
Je-li nyní $x_0 \in P_0$ bod hustoty množiny P_0 (viz 8.16), $v \in I$, $x_0 < v$, $osc_f(v) = 0$, v dostatečně blízko k x_0, existuje $u \in P_0$, $x_0 < u < v$ tak, že $\frac{1}{2}(x_0 + \frac{1}{2}(u+v)) \in P_0$. Dále postupujte obdobně jako v důkaze 9.3.

9.6 Cvičení. Omezená symetricky spojitá funkce na $\langle a,b \rangle$ je riemannovsky integrovatelná.

N á v o d. Užijte minulé věty.

9.7** Příklad. Existuje symetricky spojitá funkce na E_1, která je nespojitá v nespočetně mnoha bodech.

N á v o d. Zvolte $a_n \geq 0$, $a_0 = 1$ tak, aby
$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cos nx|$ bylo konečné v nespočetně mnoha bodech, ale aby $h(x) = +\infty$ s.v. Pak stačí položit $f(x) = 0$, pokud $h(x) = +\infty$, $f(x) = 1/(h(x))$, pokud $h(x) < +\infty$.
(Čísla a_n volte tak, aby $\sum |a_n| = +\infty$ a $h(x) < \infty$ na nespočetné množině. Při důkazu, že $h(x) = +\infty$ s.v. užijte větu z 22.11.)

9.8?? Problém. Podle 9.5 je každá symetricky spojitá funkce měřitelná. Není však dosud známo, zda každá symetricky spojitá funkce je baireovská, či snad nemusí být dokonce funkcí první Baireovy třídy.

9.9 Cvičení. Pro libovolnou funkci f na intervalu (a,b) označme
$C_f = \{x \in (a,b);\ f$ je spojitá v $x\}$,

$$C_f^s = \{x \in (a,b);\ f \text{ je symetricky spojitá v } x\}.$$

Z odstavce 5.9.b je známo, že množina C_f je vždy množina typu G_δ.

(a) Ukažte na příkladě, že toto tvrzení nemusí platit pro množinu C_f^s.

(b)* Existuje funkce f taková, že C_f^s není lebesgueovsky měřitelná.

N á v o d. Nechť H je Hamelova báze (viz 18.9 či 18.D), nechť $x_1 \in H$. Pro $x = \sum \alpha_i x_i$ položte $f(x) = \alpha_1$.

(c)* Je-li f lebesgueovsky měřitelná, potom je množina C_f^s lebesgueovsky měřitelná, ale nemusí být borelovská.

O těchto problémech se lze dočíst v článku: S.P. Ponomarev: Mat. zamětki 1 (1967), 385-390.

B. SYMETRICKÁ DERIVACE

$\boxed{9.10}$ Definice. Nechť f je definována na (a,b), buď $x_0 \in (a,b)$. Definujeme

$$f^{(s)}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

existuje-li limita vpravo byť nevlastní. Číslo $f^{(s)}(x_0)$ nazýváme symetrickou derivací funkce f v bodě x_0.

$\boxed{9.11}$ Cvičení. Zkoumejte následující implikace (v (d) a (e) příslušná tvrzení formulujte):

(a) $f'(x_0)$ existuje $\Longrightarrow f^{(s)}(x_0)$ existuje,

(b) $f^{(s)}(x_0)$ existuje $\Longrightarrow f'(x_0)$ existuje,

(c) $f^{(s)}x_0$ existuje $\Longrightarrow f$ je symetricky spojitá (spojitá) v bodě x_0,

(d) symetrická derivace součtu, součinu, násobku a složené funkce,

(e) má funkce $f^{(s)}$ Darbouxovu vlastnost? (Porovnejte s tématem 11, odstavec 11.3.)

(f) f libovolná spojitá, symetricky spojitá na (a,b), $f^{(s)}$ existuje vlastní na $(a,b) \Longrightarrow f^{(s)}$ spojitá na (a,b) (resp. symetricky spojitá, resp. první Baireovy třídy - porovnejte s 12.2)

1014-7781

$\boxed{9.12}$ Cvičení.

(a) Vyšetřete, zda platí Rolleova věta formulovaná pro symetrickou derivaci a symetrickou spojitost. (Viz také téma 26.C.)

(b) Nechť $f^{(s)}(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b)$. Je potom f konstantní v (a,b)? Co když navíc ještě přidáme předpoklad symetrické spojitosti (resp. spojitosti) funkce f na (a,b)?

$\boxed{9.13^*}$* Poznámky. Lze dokázat následující tvrzení; jejich důkazy jsou však obtížné.

(a) Nechť $f^{(s)}$ existuje skoro všude na intervalu (a,b). Potom f' existuje skoro všude na (a,b).

(b) Nechť f je spojitá na (a,b) a nechť existuje vlastní $f^{(s)}$ na (a,b). Potom množina bodů, kde neexistuje f', je první kategorie v (a,b).

(c) Obecněji: Nechť f je spojitá na (a,b). Potom f' existuje všude tam, kde existuje $f^{(s)}$, s výjimkou snad množiny první kategorie v (a,b).

O některých z těchto problémů se lze dočíst např. v článcích
C.E. Aull: [AMM], 74 (1967), 708-711,
S.N. Mukhopadhyay: [AMM], 74 (1967), 542-545.

$\boxed{9.14}$ Problém. Lze dokázat následující větu (viz 26.14.b):
Nechť f je spojitá na (a,b) a nechť $f^{(s)} = 0$ na (a,b).
Potom je f konstantní v intervalu (a,b).
Na základě této věty formulujeme následující problém.

(a) Buďte F, f definovány na intervalu (a,b). Řekneme, že F je symetrická primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b), jestliže

 (i) F je spojitá na (a,b),

 (ii) $F^{(s)} = f$ na (a,b).

(b) Řekneme, že $f \in SN\,(a,b)$, jestliže

 (i) k funkci f existuje na intervalu (a,b) symetrická primitivní funkce F,

 (ii) existují vlastní limity $\lim_{x \to a+} F(x)$, $\lim_{x \to b-} F(x)$.

(c) Pro $f \in SN\,(a,b)$ definujeme (F je symetrická primitivní funkce k f)

$$(SN)\int_a^b f \overset{\text{def.}}{=} \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

(tzv. symetrický N-integrál)

27566 P6

(d) Nezávisí definice tohoto integrálu na volbě F?

(e) Zkoumejte vlastnosti systému $SN(a,b)$!

(f) Vyšetřete vztah systémů $SN(a,b)$ a $N(a,b)$!

(g) Pokuste se vybudovat (pokud to má smysl), celou teorii SN-integrálu.

$\boxed{9.15^*}$ Úloha. Metodou kategorií (viz téma 20) dokažte, že existuje spojitá funkce na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nemající v žádném bodě $(0,1)$ symetrickou derivaci.

C. DRUHÁ SCHWARZOVA DERIVACE

V tomto oddílu budeme zkoumat tzv. druhou Schwarzovu derivaci a její vztah k obyčejné druhé derivaci funkce. Dále jsou formulovány pomocí tohoto pojmu postačující podmínky k tomu, aby funkce byla lineární nebo konvexní na intervalu. Závěrem (Vallé-Poussinova věta) je řešen vztah mezi "primitivní funkcí definovanou pomocí druhé Schwarzovy derivace" a obyčejnou primitivní funkcí. Výsledků tohoto oddílu lze užít při studiu některých otázek souvisejících s trigonometrickými řadami (viz téma 22).

$\boxed{9.16}$ Definice. Nechť funkce f je definována na okolí bodu x E_1 a nechť existuje

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = A \in E_1^*.$$

Potom číslo A nazveme druhou Schwarzovou derivací funkce f v bodě x; píšeme $f^{(")}(x) = A$.

$\boxed{9.17}$ Tvrzení. Jestliže f má v bodě x druhou derivaci, potom existuje $f^{(")}(x)$ a platí $f''(x) = f^{(")}(x)$.

N á v o d. Položte $\varphi(h) = f(x+h) + f(x-h)$ a užijte větu o střední hodnotě.

$\boxed{9.18}$ Cvičení. Sestrojte funkci f definovanou na E_1, pro niž existuje $f^{(")}(0)$ a neexistuje $f''(0)$.

N á v o d. Položte

$$f : x \longmapsto \int_0^x t \sin(1/t)\, dt, \quad x \in E_1.$$

$\boxed{9.19^*}$ Věta (Schwarz). Buď F funkce spojitá na $\langle a,b\rangle$ a nechť pro všechna $x \in (a,b)$ platí $F^{('')}(x) = 0$. Potom je F lineární na intervalu $\langle a,b \rangle$.

Návod. Zvolte $\varepsilon > 0$ a položte pro $x \in E_1$

$$\varphi : x \mapsto F(x) - \left[F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a)\right] + \varepsilon (x - a)(x - b).$$

Je $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ a pro $x \in (a,b)$ je $\varphi^{('')}(x) = 2\varepsilon$ (proč?).

Buď $d = \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} \varphi(x)$. Kdyby $d > 0$, $\varphi(x_0) = d$, bylo by podle definice $\varphi^{('')}(x_0) \leqq 0$. Tedy

$$(↯) \qquad \varphi \leqq 0.$$

Podobně pro funkci ψ:

$$\psi : x \longmapsto -\left[F(x) - \left[F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a)\right]\right] + \varepsilon (x-a)(x-b)$$

dokažte $\psi \leqq 0$. Odtud a z (↯) je

$$\left|F(x) - \left[F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a)\right]\right| \leqq \varepsilon \left|(x - a)(x - b)\right| .$$

Odtud tvrzení snadno plyne.

9.20 Věta. Nechť $K \subset (a,b)$ je konečná množina. Buď F spojitá funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$ a nechť pro každé $x \in (a,b) \setminus K$ je $F^{('')}(x) = 0$ a pro každé $y \in K$ je

$$(!) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{F(y+h) - 2F(y) + F(y - h)}{h} = 0.$$

Potom F je lineární na intervalu $\langle a,b \rangle$.

9.21 Poznámka. Uvědomte si rozdíl mezi (!) a $F^{('')}(y)$. Také srovnejte tvrzení v 9.19 a 9.20 s příslušnými tvrzeními pro obyčejnou druhou derivaci.

Vzniká otázka, jak určit F, známe-li $F^{('')}$. Připomeňte nejprve věty, které znáte pro případ F''.

9.22 Definice. Číslo $\lambda \in E_1^*$ nazveme druhým Schwarzovým derivovaným číslem funkce F v bodě x, když existují čísla $h_n > 0$, $h_n \to 0$ tak, že

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{F(x + h_n) - 2\,F(x) + F(x - h_n)}{h_n^2} .$$

9.23 Cvičení.

(a) Množina konečných druhých Schwarzových derivovaných čísel libovolné funkce F je uzavřená podmnožina E_1. Dokažte!

(b) Nechť
$$f : x \mapsto \begin{cases} x^{3/2} \sin(1/x), & x > 0, \\ 0 & x \leqq 0. \end{cases}$$

Potom každé reálné číslo je druhým Schwarzovým derivovaným číslem funkce f v bodě 0. (Funkce f je spojitá a existuje $f'(0)$).

(c) Zkoumejte souvislost existence $F^{(")}(x)$ s druhými Schwarzovými derivovanými čísly funkce F v bodě x. Vysvětlete podrobně, co znamená, že všechna druhá Schwarzova derivovaná čísla v bodě x jsou větší než $-\infty$.

9.24 **Věta.** Je-li F konvexní funkce na intervalu (α, β), potom jsou pro každé $x \in (\alpha, \beta)$ všechna druhá Schwarzova derivovaná čísla nezáporná. Dokažte!

9.25 **Cvičení.** Dokažte, že platí "obrácené tvrzení" k větě z předcházejícího odstavce. Nejprve přesně formulujte.

N á v o d. Zvolte $\alpha < a < b < \beta$ a $\varepsilon > 0$ a funkci φ definujte jako v odstavci 9.19. Je-li λ druhé Schwarzovo derivované číslo funkce φ v bodě $x \in (a,b)$, je $\lambda \geqq 2\varepsilon$. Odtud, stejně jako v 9.19, odvodíte $\varphi \leqq 0$ na (a,b).

9.26* **Lemma.** Buď $E \subset \langle a,b \rangle$ množina míry nula. Potom existuje spojitá rostoucí funkce σ taková, že $\sigma'(x) = \infty$ pro všechna $x \in E$.

N á v o d k d ů k a z u. Pro $n \in N$ buď G_n otevřená množina obsahující E, pro kterou $\lambda_1 G_n < 2^{-n}$. Položte
$$\psi_n : x \mapsto \lambda_1 \{G_n \cap (a,x)\} .$$
Potom položte
$$\sigma : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x).$$
Ukažte, že σ má požadované vlastnosti.

9.27 **Cvičení.** Zkoumejte, zda Cantorova funkce má derivaci rovnou $+\infty$ v bodech Cantorova diskontinua (viz 4.22).

9.28* **Věta.** Buď F spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$ a nechť všechna druhá Schwarzova derivovaná čísla jsou větší než $-\infty$. Buď $E \subset \langle a,b \rangle$ množina míry nula a nechť pro každé $x \in \langle a,b \rangle \setminus E$ jsou všechna druhá Schwarzova derivovaná čísla nezáporná. Potom je funkce F konvexní.

N á v o d. Zvolte $\varepsilon > 0$ a položte $\Phi_\varepsilon = F + \varepsilon\tau$, kde τ

1014-7781

je neurčitý Lebesgueův integrál funkce σ z odstavce 9.26. Uvědomte si, že funkce τ je konvexní. Protože Φ_ε splňuje předpoklady "obráceného tvrzení" ze cvičení 9.25, je Φ_ε konvexní a tedy také $F = \lim_{\varepsilon \to 0+} \Phi_\varepsilon$ je konvexní.

$\boxed{9.29^*}$ Věta (Vallé - Poussin). Nechť f je konečná lebesgueovsky integrovatelná funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, buď Φ neurčitý Lebesgueův integrál funkce f. Nechť F je spojitá funkce a nechť pro každé $x \in (a,b)$ je $F^{(")}(x) = f(x)$. Potom existují $A, B \in E_1$ tak, že pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$ je

$$F(x) = \int_a^x \Phi(t)\,dt + Ax + B.$$

N á v o d. Předpokládejte, že $\Phi(a) = 0$, označte $\varphi_n = \min(n, \max(f, -n))$. Buď ψ_n neurčitý integrál funkce φ_n takový, že $\psi_n(a) = 0$. Položte

$$\Phi_n(x) = \int_a^x \psi_n, \quad R_n = F - \Phi_n. \text{ Protože } \Phi_n'' = \varphi_n \text{ s.v.,}$$

je $R_n^{(")} \geq 0$ s.v. . Podle věty o střední hodnotě je

$$\frac{\Phi_n(x+h) - 2\Phi_n(x) + \Phi_n(x-h)}{h^2} = \frac{\Phi_n'(x+\theta h) - \Phi_n'(x-\theta h)}{2\theta h} =$$

$$= \frac{1}{2\theta h} \int_{x-\theta h}^{x+\theta h} \varphi_n \leq n.$$

Odtud odvoďte, že všechna druhá Schwarzova derivovaná čísla funkce R_n jsou větší než $-\infty$ v každém $x \in (a,b)$. Podle 9.28 je R_n konvexní. Z Lebesgueovy věty o záměně limity a integrálu plyne $\psi_n(t) \longrightarrow \Phi(t)$ pro $t \in \langle a,b\rangle$ a

$$\Phi_n(x) = \int_a^x \psi_n(t)\,dt \longrightarrow \int_a^x \Phi(t)\,dt.$$

Tedy funkce $\widetilde{R} : x \longmapsto F(x) - \int_a^x \Phi(t)\,dt$ je konvexní, neboť je limitou konvexních funkcí. Funkce $-\widetilde{R}$ je také konvexní. Odtud plyne tvrzení.

T É M A 10

Polospojité funkce

Obsah: A. Funkce polospojité v bodě.

B. Funkce polospojité na množině.

A. FUNKCE POLOSPOJITÉ V BODĚ

10.1 Definice. Řekneme, že funkce f definovaná v intervalu $(a,b) \subset E_1$ je polospojitá zdola v bodě $c \in (a,b)$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; (x \in (c-\delta, c+\delta) \Longrightarrow f(c) - \varepsilon < f(x)).$$

Obdobně definujte polospojitost shora $(f(x) < f(c) + \varepsilon)$.

10.2 Cvičení.

(a) Funkce f je spojitá v bodě c, právě když je zdola i shora polospojitá v c.

(b) Ukažte, že funkce f je zdola polospojitá v bodě c, právě když $\liminf\limits_{x \to c} f(x) \geq f(c)$. Obdobně pro polospojitost shora.

(c) Vyšetřete polospojitost Dirichletovy a Riemannovy funkce.

(d) Definujte polospojitost zdola v bodě c zleva.

(e) Definujte polospojitost v bodě vzhledem k množině.

(f) Zkoumejte polospojitost součtu, součinu a složené funkce.

B. FUNKCE POLOSPOJITÉ NA MNOŽINĚ

10.3 Definice. Řekneme, že funkce f je polospojitá zdola na intervalu (a,b), jestliže je polospojitá zdola v každém jeho bodě. Obdobně polospojitost shora.

10.4 Cvičení.

(a) Ukažte, že existuje funkce f zdola polospojitá na E_1, jejíž množina bodů nespojitosti je hustá v E_1 (tj. každý otevřený interval obsahuje alespoň jeden bod nespojitosti f).

1014-7781

(b) Je-li g omezená funkce na E_1, potom jsou funkce osc_g, $\limsup g$, $\liminf g$ (viz 5.7) polospojité na E_1. Dokažte.

(c) Kdy je charakteristická funkce množiny $M \subset E_1$ polospojitá zdola (kdy shora)?

(d) Kdy je funkce nabývající konečně mnoha hodnot polospojitá?

10.5 Cvičení.

(a) Nechť f je funkce definovaná v intervalu (a,b). Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) f je zdola polospojitá v (a,b),

(ii) pro každé $c \in E_1$ je množina $\{x \in (a,b);\ f(x) > c\} = f^{-1}((c,+\infty))$ otevřená,

(iii) pro každé $c \in E_1$ je množina $\{x \in (a,b);\ f(x) \leq c\} = f^{-1}((-\infty, c\rangle)$ uzavřená.

Jak zní analogické tvrzení pro spojité funkce?

(b) Nechť f_n $(n=1,2\dots)$ jsou spojité v (a,b), $f_n \nearrow f$ v (a,b). Potom f je zdola polospojitá na (a,b). Dokažte.

N á v o d. Použijte (a).

10.6 Věta. Tvrzení 10.5.b lze za jistého předpokladu obrátit; dokažte následující: Nechť funkce f je zdola polospojitá a zdola omezená v (a,b). Potom existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na (a,b) tak, že $f_n \nearrow f$ na (a,b).

N á v o d. Položte $f_n(x) = \inf\limits_{y \in (a,b)} \left[f(y) + n\,|x-y| \right]$, $x \in (a,b)$, $n \in N$.

10.7 Věta. Nechť funkce f je polospojitá zdola na intervalu $\langle a,b\rangle$ (jak je to s polospojitostí v krajních bodech?) Potom f je zdola omezená na $\langle a,b\rangle$. Dokažte.

N á v o d. Tvrzení dokazujte sporem a použijte Bolzanò-Weierstrassovu větu o existenci hromadného bodu omezené posloupnosti. Jinou možnost poskytuje metoda důkazu analogické věty pro spojité funkce.

10.8 Poznámky.

(a) Vyslovte analogické věty pro shora polospojité funkce.

(b) Z 10.6 a 10.7 plyne, že funkce zdola polospojité na $\langle a,b\rangle$ jsou funkce první Baireovy třídy (viz 12.A), tedy polospojité funkce mají hustou množinu bodů spojitosti.

(c) Je předpoklad omezenosti zdola funkce f v 10.6 podstatný?

(d) Uvedené definice i celá teorie - obdobně jako teorie spojitých funkcí - lze vybudovat značně obecněji v metrických prostorech. Rovněž můžeme připustit, že funkce nabývají i "nekonečných" hodnot.

T É M A 11

Darbouxovské funkce

Obsah: A. Definice a základní vlastnosti.

B. Součet a limita darbouxovských funkcí.

C. Vztah darbouxovských a spojitých funkcí.

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

11.1 Definice. Říkáme, že reálná funkce f definovaná na intervalu $I \subset E_1$ je na tomto intervalu darbouxovská, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, a pro každé $c \in E_1$ ležící mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$ existuje $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ tak, že $f(x) = c$ (precizujte výrok "ležící mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$").

11.2 Ekvivalentní definice. Dokažte, že funkce f je darbouxovská na intervalu I, právě když pro každý interval $J \subset I$ je $f(J)$ buď interval nebo jednobodová množina. Jinými slovy, obraz každé souvislé množiny $G \subset I$ je opět souvislá množina.

11.3 Poznámka. Na přednášce se dokazuje, že

(a) každá funkce spojitá na intervalu I je darbouxovská na I,

(b) existuje-li vlastní derivace f' v otevřeném intervalu I, je funkce f' darbouxovská na I (viz [D II], kap. V, § 7, věta 82). (Platí tvrzení (b) i pro jednostrannou derivaci?)

11.4 Tvrzení. Je-li funkce f spojitá na $\langle a,b \rangle$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, existuje $c \in (a,b)$ tak, že $f(c) = 0$. Dokažte! Speciálně ukažte, že polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

11.5 Cvičení.

(a) Pomocí 11.3.b ukažte, že funkce sign, Dirichletova, Riemannova nemají primitivní funkci například na intervalu $(-1,1)$ (mají tam alespoň zobecněnou primitivní funkci?).

(b) Ukažte na jednoduchém případě, že tvrzení 11,3 a nelze obrátit!

11.6* Věta. Ukažte, že dokonce existuje funkce, která každý interval

1014-7781

$I \subset E_1$ zobrazuje na E_1. Existuje tedy funkce darbouxovská na E_1, která není spojitá v žádném bodě E_1 (vysvětlete!).

N á v o d.

(a) Uvažujte funkce g,h z tématu 4, odstavec 4.26.

(b) Viz též [D II], kap. V, § 6, cvičení 7. Ukažte, že tato funkce (sestrojili Knaster, Kuratowski 1925) je druhé Baireovy třídy (viz téma 12).

(c) Buď H Hamelova báze E_1 (viz téma 18 anebo [D II], dodatek, § 4, cvičení 1) a buď φ zobrazení H na E_1 (proč existuje?).
Funkci f nyní definujeme takto:
$$f(0) = 0, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(h_i),$$
je-li $x = \sum_{i=1}^{n} r_i h_i$ (r_i nenulová, racionální, $h_i \in H$).
Ukažte, že pro každý interval $I \subset E_1$ je $f(I) = E_1$!

B. SOUČET A LIMITA DARBOUXOVSKÝCH FUNKCÍ

$\boxed{11.7^*}$ **Součet.**

(a) Buďte g, h funkce z 11.6.a. Dokažte, že
$h(g^{-1}(y) \cap (x_1,x_2)) = E_1$ pro každé $y, x_1, x_2 \in E_1$, $x_1 < x_2$.

(b) Součet dvou darbouxovských funkcí nemusí být darbouxovská funkce. Sestrojte příklad!

(c) Dokonce platí tvrzení, že každá reálná funkce f na E_1 je součtem dvou darbouxovských funkcí na E_1.

N á v o d. Buďte g,h funkce z 11.6.a. Nechť
$$u(x) = \begin{cases} h(x) - f(x) & \text{pro } g(x) \neq 0, \\ h(x) & \text{pro } g(x) = 0. \end{cases}$$
Pomocí 11.7.a ukažte, že funkce u, $u+f$ jsou darbouxovské.

Poznámka. Toto tvrzení vyslovil poprvé Lindenbaum roku 1927 bez důkazu, důkaz provedl Sierpiński roku 1953, jednoduchý důkaz pochází od Fasta - viz Colloq.Math. 7 (1959), 75-77. Zajímavé je, že Sierpiński spolu s Kuratowskim již v roce 1926 publikovali práci, z které toto tvrzení snadno vyplývá. Sierpińského důkaz z roku 1953 je založen na jiné myšlence a - jak poznamenává

1014-7781

S. Marcus (Rev. Math. Pur. Appl. V, (1960) No 1, 103-105) - zřejmě Sierpiński na svoji původní práci z roku 1926 zapomněl.

(d) Protože součet spojitých funkcí je funkce spojitá, tedy darbouxovská, naskýtá se otázka, zda součet spojité a darbouxovské funkce je funkce darbouxovská. Odpověď je opět negativní, jak ukazuje práce R. Švarce, která vyjde v Časopise pro pěstování matematiky.

11.8 Limita.

(a) Na jednoduchém příkladě ukažte, že existuje posloupnost $\{f_n\}$ darbouxovských funkcí na E_1 taková, že $f_n \longrightarrow f$ na E_1 a f není darbouxovská.

(b)* Ukažte, že každou reálnou funkci na E_1 lze vyjádřit jako limitu posloupnosti darbouxovských funkcí na E_1. (Autoři jako v 11.7.c.)

N á v o d. Pomocí 11.7.a dokažte, že funkce f_n definovaná vztahem $n f_n(x) = (n - 1) f(x) + h(x) - (g(x) - 1)f(x) =$

$$= n f(x) + h(x) - g(x) f(x)$$

jsou darbouxovské na E_1 a $f_n \longrightarrow f$ na E_1.

11.9 Problém. Není dosud známo, jak definovat konvergenci posloupnosti funkcí tak, aby tato konvergence zachovávala Darbouxovu vlastnost (tj. jsou-li f_n darbouxovské na intervalu I a konvergují-li podle této definice k funkci f, je tato funkce darbouxovská a naopak - viz k tomuto téma 48).

Ukažte, že

(a)* Existuje dokonce posloupnost $\{f_n\}$ funkcí darbouxovských na E_1, která konverguje na E_1 stejnoměrně k funkci f, která není darbouxovská na E_1.

N á v o d. Buď g taková funkce na E_1 a $M = \{x_n\}$ taková prostá posloupnost, že α) $g(I) = E_1$ pro každý interval $I \subset E_1$,

β) $g(M) = \{0\}$,

γ) M je hustá podmnožina E_1

(existuje taková funkce g a taková množina M?).

Definujte funkci f vztahem

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pro } g(x) \neq 0, \\ 1 & \text{pro } g(x) = 0,\ x \notin M, \\ \frac{1}{n} & \text{pro } x = x_n \end{cases}$$

1014-7781

a posloupnost funkcí f_n vztahy

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \notin M \text{ nebo pro } x = x_k \ (k \leq n), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

(b) Definujeme-li tzv. spojitou konvergenci posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ k funkci f na intervalu I implikací

$$x_n, x \in I, x_n \longrightarrow x \Longrightarrow f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$$

je limitní funkce při této konvergenci vždy spojitá.

(c) Ukažte, že pro stejnoměrnou konvergenci neplatí tvrzení analogické k 11.9.b.

N á v o d. Uvažujte Dirichletovu či Riemannovu funkci.

11.10* Příklad. Lze dokázat, že existuje nekonstantní funkce f darbouxovská na E_1, první Baireovy třídy, která je skoro všude nulová (mohla by být taková funkce spojitá?).

N á v o d. Položíme-li $\mu(x) = \inf_{n \in N} \left(2^{2^n} x - [2^{2^n} x]\right)$, $f(x) = \min(\mu(x), \mu(1 - x))$, má f požadované vlastnosti (viz Croft, Journ. Lond. Math. Soc. 1963, str. 9-10).

C. VZTAH DARBOUXOVSKÝCH A SPOJITÝCH FUNKCÍ

Každá spojitá funkce na intervalu I je na tomto intervalu darbouxovská. Obráceně - darbouxovská funkce ještě nemusí být ani zdaleka spojitá (odstavce 11.5.b a 11.6). Naskýtá se otázka, za jakých dalších podmínek již darbouxovská funkce bude spojitá.

11.11 Tvrzení.

(a) Buď f darbouxovská funkce na intervalu I. Potom f je spojitá na I, právě když pro každé $r \in E_1$ je množina $f^{-1}(r) = \{x \in E_1;\ f(x) = r\}$ uzavřená.

N á v o d. Jedna implikace je zřejmá. Naopak, volte $x_0 \in E_1$; chcete ukázat, že f je spojitá v x_0. Nechť tedy $\limsup_{x \to x_0} f(x) > f(x_0)$, tj. nechť existuje posloupnost $\{x_n\}$ a $r \in E_1$ tak, že $x_n \longrightarrow x_0$ a pro všechna n je $f(x_n) \geq r > f(x_0)$. Existuje posloupnost $\{z_n\}$ tak, že $f(z_n) = r$, $z_n \longrightarrow x_0$ (využijte toho, že f je darbouxovská na intervalu (x_0, x_n))

1014-7781

či (x_n, x_o)). Odtud vyplyne, že $f(x_o) = r$ (provádějte podrobně!).

(b) Stačí předpokládat v části (a), že množiny $f^{-1}(r)$ jsou uzavřené pro všechna racionální čísla r?

(c) Buď f darbouxovská na intervalu $I \subset E_1$. Nechť vnitřek množiny $\{x \subset E_1;\ f^{-1}(x)$ je nekonečná množina$\}$ je prázdný. Potom f je spojitá. (Viz kupříkladu D. Gillespie, Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1922, str. 245-250.)

(d) Buď f spojitá na intervalu I. Musí být $\operatorname{Int}\{x \in E_1;\ f^{-1}(x)$ je nekonečná$\} = \emptyset$?

(e) Buď f darbouxovská na intervalu I, nechť každé hodnoty z $f(I)$ nabývá funkce pouze v konečně mnoha bodech. Potom je f spojitá na I.

N á v o d. Použijte (a) nebo (c).

(f) Speciálně, buď f prostá a darbouxovská funkce na intervalu I. Potom je f spojitá a ryze monotonní na I.

1014-7781

T É M A 12

Baireovské funkce

A. FUNKCE PRVNÍ BAIREOVY TŘÍDY

Víte, že limita posloupnosti spojitých funkcí nemusí být spojitá funkce. Proto zavedeme následující definici.

12.1 Definice. Řekneme, že funkce f je první Baireovy třídy na intervalu $(a,b) \subset B_1$, jestliže existuje posloupnost $\{f_n\}$ funkcí spojitých na intervalu (a,b) taková, že $f_n \longrightarrow f$ na (a,b). Symbolem $B_1((a,b))$ označíme systém všech funkcí první Baireovy třídy na (a,b).

12.2 Tvrzení. Nechť existuje vlastní f' na (a,b), potom $f' \in B_1((a,b))$.

N á v o d. Existuje-li $f'(c)$, je $f'(c) = \lim_{n \to +\infty} n \left[f(c + \frac{1}{n}) - f(c)\right]$. (viz též [$\pi$], příklad 3.16).

12.3 Cvičení. Formulujte tvrzení 12.2 jako nutnou podmínku pro existenci primitivní funkce. Ukažte na příkladě, že tato podmínka není postačující. Sestrojte $f \in B_1(a,b)$ tak, aby f byla darbouxovská a neměla primitivní funkci na (a,b).

12.4* Věta (Baire). Nechť $f \in B_1((a,b))$. Pak v každém otevřeném podintervalu intervalu (a,b) existuje bod, ve kterém je f spojitá (tj. body spojitosti funkce f tvoří množinu hustou v intervalu (a,b)).

N á v o d. Nejprve odvoďte lemma: Nechť $\langle a,b \rangle = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou uzavřené. Potom existuje $m \in N$ tak, že množina

1014-7781

F_m obsahuje interval (plyne z Baireovy věty o kategoriích). Pokud ji neznáte, postupujte při důkazu tohoto lemmatu sporem a pak užijte Cantorovy věty o průniku do sebe zařazených uzavřených intervalů. Mějme nyní $\varepsilon > 0$ a $\langle A,B\rangle \subset (a,b)$. Definujte množiny $A_{n,m} = \{x \in \langle A,B\rangle ;\ |f_{n+m}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon\}$ a označte $B_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$ (jak vypadá B_n?). Protože B_n jsou uzavřené a $\langle A,B\rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, najdeme podle lemmatu interval $\langle \alpha,\beta\rangle \subset (A,B)$ takový, že $|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$ pro $x,y \in \langle \alpha,\beta\rangle$. Existuje tedy posloupnost do sebe vložených uzavřených intervalů I_n tak, že $I_n \subset (A,B)$ a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n}$ pro $x,y \in I_n$. Hledaný bod leží v průniku intervalů I_n.

$\boxed{12.5}$ Cvičení. Dokažte, že Dirichletova funkce $D / (0,1)$ je limitou funkcí z $B_1((0,1))$ a nepatří do $B_1((0,1))$.

N á v o d. $D \notin B_1\,(0,1)$ podle minulé věty. Jestliže $\{r_n\}$ je množina všech racionálních čísel, položte $f_n(x) = 1$ pro $x = r_1,\dots,r_n$, $f_n(x) = 0$ pro ostatní x. Dokažte, že $f_n \in B_1((0,1))$ a $f_n \longrightarrow D$ v $(0,1)$. Rovněž lze vzít funkce $g_{m,n} : x \longmapsto \cos\,(n!\,\pi x)^{2m}$, $x \in (0,1)$.

$\boxed{12.6}$ Poznámka.

(a) Z Baireovy věty plyne nutná podmínka pro existenci primitivní funkce: Nechť f má na (a,b) primitivní funkci. Potom je f spojitá na husté množině v (a,b).

(b) Množina bodů nespojitosti funkce první Baireovy třídy je první kategorie.

N á v o d. Užijte toho, že množina bodů spojitosti je typu G_δ (viz 5.9.b) a užijte 12.4.

B. CHARAKTERISTIKA FUNKCÍ PRVNÍ TŘÍDY

$\boxed{12.7^{**}}$ Baireova charakteristika funkcí první třídy.

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $(a,b) \subset E_1$. Potom $f \in B_1((a,b))$, právě když pro každou uzavřenou neprázdnou množinu $F \subset (a,b)$ existuje bod $x_0 \in F$ takový, že funkce $f|F$ je spojitá v bodě x_0.

N á v o d. Je-li $f\in B_1((a,b))$, dokažte tvrzení metodou užitou v důkaze věty 12.4 (uvědomte si, že tento důkaz lze provést na libovolném úplném prostoru - tedy i na množině F). Pro důkaz opačné implikace lze použít následujícího obratu. Zvolte $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $I\subset(a,b)$ se nazývá regulární (pouze pro účely tohoto důkazu!), jestliže existuje funkce $\varphi\in B_1(I)$ tak, že $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ pro všechna $x\in I$. Buď G sjednocení všech regulárních intervalů; potom lze psát $G=\bigcup_n I_n$, kde I_n jsou otevřené, po dvou disjunktní intervaly. Dokažte nejdříve, že každý interval I_n je regulární - k tomuto účelu nalezněte takový disjunktní systém polouzavřených intervalů $J_k\subset I_n$ a funkcí $\varphi_k\in B_1(J_k)$, že $|\varphi_k(x)-f(x)|<\varepsilon$ pro $x\in J_k$ a že libovolný kompaktní podinterval protíná nejvýše konečně mnoho intervalů J_k. Nyní položte $\psi_n(x)=\varphi_k(x)$ pro $x\in J_k$ a dokažte, že funkce ψ_n má požadované vlastnosti.

Je-li $G\neq(a,b)$, nalezněte bod $x_0\in(a,b)\setminus G$, který je bodem spojitosti funkce $f|[(a,b)\setminus G]$ a zvolte $\delta>0$ takové, že $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ pro všechna $x\in(a,b)\setminus G$, $|x-x_0|<\delta$. Nyní položte

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x_0) & \text{pro } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[(a,b)\setminus G],\\ \psi_n(x) & \text{pro } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I_n.\end{cases}$$

Dokažte, že $\varphi\in B_1((x_0-\delta,x_0+\delta))$; z toho plyne, že interval $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ je regulární, a tedy $x_0\in G$ - to je ovšem spor. Tedy $G=(a,b)$, a proto existuje funkce $\varphi\in B_1((a,b))$ tak, že $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ na (a,b). Nyní si uvědomte, že stejnoměrná limita funkcí z B_1 je prvkem B_1 (viz 12.18.d).

$\boxed{12.8^*}$ Příklad. Nechť f je funkce rovna 1 v krajních bodech styčných intervalů Cantorova diskontinua a rovna 0 jinde v $(0,1)$. Potom f není první Baireovy třídy a je spojitá v každém bodě husté podmnožiny $(0,1)$. Porovnejte s větou 12.4.

$\boxed{12.9^{**}}$ Věta. Nechť f je funkce definovaná na intervalu $(a,b)\subset E_1$. Potom $f\in B_1((a,b))$, právě když pro každou uzavřenou neprázdnou množinu $F\subset(a,b)$ a pro každou dvojici reálných čísel $\alpha<\beta$ je nejvýše jedna z množin $\{x\in F;\ f(x)<\alpha\}$, $\{x\in F;\ f(x)>\beta\}$ hustá v F.

1014-7781

N á v o d. Je-li $f \in B_1((a,b))$, použijte věty 12.7. Pro důkaz opačné implikace použijte 5.10 a opět využijte Baireovy charakteristiky.

12.10* Cvičení. Dokažte užitím některé z vět 12.4, 12.7 následující tvrzení:

(a) Je-li f funkce spojitá ve všech bodech intervalu (a,b) s výjimkou spočetné množiny, je $f \in B_1((a,b))$.

(b) Je-li f libovolná funkce definovaná na otevřeném intervalu (a,b), jsou funkce osc_f, Limsup$f$, limsup f vesměs první Baireovy třídy na (a,b).

12.11 Cvičení. Dokažte věty z 12.4 a 12.7 také pro funkce nabývající nekonečných hodnot. (Rozmyslete si, jak je ovšem nutno modifikovat definici spojitosti v bodech, v nichž f nabývá nekonečných hodnot.)

C. BAIREOVA KLASIFIKACE

V oddílu A jsme vyšli ze systému spojitých funkcí na intervalu (a,b) a definovali jsme funkce první Baireovy třídy jako limity posloupností funkcí spojitých. Analogicky se definují funkce druhé Baireovy třídy (jako limity posloupností funkcí první třídy), funkce třetí třídy atd. Ukážeme, že ke každému přirozenému číslu n můžeme najít funkci, která leží v $(n+1)$-třídě a neleží v n-té třídě. (Např. Dirichletova funkce je druhé třídy a není první třídy.) Jinými slovy - z nižších funkcí dostáváme limitními přechody neustále širší systémy funkcí z vyšších tříd. Označíme-li $B_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ sjednocení všech baireovských tříd funkcí (B_n znamená množinu všech funkcí n-té třídy), lze dokázat, že existuje posloupnost funkcí $f_n \in B_\infty$ jejichž limita již neleží v B_∞. Můžeme tedy dále definovat třídu funkcí $B_{\infty+1}$ jako systém všech limit posloupností funkcí z B_∞. Definujeme-li třídu $B_{\infty+2}$ obdobně, lze opět dokázat, že $B_{\infty+2} - B_{\infty+1} \neq \emptyset$. Naskýtá se tedy otázka, zda náš proces někdy "skončí". Jakým způsobem lze pak charakterizovat takový systém funkcí? Těmito a obdobnými otázkami se budeme zabývat v tomto oddílu.

12.12 Definice. (Nebude-li výslovně řečeno něco jiného, rozumíme slovem funkce vždy konečnou funkci.)

17566 P7

Řekneme, že systém funkcí K definovaných na intervalu $(a,b) \subset E_1$ je <u>uzavřený vzhledem k bodové konvergenci,</u> jestliže platí implikace $f_n \in K,\ f_n \rightarrow f$ na $(a,b) \Longrightarrow f \in K$.

12.13 Cvičení.

(a) Na každém intervalu existují systémy funkcí uzavřené vzhledem k bodové konvergenci. Uveďte příklady!

(b) Nechť pro každé $i \in I$ je K_i systém funkcí na (a,b) uzavřený vzhledem k bodové konvergenci. Potom je $\bigcap_{i \in I} K_i$ systém funkcí uzavřený vzhledem k bodové konvergenci. Dokažte!

(c) Je-li $\mathcal{U}$ libovolná množina funkcí na (a,b), potom existuje "nejmenší" systém funkcí K takový, že $\mathcal{U} \subset K$ a K je uzavřený vzhledem k bodové konvergenci. Precizujte a systém K popište. V tomto případě říkáme, že systém K je generován množinou a značíme $K = \mathcal{L}(\mathcal{U})$.

(d) Nechť $\Lambda((a,b))$ znamená systém všech konečných lebesgueovsky měřitelných funkcí na (a,b). Potom $\Lambda((a,b))$ je uzavřený vzhledem k bodové konvergenci.

(e) Je systém všech neklesající (nerostoucích, monotonních) funkcí na (a,b) uzavřený vzhledem k bodové konvergenci?

12.14 <u>Definice.</u> Označme symbolem $B = B((a,b))$ nejmenší systém funkcí, který obsahuje $\mathcal{C}((a,b))$ a je uzavřený vzhledem k bodové konvergenci (tj. $B = \mathcal{L}(\mathcal{C})$). Prvkům B budeme říkat <u>baireovské funkce</u> (i když zde není jednotná terminologie - někteří autoři používají též názvu "borelovské funkce").

12.15 Cvičení.

(a) Ukažte, že $B((a,b)) \subset \Lambda((a,b))$.

(b) Buď B množina všech polynomů na (a,b). Potom $P = \mathcal{L}(P)$.

N á v o d. Užijte Weierstrassovy věty.

(c) Dokažte následující implikaci:

$$f \in B,\quad g \in B \Longrightarrow f + g \in B.$$

N á v o d. Buď nejprve T systém všech funkcí $f \in B$, pro něž platí: "Pro každou $g \in \mathcal{C}$ je $f+g \in B$". Zřejmě $\mathcal{C} \subset T$ a T je systém uzavřený vzhledem k bodové konvergenci. Tedy $T = B$. Nyní buď V systém všech $f \in B$, pro něž platí: "Pro každou $g \in B$ je $f+g \in B$". Víme již, že $\mathcal{C} \subset V$. Stačí dokázat, že B je systém uzavřený vzhledem k bodové konvergenci.

(d) Nechť $f \in B((a,b))$, $\varphi \in \mathscr{C}((c,d))$ a platí $\varphi(c,d) \subset (a,b)$. Potom $f * \varphi \in B((c,d))$.

N á v o d. Postupujte obdobně jako v (c).

(e)* Dokažte, že $\Lambda((0,1)) \setminus B((0,1)) \neq \emptyset$.

N á v o d. Buď φ Cantorova funkce na $\langle 0,1 \rangle$, $\psi(x) = \varphi(x) + x$ pro $x \in \langle 0,1 \rangle$. Dokažte, že obraz Cantorova diskontinua Q při zobrazení ψ má míru 1; tedy existuje neměřitelná množina $M \subset \psi(Q)$ (viz 18.16.b). Nechť f je charakteristická funkce množiny $\psi^{-1}(M)$. Pak $f = 0$ s.v., tedy f je měřitelná. Ale $f * \psi^{-1} = c_M$ a $c_M \notin B((0,2))$, tedy $f \notin B((0,1))$ podle (d).

12.16 Definice. Položme $B_0 = B_0((a,b)) = \mathscr{C}((a,b))$. Indukcí definujme množiny B_n, $n \in N$, takto: Je-li $n \in N$ a je-li definována množina B_n, buď B_{n+1} množina všech funkcí na (a,b), pro něž existují $f_k \in B_n$ tak, že $f_k \to f$. Dále položme $B_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$. Prvkům množiny B_n se říká funkce n-té Baireovy třídy (resp. baireovské funkce n-té třídy, nebo prostě funkce n-té třídy. Pro $n = 1$ porovnejte s definicí 12.1).

12.17 Poznámka. V 34.18 je dokázáno, že pro každé n je $B_{n+1} \setminus B_n \neq \emptyset$. Důkaz je však značně obtížný; dokonce je tam dokázáno, že existuje omezená funkce $\varphi \in B_{n+1} \setminus B_n$.

12.18 Cvičení.

(a) Dokažte, že $B_\infty \subset B$.

(b) Dokažte, že součet, rozdíl, součin funkcí z B_n je prvkem B_n. Je-li $f \neq 0$ na (a,b), $f,g \in B_n$, pak $g/f \in B_n$.

N á v o d. Pro podíl využijte vztahu

$$\frac{f_n(x) \cdot g_n(x)}{g_n^2(x) + \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in (a,b).$$

(c) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ je konvergentní řada s kladnými členy. Nechť $n \in N$. Nechť pro každé k je $f_k \in B_n$ a nechť platí $|f_k(x)| \leq \alpha_k$ pro $x \in (a,b)$. Potom funkce $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \in B_n$.

N á v o d. Pro každé k nalezněte posloupnost $\{\varphi_j^k\}_{j=1}^{\infty} \subset B_{n-1}$

1014-7781

tak, aby $\lim_{j\to\infty} \varphi_j^k = f_k$ a navíc aby $|\varphi_j^k| \le \alpha_k$ pro všechna j (podrobně vysvětlete). Položíte-li $\Phi_k = \sum_{i=1}^{k} \varphi_k^i$, je $\Phi_k \in B_{n-1}$ a stačí dokázat, že $\Phi_k \to f$.

(d) Buďte $f_k \in B_n$ $(k = 1,2,\dots)$, $f_k \rightrightarrows f$ na (a,b). Potom $f \in B_n$.

N á v o d. Případ $n = 0$ je jednoduchý. Buď $n > 0$ a zvolte k_i tak, aby $|f_{k_i}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^i}$ pro $x \in (a,b)$, $i = 1, 2 \dots$ Nyní aplikujte (c), dostanete, že $f - f_{k_1} \in B_n$.

(e)* Dokažte, že existuje posloupnost funkcí $\{f_n\}$ a funkce f s vlastnostmi: $f_n \in B_\infty$, $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b), $f \notin B_\infty$. Rozmyslete a porovnejte s předchozím tvrzením.

N á v o d. (Existenční důkaz.) Buď $\widetilde{B}_\infty$ systém všech omezených funkcí, které jsou stejnoměrnou limitou posloupnosti funkcí z B_∞. Prostor $\widetilde{B}_\infty$ s metrikou $\rho(f,g) = \sup_{x \in (a,b)} |f(x)-g(x)|$ je úplný (proč?) a pro každé n je $\widetilde{B}_n$ (systém všech omezených funkcí z B_n) množina řídká v $\widetilde{B}_\infty$. (Použijte poznámky 12.17.) Nyní tvrzení ihned plyne z Baireovy věty o kategoriích.

J i n ý n á v o d. (Konstrukční důkaz.) Zvolte $\varphi_n \in B_n((\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})) \setminus B_{n-1}((\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}))$ takovou, že pro každé $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ platí $|\varphi_n(x)| \le n^{-1}$.

Položte $f_n(x) = \varphi_k(x)$ pro $x \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$, $k = 1,\dots,n$.

$f_n(x) = 0$ jinak. Dokažte, že f_n je hledaná posloupnost.

(f) Buďte $f \in B_n$, $\varphi \in B_m$ takové, že $\varphi((a,b)) \subset (a,b)$. Potom $f * \varphi \in B_{n+m}$. Dokažte!

12.19 Věta. Dokažte, že existuje omezená baireovská funkce, která neleží v B_∞ (tj. $B \setminus B_\infty \ne \emptyset$). Odtud speciálně vyplývá, že systém B_∞ není uzavřen vzhledem k bodové konvergenci (proč?).

1014-7781

N á v o d. Užijte 12.18.e.

12.20 Poznámka. Způsob, jakým jsme definovali baireovské funkce, není obvyklý. Pro posluchače, kteří znají pojem ordinálního čísla, připomeňme, že se obvykle definují třídy B_ξ pro libovolné spočetné ordinální číslo. Potom platí rovnost $B = \bigcup_{\xi<\Omega} B_\xi$,

kde Ω je první nespočetné ordinální číslo. Řada výše napsaných tvrzení pro třídy B_n zůstává v platnosti i pro třídy B_ξ . Čtenáře odkazujeme na citovanou Natansonovu knihu [Nat], kde tato látka je vyložena velmi přístupnou formou.

Poznamenejme ještě, že předpoklad konečnosti funkcí není podstatný. Připustíme-li funkce nabývající také nekonečných hodnot (jak řada autorů činí), je třeba dát si pozor při tvrzení týkajících se součtu, stejnoměrné konvergence apod.

12.21 Cvičení.

(a) Polospojité funkce (viz téma 10) jsou první třídy. Dokažte!

(b) Monotonní funkce a funkce s konečnou variací jsou první třídy.

(c) Jsou konvexní a konkávní funkce první Baireovy třídy?

(d) Buďte $a_i \in (a,b)$, $b_i \in E_1$, $(i = 1,2,\dots)$, $a_i \neq a_j$ pro $i \neq j$. Položte $f(a_j) = b_j$, $f(x) = 0$ jinde v (a,b). Dokažte, že $f \in B_2((a,b))$. Rozhodněte, zda platí tvrzení:
$f \in B_1(a,b)$, právě když $\lim_{j\to\infty} b_j = 0$.

(e) Lze dokázat překvapující výsledek: Je-li f konečná funkce na intervalu $I \subset E_1$, potom jsou funkce $\bar{D}f$ a $\underline{D}f$ (horní a dolní derivace - viz 7.8) lebesgueovsky měřitelné na I. Platí však dokonce, že tyto funkce jsou druhé třídy (uvědomte si, že f může být libovolná - tedy i neměřitelná). (Viz [J II], kap. V, § 3 nebo Fund. Math. 44 (1957), 238-240.

12.22* Poznámka. Ani pro spojitou funkci nemusí být horní derivace funkcí první třídy.

N á v o d. Nechť $M \subset (0,1)$ je množina taková, že pro každý interval $I \subset (0,1)$ je $\lambda_1(I \cap M) > 0$, $\lambda_1(I \setminus M) > 0$. Nechť f je neurčitý Lebesgueův integrál charakteristické funkce množiny M. Potom f je hledaná funkce.
(Konstrukce množiny M viz 4.11.)

12.23 **Poznámky.** Při definici systémů B, B_n jsme místo intervalu (a,b) mohli uvažovat například libovolný metrický prostor. O funkcích první třídy na metrickém prostoru se lze dočíst v [Čech].

Připomenete-li si definici borelovských množin v metrickém prostoru, zjistíte, že systém borelovských množin je definován v jistém smyslu podobným způsobem. Skutečně mezi borelovskými množinami a baireovskými funkcemi je úzký vztah. Víte např., že funkce f je spojitá na metrickém prostoru, právě když pro každé $c \in E_1$ jsou množiny $\{x;\ f(x) > c\}$, $\{x;\ f(x) < c\}$ otevřené.

Podobně f je první třídy, právě když množiny uvedeného tvaru jsou typu F_σ. Pokuste se podobným způsobem charakterizovat funkce n-té třídy a funkce z B.

1014-7781

T É M A 13

Konvexní funkce v E_1

A. NĚKTERÉ VLASTNOSTI KONVEXNÍCH FUNKCÍ

13.1 Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na intervalu $I \subset E_1$ (I interval libovolného druhu). Říkáme, že funkce f je konvexní v intervalu I, platí-li pro každé tři body x_1, x_2, $x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ nerovnost

$$(\clubsuit) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} .$$

Poznámka. Nahradíme-li znamení nerovnosti v ($\clubsuit$) postupně symboly $<, \geq, >$, obdržíme definice ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní funkce f v intervalu I. Ověřte, že tyto definice jsou ekvivalentní s běžně užívanými - viz např. [D I], kap. X, § 1. Je-li funkce f konvexní v intervalu I, je funkce $-f$ konkávní v intervalu I; stačí proto vyšetřovat pouze funkce konvexní.

13.2 Cvičení. Nechť funkce f je konvexní v otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Potom:

(a) Funkce f je v každém bodě $x \in I$ spojitá, existují obě jednostranné derivace $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ a platí

$(\Diamond)$ $-\infty < f'_-(x) \leq f'_+(x) < +\infty$. Dokažte!

N á v o d. Užijte vztahu ($\clubsuit$) a vlastností monotonních funkcí k důkazu ($\Diamond$). Z ($\Diamond$) již lehko plyne spojitost funkce.

(b) Funkce f'_+, f'_- jsou neklesající v intervalu I.

(c) Nerovnost $f'_-(x) < f'_+(x)$ platí nejvýše ve spočetně mnoha různých bodech intervalu I;

N á v o d. Užijte výsledku $(\lozenge)$ a 7.2.

13.3 Cvičení. Nechť existuje f'' v otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Potom platí $[f$ je konvexní v $I] \Leftrightarrow [f''(x) \geq 0$ v každém bodě $x \in I]$. Dokažte!

13.4 Cvičení.

(a) Nechť funkce f, g jsou konvexní v intervalu $I \subset E_1$, $c \geq 0$; potom funkce $f + g$, cf jsou konvexní v intervalu I.

(b) Vyšetřete konvexitu inverzní funkce k funkci konvexní a ryze monotonní!

(c) Zjistěte, zda funkce složená ze dvou funkcí konvexních musí být opět konvexní!

(d) Nekonstantní konvexní funkce f na otevřeném intervalu I nenabývá svého maxima.

13.5 Cvičení. Nechť f je konvexní funkce v intervalu I. Jestliže ve vztahu $(\clubsuit)$ zvolíme pevně body x_1, $x_3 \in I$, potom pro všechna $x_2 \in (x_1, x_3)$ nastává v $(\clubsuit)$ rovnost nebo pro všechna $x_2 \in (x_1, x_3)$ nastává v $(\clubsuit)$ ostrá nerovnost.

N á v o d. Vyšetřujte funkci, která je rozdílem funkce f a lineární funkce, nabývající v bodech x_1, x_3 stejných hodnot jako f. ‖ Dokazovaná tvrzení měla při vyšetřování konvexních funkcí názorný geometrický význam: konvexita váže silně vzájemnou polohu grafu funkce f a libovolné tětivy tohoto grafu určené body x, y tj. úsečky o koncových bodech $[x, f(x)]$, $[y, f(y)]$.

13.6 Věta. Funkce f jest konvexní na intervalu $I \subset E_1$ právě když pro každé dva body x_1, $x_2 \in I$ a každé $m \in (0, 1/2\rangle$ platí nerovnost

$$(\heartsuit) \quad f(m\,x_1 + (1-m)\,x_2) \leq m\,f(x_1) + (1-m)\,f(x_2).$$

B. $\frac{1}{2}$ - KONVEXNÍ FUNKCE

13.7 Definice. Nechť funkce f je definována na intervalu $I \subset E_1$ a je dáno číslo $m \in (0, 1/2\rangle$. Nechť pro každé dva body x_1, $x_2 \in I$ platí nerovnost $(\heartsuit)$. Potom říkáme, že funkce f je m-konvexní v intervalu I.

Poznámka. Studiem konvexních funkcí se systematicky zabýval J.L.V. Jensen. Zejména se zabýval funkcemi, které vyhovují vztahu $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)$, tj. podle zavedené terminologie funkcemi $\frac{1}{2}$-konvexními.

13.8 Příklady.

(a)* Existuje 1/2-konvexní funkce v E_1, která není v žádném bodě $x \in E_1$ spojitá.

N á v o d. Užijte výsledků z oddílu 18.B o nespojitých řešeních funkcionální rovnice $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in E_1$.

(b)* Existuje "ryze 1/2-konvexní" funkce v E_1, tj. funkce, pro niž v (♡) platí ostrá nerovnost, která není spojitá v žádném bodě E_1.

N á v o d. Užijte výsledků z odstavců 13.4.a a 13.8.a. ‖
Je přirozené vyšetřovat kromě vlastností 1/2-konvexních funkcí též jejich vztah k m-konvexním funkcím pro $m \in (0,1/2\rangle$. Důkazy následujících tvrzení jsou obtížnější.

13.9* Věta. Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Potom funkce f je 1/2-konvexní v intervalu I právě když je m-konvexní v intervalu I pro každé racionální číslo $m \in (0,1/2\rangle$.

N á v o d. Postupně dokažte tato tvrzení:

(a) Je-li f 1/2-konvexní funkce v I, potom pro libovolné $n \in N$ a libovolnou n-tici čísel $x_1, \dots x_n \in I$ (nemusí být různá) platí

$$(♤) \quad f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Vztah platí pro $n = 2^1 = 2$. Indukcí jej dokažte pro $n = 2^k$, $k \in N$. Ukažte, že z platnosti vztahu (♤) pro přirozené číslo $m = k > 1$ plyne též jeho platnost pro $m = k-1$.

(b) Je-li dáno racionální číslo $m \in (0,1/2\rangle$, $m = \frac{r}{s}$, $1-m = \frac{t}{u}$, kde $r, s, t, u \in N$. Položte $n = s.u$. Pak je $ru + st = su = n$ a vhodnou volbou x_i, $i=1,\dots,n$ ve vztahu (♤) obdržíte potřebnou nerovnost.

13.10 Důsledek. Z předcházejícího odstavce vyplývá tvrzení:
Nechť m_1, m_2 jsou racionální čísla z intervalu $(0, 1/2\rangle$.

Potom platí: Funkce f je m_1-konvexní na intervalu I, právě když je m_2-konvexní na intervalu I.

$\boxed{13.11}$ Věta. Nechť funkce f je 1/2-konvexní na intervalu $(a,b) \subset E_1$. $a < c < h < k < d < b$. Nechť f je shora omezená na intervalu (h,k). Potom f je shora omezená na intervalu (c,d).

N á v o d. Zvolte libovolně $x \in (c,h)$. Potom lze nalézt η, $\eta \in (h,k)$ tak, že bod x lze vyjádřit ve tvaru $x = mc + (1-m)\,\eta$, kde m je racionální číslo z intervalu $(0, 1/2\rangle$. Potom platí $f(x) \leq \max\,(f(c), \max\{f(t);\ t \in (h,k)\})$.

$\boxed{13.12^*}$ Věta. Nechť f je 1/2-konvexní funkce na intervalu $(a,b) \subset E_1$, která je shora omezená na intervalu $(h,k) \subset (a,b)$. Potom funkce f je v intervalu (a,b) spojitá.

N á v o d. Zvolte libovolně bod $x \in (a,b)$. Podle 13.11 existuje interval $(c,d) \subset (a,b)$, který obsahuje bod x, na němž je funkce f shora omezená konstantou G. Zvolte $n \in N$, $n > 1$. Pak existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro všechna $p \in (0, \delta_1)$ je bod $x + np \in (c,d)$ a platí $f(x+p) \leq \frac{1}{n} f(x+np) + \frac{n-1}{n} f(x)$,

z čehož plyne $f(x+p) - f(x) \leq \dfrac{f(x+np) - f(x)}{n} \leq \dfrac{G - f(x)}{n}$.

Podobně odvoďte pro $p \in (0, \delta_2)$ $f(x) - f(x-p) \geq \dfrac{f(x) - G}{n}$.

Z těchto nerovností a z 1/2-konvexity funkce f obdržíte pro $|p| < \min\,(\delta_1, \delta_2)$ nerovnost

$$|f(x+p) - f(x)| \leq \frac{|f(x) - G|}{n},$$

ze které plyne spojitost funkce f v bodě x.

$\boxed{13.13^*}$ Věta. Nechť f je 1/2-konvexní funkce na otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Potom f je měřitelná v I, právě když je spojitá v I.

N á v o d. Tvrzení stačí dokázat pro omezený interval I (proč?). Nechť f je měřitelná v I a není v I spojitá. Podle 13.12 není f omezená shora na žádném intervalu $(a,b) \subset I$. Zvolme y a $\delta > 0$ tak, aby $\langle y - \delta,\ y + \delta\rangle \subset I$. Ke každému $k \in N$ existuje y_k tak, že $|y - y_k| < \frac{\delta}{2}$, $f(y_k) > k$.
Z 1/2-konvexity vyplývá, že pro $0 \leq \varepsilon < \frac{\delta}{2}$ je $\max\,(f(y_k + \varepsilon),\ f(y_k - \varepsilon)) > k$.

1014-7781

Množina $M_k = \{x \in I;\ f(x) > k\}$ je měřitelná a dle předchozího je $\lambda_2(M_k) \geq \frac{\delta}{2}$. Užitím Luzinovy věty dokažte tvrzení: Nechť M je uzavřená množina $\lambda_2(M) < +\infty$, f je měřitelná a konečná funkce na M. Potom k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo k tak, že míra množiny $A = \{x;\ x \in M,\ f(x) \geq k\}$ je menší než zvolené ε. Z tohoto tvrzení a výše uvedené konstrukce odvoďte spor.

13.14 Tvrzení. Spojitá 1/2-konvexní funkce na intervalu I je v tomto intervalu konvexní.

N á v o d. V následujícím oddílu dokážeme obecnější tvrzení, ze kterého 13.14 vyplyne.

C.* m-KONVEXNÍ FUNKCE

V tomto oddíle jsou vyšetřovány obecné m-konvexní funkce, jejichž studium je poněkud obtížnější než studium 1/2-konvexních funkcí. Mnohá tvrzení tohoto oddílu jsou zobecněním úvah oddílu předcházejícího. Nejprve vyšetříme vztah m-konvexních funkcí k funkcím konvexním.

13.15 Věta. Nechť $m_0 \in (0,1/2\rangle$ a funkce f buď spojitá m_0-konvexní funkce na intervalu I. Pak je funkce f konvexní na intervalu I (a tedy m-konvexní pro všechna $m \in (0,1/2\rangle$).

N á v o d. Důkaz proveďte sporem. Nechť existuje $m_0 \in (0,1/2\rangle$ a body $x_1, x_2 \in I$ tak, že platí $f(m_0x_1 + (1-m_0)x_2) > m_0 f(x_1) + (1 - m_0)f(x_2)$. Od funkce f odečtěte lineární funkci φ pro kterou platí $\varphi(x_1) = f(x_1)$, $\varphi(x_2) = f(x_2)$. Označíme-li $F = f - \varphi$, platí $F(m_0x_1 + (1 - m_0)x_2) > 0$.
Nyní nalezněte body $t_1, t_2 \in I$ tak, aby platilo
$t_1 < m_0x_1 + (1 - m_0)x_2 < t_2$, $F(t_1) = F(t_2) = 0$, $F(x) > 0$ pro všechna $x \in (t_1,t_2)$. Pak ale platí
$f(mt_1 + (1 - m)t_2) \leq \varphi(m t_1 + (1 - m)t_2)$, tj.
$F(mt_1 + (1 - m)t_2) \leq 0$, což je ve sporu s $mt_1 + (1-m)t_2 \in (t_1,t_2)$.

13.16 Označení. Pro $M \subset E_1$, $M = \emptyset$ $m \in (0,1/2\rangle$ položíme

1014-7781

$K_m(M) = \{x \in E_1;\ x = mx_1 + (1-m)x_2,\ x_1, x_2 \in M\}$,

$K_m^0(M) = M, \quad K_m^1(M) = K_m(M)$,

$K_m^{k+1}(M) = K_m(K_m^k(M)), \quad k \in N$,

$ch_m(M) = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_m^k M$.

Dokažte, že pro každé $m \in (0,1/2\rangle$ je množina $ch_m M$ hustá v množině (inf M, sup M).

13.17 Cvičení. Nechť $m \in (0,1/2\rangle$, f je m-konvexní na $(a,b) \subset E_1$, $M \subset (a,b)$. Potom platí: Je-li $x_1, x_2, y \in ch_m(M)$, $q \in \langle 0,1\rangle$, $y = qx_1 + (1-q)x_2$, pak

$$f(y) \leq q\, f(x_1) + (1-q)\, f(x_2).$$

13.18* Věta. Nechť $m \in (0,1/2\rangle$, $(a,b) \subset E_1$ je omezený interval. Funkce f budiž m-konvexní na intervalu (a,b) a zdola omezená na otevřeném intervalu $I \subset (a,b)$. Potom funkce f je zdola omezená na intervalu (a,b).

N á v o d. Nechť existuje posloupnost $\{x_k\}$ bodů intervalu (a,b) taková, že $x_k \longrightarrow x_0 \in \langle a,b\rangle$, $f(x_k) < -k$ pro každé $k \in N$. Ukažte, že existuje bod $y \in I$ a $q \in (0,1)$ tak, že je $s = q\,y + (1-q)x_0 \in I$. (Užijte 13.16.) Nyní vyberte posloupnost bodů $\{s_k\}$, $s_k \to s$ a čísla q_k, $q_k \to q$ tak, že platí $s_k = q_k\, y + (1-q_k)\, x_k \in ch_m(\{y, x_k\})$.
Užitím 13.17 obdržíte $f(s_k) \leq q_k\, f(y) + (1-q_k)\, f(x_k)$, z čehož plyne $f(s_k) \to -\infty$.

13.19* Lemma. Nechť $m \in (0,1/2\rangle$, f je m-konvexní funkce, definovaná na intervalu $(a,b) \subset E_1$. Nechť $\hat{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y) > -\infty$ pro každé $x \in (a,b)$. Potom funkce f je konvexní.

N á v o d. Zvolte libovolně x_0, $y_0 \in (a,b)$ a $q \in (0,1/2\rangle$. Nechť je $s_0 = qx_0 + (1-q)y_0$. Zvolte dále x_k, $y_k \in (a,b)$, $x_k \longrightarrow x_0$, $y_k \to y_0$ tak, aby $f(x_k) \longrightarrow \hat{f}(x_0)$, $f(y_k) \longrightarrow \hat{f}(y_0)$. Ukažte, že existují body p_k, $p_k \to q$ a body $s_k \in ch_m(\{x_k, y_k\})$ takové, že $s_k = p_k\, x_k + (1-p_k)y_k$. Užitím předchozích výsledků a limitním přechodem $k \longrightarrow +\infty$ ukažte, že platí

$\hat{f}(s) \leq q\,\hat{f}(x_0) + (1-q)\,\hat{f}(y_0)$.

$\boxed{13.20^*}$ Věta. Nechť $m \in (0,1/2\rangle$ a f je m-konvexní funkce definovaná na intervalu $(a,b) \subset E_1$. Nechť $a < h < k < b$ a funkce f je shora omezená na intervalu (h,k). Potom je funkce f shora omezená na každém intervalu (c,d), $a < c < h < k < d < b$.

N á v o d. Zvolte libovolně $x \in (c,h)$ a ukažte, že množina $A(x,c) = \{y \in E_1;\ x \in ch_m(\{c,y\})\}$ obsahuje bod intervalu (h,k). Tento bod označte s. Potom $x \in ch_m(\{c,s\})$ a $f(x)$ lze odhadnout pomocí $f(c)$ a odhadu f na (h,k) nezávisle na volbě c. Obdobně proveďte i zbytek důkazu.

$\boxed{13.21}$ Cvičení. Užitím 13.20 dokažte: Nechť $m \in (0,1/2\rangle$ a f je m-konvexní funkce definovaná na $(a,b) \subset E_1$. Potom platí pro každé $x \in (a,b)$ $\check{f}(x) = \limsup_{y \to x} f(y) < +\infty$, nebo pro každé $x \in (a,b)$ je $\check{f}(x) = +\infty$.

$\boxed{13.22^*}$ Věta. Nechť $m \in (0,1/2\rangle$ a f je m-konvexní funkce na $(a,b) \subset E_1$. Nechť f je shora omezená na jistém otevřeném intervalu $I \subset (a,b)$. Potom f je spojitá a konvexní na (a,b).

N á v o d. Z 13.21 plyne $\check{f}(x) < +\infty$ pro všechna $x \in (a,b)$. Zvolte posloupnosti $\{x_k\}$, $\{y_k'\}$ tak, že platí $x_k \to x$, $f(x_k) \to \check{f}(x)$, $x_k' \to x$, $f(x_k') \to \hat{f}(x)$. Položte $y_k = \frac{1}{m} x_k - \frac{1-m}{m} x_k'$ a ukažte, že platí $y_k \to x$. Ze vztahu $x_k = m y_k + (1-m) x_k'$ odvoďte pomocí 13.17 a limitním přechodem $k \to +\infty$ vztah $\frac{1}{m}\check{f}(x) - \frac{1-m}{m}\hat{f}(x) \leq \lim f(y_k) \leq \check{f}(x) < +\infty$ a odtud $\hat{f}(x) = \check{f}(x) \overset{\text{def.}}{=} \tilde{f}(x)$. Dále pro libovolnou posloupnost $x_k \to x$ platí $f(x_k) \to \tilde{f}(x)$, kde $\tilde{f}$ je podle 13.19 konvexní. Spojitost f plyne z 13.2. Množina $\{x \in (a,b);\ f(x) \neq \tilde{f}(x)\}$ je izolovaná. Zvolte libovolně y v této množině a ukažte pomocí aparátu z důkazu 13.20, že předpoklad $f(y) > \tilde{f}(y) = \check{f}(y)$ vede ke sporu. (Zvolte $x \in (a,b)$, $f(x) < f(y)$. Potom pro všechna $z \in A(x,y) \cap (a,b)$ platí $f(z) \geq f(y)$, z čehož plyne $\check{f}(y) \geq f(y)$); podobně vede ke sporu předpoklad $f(y) < \tilde{f}(y) = \hat{f}(y)$.

Pro libovolný bod $z \in A(x,y) \cap (a,b)$ je $f(z) = f(qx + (1-q) \leq$
$\leq q(f(x) - f(y)) + f(y)$; pro $z \to y$ je $q \to 0$ a tedy
$\hat{f}(y) \leq f(y)$.

$\boxed{13.23^*}$ **Věta.** Nechť $m \in (0,1/2\rangle$. Potom m-konvexní funkce f definovaná na intervalu $(a,b) \subset E_1$ je konvexní, právě když je spojitá. Dokažte!

$\boxed{13.24^*}$ **Věta.** Nechť $m \in (0,1/2\rangle$. Potom m-konvexní funkce f definovaná na intervalu $(a,b) \subset E_1$ je měřitelná, právě když je spojitá.

N á v o d. Důkaz je obdobný důkazu věty 13.13.

$\boxed{13.25}$ **Poznámka.** Všimněte si značné podobnosti nalezených výsledků s výsledky z tématu 18. Pro m-konvexní funkce lze např. dokázat větu analogickou větě z 18.20 a rovněž další věty analogické tvrzením z oddílu E v tématu 18. Funkce m-aditivní, splňující pro jisté $m \in (0,1/2\rangle$ funkcionální rovnici

$$f(mx + (1-m)y) = m\,f(x) + (1-m)\,f(y),\ x,\ y \in E_1,$$

(srovnej s tématem 31) jsou důležitým speciálním případem m-konvexních funkcí.

$\boxed{13.26}$ **Příklady.**

(a) Některé příklady nespojitých funkcí, které byly 1/2-konvexní, resp. ryze 1/2-konvexní, jsme uvedli v 13.8.

(b)* Sestrojte nespojitou ryze 1/2-konvexní funkci v E_1, která je sdola omezená.

N á v o d. Vyšetřujte složenou funkci $\exp * f$, kde f je nespojitá aditivní funkce v E_1.

(c) Sestrojte příklady nespojitých m-konvexních funkcí v E_1, $m \in (0,1/2\rangle$ analogické příkladům z (a), (b).

Podněty k dalšímu rozšíření tohoto oddílu lze nalézt např. v článku R. Ger - M. Kuczma: " ... " - viz 18.26, kde je uvedena přesná citace.

D. K-KONVEXNÍ FUNKCE

V literatuře lze nalézt různé pojmy, které jsou "podobné" konvexitě funkcí. Uvedeme jeden z nich.

1014-7781

13.27 Definice. Funkce f definovaná na intervalu $I \subset E_1$ se nazývá kvazi-konvexní (dále jen K-konvexní; k nedorozumnění nemůže dojít), jestliže pro každé $m \in (0,1/2\rangle$ a každé x_1, $x_2 \in I$ platí podmínka

(K) $f(m\,x_1 + (1-m)x_2) \leq \max\,(f(x_1),\ f(x_2))$.

13.28 Příklady. Nalezněte příklady funkcí, které

(a) jsou K-konvexní;
(b) jsou K-konvexní, ale nikoli konvexní;
(c) jsou m-konvexní, ale nejsou K-konvexní.

13.29 Cvičení. Konvexní funkce souvisejí úsce s konvexními množinami. Platí tvrzení: Funkce f definovaná na intervalu $I \subset E_1$ je konvexní právě když množina $\{[x,\ y]\ ;\ x \in I,\ f(x) \leq y\}$ je konvexní. Srovnej s obsahem tématu 35 - zde lze nalézt toto tvrzení v obecnější formě.

Obdobnou charakteristiku K-konvexních funkcí udává následující tvrzení:

Následující podmínky jsou ekvivalentní

(i) funkce f je K-konvexní na intervalu $I \subset E_1$;
(ii) pro každé $a \in E_1$ je množina $\{x \in I;\ f(x) < a\}$ konvexní;
(iii) pro každé $a \in E_1$ je množina $\{x \in I;\ f(x) \leq a\}$ konvexní.

13.30 Věta. Funkce f je K-konvexní na intervalu $I \subset E_1$, právě když splňuje obě následující podmínky:

(R) $\left[\forall x_1, x_2 \in I,\ m \in (0,1/2\rangle,\ f(x_1) = f(x_2)\right] \Rightarrow \left[f(mx_1 + (1-m)x_2) \leq f(x_2)\right]$,

(Q) $\left[\forall x_1, x_2 \in I,\ m \in (0,1/2\rangle,\ f(x_1) < f(x_2)\right] \Rightarrow \left[f(mx_1 + (1-m)x_2) \leq f(x_2)\right]$.

Dokažte!

13.31 Najděte příklady funkcí, které splňují pouze podmínku (Q), tj. nejsou K-konvexní. Dokažte pak tvrzení:

Každá spojitá funkce splňující na intervalu $I \subset E_1$ podmínku (Q) je K-konvexní.

13.32 Literatura. Studiu dalších pojmů souvisejících s konvexitou je věnována práce: Thompson, Concave Functions, Technical Report 35, University of Missouri, Columbia; její obsah však více souvisí s tématem 35, neboť pojmy jsou studovány na funkcích více proměnných.

T É M A 14

Hölderovské funkce

V tomto tématu budeme vyšetřovat jisté speciální třídy funkcí, které hrají velice důležitou úlohu v mnoha oborech matematické analýzy.

A. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI HÖLDEROVSKÝCH FUNKCÍ

14.1 Definice. Buď $\alpha \geq 0$. Funkci f nazýváme α-hölderovskou na množině $M \subset E_1$, jestliže existuje konstanta $K > 0$ tak, že $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|^{\alpha}$ pro všechna $x_1, x_2 \in M$. Množinu všech α-hölderovských funkcí na množině M označme $\mathcal{H}_{\alpha}(M)$. Pro $\alpha = 1$ místo termínu 1-hölderovské se používá označení lipschitzovské funkce a systém všech těchto funkcí se označuje symbolem $\mathrm{Lip}_1(M)$.

14.2 Cvičení. Udejte příklady α-hölderovských funkcí pro různá α! Zkoumejte zda známé elementární funkce jsou α-hölderovské.

14.3 Cvičení. Ukažte, že $f \in \mathcal{H}_0(M)$, právě když f je omezená na množině M.

14.4 Cvičení. Pro omezenou množinu $M \subset E_1$ a pro $0 \leq \beta < \alpha$ platí
(a) $\mathcal{H}_{\alpha}(M) \subset \mathcal{H}_{\beta}(M)$,
(b) $\mathcal{H}_{\alpha}(M) \neq \mathcal{H}_{\beta}(M)$.
Platí toto tvrzení i pro neomezenou množinu M?

14.5 Věta. Pro $\alpha \geq 0$ a $M \subset E_1$ je množina funkcí $\mathcal{H}_{\alpha}(M)$ (při obvyklých operacích) lineární prostor, a navíc platí (pro M omezenou): Je-li $f, g \in \mathcal{H}_{\alpha}(M)$, potom i $f.g \in \mathcal{H}_{\alpha}(M)$. Dokažte!

1014-7781

14.6 Cvičení. Nechť $f \in \mathcal{H}_\alpha(M)$, $g \in \mathcal{H}_\beta(P)$ a $g(P) \subset M$, kde $\alpha, \beta > 0$, $M, P \subset E_1$. Potom $f * g \in \mathcal{H}_{\alpha \cdot \beta}(P)$. Dokažte!

N á v o d. Odhadněte

$$\sup_{\substack{x,y \in P \\ x \neq y}} \frac{|f(g(x)) - f(g(y))|}{|x - y|^{\alpha\beta}} .$$

14.7 Cvičení.

(a) Je-li $f \in \mathcal{H}_\alpha(J)$, kde $\alpha > 0$ a množina J je interval, potom je funkce f stejnoměrně spojitá na J.

(b) Lze implikaci v (a) "obrátit" v následujícím smyslu: Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na intervalu J, potom existuje $\alpha > 0$ tak, že $f \in \mathcal{H}_\alpha(J)$?

14.8 Tvrzení. Je-li $f \in \mathcal{H}_\alpha((a,b))$, kde $\alpha > 0$ a interval (a,b) je omezený, potom existuje právě jedna funkce $F \in \mathcal{H}_\alpha(\langle a,b \rangle)$ taková, že $F = f$ na (a,b). Dokažte!

N á v o d.

(i) Nejprve ukažte, že existuje právě jedno spojité prodloužení F funkce f na interval $\langle a,b \rangle$. Toto např. vyplyne ze cvičení 14.7.a a z věty o rozšíření stejnoměrně spojité funkce. Můžeme též pomocí (B.-C.) podmínky ukázat, že existují vlastní $\lim_{x \to a_+} f(x)$, $\lim_{x \to b_-} f(x)$.

(ii) Ukažte pak, že $F \in \mathcal{H}_\alpha(\langle a,b \rangle)$.

Poslední tvrzení nám říká, že vyšetřování α-hölderovských funkcí na omezených intervalech "nezávisí" na typu intervalu. Můžeme tedy v jistém smyslu ztotožnit systémy $\mathcal{H}_\alpha(\langle a,b \rangle)$ a $\mathcal{H}_\alpha((a,b))$. Vysvětlete podrobně!

14.9 Cvičení.

(a) Nechť $f \in \mathcal{H}_\alpha(J)$, kde $\alpha > 1$ a J je interval. Potom f je konstantní na J.

N á v o d. Ukažte např., že $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in J$. Též přímý elementární důkaz je snadný.

(b) Platí tvrzení z (a) i pro libovolnou množinu $J \subset E_1$?

14.10 Cvičení.

(a) Nechť funkce f má omezenou derivaci na intervalu J.

Potom je $f\in\mathcal{H}_\alpha(J)$ pro všechna $\alpha\in(0,1\rangle$. Dokažte!

(b) Nechť $f\in\mathcal{H}_\alpha(J)$ pro nějaké $\alpha\in\langle 0,1\rangle$. Musí mít funkce na intervalu J omezenou derivaci?

(c)* Předpoklad v (a) můžeme nahradit slabším požadavkem, aby funkce f měla omezené Diniho derivace na J (viz téma 7).

14.11 Cvičení. Ukažte, že $\mathrm{Lip}_1(\langle a,b\rangle)\subset AC(\langle a,b\rangle)$, kde $AC(\langle a,b\rangle)$ značí systém všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$.

14.12 Cvičení. Každá funkce z $\mathrm{Lip}_1(J)$, kde J je omezený interval, má s.v. na J vlastní derivaci (a to omezenou).

N á v o d. Použijte 14.11 a Lebesgueovu větu o derivaci funkce s konečnou variací.

14.13 Poznámka. Vzniká nyní otázka, zda tvrzení 14.11 a 14.12 platí též pro α-hölderovské funkce, kde $\alpha\in(0,1)$. Snadno naleznete příklady (proveďte!), kdy α-hölderovské funkce nemusí mít omezenou derivaci. Velice zajímavá je též následující věta 14.14. Příklad 14.15 ukazuje, že ani zeslabené tvrzení 14.11 nemusí platit.

14.14 Věta. Nechť $\alpha\in(0,1)$. Potom existuje α-hölderovská funkce na $\langle 0,1\rangle$, která nemá nikde derivaci.

N á v o d. Buď H_0 uzávěr množiny $\{f\in\mathcal{H}_\alpha(\langle 0,1\rangle);\ f'$ je po částech spojitá$\}$ v $(\mathcal{H}_\alpha(\langle 0,1\rangle),\ \tau_\alpha)$ (viz následující 14.21).

H_0 je Banachův prostor (viz 14.22.c). Položte

$A_n = \{f\in H_0;$ existuje $x\in\langle 0,1-\frac{1}{n}\rangle$ tak, že pro všechna

$$h\in\left(0,\tfrac{1}{n}\right) \text{ je } \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leq n\Big\}.$$

Ukažte, že

(i) je-li $f\in H_0$, která má alespoň v jednom bodě derivaci, je $f\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$,

(ii) každá množina A_n je uzavřená v H_0,

(iii) každá množina A_n je řídká v H_0.

K důkazu posledního tvrzení stačí ukázat, že pro každé $k>0$ a $\varepsilon>0$ existuje funkce $s\in H_0$ tak, že $|s_+'(x)|\geq k$

a $\|s\|_\alpha < \varepsilon$. Zvolte (pro m sudé) takovou funkci s_m aby platilo:

$$s_m\left(\frac{2j}{m}\right) = 0 \quad \text{pro } j=0,1,\dots, m/2,$$

$$s_m\left(\frac{2j-1}{m}\right) = \frac{k}{m} \quad \text{pro } j=1,2,\dots, m/2,$$

s_m je lineární na každém intervalu $<2j/m, (2j+1)/m>$ a $<(2j+1)/m, (2j+2)/m>$ pro $j=0,1,\dots,(m/2)-1$.

Dokažte, že $\lim\limits_{m\to\infty} \|s_m\|_\alpha = 0$, odtud tvrzení ihned plyne.

14.15 Příklad. Existuje spojitá funkce s konečnou variací na omezeném intervalu J, která není α-hölderovská pro žádné $\alpha > 0$. Tedy, i když platí inkluse

$\mathrm{Lip}_1\,(<a,b>) \subset AC\,(<a,b>) \subset \mathscr{C}(<a,b>) \cap BV\,(<a,b>)$,

neplatí již inkluse

$$\mathscr{C}(<a,b>) \cap BV\,(<a,b>) \subset \bigcup_{\alpha>0} \mathscr{H}_\alpha(<a,b>).$$

N á v o d. Buď $v_k(x) = \frac{1}{2^{k-1}}\left(x - (1/2^k)\right)^{\frac{1}{k}} + 1/2^k$ $(k = 1,2,\dots)$

a uvažujte funkci h na intervalu $(0,1)$, kde $h: x \mapsto v_k(x)$ pro $x \in <1/2^k, 1/2^{k-1}>$.

14.16 Příklad. Existuje dokonce funkce absolutně spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu J, která na tomto intervalu není α-hölderovská pro žádné $\alpha > 0$.

N á v o d. Uvažujte funkci $\frac{1}{\log x}$ na $<0, \frac{1}{2}>$.

14.17 Příklad. Buď $\alpha \in (0,1)$, $J \subset E_1$ omezený interval. Existuje spojitá funkce na J, která nemá konečnou variaci, ale je α-hölderovská na J.

N á v o d.

(i) Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní řada, kde $a_n > 0$, $a_{n+1} < a_n$ pro všechna $n \in N$. Nechť $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$, $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Na intervalu $<0,s>$ vyšetřujte nejdříve vlastnosti funkce f definované takto:

$$f(x) = 0 \quad \text{pro } x \in \{0, s, s_1, s_2, \dots\},$$

1014-7781

$$f(x) = 1/n \quad \text{pro} \quad x = s_{n-1} + \frac{a_n}{2} ,$$

f je lineární na intervalech $\langle s_{n-1}, s_{n-1} + \frac{a_n}{2} \rangle$,

$\langle s_{n-1} + \frac{a_n}{2}, s_n \rangle$.

(ii) Najděte k danému α řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby funkce f byla α-hölderovská.

$\boxed{14.18}$ Poznámka. Existuje spojitá funkce na intervalu J, která nemá konečnou variaci a není α-hölderovská na J pro žádné $\alpha > 0$.

$\boxed{14.19}$ Příklad. Definujte funkci f na $\langle 0,1 \rangle$ vztahem

$$f(0) = 0, \ f(x) = x^a \sin (x^{-b}) \quad \text{pro} \quad x \in (0,1\rangle .$$

Vyšetřete vlastnosti funkce f v závislosti na a, b, tj. zda je absolutně spojitá, s konečnou variací, α-hölderovská.

$\boxed{14.20}$ Aplikace. Jako aplikaci předcházejících výsledků na teorii parciálních diferenciálních rovnic ukážeme jedno tvrzení z tohoto oboru, aniž bychom se zde pouštěli do nějaké teorie či fyzikálních interpretací.

Pro $t \in (0,T\rangle$ a $x \in E_1$ definujme funkci u takto:

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} f(\tau,\xi) \, d\xi \, d\tau ,$$

kde f je měřitelná a omezená funkce na množině $(0,T\rangle \times E_1$. Nechť nyní f je lipschitzovská v proměnné ξ stejnoměrně na $(0,T\rangle$, tj. nechť platí:

$$\exists K > 0 \ \forall t \in (0,T\rangle \ \forall \xi_1, \xi_2 \in E_1 \left(|f(t,\xi_1) - f(t,\xi_2)| \leq K |\xi_1 - \xi_2| \right).$$

Potom funkce u má vlastní derivaci $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na $(0,T) \times E_1$. Dokažte!

V teorii parciálních diferenciálních rovnic se pak (za předpokladu existence derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) ukáže, že funkce u vyhovuje jisté diferenciální rovnici. Dají se nyní zkoumat další vlastnosti funkce u, podmínka na funkci f se oslabuje atd. Toto vše však budete probírat až ve vyšších ročnících, nezapomeňte ale nikdy později všechna tato tvrzení podrobně dokazovat a nepočítejte čistě "mechanicky".

14.21 Zavedení metriky. Buď $\alpha \in (0,1\rangle$ a nechť $J \subset E_1$ je omezený interval. Pro funkci $f \in \mathcal{H}_\alpha(J)$ definujme α-normu funkce f vztahem $\|f\|_\alpha = \|f\|_0 + H_f^\alpha$, kde $\|f\|_0 = \sup_{x \in J} |f(x)|$ a kde H_f^α je tzv. α-hölderovská konstanta funkce f, definovaná předpisem

$$H_f^\alpha = \sup_{\substack{x,y \in J \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} .$$

Pro $f,g \in \mathcal{H}_\alpha(J)$ definujeme funkci $\tau_\alpha : [f,g] \to \|f - g\|_\alpha$.

14.22 Věta. Dokažte následující tvrzení.

(a) $(\mathcal{H}_\alpha(J), \tau_\alpha)$ je metrický prostor.

(b) $(\mathcal{H}_\alpha(J), \tau_\alpha)$ je metrický lineární prostor (normovaný lineární prostor).

(c) Prostor $(\mathcal{H}_\alpha(J), \tau_\alpha)$ je úplný (tedy Banachův).

N á v o d. Odvoďte nejprve lemma:
"Nechť $f_n \in \mathcal{H}_\alpha(J)$, $f_n \rightrightarrows f$ na J, nechť posloupnost $\{H_{f_n}^\alpha\}$ je omezená. Potom $f \in \mathcal{H}_\alpha(J)$".

(d) Prostor $(\mathcal{H}_\alpha(J), \tau_\alpha)$ není separabilní.

N á v o d. Najděte nespočetnou množinu $M \subset \mathcal{H}_\alpha(J)$ tak, aby $\tau_\alpha(f,g) \geq 1$ pro všechna $f,g \in M$, $f \neq g$. (Uvědomte si, že α-hölderovská konstanta funkce x^α je rovna 1, bereme-li $J = \langle 0,1\rangle$.)

14.23* Problémy.

(a) Vzhledem k inklusi z odstavce 14.4.a zkoumejte vztah H_f^α, H_f^β pro $\alpha < \beta$. V případě monotonie (při pevné funkci f) vyšetřete jejich limity.

(b) Podle 14.11 víte, že $\mathrm{Lip}_1(\langle a,b\rangle) \subset \mathscr{C}(\langle a,b\rangle) \cap BV(\langle a,b\rangle)$.

1014-7781

Do prostoru spojitých funkcí můžeme zavést metriku ϱ vztahem $\varrho(f,g) = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x) - g(x)|$

a do prostoru funkcí s konečnou variací $BV(\langle a,b\rangle)$ metriku σ vztahem $\sigma(f,g) = |f(a) - g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}} |f - g|$,

(kde $\overset{b}{\underset{a}{V}} F$ znamená variaci funkce F na intervalu $\langle a,b\rangle$).

Vyšetřujte nyní prostor funkcí $Lip_1(\langle a,b\rangle)$ s metrikami ϱ, σ, τ_1 (vztah těchto metrik, konvergenci, homeomorfismus, úplnost, separabilitu aj.) a zkoumejte též vlastnosti $Lip_1(\langle a,b\rangle)$ jako podmnožiny prostoru $(\mathcal{C}(\langle a,b\rangle), \varrho)$ či $(BV(\langle a,b\rangle), \sigma)$ (uzavřenost aj.).

(c) Na základě inkluse $Lip_1(\langle a,b\rangle) \subset R(\langle a,b\rangle)$ zkoumejte též prostor $(Lip_1(\langle a,b\rangle), \vartheta)$, kde metrika ϑ je definovaná vztahem $\vartheta(f,g) = (R)\int_a^b |f - g|$.

C. SPECIÁLNÍ HÖLDEROVSKÉ FUNKCE.

14.24 **Definice.** Buď $f \in \mathcal{H}_\alpha(J)$. Označme pro $\delta > 0$

$$H_f^\alpha(\delta) = \sup_{\substack{x,y\in J\\ 0<|x-y|\le\delta}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} .$$

Řekneme, že $f \in \mathcal{H}_{\alpha,0}(J)$, právě když $\lim_{\delta\to 0_+} H_f^\alpha(\delta) = 0$.

14.25 **Věta.** Prostor $(\mathcal{H}_{\alpha,0}(J), \tau_\alpha)$ je uzavřený podprostor prostoru $(\mathcal{H}_\alpha(J), \tau_\alpha)$.

N á v o d. Uzavřenost dokazujte např. sporem, tj. existuje posloupnost $\delta_n > 0$ a konstanta $C > 0$ tak, že $H_f^\alpha(\delta_n) \ge C$ a $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Protože

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \le \frac{2\,\|f - f_n\|_0}{|x - y|^\alpha} + H_{f_n}^\alpha(\delta) \text{ pro všechna } n \in N$$

1014-7781

a $x,y \in J$, $0 < |x - y| \leq \delta$, dostanete nakonec $\|f - f_n\|_0 > 0$, neboť $\lim_{\delta \to 0_+} H^{\alpha}_{f_n}(\delta) = 0$.

14.26 <u>Poznámka.</u> Prostory $\mathcal{H}_{\alpha,0}(J)$, $\mathcal{H}_{\alpha}(J)$ mají další zajímavé vlastnosti (viz Z. Ciesielski: "On the isomorphisms of the spaces $\mathcal{H}_{\alpha}(J)$ and m". Bull.Acad.Pol. Sci. VIII, 1960, 217-222), např. $\mathcal{H}_{\alpha,0}(J) = \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_{\alpha+\varepsilon}(J)}$, kde uzávěr uvažujeme v metrice τ_{α}.

D. FUNKCE HÖLDEROVSKÉ V BODĚ.

14.27 <u>Definice.</u> Buď $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$. Funkci f nazýváme <u>α-hölderovskou v bodě p,</u> jestliže existuje konstanta $K > 0$ a okolí $U(p)$ bodu p tak, že $|f(x) - f(p)| \leq K|x - p|^{\alpha}$ pro všechna $x \in U(p)$. Pro $\alpha = 1$ se užívá opět termín lipschitzovská.

14.28 <u>Cvičení.</u> Srovnejte definice 14.1 a 14.27. Buď f α-hölderovská ve všech bodech intervalu J, musí být $f \in \mathcal{H}_{\alpha}(J)$? Zkoumejte funkci z 14.19.

14.29 <u>Cvičení.</u> Označte postupně $D_f, H_f(\alpha), C_f$ množiny bodů, v nichž funkce f má vlastní derivaci, je α-hölderovská, je spojitá. Ukažte, že platí: $D_f \subset H_f(1) \subset H_f(\alpha_2) \subset H_f(\alpha_1) \subset C_f$, kde $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

14.30* <u>Věta.</u> Buď $f: E_1 \longrightarrow E_1$. Jestliže množina $E_1 \setminus C_f$ je hustá, potom množina $H_f(\alpha)$ je první kategorie pro každé $\alpha \in (0,1\rangle$.

N á v o d. Označte $B_n = \{p \in E_1;\ \exists x,y \in U(p,1/n)$ a

$$\frac{f(x) - f(p)}{|x - p|^{\alpha}} - \frac{f(y) - f(p)}{|y - p|^{\alpha}} > n\} \quad \text{a} \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Protože $H_f(\alpha) \subset E_1 \setminus B$, stačí ukázat, že množina B_n^o je hustá. Buď J libovolný otevřený interval, $d \in J \cap (E_1 \setminus C_f)$.

Vezměte h, k tak, že

$$\max\left[f(d)\ ,\ \limsup_{t \to d} f(t)\right] > h > k > \min\left[f(d),\ \liminf_{t \to d} f(t)\right].$$

Zvolte $m < d$ tak, aby pro $p \in J \cap (m,d)$ platilo:

$$\frac{h - f(p)}{|d - p|^{\alpha}} - \frac{k - f(p)}{|d - p|^{\alpha}} > n.$$

Pak existují $x, y \in U(p, 1/n)$ tak, že $f(x) > h$, $f(y) < k$ a

$$\frac{f(x) - f(p)}{|x - p|^{\alpha}} - \frac{f(y) - f(p)}{|y - p|^{\alpha}} > n.$$

Tudíž $J \cap (m,d) \subset B_n^{o}$.

14.31 Cvičení. Pomocí 14.30 ukažte:

(a) Jestliže množina $E_1 \setminus C_f$ je hustá, potom množina D_f je první kategorie.

(b) Jestliže množina $C_f = E_1 \setminus R$, pak množina $E_1 \setminus H_f(1)$ je nespočetná a hustá.

(c) Jestliže množina C_f je hustá, potom množina $E_1 \setminus C_f$ je první kategorie.

N á v o d. Podle 5.9.b je množina C_f typu G_δ.

(d) Jestliže množiny C_f, $E_1 \setminus C_f$ jsou husté, potom množina $C_f \cap (E_1 \setminus H_f(\alpha))$ je reziduální pro každé $\alpha \in (0,1\rangle$ (tj. její doplněk je množina první kategorie.)

T É M A 15

Stejnoměrná spojitost

A. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

15.1 Opakování. Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory a $f:P\to Q$ zobrazení. Definujte pojmy: f je spojité v bodě, f je spojité na množině $A\subset P$, f je stejnoměrně spojité na množině $A\subset P$. f je spojité na množině $A\subset P$.

15.2 Cvičení.

(a) Zkoumejte vztahy mezi spojitostí a stejnoměrnou spojitostí. Ukažte příklady spojitých zobrazení, která nejsou stejnoměrně spojitá.

(b) Ukažte příklad zobrazení, které je stejnoměrně spojité a není lipschitzovské.

(c) Zopakujte větu, podle které spojité zobrazení na kompaktní množině je stejnoměrně spojité.

(d) Připomeňte též věty o rozšíření stejnoměrně spojitého zobrazení (viz 47.5) a větu o souvislosti s modulem spojitosti (viz 25.4).

(e) Zkoumejte též sčítání a skládání stejnoměrně spojitých funkcí.

B. SOUČIN STEJNOMĚRNĚ SPOJITÝCH FUNKCÍ

15.3 Cvičení. Ukažte na příkladě, že součin dvou stejnoměrně spojitých funkcí nemusí být stejnoměrně spojitá funkce.

15.4 Věta. Nechť $\mathcal{K}$ značí množinu všech nezáporných stejnoměrně spojitých funkcí na intervalu $\langle 1,+\infty)$. Dokažte, že

$\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} < +\infty$ pro každou $f\in\mathcal{K}$.

N á v o d. Proveďte sporem. Nechť existuje $f\in\mathcal{K}$ a posloupnost $\{x_k\}$ tak, že

(a) $\lim x_k = +\infty$

(b) $x_{k+1} - x_k > 1$ pro každé $k\in N$,

(c) $c_{k+1} \geq c_k$, kde $c_k = \frac{f(x_k)}{x_k}$,

(d) $\lim c_k = +\infty$,

(e) $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = c_{k+1}\, x_{k+1} - c_k x_k \geq c_k(x_{k+1} - x_k)$
pro každé k.

Buď $\delta\in(0,1)$ číslo, které existuje podle definice stejnoměrné spojitosti k $\varepsilon = 1$. Dále nalezněte k_o tak, aby pro $k > k_o$ bylo $c_k > \frac{2}{\delta}$. Pro každé $k > k_o$ existují $t_1,t_2,\dots,t_m$ tak, že $x_k = t_1 < t_2 < \dots < t_m = x_{k+1}$,

$$\frac{\delta}{2} < t_{i+1} - t_i < \delta \quad \text{pro } i=0,1,\dots,m-1.$$

Při pevném $k > k_o$ nalezněte nyní j tak, aby
$|f(t_{j+1}) - f(t_j)| \geq c_k(t_{j+1} - t_j)$.
Potom ale $|f(t_{j+1}) - f(t_j)| > 1$.

15.5 **Lemma.**

(a) Buď $x\, f(x)\in\mathcal{K}$, buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x,y\in\langle 1,+\infty)$, $|x - y| < \delta$ je $x|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

N á v o d. Podle 15.4 nalezněte $M > 0$ tak, aby $f(x) < M$ pro $x\in\langle 1,+\infty)$. Navíc existuje $\delta\in(0,\frac{\varepsilon}{2M})$ s vlastností: pro $x,y\in\langle 1,+\infty)$, $|x-y| < \delta$ je $|x\, f(x) - y\, f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) Buď $x^2 f(x)\in\mathcal{K}$, buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x,y\in\langle 1,+\infty)$, $|x - y| < \delta$ je $x^2|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Dokažte obdobně jako v (a)!

1014-7781

15.6 **Věta.** Označme $\mathcal{K}^*$ množinu všech funkcí $f \in \mathcal{K}$ takových, že pro libovolné $g \in \mathcal{K}$ je $f.g \in \mathcal{K}$. Potom

$$f \in \mathcal{K}^*, \text{ právě když } x\, f(x) \in \mathcal{K}.$$

Návod. Nechť $x\, f(x) \in \mathcal{K}$. Buď $g \in \mathcal{K}$ a $\varepsilon > 0$. Existují $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ tak, že $f(x) < M_1$, $x^{-1}\, g(x) < M_2$ pro $x \in \langle 1, +\infty)$. Dále nalezněte $\delta > 0$ tak, aby pro $|x - y| < \delta$, $x, y \in \langle 1, +\infty)$ bylo

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M_1}, \quad y\, |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M_2}.$$

15.7 Cvičení.

(a) Označme $\mathcal{K}^{**}$ množinu všech funkcí $f \in \mathcal{K}^*$ takových, že pro libovolné $g \in \mathcal{K}$ je $f.g \in \mathcal{K}^*$. Ukažte, že $\mathcal{K}^{**} \subsetneqq \mathcal{K}^*$.

(b) Ukažte, že $f \in \mathcal{K}^{**}$, právě když $x^2 f(x) \in \mathcal{K}$.

(c) Ukažte, že $f + g \in \mathcal{K}^*$, $f.g \in \mathcal{K}^*$, kdykoliv $f, g \in \mathcal{K}^*$.

(d) Vyslovte a dokažte analogická tvrzení k (c) pro systém $\mathcal{K}^{**}$.

(e) Položte $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}^{\overbrace{** \cdots *}^{n}}$. Zkoumejte vlastnosti $\mathcal{K}_n$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$.

C. CAUCHYOVSKY SPOJITÁ ZOBRAZENÍ

15.8 **Definice.** Zobrazení f metrického prostoru (P, ρ) do (Q, σ) nazveme *cauchyovsky spojité*, převádí-li každou cauchyovskou posloupnost v P na cauchyovskou posloupnost v Q.

15.9 Cvičení.

(a) Vyšetřete vztah mezi cauchyovskou spojitostí, stejnoměrnou spojitostí a spojitostí!

(b) Zkoumejte, zda součin či složené zobrazení cauchyovsky spojitých zobrazení je cauchyovsky spojité.

(c) Jaké nutné a postačující podmínky musí splňovat prostor P, aby každé zobrazení P do libovolného prostoru bylo spojité (cauchyovsky spojité, stejnoměrně spojité)?

1014-7781

N á v o d. Prostor P musí být izolovaný (každá cauchyovská posloupnost musí být stacionární, P musí být stejnoměrně izolovaný).

(d) K tomu, aby každá spojitá funkce na P byla cauchyovsky spojitá, je nutné a stačí, aby P byl úplný.

(e) Nalezněte nutné a postačující podmínky na to, aby každá spojitá funkce na P byla stejnoměrně spojitá. Detailnějším zkoumáním tohoto problému se budeme nyní v dalším zabývat.

D. STEJNOMĚRNĚ SPOJITÉ MNOŽINY

15.10 Definice. Buď (M,d) metrický prostor. Množinu $E \subset M$ nazveme stejnoměrně spojitou množinou, jestliže každá spojitá reálná funkce na E je stejnoměrně spojitá na E.

15.11 Cvičení.

(a) Ukažte příklady množin, které nejsou stejnoměrně spojité.

(b) Které množiny jsou zaručeně stejnoměrně spojité?

(c)* Nechť E je stejnoměrně spojitá množina metrického prostoru (M,d). Potom (E,d) je úplný metrický prostor. Dokažte!

N á v o d. Nechť (E,d) není úplný. Potom existuje cauchyovská posloupnost $\{p_n\} \subset E$ různých bodů taková, že množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{p_n\}$ nemá hromadný bod v E. Definujte $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{p_{2n-1}\}$,

$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{p_{2n}\}$. Ukažte, že A,B jsou uzavřené a disjunktní podmnožiny (E,d). Existuje spojitá reálná funkce $f : E \longrightarrow E_1$ (ukažte!) taková, že

(i) $0 \leq f(p) \leq 1$ pro $p \in E$,
(ii) $f(p) = 0$ pro $p \in A$,
(iii) $f(p) = 1$ pro $p \in B$.

Stačí dokázat, že f není stejnoměrně spojitá na E.

(d) Libovolná stejnoměrně spojitá množina metrického prostoru (M,d) je uzavřená.

15.12 Cvičení. Řekneme, že podmnožina E metrického prostoru (M,d) je nezáporně stejnoměrně spojitá, jestliže každá reálná, nezáporná a spojitá funkce na E je stejnoměrně spojitá na E. Ukažte, že množina E je nezáporně stejnoměrně spojitá, právě když je stejnoměrně spojitá.

N á v o d. Buď $E \neq \emptyset$ nezáporně stejnoměrně spojitá množina, buď f spojitá funkce na E. Položte $f_1 = \max(f,0)$, $f_2 = \min(f,0)$ a ukažte, že funkce f_1 a $-f_2$ jsou stejnoměrně spojité na E. K dokončení důkazu uvažte, že $f = f_1 + f_2$.

15.13 **Definice.**

(a) Metrický prostor (M,d) se nazývá <u>W-B prostor</u>, jestliže jeho každá uzavřená a omezená podmnožina je kompaktní. (Je každý metrický prostor W-B prostorem? Uveďte příklady!)

(b) Podmnožina E metrického prostoru (M,d) se nazývá <u>stejnoměrně izolovaná</u>, jestliže $\inf\{d(x,y) > 0;\ x,y \in E,\ x \neq y\}$. Uveďte příklady! Porovnejte pojmy: izolovaná množina - stejnoměrně izolovaná množina.

15.14* **Věta.** Buď (M,d) metrický W-B prostor a $E \subset M$ stejnoměrně spojitá množina. Potom $E = A_1 \cup A_2$, kde A_1 je kompaktní a A_2 je stejnoměrně izolovaná množina.

N á v o d. Můžete předpokládat, že $E \neq \emptyset$ je nezáporně stejnoměrně spojitá množina. Buď $p_o \in E$, $r > 0$, $U(p_o,r) = \{x \in E;\ d(x,p_o) < r\}$.

Dokažte, že existuje $r_o > 0$ tak, že $E \setminus \overline{U(p_o,r_o)}$ je stejnoměrně izolovaná. V opačném případě by existovala posloupnost $\{p_n\}$ různých bodů z E taková, že

(i) $\lim r_n = +\infty$, kde $r_i = d(p_i,p_o)$,

(ii) $d(p_{2n}, p_{2n-1}) < \frac{1}{n}$ pro každé $n \in N$,

(iii) $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$,

(iv) $r_{2n} + 2 \leq r_{2n+2}$ pro $n \in N$ (proč?).

Lehko zjistíte, že

(a) $d(p_{2i},p_{2j}) \geq 2$ pro $i \neq j$,

(b) $p_{2j-1} \notin \overline{U(p_{2i},s_i)}$ pro $i,j \in N$, kde $s_i = \frac{1}{2}\, d(p_{2i-1},p_{2i})$,

(c) $\overline{U(p_{2j},s_j)} \cap \overline{U(p_{2i},s_i)} = \emptyset$ pro $i \neq j$.

1014-7781

Položíte-li nyní

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad p \notin \overline{U(p_{2i}, s_i)} \quad , \quad i \in N, \\ \frac{1}{s_i}\, d(p_{2i}, p) & \text{pro} \quad p \in \overline{U(p_{2i}, s_i)} \end{cases}$$

$(f(p_{2i}) = 0,\ f(p_{2i-1}) = 1)$,

je f nezáporná, spojitá, ale ne stejnoměrně spojitá na E. Tedy množina $A_2 = E \setminus \overline{U(p_o, r_o)}$ je stejnoměrně izolovaná a množina $A_1 = E \cap U(p_o, r_o)$ je kompaktní.

15.15 Poznámky. Předchozí výsledky můžeme ještě trochu zobecnit.

(a) Buďte (M, d) a (M_1, d_1) metrické prostory. Množinu $E \subset M$ nazveme stejnoměrně spojitou vzhledem k (M_1, d_1), jestliže každé spojité zobrazení $f : E \to M_1$ je stejnoměrně spojité na E.

(b) Ukažte, že tento pojem závisí na volbě metrického prostoru (M_1, d_1). Udejte příklady!

(c) Řekneme, že metrický prostor (M_1, d_1) obsahuje jednoduchý oblouk, jestliže existují $a, b \in M_1$ a existuje homeomorfismus $h: \langle 0,1 \rangle \to M_1$ tak, že $h(0) = a$, $h(1) = b$. (Interval $\langle 0,1 \rangle$ chápeme jako metrický prostor s obvyklou metrikou.)

(d) Ukažte, že diskrétní prostor a jednobodový metrický prostor neobsahují jednoduchý oblouk. Uveďte další příklady prostorů, které neobsahují jednoduchý oblouk. Uveďte postačující podmínky pro takové prostory! Uveďte příklady metrických prostorů, které jednoduchý oblouk obsahují.

(e) Ukažte, že věta z odstavce 15.11.c zůstane v platnosti i pro definici z (a), předpokládáme-li, že (M_1, d_1) obsahuje jednoduchý oblouk.

N á v o d. Stačí položit v návodu důkazu 15.11.c $g = h * f$, kde h je jako v (c).

(f) Ukažte, že za předpokladu (e) platí i věta z odstavce 15.14. V čem je překvapivost tohoto tvrzení?

TÉMA 16

Monotonní funkce v E_1

Obsah:

A. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI MONOTONNÍCH FUNKCÍ

16.1 Definice. Řekneme, že funkce definovaná na množině $G \subset E_1$ je neklesající na G, jestliže pro všechny dvojice $x, y \in G$, $x < y$, platí $f(x) \leq f(y)$. Podobně nerostoucí, klesající, rostoucí. Funkce definovaná na množině G se nazývá monotonní na G, jestliže je neklesající nebo nerostoucí na G.

16.2 Cvičení.

(a) Tvoří monotonní (resp. neklesající, nerostoucí) funkce na množině $M \subset E_1$ lineární vektorový prostor?

(b) Je součin dvou monotonních (neklesajících, nerostoucích) funkcí monotonní (neklesající, nerostoucí) funkce?

(c) Nechť φ je monotonní funkce na množině $G \subset E_1$, f monotonní na $\varphi(G)$. Je $f * \varphi$ monotonní na G?

16.3 Tvrzení. Nechť $f : \langle a,b \rangle \longrightarrow E_1$. Potom funkce m, M, $\widetilde{m}$, $\widetilde{M}$, kde $m(x) = \inf \{f(z);\ z \in \langle a,x \rangle\}$, $M(x) = \sup \{f(z);\ z \in \langle a,x \rangle\}$, $\widetilde{m}(x) = \inf \{f(z);\ z \in \langle a,x)\}$, $\widetilde{M}(x) = \sup \{f(z);\ z \in \langle a,x)\}$, jsou monotonní na $\langle a,b \rangle$.

16.4 Cvičení.

(a) Zkoumejte, kdy nastane alespoň jedna z rovností $f = m$, $f = \widetilde{m}$, $f = M$, $f = \widetilde{M}$, $f = m = \widetilde{m}$, ... !

(b) Najděte všechny monotonní funkce $f: E_1 \longrightarrow E_1$, které splňují funkcionální rovnici $f(x+y) = f(x) + f(y)$. (Viz též téma 18.)

(c) Buď f rostoucí funkce na $\langle a,b\rangle$, $x_n \in \langle a,b\rangle$. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(b)$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

(d) Nechť $f : E_1 \longrightarrow E_1$ je spojitá a monotonní na E_1. Potom $f(E_1) = E_1$, právě když $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$.

$\boxed{16.5}$ Poznámka. Existuje spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$ taková, že není monotonní na žádném intervalu $(\alpha,\beta) \subset \langle 0,1\rangle$. Viz 4.21.c.

$\boxed{16.6}$ Tvrzení. Buď funkce $f : A \longrightarrow E_1$ neklesající na množině A. Potom platí

(i) je-li a hromadným bodem množiny A zleva (tím se rozumí, že v libovolném intervalu $(a-\delta,a)$, $\delta > 0$, existuje vždy alespoň jeden bod množiny A), potom existuje
$$\lim_{\substack{x\to a-\\ x\in A}} f(x) = \sup_{\substack{x<a\\ x\in A}} f(x),$$

(ii) je-li a hromadným bodem množiny A zprava, existuje
$$\lim_{\substack{x\to a_+\\ x\in A}} f(x) = \inf_{\substack{x>a\\ x\in A}} f(x)$$
Formulujte analogické tvrzení pro nerostoucí funkce.

B. HLUBŠÍ VLASTNOSTI MONOTONNÍCH FUNKCÍ

$\boxed{16.7}$ Body nespojitosti.

(a) Nechť $f:(a,b)\to E_1$ je neklesající na (a,b). Potom platí: V každém bodě $c\in(a,b)$ existují limity $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \sup\limits_{a<x<c} f(x)$,
$$\lim_{x\to c+} f(x) = \inf_{c<x<b} f(x),$$ takže zřejmě
$$\lim_{x\to c-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c+} f(x).$$
Všechny body nespojitosti funkce f ležící v (a,b) jsou tedy 1.druhu (viz téma 5) a jejich množina je spočetná.

N á v o d. Na první část tvrzení použijte odstavec 16.6.

(b) Dokažte, že k libovolné spočetné množině $M\subset E_1$ existuje rostoucí funkce na E_1 taková, že množina M je právě množinou všech bodů její nespojitosti.
(Srovnej 5.5.)

16.8 <u>Příklady.</u>

(a) Nechť $M = R\cap(0,1)$. Každému číslu $t = \frac{p}{q} \in M$ (p, q nesoudělná, $0 < p < q$) přiřaďme číslo $s(t) = q^{-3}$.
Zobecněná řada $\sum_{t\in M} s(t)$ je absolutně konvergentní; pro $0 < x < 1$ položme $f(x) = \sum_{\substack{t\in M\\ t\le x}} s(t)$.
Dokažte:
(i) f je rostoucí v $(0,1)$,
(ii) f není spojitá v žádném bodě množiny M,
(iii) f je spojitá zprava v každém bodě množiny M,
(iv) f je spojitá v každém bodě množiny $(0,1)\setminus M$.

Pokuste se též vyšetřit derivaci (resp. Diniho derivace – viz 7.8) funkce f.

(b) Nechť f je neklesající a zdola omezená funkce na otevřené množině $D\subset E_1$. Definujme funkce s a F na D předpisem

$$s(x) = f(x) - f(x-) + \sum_{x_i<x}\left[f(x_i+) - f(x_i-)\right]$$

$F(x) = f(x) - s(x)$, kde $x_1, x_2, \ldots$ jsou všechny body nespojitosti funkce f. Potom funkce F je spojitá a neklesající na D. Funkce s se obvykle nazývá funkcí skoků; viz též [J II], kap. IX, §§ 2,3.

16.9 <u>Tvrzení.</u> Monotonní funkce na E_1 je první Baireovy třídy na E_1. Viz 12.21.b.

16.10 <u>Cvičení.</u>

(a) Nechť f je monotonní, spojitá a omezená na omezeném intervalu (a,b). Potom f je stejnoměrně spojitá na (a,b). Ukažte na příkladech, že po vynechání kteréhokoliv předpokladu tvrzení neplatí.

(b) Nechť funkce f je monotonní na intervalu $I\subset E_1$ a má Darbouxovu vlastnost. Potom f je spojitá. (Viz oddíl 11.C.)

16.11 <u>Cvičení.</u> Nechť E je podmnožina (a,b) a f je funkce mající na $(a,b)\setminus E$ vlastní derivaci. Zkoumejte vztah mezi monotonií funkce f a vlastnostmi derivace funkce v závislosti na "velikosti" množiny E.
Například je-li $E = \emptyset$ a $f'(x) \ge 0$ pro všechna $x\in(a,b)$, je funkce f neklesající na intervalu (a,b).

Obyčejnou derivaci je možno nahradit jednostrannou derivací (viz téma 7), Diniho derivacemi, symetrickou derivací apod. (Viz též téma 27.)

27566 P9

$\boxed{16.12}$ Lebesgueova věta. Nechť f je funkce monotonní na (a,b). Potom f má derivaci skoro všude v (a,b).
Viz [J II], kap. V, § 2.

$\boxed{16.13}$ Příklad. Cantorova funkce (viz téma 4) je spojitá, nekonstantní a monotonní na $\langle 0,1\rangle$ a její derivace je rovna nule skoro všude. Existuje dokonce funkce, která je rostoucí a spojitá a má derivaci rovnou nule skoro všude.

$\boxed{16.14}$ Tvrzení. Nechť $E \subset \langle a,b\rangle$ je řídká uzavřená množina. Položte $\varphi(x) = \rho(x,E)$ (vzdálenost bodu x od množiny E) a $f(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$. Funkce f je rostoucí a spojitá na $\langle a,b\rangle$, má vlastní derivaci všude na $\langle a,b\rangle$ a pro $x \in E$ je $f'(x) = 0$.
Platí tvrzení bez předpokladu, že E je řídká?

C. ROZŠIŘOVÁNÍ MONOTONNÍCH FUNKCÍ

$\boxed{16.15}$ Tvrzení. Nechť $M \subset E_1$ je uzavřená a neprázdná, $f: M \to E_1$. Potom existuje $g: E_1 \to E_1$ tak, že platí:

(i) pro $x \in M$ je $g(x) = f(x)$,
(ii) je-li f spojitá na M, je g spojitá na E_1,
(iii) je-li f neklesající na M, je g neklesající na E_1,
(iv) je-li f rostoucí na M, je g rostoucí na E_1.

Návod. Položme $g(x) = f(x)$ pro $x \in M$. Označme $(a_n,b_n) = I_n$ omezený styčný interval množiny M a pro $x \in I_n$ položme

$$g(x) = f(a_n) + \frac{x - a_n}{b_n - a_n}(f(b_n) - f(a_n)).$$

Pro neomezené styčné intervaly (v případě, že existují) položme $g(x) = f(a) + x - a$ nebo $g(x) = f(b) + x - b$.

$\boxed{16.16}$ Tvrzení. Nechť $\emptyset \neq M \subset E_1$ a f je neklesající funkce na M. Nechť J je nejmenší interval obsahující množinu M. Potom existuje funkce g, neklesající J, pro kterou platí, že

$g(x) = f(x)$ pro $x \in M$.

Zůstane tvrzení v platnosti, je-li J nejmenší uzavřený interval obsahující množinu M?

T É M A 17

Periodické funkce v E_1

Obsah: A. Definice a základní vlastnosti.

B. Kvaziperiodické funkce.

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

17.1 **Definice.** Buď $\mathcal{S}$ množina všech konečných reálných funkcí definovaných v E_1. Pro $f \in \mathcal{S}$ označme

$G_f = \{p \in E_1;\ f(x+p) = f(x) \text{ pro všechna } x \in E_1\}$.

17.2 **Cvičení.**

(a) Vždy je $0 \in G_f$, je-li $p \in G_f$, je $-p \in G_f$.
Je-li $p \in G_f$, $q \in G_f$ je $p - q \in G_f$.
(G_f je aditivní podgrupa reálných čísel.) Dokažte!

(b) Množina G_f je buď jednobodová nebo nekonečná.

17.3 **Definice.** Řekneme, že funkce $f \in \mathcal{S}$ je periodická, jestliže G_f obsahuje více než jeden prvek. Každý prvek G_f nazveme periodou funkce f.

17.4 **Cvičení.**

(a) Každá konstantní funkce je periodická. Určete všechny její periody.

(b) Funkce sin, cos, tg jsou periodické. Najděte všechny jejich periody.

(c) Pro $x \in E_1$ buď $f(x) = x - [x]$. Potom je f periodická, dokažte!

17.5 **Tvrzení.** Buď f periodická funkce. Potom $\lim_{t \to \infty} f(t)$ existuje, právě když f je konstantní.

17.6 **Problém.** Buďte f, g periodické funkce. Zkoumejte, zda funkce $f + g$, $f.g$ jsou periodické.

17.7 Cvičení. Buď R množina racionálních čísel. Nechť D je Dirichletova funkce. Potom $R \subset G_D$. Dokažte! Rozhodněte, zda $R = G_D$.

17.8 Periodické rozšíření. Buď φ funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$. Nechť existuje periodická funkce $f \in \mathcal{S}$ taková, že $f(x) = \varphi(x)$ pro $x \in \langle a,b \rangle$. Potom nazveme f periodickým rozšířením funkce φ. Je-li navíc $b - a \in G_f$, budeme říkat, že f je periodickým rozšířením funkce φ s periodou $b - a$.
Najděte nutnou a postačující podmínku na φ, aby existovalo periodické rozšíření funkce φ s periodou $b - a$. V případě, že takové rozšíření existuje, podrobně popište funkci f.

17.9 Věta. Buď G_f^+ množina všech kladných prvků množiny G_f. Nechť $d = \inf G_f^+ > 0$. Potom $d \in G_f$. Dokažte!

N á v o d. Nechť $d \notin G_f$. Buď $\{d_n\}$ posloupnost taková, že $d_n \in G_f^+$, $d_n \searrow d$. Protože $d > 0$ a posloupnost $\{d_n\}$ je cauchyovská, existují přirozená n, m tak, že $0 < d_n - d_m < d$.

17.10 Hlavní perioda. Řekneme, že funkce f má hlavní periodu d, jestliže f je periodická, $\inf G_f^+ > 0$ a $d = \inf G_f^+$. Podle věty 17.9 je tato definice korektní.

17.11 Cvičení.
(a) Existují nekonstantní funkce, které nemají hlavní periodu.
(b) Buď d hlavní perioda funkce f. Potom
$G_f = \{ x ; \ x = n \cdot d, \ n \text{ celé} \}$.

17.12 Věta.
(a) Periodická funkce f je konstantní právě tehdy, když $G_f = E_1$.
(b) Nechť periodická funkce nemá hlavní periodu. Potom množina G_f je hustá v E_1.

17.13 Věta. Nechť f je periodická funkce. Nechť existuje $x_0 \in E_1$ tak, že f je spojitá v bodě x_0. Potom je buď f konstantní nebo má hlavní periodu.

N á v o d. Nechť f nemá hlavní periodu. Pak je tedy $\inf G_f^+ = 0$. Buďte $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ taková, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$. Zvolte $w \in E_1$.

Podle věty 17.12.b existují $x', x'' \in E_1$ tak, že $x' \in G_f$, $|x''| < \delta$ a $w = x_0 + x' + x''$. Potom

$$|f(w) - f(x_0)| = |f(x_0 + x'') - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Odtud plyne, že f je konstantní.

$\boxed{17.14}$ **Příklad.** Sestrojte funkci, která má hlavní periodu a je všude nespojitá.

$\boxed{17.15}$ **Lemma.** Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že pro funkci f platí $(0, \delta) \subset G_f$. Potom $G_f = E_1$ a f je konstantní.

$\boxed{17.16^*}$ **Věta.** Nechť G_f má kladnou vnitřní míru. Potom f je konstantní.

$\boxed{17.17}$ **Důsledek.** Pro libovolnou funkci f je vnitřní míra množiny G_f buď 0 anebo $+\infty$.

$\boxed{17.18}$ **Poznámka.** Dosud jsme uvedli pouze příklady periodických funkcí f, pro něž G_f byla spočetná množina nebo $G_f = E_1$. Speciálně, množiny G_f byly měřitelné.

$\boxed{17.19^*}$ **Problém.** Sestrojte funkci f periodickou a nekonstantní tak, aby množina G_f byla nespočetná.

N á v o d. Vyšetřete charakteristickou funkci množiny

$$M = \left\{ x \in E_1;\ \lim_{n \to \infty} \min \left\{ \left| x - \frac{p}{10^{n!}} \right| .10^{n!} ;\quad p \text{ celé} \right\} = 0 \right\} .$$

Tato množina je nespočetná, má míru nula a platí

$$x_1, x_2 \in M \Longrightarrow x_1 \pm x_2 \in M.$$

$\boxed{17.20^{**}}$ **Problém.** Sestrojte nekonstantní periodickou funkci f, pro kterou je množina G_f neměřitelná. Příklad takové funkce lze nalézt v Učen. Zap. Kalinin. Gos. Ped. Inst. 69 (1969), 70-76.

B. KVAZIPERIODICKÉ FUNKCE

$\boxed{17.21}$ **Definice.** Řekneme, že funkce $f \in \mathcal{S}$ je kvaziperiodická, jestliže ke každému $x \in E_1$ existuje racionální číslo $r_x \neq 0$ tak, že $f(x + r_x) = f(x)$.

17.22 Cvičení.

(a) Porovnejte pojem periodické a kvaziperiodické funkce.

(b) Jak se změní předchozí výsledek, jestliže v definici kvaziperiodické funkce připustíme r iracionální?

17.23 Věta. Je-li f analytická funkce v E_1 (viz téma 21) a kvaziperiodická, potom f je periodická.

N á v o d. Existuje racionální číslo $r \neq 0$ a nespočetná množina M tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x + r) = f(x)$. Podrobně vysvětlete!
Existuje hromadný bod x_0 množiny M (proč?). Pro $x \in E_1$ položme $g(x) = f(x + r) - f(x)$. Aplikujte nyní na funkci g a bod x_0 odstavec 21.7.b.
Tím dokážete, že $g = 0$ na jistém okolí bodu x_0. Nyní již snadno ukážete, že $g = 0$ na E_1 - proveďte podrobně.

17.24 Příklad. Ukažte, že tvrzení předchozí věty neplatí, když v definici kvaziperiodické funkce připustíme r iracionální.

N á v o d. Zkoumejte funkci $f(x) = x^2$, $r_x = -2x$.

1014-7781

T É M A 18

Aditivní funkce

A. SPOJITÉ ADITIVNÍ FUNKCE

18.1 Cvičení. Předpokládejme, že f je reálná funkce definovaná na E_1 splňující vztah

$$(\heartsuit) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

pro všechna $x, y \in E_1$. Dokažte, že pro každé racionální číslo r a každé $x \in E_1$ je $f(rx) = r\,f(x)$.

N á v o d. Dokažte tvrzení postupně pro r přirozené, $r = 0$, r celé záporné a nakonec pro $r = \frac{p}{q}$, p, q celá, $q \neq 0$.

18.2 Cvičení. Ukažte, že pro každou funkci g na E_1 platí

$$\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)} \Longrightarrow \text{(iv)} \Longrightarrow \text{(v)} \Longrightarrow \text{(vi)},$$

kde
- (i) g je lipschitzovská v E_1 (viz 14.1),
- (ii) g je stejnoměrně spojitá v E_1,
- (iii) g je spojitá v E_1,
- (iv) g je spojitá alespoň v jednom bodě E_1,
- (v) g je omezená na nějakém otevřeném intervalu v E_1,
- (vi) g je shora (resp. zdola) omezená na nějakém otevřeném intervalu v E_1.

18.3 Cvičení. Jestliže funkce g je lichá v E_1 (tj. $g(x) = -g(-x)$ pro každé $x \in E_1$, potom platí: g je shora omezená na nějakém intervalu, právě když je zdola omezená na nějakém intervalu v E_1. Dokažte!

1014-7781

$\boxed{18.4}$ Cvičení. Dokažte, že každá spojitá funkce f v E_1 splňující vztah ($\heartsuit$) má tvar $f(x) = a\,x$.

N á v o d. Stačí dokázat, že $f(x) = x\,f(1)$ pro každé $x \in E_1$. K tomu použijte 18.1, spojitost funkce f a poznatek, že každé reálné číslo lze vyjádřit jako limitu posloupnosti racionálních čísel.

$\boxed{18.5}$ Cvičení. Dokažte, že pro funkci f splňující ($\heartsuit$) platí implikace (vi)$\Longrightarrow$(i) z odstavce 18.2.

N á v o d. Dokažte napřed implikaci

f omezená v $\langle -1,1\rangle \Longrightarrow$ existuje $K \in E_1$ tak, že $|f(x)| \leq K\,|x|$ pro všechna $x \in E_1$.

$\boxed{18.6}$ Cvičení. Nechť funkce f vyhovuje funkcionální rovnici ($\heartsuit$), potom jsou podmínky (i) - (vi) navzájem ekvivalentní a ekvivalentní tvrzení, že funkce f má tvar $f(x) = a\,x$.

$\boxed{18.7}$ Cvičení. Uveďme jednu zajímavou aplikaci předcházejících výsledků. Je-li f řešením rovnice ($\heartsuit$) a patří-li f do první Baireovy třídy (viz 12.A), potom existuje $a \in E_1$ tak, že $f(x) = a\,x$ pro všechna $x \in E_1$.

N á v o d. Použijte 12.4.

Poznámka. Platí daleko obecnější tvrzení, viz 18.13.

$\boxed{18.8}$ Cvičení. Pomocí předcházejícího výsledku odvoďte tvrzení: Nechť pro každé $x \in E_1$ existuje vlastní $\lim\limits_{R \to +\infty} \frac{1}{2R}\int_{x-R}^{x+R} f(t)\,dt = \Phi(x)$. Potom existují $a, b \in E_1$ tak, že $\Phi(x) = a\,x + b$ pro všechna $x \in E_1$.

N á v o d. Ukažte, že $\Phi(x) + \Phi(y) = 2\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right)$ pro všechna $x, y \in E_1$ a tedy funkce $\psi : x \longmapsto \Phi(x) - \Phi(0)$ je řešením ($\heartsuit$). Protože pro $R \in E_1 \setminus \{0\}$ je integrál $\frac{1}{2R}\int_{x-R}^{x+R} f(t)\,dt$ spojitá funkce proměnné x, je Φ, a tedy i ψ funkce první Baireovy třídy. Nyní stačí použít 18.7.

B. NESPOJITÉ ADITIVNÍ FUNKCE

V předchozím jsme ukázali, jaké vlastnosti mají spojitá řešení rovnice

$$(\heartsuit) \qquad f(x + y) = f(x) + f(y), \ x,y \in E_1.$$

Otázkou zůstává, zda předpoklad spojitosti (či jiné vlastnosti ekvivalentní) je nutný, neboli zda existují nespojitá řešení této rovnice.

18.9 Hamelova báze. V lineární algebře se dokazuje, že každý lineární (= vektorový) prostor X nad tělesem má alespoň jednu bázi, tj. existuje množina $M \subset X$ s vlastnostmi:

(i) Každá konečná podmnožina množiny M je lineárně nezávislá.

(ii) Každý prvek množiny X lze psát jako lineární kombinaci prvků nějaké konečné podmnožiny M (vyjádření je pak jednoznačné).

Protože E_1 lze chápat jako lineární prostor nad tělesem racionálních čísel, má tedy bázi, tzv. Hamelovu bázi. Viz též další oddíl D či [D II], dodatek, § 4, cvičení 1.

18.10 Tvrzení. Nechť H je Hamelova báze E_1. Potom ke každé funkci f definované na množině H existuje právě jedna funkce g definovaná v E_1 tak, že

(i) $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pro všechna $x, y \in E_1$,

(ii) $g(x) = f(x)$ pro každé $x \in H$.

N á v o d. Buď $x \in E_1$. Existují racionální čísla $r_1, r_2, \dots, r_n$ a prvky $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ (proč?) tak, že

$$x = r_1x_1 + \dots + r_nx_n.$$

Položte $g(x) = r_1 f(x_1) + \dots + r_n f(x_n)$.

Dokažte korektnost definice a tvrzení.

18.11 Věta. Existuje nespojitá funkce, která splňuje $(\heartsuit)$.

N á v o d. Nechť H je Hamelova báze E_1, $x_0 \in H$. Položte $f(h) = 0$ pro $h \in H \setminus \{x_0\}$, $f(x_0) = 1$ a rozšiřte funkci f podle 18.10. Funkce g nemá tvar $g(x) = k\,x$.

18.12 Věta. Nechť funkce g je nespojité řešení rovnice $(\heartsuit)$ v E_1. Potom graf g je hustý v E_2, tj. v každém intervalu $(a,b)\times(c,d) \subset E_2$ existuje bod množiny graf g.

N á v o d. Zvolme $(a,b)\times(c,d)\subset E_2$. Protože funkce g není spojitá, není ani shora ani zdola omezená na intervalu (a,b) (viz 18.5). Tedy množiny $M_1 = \{x\in(a,b);\ g(x) < c\}$ a $M_2 = \{x\in(a,b);\ g(x) > d\}$ jsou neprázdné. Existují taková $y,\ z\in(a,b)$, že

$$\sup g(M_1) - (d-c) < g(y) < c < d < g(z) < \inf g(M_2) + (d-c).$$

Položte $x = \frac{1}{2}(y+z)$.

18.13* <u>Věta.</u> Každá funkce, která splňuje ($\heartsuit$) a je nespojitá, je lebesgueovsky neměřitelná.
(Důsledek: V E_1 existují lebesgueovsky neměřitelné funkce.)

D ů k a z. Předpokládejme, že $f: E_1 \longrightarrow E_1$ splňuje ($\heartsuit$), je nespojitá a měřitelná. Podle 18.5 funkce f není omezena shora na intervalu $(-1,1)$. Existuje tedy posloupnost $x_n\in(-1,1)$ taková, že $f(x_n) > \max(n,\ f(x_{n-1}))$ pro každé $n>1$.

Označte
$$M_n = \{x\in\langle x_n-3, x_n+3\rangle;\ f(x) \geq f(x_n)\},$$
$$M_n' = \{x\in\langle x_n-3, x_n+3\rangle;\ f(x) \leq f(x_n)\},$$
$$N_n = M_n\cap\langle -2,+2\rangle,\quad P = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n.$$

Ukažte, že

(a) Množiny M_n, M_n' jsou měřitelné a dvojice M_n, M_n' je souměrná se středem x_n, takže $\lambda_1 M_n \geq 3$,

(b) $1 \leq \lambda_1 N_n \leq 4$, $\{N_n\}$ je nerostoucí posloupnost množin,

(c) $\lambda_1 P \geq 1$, tedy $P \neq \emptyset$.

Ale $P = \{x\in\langle -2,+2\rangle;\ f(x) = +\infty\} = \emptyset$.

18.14 <u>Poznámka.</u> Uvažme obecnější funkcionální rovnici

($\spadesuit$) $\qquad f(x+y) = g(x) + h(y),\quad x,y\in E_1.$

Funkce $f,g,h: E_1 \longrightarrow E_1$ splňují ($\spadesuit$), právě když existuje funkce $F: E_1 \longrightarrow E_1$ splňující ($\heartsuit$) a čísla $a,b\in E_1$ tak, že

$$f(x) = F(x) - a - b$$
$$g(x) = F(x) - a$$
$$h(x) = F(x) - b.$$

N á v o d. $f(x) = g(x) + h(0) = g(0) + h(x)$.

C. STEINHAUSOVO LEMMA

$\boxed{18.15^*}$ Lemma. Nechť $M \subset E_1$, $a \in E_1$, $0 < |a| < \lambda_1 M$. Pak existují $x, y \in M$, a $s \in N$ tak, že $x - y = s\,a$.

Důkaz. Položte $M_k = M \cap \langle k|a|, k|a| + |a|)$,

$M'_k = M_k - k|a|$ pro celá k.

Množiny M_k, M'_k jsou měřitelné a $\lambda_1 M_k = \lambda_1 M'_k$.

Protože $\bigcup M'_k \subset \langle 0, |a|)$, platí

$$\sum \lambda_1 M'_k = \lambda_1 M > |a| \geq \lambda_1(\bigcup M'_k),$$

z čehož plyne, že množiny M'_k nejsou po dvou disjunktní.

Existují celá m, n a $z \in M'_m \cap M'_n$.

Pro $x = z + m|a|$, $y = z + n|a|$ jest

$x, y \in M$, $x - y = (m - n)|a|$.

$\boxed{18.16}$ Poznámka.

(a) S pomocí Steinhausova lemmatu 18.15 a axiomu výběru lze dokázat existenci lebesgueovsky neměřitelné množiny v E_1. Podle axiomu výběru existuje množina $M \subset E_1$ s vlastností: Ke každému $x \in E_1$ existuje právě jedno $y \in M$ tak, že $x - y \in R$. Protože $E_1 = \bigcup_{r \in R} (M+r)$, není $\lambda_1 M = 0$. Kdyby $\lambda_1 M > 0$, existovalo by $a \in R$, $0 < a < \lambda_1 M$, a podle 18.15 by bylo $x - y \in R$ pro nějaká $x, y \in M$, $x \neq y$; to je spor s definicí množiny M.

(b) Obdobně sami dokažte: Pro $P \subset E_1$, $\lambda_1 P > 0$ existuje $M \subset P$, M lebesgueovsky neměřitelná.

D. HAMELOVA BÁZE

$\boxed{18.17}$ Cvičení. Nechť H je Hamelova báze v E_1 (viz 18.9). Potom

(a) $0 \notin H$,

(b) mohutnost množiny H je stejná jako mohutnost E_1,

(c) H neobsahuje žádný interval,

(d) pro každé $a \in E_1$, $a \neq 1$ existuje $x \in H$ tak, že $ax \notin H$.

1014-7781

N á v o d. Zvolte $h \in H$. Existují $r_1,\dots,r_n \in R$, $x_1,\dots,x_n \in H$ tak, že $\frac{h}{a-1} = \sum r_i x_i$. Kdyby pro každé $i=1,\dots,n$ platilo $ax_i \in H$, bylo by $h = \sum r_i a x_i - \sum r_i x_i$, což je spor s lineární nezávislostí prvků báze H (nad tělesem R).

18.18 Lemma. Pro libovolný vektorový prostor X platí: Jestliže $A \subset S \subset X$, množina A je lineárně nezávislá a lineární obal S splývá s X, potom existuje báze B prostoru X s vlastností $A \subset B \subset S$.

Důkaz. Viz E. Hewitt - K. Stromberg, Real and abstract analysis, 1965, 3.26. (Z tohoto lemmatu plyne speciálně tvrzení v 18.9 o existenci báze v libovolném vektorovém prostoru.)

18.19* Měřitelnost Hamelovy báze.

(a) Dokažte toto zesílení tvrzení 18.17.c: Žádná Hamelova báze neobsahuje množinu kladné míry.

N á v o d. Použijte Steinhausovo lemma 18.15.

(b) Sestrojte reziduální množinu $S \subset E_1$ s vlastností $\lambda_1 S = 0$. Ukažte, že $S + S = E_1$.

N á v o d. Nechť $\varphi : R \to N$ je prosté. Položte
$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r \in R} \left(r - \frac{1}{2^{\varphi(r)+n}}\, ,\, r + \frac{1}{2^{\varphi(r)+n}}\right) .$$

(c) Z tvrzení (a) plyne:
Pro každou Hamelovu bázi H buď
(i) H je lebesgueovsky neměřitelná, nebo
(ii) $\lambda_1 H = 0$.

Každá z těchto možností může skutečně nastat:
ad (i) viz W. Sierpiński, Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel, Fund. Math. 1920, 1, 105-111,

ad (ii): použijte lemma 18.18, kde S je množina sestrojená v 18.19.b, $A = \emptyset$.

18.20 Poznámka. Z 18.25 plyne, že žádná Hamelova báze neobsahuje žádnou reziduální podmnožinu žádného intervalu.

N á v o d. Sestrojte funkci g podle 18.11; g je omezená na $H \setminus \{x_0\}$ a je nespojitá.

18.21* Darbouxova vlastnost.

(a) Lemma. Nechť F je libovolný podprostor vektorového prostoru E_1 nad tělesem R (jinými slovy: nechť $\emptyset \neq F \subset E_1$,

$x + y \in F$ pro každá $x, y \in F$, $rx \in F$ pro každé $r \in R$ a $x \in F$).
Nechť $f: E_1 \to F$ a nechť každý prvek z F má v zobrazení f alespoň 2 různé vzory v E_1. Nechť f splňuje ($\heartsuit$).
Potom pro libovolná $a, b \in E_1$, $a < b$, jest $f((a,b)) = F$.

N á v o d. Je-li $f(x_1) = f(x_2) = u$, je také $f(rx_1 + (1-r)x_2) = u$ pro každé $r \in R$.

(b) Nechť F je libovolný podprostor prostoru E_1 nad tělesem R. Potom existuje funkce $f: E_1 \to F$, která splňuje předpoklady lemmatu 18.21.a.

N á v o d. Uvažte báze H, B prostorů E_1, F pro které $B \subset H$. Existuje $g: H \to B$ tak, že každý prvek v B má v zobrazení g alespoň 2 vzory. Rozšiřte g podle 18.10.

(c) Podle (a), (b) existuje funkce f splňující ($\heartsuit$) a taková, že $f((a,b)) = E_1$, kdykoliv $a, b \in E_1$, $a < b$. Podle 18.13.f není lebesgueovsky měřitelná v E_1. Zvolme libovolně $c < d$. Jest

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = f^{-1}\Big(\bigcup_{\substack{r > \alpha - c \\ r \in R}} (c+r, d+r)\Big) = \bigcup_{\substack{r > \alpha - c \\ r \in R}} f^{-1}((c+r, d+r)),$$

takže pro nějaké $r \in R$ je $f^{-1}((c+r, d+r))$ neměřitelná, z čehož plyne, že i množina $f^{-1}((c,d)) = f^{-1}((c+r, d+r) - f^{-1}\{r\}$ je neměřitelná.
Stejně dokažte, že vzor libovolného uzavřeného či polouzavřeného intervalu je neměřitelná množina.

(d) Dokázali jste tedy existenci funkce $f: E_1 \to E_1$ s těmito vlastnostmi:

(i) f splňuje ($\heartsuit$),
(ii) $f((a,b)) = E_1$ pro $a < b$,
(iii) $f^{-1}(I)$ není měřitelná množina pro žádný interval $I \neq E_1$.

(e) Zvolíme-li v (a), (b) za F vlastní nenulový podprostor E_1, dostaneme aditivní funkci, která není měřitelná ani darbouxovská.

E. DALŠÍ PODMÍNKY PRO SPOJITOST ADITIVNÍ FUNKCE

$\boxed{18.22^*}$ Věta (Kestelman). Nechť $M \subset E_1$, $\lambda_1 M > 0$, $f: E_1 \to E_1$ splňuje ($\heartsuit$) a $|f|M| < K \in E_1$. Potom f je spojitá.

N á v o d. Zvolte libovolně $a \in (0, \lambda_1 M)$. Podle lemmatu 18.15

1014-7781

existují $x, y \in M$, a $s \in N$ tak, že $x - y = s\,a$. Je tedy $|s| . |f(a)| = |f(sa)| = f(x-y) = |f(x) - f(y)| < 2K$, $|f(a)| < \frac{2K}{s} \leq 2K$. Tedy f je omezená na intervalu $(0, \lambda_1 M)$.

18.23* **Věta.** Nechť $M \subset E_1$, $\lambda_1 M > 0$, $f: E_1 \longrightarrow E_1$ splňuje $(\heartsuit)$ a $f|M < K \in E_1$. Potom f je spojitá.

Návod. Najděte interval (a,b) takový, že $\lambda_1 [(a,b) \cap M] > \lambda_1 [(a,b) \setminus M]$. Označte $P = (a,b) \cap M \cap \{a+b-x;\ x \in (a,b) \cap M\}$. Dokažte $\lambda_1 P > 0$ a $f(a+b) - K < f|P < K$. Zbytek plyne z věty 18.22.

18.24 **Věta.** Nechť $M \subset E_1$, $\lambda_1 M > 0$, $f : E_1 \longrightarrow E_1$ splňuje $(\heartsuit)$ a $f|M \in \Lambda_M$. Potom f je spojitá.

Návod. Ukažte, že pro nějaké $n \in N$ platí $\lambda_1 [M \cap f^{-1}((-\infty, n))] > 0$ a použijte 18.23.

18.25* **Věta.** Nechť $c, d \in E_1$, $c < d$, $M \subset (c,d)$ je reziduální podmnožina intervalu (c,d), $f : E_1 \longrightarrow E_1$ splňuje $(\heartsuit)$ a $f|M < K \in E_1$. Potom funkce f je spojitá.

Návod. Množina $M + M$ obsahuje interval.

18.26 **Problém.** Označme

$$\mathcal{B} = \{T \in \exp E_1;\ \text{kdykoliv funkce } f: E_1 \longrightarrow E_1 \text{ splňuje } (\heartsuit) \text{ a platí } f|T < K \text{ pro nějaké } K \in E_1, \text{ potom } f \text{ je spojitá}\}$$

(viz Roman Ger and Marek Kuczma, On the Boundedness and Continuity of Convex Functions and Additive Functions, Aeq.Math., Vol. 4, 1970, 157-162).

Naskýtá se přirozená otázka, jak úplně charakterizovat třídu $\mathcal{B}$.

Z předchozího plyne:

(i) Každá reziduální podmnožina libovolného intervalu patří do $\mathcal{B}$.

(ii) Každá množina kladné Lebesgueovy míry patří do $\mathcal{B}$.

(iii) Kazdá množina třídy $\mathcal{B}$ je nespočetná,

(iv) Existuje nespočetná podmnožina E_1, která nepatří do $\mathcal{B}$.

18.27 Věta. Nechť $f: E_1 \longrightarrow E_1$ splňuje ($\heartsuit$) a navíc platí $x^2 f(\frac{1}{x}) = f(x)$ pro každé $x \in E_1$, $x \neq 0$. Potom f je spojitá.

N á v o d. Z $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ plyne

$$f(x^2) = 2xf(x) - x^2 f(1),$$

a tedy z

$$2 = (x + \frac{1}{x})^2 - x^2 - \frac{1}{x^2}$$

plyne

$$f(1) = \frac{1}{x} f(x).$$

18.28 Problém.

(a) Pomocí 18.5 dokažte: Jestliže $f: E_1 \longrightarrow E_1$ je homomorfismus E_1 do E_1 ve struktuře těles, tj.
$f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x).f(y)$,
potom buď $f: x \longmapsto x$ nebo $f: x \longmapsto 0$.

N á v o d. $f(x^2) = (f(x))^2 \geq 0$.

(b) (??) Pokuste se charakterisovat všechna tělesa, která mají pouze dva endomorfismy do sebe. Příklady takových těles: E_1, R, těleso celých čísel mod p (p prvočíslo).

F.* SKORO ADITIVNÍ FUNKCE

18.29* Věta (Jurkat; de Bruijn). Nechť $f: E \longrightarrow E_1$, $E \subset E_1$, nechť existuje $M \subset E_1 \times E_1$, $\lambda_2 M = 0$ tak, že platí ($\heartsuit$), kdykoliv $(x,y) \in E_1 x E_1 \setminus M$. Potom existuje právě jedna funkce $F: E_1 \longrightarrow E_1$, splňující ($\heartsuit$) pro všechna $x,y \in E_1$, tak, že $F = f$ s.v.

Idea důkazu (podrobnosti viz W.B. Jurkat, On Cauchy's functional equation, Proc. Am. Math. Soc. 16 (1965), 683-686 nebo N.G.de Bruijn, On almost additive functions, Coll. Math. 15 (1966), 59-63).

Podle Fubiniovy věty existují L, $L_x \subset E_1$ tak, že
$\lambda_1 L = \lambda_1 L_x = 0$ a $M \subset (L x E_1) \cup \bigcup_{x \in E_1} \{x\} \times L_x$.

Dále je zřejmé, že kdykoliv $x \in E_1$, $P \subset E_1$, $\lambda_1 P = 0$, potom existují $y,z \in E_1 \setminus P$ tak, že $x = y+z$. Odtud ihned plyne

1014-7781

jednoznačnost funkce F.

Navíc odtud plyne, že existují $y, z \in E_1 \setminus L$ (pro libovolné zvolené $x \in E_1$) tak, že $x = y + z$.

Stačí položit $F(x) = f(y) + f(z)$.

$\boxed{18.30}$ Věta (Hartman). Nechť $M \in E_1$, $\lambda_1 M = 0$. Nechť pro funkci $f : E_1 \longrightarrow E_1$ platí ($\heartsuit$), kdykoliv $x \notin M$, $y \notin M$.

Potom ($\heartsuit$) platí pro všechna $x, y \in E_1$.

N á v o d. Použijte větu 18.29.

1014-7781

T É M A 19

Funkce konečné variace

Obsah: A. Vlastnosti funkcí s konečnou variací.

B. Body konečné variace.

A. VLASTNOSTI FUNKCÍ S KONEČNOU VARIACÍ

Vzhledem k tomu, že toto téma je zpracováno v [D II] anebo ve skriptech J. Lukeš, Teorie míry a integrálu I, omezíme se pouze na stručné poznámky.

19.1 Definice. Pro funkci $f : \langle a,b\rangle \to E_1$ položme

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\},$$

kde supremum se bere přes všechna dělení $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ intervalu $\langle a,b\rangle$. Číslo $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$ se nazývá variace funkce f na $\langle a,b\rangle$, systém všech funkcí s konečnou variací označme $BV(\langle a,b\rangle)$.

19.2 Příklady.

(a) Zkoumejte variaci monotonní funkce.

(b) Funkce f je konstantní, právě když $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = 0$.

(c) Pro jaká α, β má konečnou variaci funkce

$$f : x \longmapsto x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}}, \quad f(0) = 0 \qquad \text{na } \langle 0,1\rangle .$$

(d) Dokažte, že $Lip_1(\langle a,b\rangle) \cup AC(\langle a,b\rangle) \subset BV(\langle a,b\rangle) \subset R(\langle a,b\rangle)$.

19.3 Vlastnosti systému $BV(\langle a,b\rangle)$.

Dokazujte následující implikace:

(a) $f \in BV(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f$ omezená na $\langle a,b\rangle$,

(b) $f,g \in BV\langle (a,b)\rangle \Longrightarrow f + g \in BV(\langle a,b\rangle)$ a $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{a}{V}} g$,

(c) $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, $c \in E_1 \Longrightarrow c\, f \in BV(\langle a,b\rangle)$ a $\overset{b}{\underset{a}{V}} cf = |c| \overset{b}{\underset{a}{V}} f$,

(d) $f,g \in BV(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f.g \in BV(\langle a,b\rangle)$,

(e) $f,g \in BV(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow |f|,\ \max(f,g),\ \min(f,g) \in BV(\langle a,b\rangle)$,

(f) $f \in BV(\langle a,b\rangle) \Longleftrightarrow f \in BV(\langle a,c\rangle),\ f \in BV(\langle c,b\rangle)$,

přičemž $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f.$

19.4 Jordanova věta o rozkladu.

(a) Pro $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ položte

$$F(0) = 0,\quad F: x \longmapsto \overset{x}{\underset{a}{V}} f,\ x \in (a,b\rangle .$$

Ukažte, že F je neklesající na $\langle a,b\rangle$. Je-li f spojitá v $x \in \langle a,b\rangle$, je F spojitá v bodě x.

(b) (Jordanova věta). Funkce $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, právě když existují neklesající funkce f_1, f_2 tak, že $f = f_1 - f_2$ v $\langle a,b\rangle$. Dokažte!

Návod. Položte $f_1(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f$.

19.5 $BV(\langle a,b\rangle)$ jako metrický prostor.

Pro $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ položte $\|f\| = |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}} f$.

Ukažte, že $(BV(\langle a,b\rangle), \|\ldots\|)$ je Banachův prostor.

Návod. Viz citovaná skripta v úvodu oddílu A, kde jsou vyšetřovány též další vlastnosti tohoto prostoru.

B. BODY KONEČNÉ VARIACE

19.6 Definice. Buď $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Řekneme, že funkce f definovaná v $\langle a,b\rangle$ má variaci konečnou v bodě x_0, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že f má konečnou variaci v $\langle a,b\rangle \cap \langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$.

Každý bod z $\langle a,b\rangle$, v němž má f variaci konečnou, nazveme BV-bodem funkce f.

19.7 Cvičení. Funkce f má variaci konečnou na intervalu $\langle a,b\rangle$, právě když každý bod $\langle a,b\rangle$ je BV-bodem funkce f. Dokažte!

Návod. Pro důkaz jedné implikace užijte Borelovu větu.

19.8 Označení.

(a) Nechť f je funkce na $\langle a,b\rangle$. Pro $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$ nechť $V(f; \langle c,d\rangle)$ znamená variaci funkce f na $\langle c,d\rangle$.

Je-li $x \in \langle a,b\rangle$ BV-bodem funkce f, položme

$$V_\delta(x) = \frac{1}{1 + V(f; \langle a,b\rangle \cap (x-\delta, x+\delta))}$$

pro ta $\delta > 0$, pro něž je jmenovatel posledního výrazu konečný. Pro bod x, který není BV-bodem funkce f, položme $V_\delta(x) = 0$ pro každé $\delta > 0$.

(b) Pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ definujme funkci v předpisem

$$v(x) = \lim_{\delta \to 0_+} V_\delta(x)$$

(c) Ukažte, že předchozí definice má smysl a že funkce v splňuje nerovnost $0 \leq v \leq 1$ na $\langle a,b\rangle$.

$\boxed{19.9}$ Cvičení. Buď $\alpha \in \langle 0,1\rangle$; sestrojte funkci f a bod $c \in \langle a,b\rangle$ tak, aby $v(c) = \alpha$.

$\boxed{19.10}$ Věta. Funkce v je zdola polospojitá na $\langle a,b\rangle$.

N á v o d. Stačí dokázat, že v je zdola polospojitá v každém BV-bodě funkce f (proč?). Buď $c \in \langle a,b\rangle$ takový bod a zvolte $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že

① $V_\delta(c) > v(c) - \varepsilon$.

Buď $x \in (c-\delta, c+\delta)$ a buď δ' takové, že $\langle x-\delta', x+\delta'\rangle \subset \langle c-\delta, c+\delta\rangle$. Protože

$V\{f; \langle x-\delta', x+\delta'\rangle \cap \langle a,b\rangle\} \leq V(f; \langle c-\delta, c+\delta\rangle \cap \langle a,b\rangle)$, je

$v(x) \geq V_{\delta'}(x) \geq V_\delta(c)$. Odtud a z ① již plyne, že pro všechna $x \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle \cap \langle a,b\rangle$ je $v(x) > v(c) - \varepsilon$.

$\boxed{19.11}$ Cvičení. Množina BV-bodů funkce f je otevřená v intervalu $\langle a,b\rangle$. Dokažte!

N á v o d. Uvědomte si, že x je BV-bod, právě když $v(x) > 0$ a aplikujte 19.10.

$\boxed{19.12}$ Cvičení.

(a) Nechť funkce f je spojitá v bodě c a nechť c je BV-bodem funkce f. Potom je $v(c) = 1$. Dokažte!

N á v o d. Protože c je BV-bod, existuje $\delta > 0$ tak, že f má konečnou variaci na $\langle a,b\rangle \cap \langle c-\delta, c+\delta\rangle$. Položte $U(x) = V(f; \langle c-\delta, x\rangle \cap \langle a,b\rangle)$ pro $x \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle \cap \langle a,b\rangle$.

1014-7781

Potom pro $0 < \delta' \leq \delta$ je $V_{\delta'}(c) = \dfrac{1}{1+U(c+\delta')-U(c-\delta')}$.

Protože funkce f je spojitá v bodě c, je funkce U spojitá v bodě c (viz 19.4.a). Odtud plyne tvrzení.

(b) Je-li f spojitá v bodě $c \in \langle a,b \rangle$ a c je BV-bod funkce f, potom je v spojitá v bodě c.

Návod. Využijte 19.10, 19.12.a a vztahu $v \leq 1$.

(c) Nechť $v(c) = 1$. Potom f je spojitá v bodě c.

Návod. Bod c je BV-bodem funkce f. Protože

$\lim_{\delta \to 0_+} V(f; \langle c-\delta, c+\delta \rangle \cap \langle a,b \rangle) = 0$, je hodnota výrazu

$|f(x) - f(c)|$ "malá" pro x "blízká" bodu c. Precizujte!

19.13 **Problémy.**

(a) Nechť funkce f je spojitá v bodě $c \in \langle a,b \rangle$. Rozhodněte, zda c je BV-bodem funkce f.

(b) Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:
Buď f spojitá funkce na $\langle a,b \rangle$. Potom existuje c tak, že c je BV-bodem funkce f.

19.14 **Poznámky.**

(a) Zjistíte, že odpověď na předcházející problém je negativní. Existuje tedy spojitá funkce na $\langle a,b \rangle$ taková, že na žádném podintervalu $\langle c,d \rangle \subset \langle a,b \rangle$ nemá variaci konečnou (stačí třeba uvažovat libovolnou spojitou funkci bez derivace).

(b) Víte, že existuje funkce definovaná na $\langle a,b \rangle$ taková, že není monotonní na žádném jeho podintervalu (viz 4.21.c). Odtud však neplyne, že taková funkce má na intervalu $\langle a,b \rangle$ nekonečnou variaci.

(c) Existují dokonce absolutně spojité funkce na $\langle a,b \rangle$, které nejsou monotonní na žádném podintervalu $\langle a,b \rangle$ (viz 4.21.d).

(d) Existují dále funkce, které mají v intervalu $\langle a,b \rangle$ omezenou derivaci a které nejsou v žádném podintervalu monotonní (viz 8.33).

T É M A 20

Existence a konstrukce některých funkcí zajímavých vlastností

A. ÚVOD

20.1 Úvod. V prvním ročníku jste zkoumali vztah mezi spojitostí funkce a existencí derivace. Připomeňte, že

(a) má-li funkce v bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá,

(b) má-li funkce v bodě nevlastní derivaci, může, ale nemusí být v tomto bodě spojitá (uvádějte příklady!),

(c) je-li funkce v bodě spojitá, nemusí mít v tomto bodě derivaci (vlastní ani nevlastní, dokonce ani ne jednostranné derivace!).

Dále jste se seznámili s tvrzením (asi bez důkazu), že existují spojité funkce na intervalu, které v žádném bodě tohoto intervalu nemají derivaci. V tomto tématu se budeme těmito funkcemi zabývat. Ukážeme existenci takových funkcí (existenční důkaz) a též takové funkce sestrojíme (konstruktivní důkaz). Dokážeme dokonce, že těchto funkcí je v jistém smyslu "mnoho". Obecnou důkazovou metodu (metodu kategorií) přitom použijeme (a to nejen v této části skript - viz např. též 12.18.e, 14.14, 25.14, 23.6.b, 23.15, 21.14) k důkazu existence funkcí jiných zajímavých vlastností.

V závěru tohoto tématu se zabýváme otázkou, jak mohou vypadat množiny bodů divergence Fourierových řad spojitých funkcí.

B. EXISTENČNÍ DŮKAZY (METODA KATEGORIÍ)

20.2 Opakování.

(a) Zopakujte větu (Baire): Úplný metrický prostor je druhé kategorie v sobě. (K tomu připomeňte pojmy: husté a řídké množiny, množiny 1. a 2. kategorie, úplný prostor.)

(b) Označte symbolem $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ prostor spojitých funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$ s metrikou ρ,

$$\rho(f,g) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x) - g(x)| .$$

Naznačte myšlenku důkazu úplnosti prostoru $(\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle);\rho)$.

20.3 Cvičení.

(1) Nechť A je množina těch funkcí z $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$, které mají alespoň v jednom bodě intervalu $\langle 0,1\rangle$ vlastní derivaci. Ukážeme-li, že množina A je 1.kategorie v $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ vyplyne odtud tvrzení:

"Existuje spojitá funkce v $\langle 0,1\rangle$, která nemá v žádném bodě intervalu $\langle 0,1\rangle$ vlastní derivaci." Vysvětlete!

Dokažte nyní, že A je první kategorie v $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$!

N á v o d. Označte (pro $n\in N$)

$A_n = \{f\in \mathcal{C}(\langle 0,1\rangle);$ existuje $x\in \langle 0,1-\frac{1}{n}\rangle$ tak, že pro všechna $h\in(0,\frac{1}{n})$ je $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq n$.

Ukažte, že

(a) $A\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

(b) každá množina A_n je uzavřená v $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$.

(c) každá množina A_n je řídká v $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$.

K důkazu posledního tvrzení stačí ukázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ a ke každé funkci $h\in\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ můžeme nalézt funkci $g\in\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)\setminus A_n$ tak, aby $\rho(g,h) < \varepsilon$.

Zvolte tedy $\varepsilon > 0$ a $h\in\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$. Podle Weierstrassovy věty (viz téma 30) nalezněte polynom P tak, aby

$$\max_{x\in\langle 0,1\rangle} |h(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

a dále zkonstruujte funkci $s\in\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ s vlastnostmi:

$$\max_{x\in\langle 0,1\rangle} |s(x)| < \frac{\varepsilon}{4} ,$$

$$|s_+'(x)| > n + \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |P'(x)| \quad \text{pro všechna } x\in\langle 0,1\rangle .$$

(Např. užijte funkce $s(x) = \frac{1}{2\pi}\arcsin kx$,

$$k > \frac{n + \max |P'(x)|}{\varepsilon}) .$$

1014-7781

Stačí pak položit $g = P + s$.

(Pokuste se též při posledním důkazu vyhnout Weierstrassově větě!)

(ii) Z předchozího tvrzení (resp. z jeho důkazu) odvoďte: Existuje spojitá funkce na intervalu $\langle 0,1\rangle$, která nemá v žádném bodě tohoto intervalu vlastní jednostrannou derivaci (tj. ani zleva ani zprava).

20.4 Poznámky.

(a) Lze ukázat existenci (tzv. Besikovitchovy) funkce F těchto vlastností: Funkce F je spojitá v intervalu $\langle 0,1\rangle$ a nemá v žádném bodě tohoto intervalu jednostrannou derivaci ani zleva ani zprava (vlastní ani nevlastní).

(Konstrukce Besikovitchovy funkce je v Fund. Math. 12(1928), str. 244-263.)

V čem se liší funkce z odstavců 20.3.ii a 20.4.a?
Je zajímavé, že existenci této funkce nelze dokázat metodou kategorií (viz odst. 20.6.a 7) - množina všech funkcí této vlastnosti tvoří totiž v prostoru $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ pouze množinu 1.kategorie (viz Saks, Fund. Math. 19(1932), str. 211-219).

(b) Metodou kategorií lze dokázat i mnohem zajímavější výsledky. Tak např. V. Jarník (Fund. Math. 20(1933), str. 56-58) ukazuje, že existuje množina A 1.kategorie v $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ s vlastnostmi:

Je-li $f \in \mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)\setminus A$, $t \in (0,1)$, $-\infty \leq a \leq +\infty$, potom můžeme nalézt posloupnost $\{h_n\}$ reálných čísel tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(t + h_n) - f(t)}{h_n} = a, \quad \lim_{n\to\infty} h_n = 0.$$

Rozmyslete!

(c) Nejsilnější výsledek tohoto druhu se na základě citovaného Jarníkova článku podařilo odvodit K.M. Gargovi. (K.M. Garg: On residual set of continuous functions, Czech. Math. Journal 95(1970), str. 537-543).

20.5 Cvičení. Dokažte obdobnou metodou tvrzení: "Existuje spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$, která není monotonní v žádném jeho podintervalu."

N á v o d. Soustava $\mathcal{F}$ všech podintervalů intervalu $\langle 0,1\rangle$

s krajními racionálními body je spočetná. Nechť $\mathcal{F} = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Položte
$$E_n = \{ f \in \mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle);\ f \text{ je monotonní na } I_n \}.$$
Ukažte, že
(i) množiny E_n jsou uzavřené (nejlépe přes doplněk; pozor na negaci výroku "f je monotonní na I_n!"),

(ii) každá množina E_n je řídká (obdobně jako v 20.3.(i)).
Tedy $\mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle) \setminus E_n \neq \emptyset$, odkud již plyne tvrzení.

20.6 (a) Vysvětlete ještě jednou metodu existenčních důkazů z předchozích odstavců (tzv. metoda kategorií).

(b) Metodou kategorií dokažte následující tvrzení:
Existuje spojitá funkce na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, která nabývá svého (ostrého) maxima v právě jednom bodě. Toto cvičení je poněkud "drastické"; je vidět, že přímý důkaz tohoto tvrzení je daleko snazší.

(c)* Metodou kategorií též dokažte následující tvrzení:
"Existuje spojitá funkce na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ taková, že
(i) existuje právě jedno $x_1 \in \langle 0,1 \rangle$, pro něž $f(x_1) = \max\limits_{x \in \langle 0,1 \rangle} f(x)$,
(ii) existuje právě jedno $x_2 \in \langle 0,1 \rangle$, pro něž $f(x_2) = \min\limits_{x \in \langle 0,1 \rangle} f(x)$,
(iii) je-li $0 \leq a < b \leq 1$, potom pro každé
$y \in \left(\min\limits_{x \in \langle a,b \rangle} f(x), \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} f(x)\right)$ je množina $f^{-1}(y)$ nekonečná".

Návod. Označte $\{I_n\}$ posloupnost uzavřených intervalů v $\langle 0,1 \rangle$ s "krajními" racionálními body. Nechť D je množina všech funkcí vyhovujících požadavku (iii). Položte dále $R_n = \{ f \in \mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle);$ existuje $x_0 \in I_n$ tak, že pro všechna $x \in I_n$, $x \neq x_0$ platí
$$0 \leq \frac{\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0))}{\operatorname{sign}(x - x_0)} \leq 1 \},$$

$S_n = \{ f \in \mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle);$ existuje $x_0 \in I_n$ tak, že pro všechna $x \in I_n$, $x \neq x_0$ platí $-1 \leq \dfrac{\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0))}{\operatorname{sign}(x - x_0)} \leq 0 \}$.

Dokažte, že
(i) $\mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle) \setminus D \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (R_n \cup S_n)$,

(ii) množiny R_n a S_n jsou uzavřené,

(iii) množiny R_n a S_n jsou řídké v $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$.

Jiný důkaz viz V. Jarník, Čas. pěst. mat. 63 (1933-34), str. 135-146.

(d) Dokažte následující tvrzení:

"Existuje neklesající funkce, která není ani konvexní ani konkávní na žádném podintervalu intervalu $\langle 0,1\rangle$."

Návod. Ukažte, že metrický prostor $(M(\langle 0,1\rangle),\rho)$, kde $M(\langle 0,1\rangle)$ je systém všech neklesajících funkcí na $\langle 0,1\rangle$ a $\rho(f,g) = \max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)-g(x)|$, je úplný. Potom postupujte obdobně jako v 20.5.

C. KONSTRUKTIVNÍ DŮKAZY

20.7 **Příklad.**

(a) Nejznámější (a dlouhou dobu považovaný za prvý) příklad spojité funkce nemající vlastní derivaci v žádném bodě E_1 pochází od Weierstrasse (1875):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x, \qquad x\in E_1,$$

kde $0 < a < 1$ a b je liché přirozené číslo. Je-li $ab < 1$, má zřejmě funkce f dokonce spojitou prvou derivaci (proč?). Lze ukázat, že v případě $ab \geq 1$ nemá funkce f v žádném bodě vlastní derivaci (viz Trans.Amer.Math.Soc. 17 (1916), str. 301-325). Jednodušší důkaz tohoto tvrzení za předpokladu $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ lze provést v těchto bodech:

(i) $\left|\cos\left(b^n\pi(x+h)\right) - \cos(b^n\pi x)\right| \leq b^n\pi|h|$, a tedy

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{\cos\left(b^n\pi(x+h)\right) - \cos(b^n\pi x)}{h}\right| < \frac{a^m b^m}{ab-1}\pi .$$

(ii) Zvolme pevně $x\in E_1$ a buď $b^m x = \alpha_m + \xi_m$, kde α_m je celé, $-\frac{1}{2} \leq \xi_m < \frac{1}{2}$. Buď $h_m = \dfrac{1-\xi_m}{b^m}$ (je tedy $0 < h_m < \dfrac{3}{2b^m}$). Protože b je liché, je

$$\sum_{n=m}^{\infty} a^n \frac{\cos(b^n\pi(x+h_m)) - \cos(b^n\pi x)}{h_m} =$$

$$= \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h_m} \sum_{n=m}^{\infty} a^n \left(1 + \cos(\pi b^{n-m}\xi_m)\right).$$

(iii) Členy posledního součtu jsou nezáporné a tedy (i) a (ii) dávají

$$\left| \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} \right| \geq \frac{2}{3} \quad a^m b^m - \pi \frac{a^m b^m}{ab-1} \quad ,$$

odkud pro $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ již dostaneme tvrzení.

Poznamenejme, že vhodnou volbou posloupnosti $\{h_m\}$ lze dokázat mnohem více. Pro poněkud modifikovanou funkci jsou tyto úvahy provedeny v [D II], kap. V, § 10 (viz též cvičení!).

(b) Dokažte: Neexistuje-li k danému $x \in E_1$ číslo $m_0 \in N$ tak, aby všechna α_m pro $m > m_0$ měla stejnou paritu, platí
$D^+ f(x) = +\infty$, $D_+ f(x) = -\infty$.

(c) Úpravou výše uvedeného postupu (volbou vhodných $h_m < 0$) lze dokázat obdobné výsledky pro levá derivovaná čísla.

(d) Dokažte: Pro skoro všechna $x \in E_1$ obsahuje posloupnost
α_m (α_m celé, $\alpha_m = b^m x - \xi_m$, $\xi_m \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$)
nekonečně mnoho sudých a nekonečně mnoho lichých čísel.

N á v o d. Stačí vyšetřit, že v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ vyplní čísla x, pro něž existuje $m_0 \in N$ tak, že pro všechna $m \geq m_0$, $m \in N$ je α_m sudé, nulovou množinu. K tomu stačí dokázat, že pro každé $m_0 \in N$ je průnik

$$\bigcap_{m \geq m_0} \bigcup_{k \in \mathcal{M}_m} \left\langle \frac{2k - \frac{1}{2}}{b^m} , \frac{2k + \frac{1}{2}}{b^m} \right)$$

množina míry nula. Přitom $\mathcal{M}(m)$ je množina všech takových přirozených čísel k, pro něž jest

$$\left\langle \frac{2k - \frac{1}{2}}{b^m} , \frac{2k + \frac{1}{2}}{b^m} \right) \cap \langle 0, 2\pi) \neq \emptyset .$$

(e) Kombinací (b), (c), (d) dokažte:
Pro skoro všechna $x \in E_1$ je $D^+ f(x) = D^- f(x) = +\infty$,

$D_+ f(x) = D_- f(x) = -\infty$.

(f) Lze dokázat (viz Jarníkův článek citovaný v 20.4.b), že stejnou vlastnost mají - až na množinu 1.kategorie - všechny spojité funkce.

20.8 **Poznámky.**

(a) Kolem roku 1920 byl objeven rukopis nedokončeného spisu "Grössenlehre"

1014-7781

českého matematika B. Bolzana, v němž byla obsažena konstrukce spojité funkce bez derivace. Bolzanova konstrukce pochází asi z roku 1830 a získává tudíž světovou prioritu. Nepodstatně modifikovanou Bolzanovu konstrukci podává K. Petr v knize Počet diferenciální (str. 163-167). Podrobné vyšetření Bolzanovy funkce je v práci V. Jarníka, Čas. pro pěst. mat. 51 (1922), str. 248-264.

(b) Z celé řady konstrukcí spojité funkce bez derivace uveďme ještě další dvě:

(i) Konstrukce K. Petra na základě dekadického rozvoje hodnot argumentu (viz Čas. pro pěst. mat. 49 (1920, str. 25-31).

(ii) Konstrukce van der Waerdena (viz např. [Alex], str. 181--183).

(c) Podejte také přímou konstrukci funkce z 20.5 - spojité funkce na $\langle 0,1\rangle$, která není monotonní na žádném podintervalu intervalu $\langle 0,1\rangle$. (Viz kupř. [G - O], kap. 2, př. 21, též kap. 3, př. 8).

(d) Uvědomte si, že každá funkce spojitá a nemající vlastní derivaci na $\langle 0,1\rangle$ je příkladem funkce "nikde monotonní" na $\langle 0,1\rangle$. Taková funkce totiž nemůže být monotonní na žádném podintervalu $\langle 0,1\rangle$, neboť platí následující věta (Lebesgue): Buď f monotonní na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom existuje vlastní derivace f' skoro všude v $\langle a,b\rangle$. Vysvětlete!

(e)** Platí dokonce tvrzení (jehož důkaz je značně obtížný - viz 8.33): Existuje funkce, která má v každém bodě intervalu $\langle 0,1\rangle$ vlastní derivaci a která není monotonní na žádném podintervalu intervalu $\langle 0,1\rangle$.

(f) Lze dokázat následující tvrzení? Existuje funkce, která má v každém bodě intervalu $(0,1)$ vlastní derivaci druhého řádu (resp. derivace všech řádů) a která není monotonní na žádném podintervalu intervalu $(0,1)$.

(g) Funkci $f: x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n!\pi x}{n!}$ zkoumal v roce 1886 Matyáš Lerch. Je to příklad funkce spojité v E_1, která nemá v žádném bodě derivaci. (Viz Contributions a la théorie des fonctions, 1886.)

20.9 Úvod. V [J II] kap. XIII, § 9 naleznete příklad spojité funkce, jejíž Fourierova řada v jednom bodě diverguje. Budeme se zajímat o to, jak může vypadat pro spojitou funkci množina bodů, v nichž Fourierova řada příslušné funkce diverguje. K tomu účelu dokážeme jeden důležitý výsledek z funkcionální analýzy (větu Banach-Steinhausovu).

Nechť B je Banachův prostor a $\{T_n\}$ – posloupnost spojitých lineárních funkcionálů na B. Nechť existuje v B množina A 2.kategorie taková, že

$$\forall x\in A:\ \sup_{n\in N}|T_n(x)|<\infty .$$

Potom

$$\sup_{n\in N}\|T_n\|<\infty .$$

Návod. Označte $F_m=\{x\in B;\ \sup_{n\in N}|T_n(x)|\le m\}$. Existuje $m_0\in N$ tak, že F_{m_0} není řídká a tedy existují $x_0\in B$, $r>0$ tak, že $\overline{U(x_0,r)}\subset F_{m_0}$. (Jest totiž F_{m_0} uzavřená.) Nyní snadno vyplyne, že každý funkcionál T_n je omezený na $\overline{U(0,r)}$ konstantou $2m_0$, a konečně na $\overline{U(0,1)}$ konstantou $\frac{2m_0}{r}$.

Cvičení. Z předchozí věty odvoďte: Budiž T_n posloupnost spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru B. Pak platí $\{x\in B;\ \sup_{n\in N}|T_n(x)|<\infty\}$ je 1.kategorie, právě když $\sup_{n\in N}\|T_n\|=+\infty$.

20.10 Cvičení. Označme $C_{2\pi}$ prostor všech spojitých 2π-periodických funkcí na E_1. Pro $f\in C_{2\pi}$ buď $s_n(f,x_0)$ n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f v bodě x_0; ten lze – jak známo – přepsat ve tvaru $s_n(f,x_0)=\int_0^{2\pi}f(t)\,\delta_n(x_0-t)\,dt$, kde $\delta_n(x)=\dfrac{\sin(n+1/2)x}{2\pi\sin(1/2)x}$ je tzv. Dirichletovo jádro.

Dokažte:

(a) $C_{2\pi}$ s normou $\|f\|=\max_{x\in E_1}|f(x)|$ je Banachův prostor.

(b) Množina všech funkcí $f\in C_{2\pi}$ takových, že v pevném bodě $x_0\in E_1$ je posloupnost $\{s_n(f,x_0)\}$ omezená, je 1.kategorie.

N á v o d.

(i) Ukažte nejprve, že $s_n(\cdot, x_0)$ jsou spojité lineární funkcionály na prostoru $C_{2\pi}$ a že $\|s_n(\cdot,x_0)\| = \int_0^{2\pi} |\delta_n(x_0 - t)|\,dt$. K tomu ukažte, že existuje posloupnost $\{f_n\} \subset C_{2\pi}$, $\|f_n\| \leq 1$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(t)\,.\,\delta_m(x_0 - t)dt = \int_0^{2\pi} |\delta_m(x_0 - t)|\,dt.$$

(ii) Označte $d_n = \int_0^{2\pi} |\delta_n(t)|\,dt$. Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty$, například tímto způsobem: dokažte, že

$$d_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin (n + 1/2)\,t|}{t}\,dt + r_n, \qquad \text{kde}$$

$$r_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t}\right) |\sin (n + 1/2)t|\,dt \qquad \text{a že}$$

posloupnost r_n je omezená. Dále

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin (n + 1/2)t|}{t}\,dt \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(k-1)\pi}{n+1/2}}^{\frac{k\pi}{n+1/2}} \frac{|\sin(n + 1/2)t|}{t}\,dt \geq$$

$$\geq \int_0^{n\pi} \frac{|\sin \tau|}{\tau}\,d\,.$$ Limita posledního výrazu pro $n \to \infty$ je $+\infty$, a tedy $\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty$.

(iii) Nyní použijte posledního tvrzení z 20.9.

20.11 Cvičení. Dokažte, že existuje funkce $f \in C_{2\pi}$, jejíž Fourierova řada diverguje ve všech bodech nespočetné husté podmnožiny E_1, která je druhé kategorie v E_1.

N á v o d. Označme $\{r_n\}$ posloupnost všech racionálních čísel a $z_m = \{f \in C_{2\pi};\ \sup |s_n(f,r_m)| < +\infty\}$. Ukažte, že $z = \bigcup_{m=1}^{\infty} z_m$ je 1.kategorie (viz 20.10) a tedy existuje $f_0 \in C_{2\pi} \setminus z$. Označte $A = \{x \in E_1;\ \sup |s_n(f_0,x)| = \infty\}$ a dokažte, že A je hustá v E_1 a že je G_δ; k tomu užijte rozkladu $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_{ik}$,

$$A_{ik} = \{x \in E_1 \,;\, |s_n(f_o, x)| > k\}.$$

Je tedy $E_1 \setminus A$ množina F_δ s hustým doplňkem, odkud plyne, že $E_1 \setminus A$ je 1.kategorie.

$\boxed{20.12^{**}}$ <u>Poznámka.</u> Uveďme nyní jeden nedávný a velice důležitý výsledek L. Carlessona (1966); (jeho důkaz je velmi obtížný):

Budiž $f \in L_2$ (L_2 je množina funkcí 2π-periodických pro něž $(\mathcal{L}) \int_0^{2\pi} f^2\, dx < +\infty$). Potom $s_n(f, .) \longrightarrow f$ skoro všude v E_1.

Uvědomte si, že tento výsledek spolu s 20.11 dávají uspokojivou odpověď na otázku, jak může pro funkci $f \in C_{2\pi}$ vypadat množina bodů, pro něž $s_n(f,x)$ nekonverguje k $f(x)$.

T É M A 21

Analytické funkce v E_1

Obsah: A. Funkce třídy $\mathcal{C}^{\infty}$.

B. Analytické funkce.

C. Neanalytické funkce třídy $\mathcal{C}^{\infty}$.

A. FUNKCE TŘÍDY $\mathcal{C}^{\infty}$

21.1 Taylorova řada. Buď f funkce definovaná v okolí bodu $x_0 \in E_1$, mající v bodě x_0 derivace všech řádů - pišme $f \in \mathcal{C}^{\infty}(x_0)$. Definujme Taylorovu řadu funkce f v bodě x_0 vztahem

$$T^f_{x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n ,$$

kde řada napravo je mocninná řada o středu x_0 s poloměrem konvergence $R \geq 0$. Symbolem $\mathcal{C}^{\infty}(G)$ označme ještě systém všech funkcí, majících v každém bodě otevřené množiny G derivace všech řádů.

21.2 Příklad. Najděte funkci $g \in \mathcal{C}^{\infty}(x_0)$ takovou, že $g \notin \mathcal{C}^{\infty}(U(x_0, \delta))$ pro žádné $\delta > 0$.

N á v o d. Nejprve definujte funkci $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{pro } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$

Potom pro $n \geq 1$ a pro $x \in E_1$ položte

$$F_{n+1}(x) = \int_{-\frac{1}{n}}^{x} \int_{-\frac{1}{n}}^{t_n} \dots \int_{-\frac{1}{n}}^{t_2} f(nt_1)\, dt_1 \dots dt_n , \quad F_1(x) = f(x).$$

Hledaná funkce je $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot F_n(x)$ na $(-1,1)$.

21.3* Věta. Nechť $\{a_n\}$ je libovolná posloupnost reálných čísel. Potom existuje funkce $g \in \mathcal{C}^{\infty}(0)$ tak, že $g^{(n)}(0) = a_n$.

N á v o d.

(i) Existuje funkce $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}((-1,1))$ s těmito vlastnostmi:

$0 \le \varphi(x) \le 1$ pro $\frac{\varepsilon}{2} < x < \varepsilon$, $\varphi(x) \equiv 1$ pro $|x| \le \frac{\varepsilon}{2}$

a $\varphi(x) \equiv 0$ pro $|x| \ge \varepsilon$.

(ii) Pro každé $n \in N$, $\varepsilon > 0$ existuje funkce $f \in \mathcal{C}^{\infty}((-1,1))$ tak, že

(α) $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = 1$,

(β) $f^{(k)}(x) \le \varepsilon$ pro $x \in (-1,1)$, $k=0,\ldots,n-1$,

(γ) $f^{(k)}(0) = 0$ pro $k = n+1, n+2, \ldots$.

Funkci f můžete definovat takto:

$$f(x) = \int_0^x \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} \varphi(t_1)dt_1 \ldots dt_n \, ,$$ kde φ je funkce z (i).

(iii) Zvolte $\{\varepsilon_n\}$ posloupnost kladných čísel tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n |a_n| < \infty$.

Funkci f z (ii) příslušnou k n a k $\varepsilon = \varepsilon_n$ označte f_n a položte $g(x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$.

21.4 Příklady. Na následujících příkladech ukažte, jaký může být vztah funkce f a její Taylorovy řady.

(a) Taylorova řada má poloměr konvergence $R = 1$ a $f \in \mathcal{C}^{\infty}(E_1)$.

Návod. Zvolte $x_0 = 0$ a $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ nebo $\operatorname{arctg} x$.

(b) Taylorova řada konverguje pouze v jednom bodě.

Návod.

(i) Položte $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos n^2 x$ pro $x \in E_1$ a $x_0 = 0$. Navíc je $f \in \mathcal{C}^{\infty}(E_1)$. [Viz [G - 0], kap. 6, př. 24].

(ii) Podle 21.3 existuje funkce $f \in \mathcal{C}^{\infty}(0)$ tak, že $T_0^f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

Vše provádějte podrobně!

(c) Taylorova řada má poloměr konvergence $R = +\infty$ a $f \in \mathcal{C}^{\infty}(E_1)$, ale $T_{x_0}^f(x) \ne f(x)$ pro všechna $x \ne x_0$.

Návod. Položte $x_0 = 0$ a $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pro } x \ne 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$

1014-7781

B. ANALYTICKÉ FUNKCE

Poslední příklad nás vede k následující definici.

21.5 **Definice.** Funkce f se nazývá analytická v bodě x_0, jestliže

(i) f má derivace všech řádů v x_0, tj. $f \in \mathcal{C}^\infty(x_0)$,

(ii) existuje $\Delta > 0$ tak, že $T^f_{x_0}(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$.

Symbolem $A(x_0)$ (resp. $A(G)$) označme systém všech funkcí analytických v bodě x_0 (resp. analytických v každém bodě otevřené množiny G).

21.6 **Cvičení.**

(a) Ukažte, že $\mathcal{C}^\infty(x_0) \setminus A(x_0) \neq \emptyset$ (viz 21.4.c).

(b) Nechť funkce f je dána mocninnou řadou s poloměrem konvergence $R > 0$ tj. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ pro $x \in (-R,R)$. Potom

$f \in A(0)$ a $T^f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ pro $x \in (-R,R)$, tedy

$f \equiv T^f_0$ na $(-R,R)$. Dokažte!

Návod. Odvoďte, že $f^{(n)}(0) = a_n . n!$ [viz [D II], kap. 11, § 2]. Jaký je tedy vztah mezi analytickými funkcemi "rozvinutelnými" v mocninnou řadu?

(c)* Dokažte následující Bernsteinovu větu:

Nechť funkce f a všechny její derivace jsou nezáporné v intervalu J. Potom $f \in A(J)$.
Tuto větu aplikujte např. na funkci e^x.

Návod. Buď $a \in J$. Opakovanou integrací per partes dostanete pro zbytek Taylorovy řady v bodě a

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$ Dále substitucí

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}((x-a)\,t + a)(1-t)^{n-1}\,dt.$$

Protože funkce $f^{(n)}$ je neklesající, dostaneme pro $a < x < b$

odhad zbytku $0 \le R_n(x) \le \frac{(x-a)^n}{(b-a)^n} R_n(b) \le \frac{(x-a)^n}{(b-a)^n} f(b)$.

Tedy $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

21.7 Tvrzení.

(a) Nechť $f \in \mathcal{C}^{\infty}(E_1)$, potom množina

$A_f = \{x \in E_1;\ f$ je analytická v bodě $x\}$ je otevřená.

N á v o d viz 21.6.b.

(b) Nechť $f \in A((a,b))$, nechť množina

$B = \{x \in (a,b);\ f(x) = 0\}$ má hromadný bod v (a,b).

Potom $f \equiv 0$ v (a,b).

N á v o d. Buď $C = B' \cap (a,b)$. Je tedy $C \neq \emptyset$. Snadno ukážete, že platí: $[\, x_n \in C,\ x_n \to x \Longrightarrow x \in C \,]$.

Dále odvoďte: je-li $x_0 \in C$, existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0, \delta) \subset C$ např. sporem: Buď k nejmenší přirozené číslo takové, že $a_k \neq 0$, kde $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. Potom

$\frac{f(x)}{(x - x_0)^k} = a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-k}$, kde napravo je funkce různá od nuly v redukovaném okolí bodu x_0, což je spor s předpokladem $x_0 \in C$.

Použitím souvislosti (a,b) dostáváme $C = (a,b)$ a tedy $f \equiv 0$ na (a,b).

C.* NEANALYTICKÉ FUNKCE TŘÍDY $\mathcal{C}^{\infty}$

21.8 Cvičení. Buď $a > 0$, definujme funkci g_a:

$$g_a(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{a^2}{x^2 - a^2} & \text{pro } x \in (-a,a), \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in E_1. \end{cases}$$

Potom $g_a \in \mathcal{C}^{\infty}(E_1)$ a funkce g_a je analytická v každém bodě E_1 s výjimkou bodů $x = -a$, $x = a$. Podrobně dokažte!

21.9 Cvičení. Buď $\varepsilon > 0$. Nechť $\{r_n\}$ je prostá posloupnost všech racionálních čísel v E_1. Položte $G(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \varepsilon 2^{-n-1}, r_n + \varepsilon 2^{-n-1})$ a ukažte, že množina $G(\varepsilon)$ je otevřená a hustá v E_1.

Nechť $G(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n, b_n + a_n)$, kde intervaly $(b_n - a_n, b_n + a_n)$ jsou otevřené, po dvou disjunktní, $a_n > 0$ (lze takto množinu G vyjádřit?). Dále definujte funkci f_{ε}:

$$f_{\varepsilon}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{a_n}(x - b_n)}{n^2 K_n}, \quad x \in E_1, \quad \text{kde} \quad g_a \text{ je funkce}$$

z 21.8, $K_n = \sup \left\{ \left| g_{a_n}^{(r)}(x) \right| ; \quad 0 \le r \le n, \quad x \in E_1 \right\}$.

Z vlastnosti funkce g_a odvoďte:

(a) $0 < K_n < +\infty$; f_{ε} je korektně definována,

(b) $f_{\varepsilon} \ge 0$ na E_1; $f_{\varepsilon}(x) = 0 \iff x \notin G(\varepsilon)$.

(c) $f_{\varepsilon} \in \mathscr{C}^{\infty}(E_1)$,

(d) f_{ε} není identicky nula na žádném otevřeném intervalu: Taylorova řada funkce f_{ε} o středu $x_0 \notin G(\varepsilon)$ je identicky nula.

(e) $f_{\varepsilon} \in A(x_0) \iff x_0 \in G(\varepsilon)$.

21.10 Příklad hledané funkce. Ponechme označení z 21.9. Položte

$\tilde{f}_n = f_{\varepsilon}$, kde $\varepsilon = \frac{1}{n}$,

$A_n^r = \sup \left\{ \left| \tilde{f}_n^{(r)}(x) \right| ; \quad x \in E_1 \right\}$ pro $n = 1, 2, \dots$, $r = 0, 1, \dots$,

$B_n = \max \left\{ A_s^r ; \quad 0 \le r \le n, \ 1 \le s \le n \right\}$ a ukažte, že

$0 < B_n < +\infty$ (volba K_n).

Dále definujte funkci f vztahem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_n(x)}{n^2 . B_n}, \quad x \in E_1 \quad \text{a množinu} \quad G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dokažte, že (a) $f \in \mathscr{C}^{\infty}(E_1)$, (b) $\lambda_1 G = 0$, $E_1 \setminus G$ je hustá v E_1, (c) pro $x_0 \in E_1 \setminus G$ funkce f není analytická v bodě x_0 (uvažte, že f není identicky rovna nule v žádném okolí bodu x_0), (d) f není analytická v žádném bodě E_1 (viz 21.7.a).

21.11 Příklad. Matyáš Lerch uvádí ve své práci "Über die Nichtdifferenzierbarkeit gewisser Functionen" [Crelles Journal 103 (1888), 126-138] jiný příklad funkce, která je z $\mathscr{C}^{\infty}(E_1)$ a není analytická v žádném bodě E_1. Položíme-li pro a liché, $a > 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(a^n x)}{n!}, \quad \text{má funkce } f \text{ požadované vlastnosti.}$$

Dokažte!

N á v o d. Snadno ukážete, že $f \in \mathscr{C}^{\infty}(E_1)$. Definujte

$A = \{a^{-m} b\pi;\ m \in N,\ b \text{ liché}\}$ a ukažte, že pro $x_0 \in A$ Taylorova řada funkce f nekonverguje, např. takto: jestliže $x_0 = a^{-m} b\pi$, je $f^{(2k+1)}(x_0) = 0$,

$$f^{(2k)}(x_0) = (-1)^k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot a^{2kn} \cdot \cos(a^{n-m} b\pi) = (-1)^{k+1} e^{a^{2k}} .$$

Tedy $T^f_{x_0}(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!} (-1)^{k+1} e^{a^{2k}}$. Pokud $x \neq x_0$, pak řada napravo nekonverguje (např. podílové kriterium). Dokažte, že množina $\{a^{-m} b;\ m \in N,\ b \text{ liché}\}$ je hustá v E_1 (pomocí g-adického rozvoje, $g = a$). Tedy i množina A je hustá v E_1 a podle 21.7.a f není analytická v žádném bodě E_1.

21.12 $\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle)$ jako metrický prostor. Pro $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle)$ (v krajních bodech jednostranné derivace!) položte

$$\rho(f, g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{p_i(f-g)}{1 + p_i(f-g)}, \quad \text{kde}$$

$$p_i(F) = \max_{x \in \langle 0,1\rangle} |F^{(i)}(x)|, \quad i = 0,1,\dots .$$

Ukažte, že $\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle)$ je úplný metrický prostor s metrikou ρ.

N á v o d. Obtížnější je pouze důkaz úplnosti: Nechť $\{f_n\}$ je ρ-cauchyovská posloupnost prvků z $\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle)$. Nalezněte funkci $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle)$ tak, aby $f_n^{(i)} \rightrightarrows f^{(i)}$ na $\langle 0,1\rangle$ pro $i=0,1,\dots$. Využijte úplnosti prostoru $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ a větu o derivaci limitní funkce. Nakonec ukažte, že $f_n \longrightarrow f$ v prostoru $(\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle), \rho)$.

21.13 **Lemma.** Pro $a > 0$, $M > 0$ položme

$$\mathcal{H}(M, a) = \{f \in \mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle);\ \text{existuje } x_0 \in \langle 0,1\rangle \text{ tak, že } |f^{(n)}(x_0)| \leq M \cdot a^n \text{ pro všechna } n=0,1,\dots\}.$$

Potom platí

(a) množina $\mathcal{H}(M, a)$ je uzavřená v $\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle)$ pro každé $M, a > 0$,

(b) množina $\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle) \setminus \mathcal{H}(M,a)$ je hustá v $(\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle), \rho)$ pro každé $M > 0$, $a > 0$.

1014-7781

N á v o d.

(a) Nechť $f_k \in \mathcal{H}(M, a)$, $f_k \xrightarrow{\rho} f$. Existují $x_k \in \langle 0,1\rangle$ tak, že $|f_k^{(n)}(x_k)| \leq M a^n$ pro každé n.

Z posloupnosti $\{x_k\}$ vyberte podposloupnost konvergující k $x \in \langle 0,1\rangle$. Pak $|f^{(n)}(x)| \leq M a^n$ pro každé n.

(b) Zvolte $f_0 \in \mathcal{H}(M, a)$, $\varepsilon > 0$. K funkci f_0 nalezněte příslušné x_0 a položte $f(x) = f_0(x) + \alpha \cos \beta (x - x_0)$.

Zřejmě $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle)$. Ukažte, že pro vhodná $\alpha > 0$, $\beta > 0$ je $\rho(f, f_0) < \varepsilon$ a $f \notin \mathcal{H}(M, a)$.

$\boxed{21.14}$ Aplikace metody kategorií. Ukažte, že existuje funkce z $\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle)$, která není v žádném bodě intervalu $(0,1)$ analytická.

N á v o d. Uvažujte metrický prostor $(\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle), \rho)$ a množiny $\mathcal{H}(M, a)$ z 21.12 a 21.13. Položte $\mathcal{H}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{H}(n!, m)$.

Potom $\mathcal{H}^*$ je první kategorie v $(\mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle), \rho)$, tedy existuje funkce $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\langle 0,1\rangle) \setminus \mathcal{H}^*$. Ukažte, že f má požadované vlastnosti. V důkazu neanalytičnosti použijte Lagrangeova tvaru zbytku.

$\boxed{21.15}$ Další problém. Jedním z problémů blízkých tomuto tématu je následující: Je-li f spojitá na E_1, $\langle a,b\rangle \subset E_1$, je funkce $\operatorname{sign} f \in R(\langle a,b\rangle)$?

Ukažte, že

(a) Je-li f analytická v E_1, je $\operatorname{sign} f \in R(\langle a,b\rangle)$ pro každý interval $\langle a,b\rangle$. (Viz 21.7.b.)

(b) Je-li f_ε funkce z odstavce 21.9, $(b - a) > \varepsilon$, není $\operatorname{sign} f_\varepsilon \in R(\langle a,b\rangle)$.

N á v o d. Zřejmě $\operatorname{sign} f_\varepsilon = c_{G(\varepsilon)}$ a $G(\varepsilon)$ je právě množina bodů spojitosti funkce $\operatorname{sign} f_\varepsilon$, přičemž $\lambda_1 G(\varepsilon) < \varepsilon$.

TÉMA 22

Funkce dané trigonometrickými řadami

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

22.1 Úvod. Zopakujte si pojem Fourierovy řady a základní věty, které jste měli. Uvědomte si, že jste mluvili vlastně o Lebesgue-Fourierově řadě, neboť ve vzorcích pro a_n, b_n se vyskytoval Lebesgueův integrál. (Mohli bychom mluvit také o "Newton-Fourierově řadě" funkce f newtonovsky integrovatelné na uzavřeném intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$?) Připomeňte si, že $a_n, b_n \to 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ vždy konverguje (srv. [J II], věta 186).

22.2 Definice. Buď $x \in E_1$, $a_0 \in E_1$, $a_n, b_n \in E_1$ $(n = 1,2,\dots)$.
Řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

budeme nazývat trigonometrickou řadou. Označme ještě jako $\mathcal{T}$ systém všech (konečných) funkcí definovaných na E_1, pro něž existují koeficienty $a_0 \in E_1$, $a_n, b_n \in E_1$ tak, že pro všechna $x \in E_1$ platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

22.3 Poznámka. Uvědomte si rozdíl mezi trigonometrickou a Fourierovou řadou! Každá Fourierova řada je ovšem trigonometrickou řadou; o Fourierově řadě mluvíme vždy jen v souvislosti s nějakou funkcí f a koeficienty jsou dány známými vzorci.
Vzniká však otázka, zda není každá (např. všude konvergentní) trigonometrická řada Fourierovou řadou nějaké funkce.
(Uvědomte si, že (1) je formální řada. Prozatím nic nevíme o její konvergenci.)

1014-7781

22.4 Cvičení. Řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx + \sin nx), \qquad x \in E_1$$
není Fourierovou řadou žádné funkce. Ukažte! (Konverguje vůbec někde tato řada?)

22.5 Cvičení. Řada
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$
diverguje. Dokažte!

N á v o d. Použijte integrální kriterium.

22.6 Příklad. Trigonometrická řada
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$$
konverguje pro každé $x \in E_1$ a není Fourierovou řadou žádné funkce. (Tento příklad pochází od Fatoua.) Dokažte!

N á v o d. K důkazu konvergence užijte tzv. Abelovo kriterium. Např. pro $x \neq 2k\pi$ platí
$$\left| \sum_{k=1}^{m} \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin x/2|}$$
pro všechna n. Dále užijte 22.5 a 22.1.

22.7 Věta. Nechť trigonometrická řada (1) konverguje stejnoměrně v E_1. Potom její součet je spojitá 2π-periodická funkce v E_1 a (1) je Lebesgue-Fourierovou řadou této funkce. (Ukažte, že je také "Riemann-Fourierovou" řadou této funkce.) Pamatujte tedy: Stejnoměrně konvergentní trigonometrická řada je Fourierovou řadou svého součtu. Dokažte!

B. KOEFICIENTY TRIGONOMETRICKÝCH ŘAD

22.8 Lemma. Buď n přirozené číslo, $a_n, b_n \in E_1$, $r_n = (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Potom existuje $\theta_n \in E_1$ tak, že pro každé $x \in E_1$ platí
$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos (nx + \theta_n).$$
Dokažte!

22.9* Věta. (Cantor-Lebesgue). Buď E množina kladné Lebesgueovy míry. Jestliže pro každé $x \in E$ je
$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0,$$

1014-7781

potom $\lim a_n = 0$ a $\lim b_n = 0$.

N á v o d. Můžeme předpokládat, že $E \subset \langle 0, 2\pi \rangle$. Nechť není $r_n \longrightarrow 0$. Potom existuje vybraná posloupnost $\{r_{n_k}\}$, pro niž $r_{n_k} \geq \sigma > 0$. Pro $x \in E$ je potom

$$\cos(n_k x + \Theta_{n_k}) \longrightarrow 0$$

a tedy $\lim\limits_{k \to \infty} \int_E \cos^2(n_k + \Theta_{n_k})\, dx = 0.$

Položme $q_n = \int_E \cos nx\, dx$, $p_n = \int_E \sin nx\, dx$. Je $q_{2n} \longrightarrow 0$, $p_n \longrightarrow 0$, neboť p_n, q_n jsou Fourierovy koeficienty charakteristické funkce množiny E. Platí

$$\int_E \cos^2(nx + \Theta_n)\, dx = \frac{1}{2} \lambda_1 E + (\cos 2\Theta_n)\, q_n - (\sin 2\Theta_n) p_{2n}.$$

Tedy $\int_E \cos^2(nx + \Theta_n) dx \longrightarrow \frac{1}{2} \lambda_1 E > 0$, což je spor.

22.10 **Poznámka.** Jestliže trigonometrická řada konverguje na množině kladné míry, platí $a_n \longrightarrow 0$, $b_n \longrightarrow 0$. Co lze tedy říci o konvergenci trigonometrických řad, pro něž neplatí $a_n^2 + b_n^2 \longrightarrow 0$?

22.11* **Věta.** (Luzin-Denjoy) Buď E množina kladné míry. Jestliže pro každé $x \in E$ řada (1) konverguje absolutně, potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n| \right) < \infty .$$

N á v o d. Stačí ověřit, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$. Pro $x \in E$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos^2(nx + \Theta_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left| \cos(nx + \Theta_n) \right| < \infty .$$

Pro $x \in E$ buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n \cos^2(nx + \Theta_n) = A(x)$.

Funkce A je měřitelná a konečná na E. Existuje $E_o \subset E$, $\lambda_1 E_o > 0$ tak, že A je omezená na E_o. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \int_{E_o} \cos^2(nx + \Theta_n)\, dx = \int_{E_o} A(x) dx < \infty .$$

1014-7781

Podle návodu 22.9 je $\int_{E_0} \cos^2(nx + \Theta_n)dx \longrightarrow \frac{1}{2}\lambda_1 E_0$.

Pro dostatečně velké n_0 je

$$\frac{1}{3}\lambda_1 E_0 \sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} r_n \int_{E_0} \cos^2(nx + \Theta_n)dx < \infty .$$

Odtud vše plyne.

22.12 Poznámka. Jestliže trigonometrická řada konverguje absolutně na množině kladné míry, konverguje absolutně všude v E_1, stejnoměrně v E_1 a je Fourierovou řadou svého součtu. Tento součet je funkce spojitá v E_1. (Vidíte, že absolutní konvergence není pro konvergenci trigonometrických (speciálně Fourierových) řad "typická"). Co lze např. říci o absolutní konvergenci Fourierovy řady nespojité periodické funkce v E_1?

22.13 Poznámka. Předpokládejme, že řada (1) konverguje pro každé $x \in E_1$. Její součet v bodě x označme $f(x)$. (Je tedy $f \in \mathcal{T}$.) Zatím není jasné, zda funkcí f jsou koeficienty a_k, b_k určeny jednoznačně. A jestliže ano, jak se dají "spočíst"? Ukážeme nejprve, že konečnou funkci lze "rozložit" nejvýše v jednu trigonometrickou řadu.

C.* APLIKACE SCHWARZOVY DERIVACE

Připomeňte si pojem druhé Schwarzovy derivace (viz téma 9) a Riemannovy sčítací metody (viz téma 43).

22.14 Definice. Nechť existuje $M \in E_1$ tak, že pro každé $n \in N$ je $|a_n| < M$, $|b_n| < M$. Potom funkci F, definovanou

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} ,$$

nazveme Riemannovou funkcí řady (1).

22.15 Poznámka. Všimněte si, že funkce F vznikla "dvojnásobnou formální integrací" řady (1). Funkce F je spojitá - dokažte!
Každá trigonometrická řada, která konverguje na množině kladné míry, má Riemannovu funkci. (Plyne z 22.9.)

22.16 Věta. (Riemann) Nechť trigonometrická řada (1) s omezenými koeficienty má v bodě x_0 součet $A \in E_1$; nechť F je Riemannova funkce řady (1). Pak existuje $F^{(*)}(x_0)$ a platí $F^{(*)}(x_0) = A$.

N á v o d. Ukažte, že pro $h \neq 0$ je

$$\frac{F(x_0 + 2h) - 2F(x_0) + F(x_0 - 2h)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 .$$

Vidíme, že $F^{(*)}(x)$ je R-součtem řady (1), tedy $F^{(*)}(x_0) = A$ podle 43.15 a 43.16.

22.17 Věta (Cantor). Nechť trigonometrická řada (1) má součet 0 pro každé $x \in E_1$. Potom všechny její koeficienty jsou rovny nule.

N á v o d. Podle 22.9 má řada (1) omezené koeficienty. Buď F její Riemannova funkce. Podle 22.16 je všude $F^{(*)} = 0$ a tedy F je lineární (viz 9.19), $F(x) = Ax + B$.

Odtud pro $x = \pm \pi$ vyjde $A = 0$. Pro $x = 0$, $x = 2\pi$ vyjde $a_0 = 0$. Je tedy

$$-B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} .$$ Řada vpravo konverguje stejnoměrně.

Podle 22.7 je $a_n/n^2 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} (-B) \cos nx \, dx = 0$, tedy $a_n = 0$. Podobně pro b_n.

22.18 Poznámka. Vzniká tedy otázka, jak lze ze součtu všude konvergentní trigonometrické řady "určit" koeficienty. Víme zatím, že jsou určeny jednoznačně (to plyne ihned z 22.17). Jestliže tedy například f je konečná lebesgueovsky integrovatelná funkce na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a Fourierova řada funkce f všude konverguje k f, je tato řada jedinou trigonometrickou řadou, v niž lze f rozložit. Nabízí se tedy otázka, zda součet každé všude konvergentní trigonometrické řady není funkce lebesgueovsky integrovatelná na $\langle -\pi, \pi \rangle$. Jak v dalším uvidíte, odpověď je negativní.

22.19* Věta (Du Bois-Reymond, Vallée Poussin). Jestliže součet f všude konvergentní trigonometrické řady (1) je lebesgueovsky integrovatelný na $\langle -\pi, \pi \rangle$, potom je (1) Lebesgue-Fourierovou řadou f.

N á v o d. Označme $F(x)$ Riemannův součet řady (1). Podle 22.16 je všude $f(x) = F^{(*)}(x)$. Užijte nyní 9.29. Je tedy $F(x) =$

$$= \phi(x) + Ax + B, \quad \text{kde} \quad \phi(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du \right) dt.$$

1014-7781

Je tedy $\phi(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - Ax - B - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$.

Spočtěte, že $\frac{\phi(x + 2H) - 2\phi(x) + \phi(x = 2h)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} +$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 .$$

Podle 22.7 je

$$(*) \qquad \frac{4\, a_n \sin^2 nh}{n^2} = \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx\, dx, \quad \text{kde}$$

$$\varphi(x) = \phi(x + 2h) - 2\phi(x) + \phi(x - 2h).$$

Integrace per partes:

$$\alpha(h) = \int_0^{2\pi} \phi(x + 2h) \cos nx\, dx = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{x+2h} f(u)\,du \right) \sin nx\, dx.$$

Opět per partes

$$\alpha(h) = \frac{1}{n^2} \int_{2h}^{2\pi+2h} f(u)\,du - \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} f(x + 2h) \cos nx\, dx.$$

Ale f je periodická, tedy

$$\alpha(h) = \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} f(x) \left[1 - \cos n(x - 2h) \right] dx.$$

Odtud

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx\, dx = \alpha(h) - 2\alpha(0) + \alpha(-h) = \frac{4 \sin^2 nh}{n^2} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

Odtud a z $(*)$ vidíme, že a_n je Fourierův koeficient funkce f.

Podobně pro a_0, b_n.

22.20 Příklad. Funkce $f : x \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$, $x \in E_1$, není lebesgue-ovsky integrovatelná na $(0, 2\pi)$. Dokažte!

N á v o d. Plyne z 22.6 a z 22.19.

22.21 Poznámka. Všimněte si, že pokud známe větu 22.19, je věta 22.17 snadná. Vysvětlete podrobně!

22.22 Poznámka. Vidíme, že všude konvergentní trigonometrická řada je Lebesgue-Fourierovou řadou svého součtu např. za předpokladu, že tento součet je lebesgueovsky integrovatelný. Obecně však tento předpoklad splněn není (viz 22.20). Můžeme si tedy pamatovat, že Lebesgueův

integrál "neintegruje" součet každé trigonometrické řady. Někoho by mohlo napadnout, zda není možno zobecnit Lebesgueův integrál natolik, aby tvrzení v 22.19 platilo bez dalších omezení na součet konvergentní trigonometrické řady. Tento problém je úspěšně řešen. Takovému integrálu se zpravidla říká M_2-integrál a platí např. tato pěkná věta:
Součet f všude konvergentní trigonometrické řady (1) je M_2-integrovatelný na $(0,2\pi)$ a řada (1) je M_2-Fourierovou řadou svého součtu.

Poznamenejme, že M_2-integrál je opravdu dosti obecný. Např. zahrnuje nejen konvergentní Lebesgueův integrál (pochopitelně - vysvětlete!), ale také integrál Newtonův (dokonce i Perronův). Takto obecná definice nese s sebou ovšem jisté "nerozumné" vlastnosti. Je to vidět, jestliže se zmíníme, že M_2-integrál zahrnuje také tzv. integrál ve smyslu hlavní hodnoty. Neplatí tedy např. věta: Je-li f M_2-integrovatelná na $\langle 0,2\pi\rangle$, je f M_2-integrovatelná na $\langle 0,\pi\rangle$; nelze tedy např. mluvit ani o neurčitém M_2-integrálu.

D. U-MNOŽINY A M-MNOŽINY

22.23 Definice. Buď $E \subset \langle -\pi,\pi\rangle$. Jestliže jsou všechny koeficienty každé trigonometrické řady rovny nule, jakmile má tato řada součet nula pro každé $x \in \langle -\pi,\pi\rangle \setminus E$, nazveme množinu E U-množinou. Je-li E taková, že existuje trigonometrická řada se součtem nula na $\langle -\pi,\pi\rangle \setminus E$, jejíž koeficienty nejsou vesměs nula, potom množinu E nazveme M-množinou. (Z francouzských slov unicité, multiplicité.)

22.24 Cvičení. Prázdná množina je U-množina. Je-li A M-množina, $B \supset A$, potom je B M-množinou. Podmnožina U-množiny je U-množina. Ukažte!

22.25 Věta. Nechť E má kladnou vnitřní míru. Potom E je M-množina.

N á v o d. Buď $F \subset E$ uzavřená množina kladné míry. Fourierova řada charakteristické funkce f množiny F má součet nula v $\langle -\pi,\pi\rangle \setminus F$ (proč?). Z Parsevalovy rovnosti máme

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{1}{\pi}\lambda_1 F > 0 .$$

22.26 Cvičení. Je-li $h > 0$, je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 kh}{k^2} < 3h. \quad \text{Dokažte!}$$

N á v o d. Buď n přirozené, $n - 1 < h^{-1} \leq n$; pak

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2 kh}{k^2} \leq h. \quad \text{Dále}$$

1014-7781

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin^2 kh}{k^2} \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \le 2h.$$

22.26 Cvičení. Jestliže $a_n \to 0$, pak

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin^2 kh}{k^2 h} = 0. \quad \text{Dokažte!}$$

N á v o d. Buď $\varepsilon > 0$, n přirozené, $|a_k| \le \varepsilon$ pro $k \ge n$.

Pak podle 22.27 $\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{\sin^2 hk}{k^2 h} \right| < \frac{\varepsilon}{|h|} 3|h| = 3\varepsilon$.

Pro dost malá h je $\left| \sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\sin^2 kh}{k^2 h} \right| < \varepsilon$.

22.28 Lemma. Nechť pro trigonometrickou řadu je $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Potom pro Riemannovu funkci F této řady platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h} = 0$$

pro každé $x \in E_1$. Dokažte!

N á v o d. Z definice F odvoďte

$$\frac{F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)}{4h} = \frac{a_0 h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\left(\frac{\sin^2 nh}{n^2 h}\right).$$

Nyní užijte 22.27.

22.29 Věta (Cantor). Každá konečná množina je U-množina. Dokažte!

N á v o d. Nechť trigonometrická řada má součet nula v $\langle -\pi, \pi \rangle \setminus \{x_1, \dots x_m\}$. Potom koeficienty konvergují k nule. (Proč?) Podle 22.28 a 22.16 lze užít 9.19 a tedy Riemannova funkce naší řady je lineární. Důkaz dokončíme jako v 22.17.

22.30 Poznámka. Věta 22.29 byla roku 1909 zobecněna Youngem, který ukázal, že spočetná množina je U-množina. Delší čas se zdálo, že každá množina míry nula je U-množina. Ale v roce 1916 sestrojil D.E. Menšov příklad M-množiny míry nula. (Tato množina je samozřejmě nespočetná.)

1014-7781

Vzniklo tedy podezření, zda každá nespočetná množina není M-množina. Z roku 1921 pocházejí však konstrukce dokonalých (a tedy nespočetných) U-množin. Speciálně Cantorovo diskontinuum je U-množina. Dodnes však řada otázek, souvisejících s trigonometrickými řadami není řešena. Opravdovým zájemcům o trigonometrické řady lze doporučit rozsáhlé monografie: Bari N.K.: Trigonometričeskije rjady, Moskva 1961, Zygmund: Trigonometric Series, Cambridge 1959 (existuje nový ruský překlad).

1014-7781

T É M A 23

Další třídy funkcí

Obsah:

A. FUNKCE ABSOLUTNĚ SPOJITÉ

23.1 Definice. Řekneme, že reálná funkce f je absolutně spojitá na $\langle a,b\rangle \subset E_1$, jestliže platí:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \Big(\big(a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq b,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta\big) \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon\Big) .$$

Systém všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$ značíme $AC(\langle a,b\rangle)$.

23.2 Cvičení.

(a) Ukažte, že $AC(\langle a,b\rangle) \subset \mathcal{C}(\langle a,b\rangle) \cap BV(\langle a,b\rangle)$.

(b) Cantorova funkce je spojitá, má variaci konečnou, ale není absolutně spojitá.

(c) Zkoumejte, zda násobek absolutně spojité funkce, součet a součin absolutně spojitých funkcí je absolutně spojitá funkce!

(d)* Je-li f neurčitý Lebesgueův integrál nějaké funkce z $\mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$, je $f \in AC(\langle a,b\rangle)$.

(e) Vyslovte též opačné tvrzení k (d)!

(f) Jaký je vztah mezi lipschitzovskostí funkce a její absolutní spojitostí?

(g)* Je každá funkce omezené konvexity (viz oddíl D) absolutně spojitá?

23.3 Tvrzení. Funkce f definovaná na $\langle a,b\rangle$ je absolutně spojitá, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný systém disjunktních intervalů $\langle a_n,b_n\rangle \subset \langle a,b\rangle$, pro který

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta \quad \text{platí} \quad \sum_{j=1}^{n}|f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon \quad . \text{ Dokažte!}$$

23.4 Cvičení. Ukažte, že funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je absolutně spojitá na $\langle 0,1\rangle$, ale pro každé $\delta > 0$ existuje konečný systém intervalů $\langle a_j,b_j\rangle \subset \langle 0,1\rangle$ tak, že $\sum_{j=1}^{n}|b_j - a_j| < \delta$ a $\sum_{j=1}^{n}|f(b_j) - f(a_j)| > 1$.

Porovnejte tento výsledek s definicí absolutně spojité funkce a s předchozím tvrzením!

23.5* Tvrzení. Funkce f definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$ je lipschitzovská, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný systém intervalů $\langle a_j,b_j\rangle \subset \langle a,b\rangle$, $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$ platí

$$\sum_{j=1}^{n}|f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon \, .$$

Návod. Stačí dokázat, že neexistuje posloupnost $\{x_n\} \subset \langle a,b\rangle$ taková, že $f'(x_n)$ existuje vlastní a $\lim_{n\to\infty}|f'(x_n)| = +\infty$ (proč?). Předpokládejte tedy, že taková posloupnost existuje. Zvolte $h_n \in (0, \frac{1}{2^n})$ tak, že $|f(x_n + h_n) - f(x_n)| \geq n\,h_n$ (přejděte případně k vybrané posloupnosti z posloupnosti $\{x_n\}$). Zvolte n_1 nejmenší přirozené číslo takové, že $n_1h_1 \geq 1$, pak volte n_2 jako nejmenší přirozené číslo takové, že $(n_2 - n_1)h_2 \geq \frac{1}{2^2}$ atd. $\left((n_{k+1} - n_k)\,h_{k+1} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\right)$. Nyní položte $\langle a_i,b_i\rangle = \langle x_1,x_1 + h_1\rangle$ pro $i = 1,2,\dots,n_1$, $\langle a_i,b_i\rangle = \langle x_2,x_2 + h_2\rangle$ pro $i = n_1 + 1,\dots,n_2$ atd. Pak platí

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < +\infty \, , \quad \sum_{i=1}^{\infty}|f(b_i) - f(a_i)| = +\infty \, .$$

Z toho snadno odvodíte spor.

23.6 Příklady.

(a) Sestrojte absolutně spojitou funkci, která není lipschitzovská!

1014-7781

(b)** Existuje absolutně spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$, která není monotonní na žádném podintervalu $\langle 0,1\rangle$.

N á v o d. Jeden příklad takové funkce je podán v 4.21.d. Jinak lze též postupovat takto: Nechť J_k je posloupnost všech racionálních podintervalů $\langle 0,1\rangle$. Buď $M_{k,n} = \left\{ f \in \mathscr{L}(\langle 0,1\rangle);\ \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| \leq n\,|x_1 - x_2| \right.$ pro každá $\left. x_1, x_2 \in J_k \right\}$. Dokažte, že $M_{k,n}$ jsou množiny uzavřené a řídké v $\mathscr{L}(\langle 0,1\rangle)$. Je-li $f \in \mathscr{L}(\langle 0,1\rangle) \setminus \bigcup_{k,n\in N} M_{k,n}$, má neurčitý Lebesgueův integrál k funkci f požadované vlastnosti (z čeho plyne, že $\mathscr{L}_1(\langle 0,1\rangle) \setminus \bigcup_{k,n\in N} M_{k,n} \neq \emptyset$?).

23.7 Poznámka. Uvědomte si znovu rozdíl mezi definicí absolutní spojitosti a podmínkou lipschitzovskosti v tvrzení 23.5. Uvědomte si též, jak velkou chybu byste udělali, kdybyste zaměnili tyto dvě definice!

23.8 Cvičení.

(a) Zjistěte, pro která $\alpha, \beta \in E_1$ je funkce $f : x \longmapsto x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}}$ pro $x \in (0,1\rangle$, $f : x \longmapsto 0$ pro $x \in \langle -1,0\rangle$ absolutně spojitá na $\langle -1,1\rangle$ a pro která $\alpha \in E_1$ má f derivaci na $(-1,1)$!

(b) Ukažte pomocí (a), že existuje funkce definovaná na $\langle -1,1\rangle$, která má na tomto intervalu Newtonův integrál, ale nemá integrál Lebesgueův!

23.9 Cvičení.

(a) Nechť $f \in \mathscr{C}(\langle a,b\rangle) \cap BV(\langle a,b\rangle)$. Nechť f je absolutně spojitá na intervalu $\langle a,c\rangle$ pro každé $c \in (a,b)$. Pak $f \in AC(\langle a,b\rangle)$.

(b) Ukažte na příkladě, že předchozí tvrzení neplatí bez předpokladu konečnosti variace funkce f!

23.10* Tvrzení. Nechť $I \subset E_1$ je otevřený interval a nechť $f : I \longrightarrow E_1$. Pak f je konvexní na I, právě když existuje $c \in I$ a neklesající funkce φ na I tak, že $f(x) = f(c) + \int_c^x \varphi$.

23.11 Cvičení.

(a) Nechť $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow E_1$, $g : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \langle a,b\rangle$, f, g absolutně spojité. Musí pak být $f * g$ absolutně spojitá?

N á v o d. Položte $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0,1 \rangle$, $g(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$ pro $x \in (0,1\rangle$, $g(0) = 0$.

(b) Je-li v (a) f lipschitzovská, je $f * g$ absolutně spojitá.

(c) Je-li v (a) g lipschitzovská, nemusí $f * g$ být absolutně spojitá.

(d) Stačí v (a) doplnit předpoklad monotonie g k tomu, aby $f * g$ byla absolutně spojitá?

B.* KMITAJÍCÍ FUNKCE

23.12 **Definice.** Nechť f je reálná funkce definovaná na intervalu $I \subset E_1$. Řekneme, že f je *kmitající* na I, jestliže pro každé $x \in I$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $y \in I$ tak, že $0 < |x - y| < \varepsilon$ a $f(y) = f(x)$.

23.13 **Příklady.**

(a) Dirichletova funkce je kmitající.

(b) Nechť f je libovolná funkce definovaná na intervalu $I \subset E_1$. Jestliže pro každý interval $J \subset I$ platí $f(J) = E_1$, je funkce f kmitající na I. Speciálně funkce f, g z 4.26 jsou kmitající na E_1.

(c) Funkce $f: I \longrightarrow E_1$ je kmitající na I, právě když pro každé $t \in f(E_1)$ $\{x \in I;\ f(x) = t\}$ nemá izolovaný bod.

(d) Je-li $f: I \longrightarrow E_1$ kmitající na I, $g: f(E_1) \longrightarrow E_1$ libovolná, je $g * f$ kmitající na I.

(e) Je-li $f: I \longrightarrow E_1$ kmitající na I, $g: J \longrightarrow I$ spojitá a monotonní na J, je $f * g$ kmitající na J.

(f) Je-li $f: I \longrightarrow E_1$ kmitající na I, $g: J \longrightarrow I$ neklesající na J a je-li f konstantní na každém intervalu $\langle g(x-), g(x+)\rangle$ (kde $x \in J$ je bod nespojitosti funkce g), je funkce $f * g$ kmitající na J.

23.14 **Poznámka.** Libovolná funkce $f: E_1 \longrightarrow E_1$ je součtem dvou kmitajících funkcí a je limitou posloupnosti funkcí kmitajících na E_1.

N á v o d. Použijte 23.13.b, 11.7.c, 11.8.b.

23.15 **Tvrzení.** Systém všech spojitých kmitajících funkcí na $\langle 0,1 \rangle$ je první kategorie v $\mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle)$.

N á v o d. Použijte 20.6.b.

Tedy důkaz existence spojité nekonstantní kmitající funkce nemůže být proveden metodou kategorií, musíme se proto pokusit o sestrojení této funkce.

$\boxed{23.16}$ **Věta.** Existuje spojitá nekonstantní kmitající funkce na $\langle 0,1\rangle$.

N á v o d. Nechť $G_n \subset (0,1)$ jsou takové otevřené množiny, že

(i) $G_1 = \bigcup_{i=1}^{3} (a_i,b_i)$, $a_1 = 0$, $b_3 = 1$, $b_i < a_{i+1}$ $(i = 1,2)$.

(ii) Jsou-li $a,b \subset \overline{G_n}$, $a < b$, $(a,b) \cap G_n = 0$, lze psát

$$(a,b) \cap G_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{5} (\alpha_i, \beta_i), \quad a < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \ldots < \beta_5 < b,$$

$$\frac{a+b}{2} \in (\alpha_3, \beta_3).$$

(iii) $G_n \subset G_{n+1}$.

Položte: $f_1(x) = 0$ pro $x \in \langle a_i,b_i\rangle$, $i=1,3$

$f_1(x) = 1$ pro $x \in \langle a_2,b_2\rangle$

f_1 je lineární na $\langle b_1,a_2\rangle$ a na $\langle b_2,a_3\rangle$.

Indukcí definujte posloupnost $\{f_n\}$ tak, že $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ pro $x \in \overline{G_n}$,

jsou-li $a,b \in \overline{G_n}$, $(a,b) \cap G_n = \emptyset$, platí

$f_{n+1}(x) = f_n(a)$ pro $x \in \langle \alpha_2, \beta_2\rangle$,

$f_{n+1}(x) = f_n(b)$ pro $x \in \langle \alpha_4, \beta_4\rangle$,

$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(f_n(a) + f_n(b))$ pro

$x \in \langle \alpha_1, \beta_1\rangle \cup \langle \alpha_3, \beta_3\rangle \cup \langle \alpha_5, \beta_5\rangle$, f_{n+1} je lineární na intervalech $\langle a, \alpha_1\rangle$, $\langle \beta_5, b\rangle$ a na každém intervalu $\langle \beta_i, \alpha_{i+1}\rangle$, $(i = 1,2,3,4)$.

Dokažte, že existuje spojitá funkce $f : \langle 0,1\rangle \longrightarrow E_1$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle 0,1\rangle$. Ukažte, že f má požadované vlastnosti (během důkazu si kreslete obrázek!).

$\boxed{23.17}$ **Poznámka.** Vhodnou volbou množin G_n v důkazu 23.16 (iii) můžete docílit toho, že $f' = 0$ s.v.

23.18 **Věta.** Nechť f je spojitá nekonstantní kmitající funkce na $\langle a,b\rangle$. Pak $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = +\infty$.

N á v o d.

(a) Předpokládejte, že $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < +\infty$. Nechť $\varphi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Nechť g je taková funkce definovaná na $I = \langle 0, \overset{b}{\underset{a}{V}} f\rangle$, že $\varphi(g(t)) = t$ pro všechna $t \in I$. Pak funkce $h = f * g$ je absolutně spojitá (dokonce lipschitzovská, jak snadno zjistíme z definice), podle 23.13(f) je h kmitající na I. Jelikož v každém bodě $x \in I$, ve kterém existuje $h'(x)$, je $h'(x) = 0$, je funkce h konstantní na I. To je ovšem spor.

(b) (Jiný návod.) Nechť $\tau(y)$ (pro $y \in E_1$) je počet prvků množiny $\{x \in \langle a,b\rangle;\ f(x) = y\}$ (tj. $\tau(y) \in N$ nebo $\tau(y) = +\infty$ – τ je tzv. Banachova indikatrix funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$). Pak $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y)\,dy$ (viz R. Sikorski, Funkcje rzeczywiste I, Warszawa 1958 nebo [Nat]), z toho tvrzení snadno plyne.

23.19 **Definice.** Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $x \in E_1$. Řekneme, že f je kmitající v bodě x (resp. kmitající zprava, resp. kmitající zleva), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $y \in E_1$ tak, že $0 < |y-x| < \varepsilon$ (resp. $0 < y-x < \varepsilon$, resp. $0 < x-y < \varepsilon$) a $f(y) = f(x)$.

23.20 **Cvičení.**

(a) Funkce f je kmitající v bodě x, právě když je kmitající v bodě x buď zprava nebo zleva.

(b) Zkoumejte vztah lokální definice kmitající funkce podle 23.19 a globální definice kmitající funkce podle 23.12.

(c) Existuje neklesající funkce f na E_1, která je v každém bodě $x \in E_1$ kmitající zprava.

23.21 **Tvrzení.** Nechť f je spojitá funkce na intervalu I. Pak na každém intervalu $J \subset I$, na němž není f konstantní, existuje nespočetně mnoho bodů, v nichž není f kmitající zprava.

N á v o d. Je-li $y \in E_1$ takové, že $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ a je-li $x \in J$ takový, že $f(x) = y$ a pro každé $t > x$, $t \in J$ platí $f(t) \neq x$, dokážete snadno, že f není v bodě x kmitající zprava.

Srovnejte toto tvrzení s výsledky 23.16.

23.22 Tvrzení. Nechť f je funkce první Baireovy třídy kmitající zprava i zleva v každém bodě na intervalu $I \subset E_1$. Pak f je darbouxovská na I.

Návod. Použijte 24.6(e).

23.23 Tvrzení. Nechť f je darbouxovská na otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Nechť v bodě $x_0 \in I$ není funkce f polospojitá zprava (ani shora, ani zdola). Pak f je kmitající v bodě x_0 zprava.

23.24?? Problémy.

(a) Existuje nekonstantní darbouxovská funkce první Baireovy třídy, která je kmitající v každém bodě E_1 zprava i zleva?

(b) Je každá spojitá funkce součtem dvou spojitých kmitajících funkcí?

(c) Je každá spojitá funkce limitou posloupnosti spojitých kmitajících funkcí?

C.** FUNKCE SKORO VŠUDE KONSTANTNÍ

23.25 Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na E_1. Řekneme, že f je skoro všude konstantní, jestliže existuje $c \in E_1$ tak, že $f(x) = c$ skoro všude v E_1.

23.26 Cvičení. Dokažte, že funkce g, h z 4.26 jsou skoro všude konstantní.

Návod. Dokazujte, že $g(x) = 0$ s.v., $h(x) = 0$ s.v. K tomu stačí dokázat, že pro každé $k \in N$ a libovolnou k-tici $a_0, a_1, \dots, a_k$ (kde $a_i = 0$ nebo $a_i = 1$) množina těch $x \in \langle 0,1)$, pro něž dvojkový rozvoj x má tvar $0,a_0a_1\dots a_k0b_00b_10b_2\dots$, (kde $b_0, b_1, \dots$ je buď 0 nebo 1), má míru nula.

23.27 Příklad. Je-li $H \subset E_1$ libovolná neprázdná množina, existuje s.v. konstantní funkce φ definovaná na E_1 taková, že pro každý interval $I \subset E_1$ je $\varphi(I) = H$.

Návod. Vhodně předefinujte některou z funkcí z 23.26.

23.28 Lemma.

(a) Nechť $G \subset E_2$ je neprázdná otevřená množina, která není hustá v E_2. Nechť pro každé $x \in E_1$ existuje $t \in E_1$ tak, že $[x,t] \notin \mathrm{hr}\, G$. Pak existuje interval $J \subset E_1$ a čísla $a, b \in E_1$,

$a < b$, $[a] = [b]$ nebo $[a] = [b-1]$, tak, že platí buď

(i) $J \times \{a\} \subset G$, $(J \times \{b\}) \cap G = \emptyset$, nebo

(ii) $J \times \{a\} \subset \operatorname{ext}(G)$, $(J \times \{b\}) \cap \operatorname{ext} G = \emptyset$

(kde $\operatorname{ext}(A) = \operatorname{Int}(E_2 \setminus \bar{A})$).

N á v o d. Nejprve dokažte, že existuje $x \in E_1, y_1, y_2 \in E_1, y_1 \neq y_2$ tak, že $[x, y_1] \notin \operatorname{ext}(G)$, $[x, y_2] \in \operatorname{ext}(G)$. Je-li $y_1 < y_2$, ukažte, že existuje $I \subset E_1$ a reálná čísla $\alpha, \beta, \alpha < \beta$ tak, že $I \times \{\alpha\} \subset G$, $I \times \{\beta\} \subset \operatorname{ext}(G)$. Položte $b = \sup \{t \in \langle \alpha, \beta \rangle$; existuje interval $L \subset I$ tak, že $L \times \{t\} \subset G\}$; nyní již snadno naleznete číslo a a interval J tak, aby bylo splněno (i). Je-li $y_1 > y_2$, ukažte obdobně, že platí (ii).

(b) Nechť g,h jsou funkce z 23.26, nechť $y \in E_1$. Buď f libovolná funkce definovaná na E_1, že je $f(x) = h(x)$ pro $x \in g^{-1}(y)$. Pak graf (f) je souvislá množina hustá v E_2.

N á v o d. Hustota plyne z toho, že platí $h(g^{-1}(y) \cap (x_1, x_2)) = E_1$ pro libovolná $x_1, x_2 \in E_1$, $x_1 < x_2$. Souvislost dokazujte sporem. Je-li $A \subset$ graf (f) uzavřená i otevřená (v graf (f)), existuje $G \subset E_2$ otevřená množina tak, že $A = G \cap$ graf (f). Ukažte, že G splňuje předpoklady (a); nechť J je interval v E_1, $a, b \in E_1$ z tvrzení (a). Označme $H = G$, nastal-li případ (i), $H = \operatorname{ext}(G)$ v případě (ii). Zvolte dále celé číslo A. Nezáporná celá čísla k, m, n, p, q, $q > 2$, čísla $a_i = 0,1$, $b_j = 0,1$ ($i = 0,1,2,\ldots,k$, $j = 1,3,5,\ldots$) tak, aby platilo:

(α) Množina M všech čísel tvaru $A + 0{,}a_0 a_1 \ldots a_k \overbrace{011\ldots1}^{m}\overbrace{011\ldots1}^{n}\overbrace{011\ldots1}^{p}\overbrace{011\ldots1}^{q}0 b_0 0 b_1 0 b_2 \ldots$ (kde $b_i = 0,1$ pro $i = 0,2,4,\ldots$) je podmnožinou J.

(β) Pro každé $x \in M$ je $g(x) = y$, $h(x) \in \langle [a], [a] + 1 \rangle$.

Nechť $N = \{x \in M;\ [x, h(x)] \in H \cap (J \times \langle a, b \rangle)\}$. Dokažte, že $N \neq \emptyset$ a že existuje $x_0 \in N$ tak, že $h(x_0) = \sup_{x \in N} h(x)$.

(Uvědomte si, že pro žádné $x \in E_1$ není $[x, f(x)] \in \operatorname{hr}(G)$).

Ale snadno naleznete $x \in N$ tak, že $h(x) > h(x_0)$, což je hledaný spor.

(c) Funkce h z 23.26 má souvislý graf.

$\boxed{23.29}$ **Věta.** Nechť f je libovolná funkce definovaná na E_1. Pak existuje posloupnost funkcí $\{f_n\}$ definovaných na E_1 tak, že

(i) graf (f_n) je hustý v E_2,

(ii) graf (f_n) je souvislý,

(iii) pro každé $n \in N$ je $f_n = f$ s.v.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro všechna $x \in E_1$.

N á v o d. Položte $f_n(x) = f(x)$ pro $x \notin g^{-1}(n)$,
$f_n(x) = h(x)$ pro $x \in g^{-1}(n)$, jestliže h je funkce z 23.26.

Srovnejte tento výsledek s tvrzením 11.8.b.

$\boxed{23.30}$ **Věta.** Nechť f je libovolná funkce definovaná na E_1. Pak existují funkce f_1, f_2 definované na E_1 takové, že platí:

(i) graf (f_i) je hustý v E_2,

(ii) graf (f_i) je souvislý,

(iii) $f_1 = f$ s.v., $f_2 = 0$ s.v.,

(iv) $f = f_1 + f_2$.

N á v o d. Položte $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = 0$ pro $x \notin g^{-1}(1) \cup g^{-1}(-1)$,
$f_1(x) = h(x)$, $f_2(x) = f(x) - h(x)$ pro $x \in g^{-1}(1)$,
$f_1(x) = f(x) - h(x)$, $f_2(x) = h(x)$ pro $x \in g^{-1}(-1)$.

Srovnejte tento výsledek s tvrzením 11.7.c.

D.* FUNKCE OMEZENÉ KONVEXITY

$\boxed{23.31}$ **Definice.** Nechť f je funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ je dělení intervalu $\langle a,b\rangle$.
Pro každé $j = 1,2,\dots,n$ označme

$$\Box f_j = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}$$

a položme $\overset{b}{\underset{a}{K}} f = \sup \sum_{j=1}^{n} |\Box f_j - \Box f_{j-1}|$,

1014-7781

kde supremum se bere přes všechna dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Číslo $\overset{b}{\underset{a}{K}} f$ se nazývá konvexitou funkce f. Je-li $\overset{b}{\underset{a}{K}} f < +\infty$, říkáme, že funkce f má omezenou konvexitu. Systém všech funkcí omezené konvexity značíme $BC(\langle a,b\rangle)$.

23.32 Cvičení.

(a) Sestrojte funkci omezené konvexity, která není konvexní na $\langle a,b\rangle$.

(b) Spočtěte konvexitu lineární funkce.

23.33 Tvrzení. Nechť $f\in BC(\langle a,b\rangle)$. Potom v každém bodě $x\in\langle a,b)$ existuje $f'_+(x)$. Funkce f'_+ je omezená na (a,b). Dále v každém bodě $x\in(a,b\rangle$ existuje $f'_-(x)$ a funkce f'_- je omezená na (a,b).

23.34 Cvičení. Dokažte, že každá funkce omezené konvexity je absolutně spojitá na $\langle a,b\rangle$ a má konečnou derivaci všude v $\langle a,b\rangle$ s výjimkou snad spočetné množiny.

23.35 Lemma. Nechť $c\in(a,b)$. Potom $f\in BC(\langle a,b\rangle)$, právě když $f\in BC(\langle a,c\rangle)$ a $f\in BC(\langle c,b\rangle)$. Je-li $f\in BC(\langle a,b\rangle)$, potom platí

$$\overset{b}{\underset{a}{K}} f = \overset{c}{\underset{a}{K}} f + \overset{b}{\underset{c}{K}} f + \left|f'_+(c) - f'_-(c)\right| .$$

23.36 Cvičení. Je-li f konvexní na $\langle a,b\rangle$, potom

$$\overset{b}{\underset{a}{K}} f = f'_-(b) - f'_+(a) .$$

23.37 Věta. Nechť $f\in BC(\langle a,b\rangle)$. Označme $f^*: x\longmapsto f'_-(x)$, $x\in(a,b\rangle$, $f^*(a) = f'_+(a)$. Potom $\overset{b}{\underset{a}{K}} f = \overset{b}{\underset{a}{V}} f^*$. Dokažte!

23.38 Problém. Pro $f\in BC(\langle a,b\rangle)$ položme

$$\|f\| = \overset{b}{\underset{a}{K}} f + \left|f'_+(a)\right| + \left|f(a)\right| .$$

Rozhodněte, zda $\|\cdot\|$ je normou na prostoru $BC(\langle a,b\rangle)$. Pokud je to norma, zkoumejte, zda $BC(\langle a,b\rangle)$ je Banachův prostor.

23.39 Poznámka. V souvislosti s pojmem omezené konvexity lze čtenáři doporučit články publikované např. v časopisech: Bull.Amer.Math.Soc. 75 (1969), 568-572, Monatshefte f. Math. 74 (1970), 389-397, kde může nalézt další výsledky.

1014-7781

E. FUNKCE MAJÍCÍ PRIMITIVNÍ

23.40 Definice. Označme $\mathcal{P}$ systém všech funkcí definovaných na E_1 a majících na E_1 primitivní funkci. Dále označme $\mathcal{P}_0$ systém všech lokálně omezených funkcí z $\mathcal{P}$.

23.41 Cvičení.

(a) Ukažte, že $\mathcal{C}(E_1) \subset \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$. Jsou tyto inkluze "ostré"?

(b) Buď $f : x \longrightarrow \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
Potom $f \in \mathcal{P}_0$, $f^2 \notin \mathcal{P}_0$.

(c) Platí implikace: $f_n \in \mathcal{P}_0$, $f_n \longrightarrow f$ (resp. $f_n \rightrightarrows f$) $\Rightarrow f \in \mathcal{P}$?

23.42 Poznámka. Z 23.41.b plyne, že pro dvě funkce $f, g \in \mathcal{P}$ nemusí být $f.g \in \mathcal{P}$. Naskýtá se tedy otázka, jaké další požadavky máme klást na funkce f, g, aby již platilo $f.g \in \mathcal{P}$. Problém lze formulovat obecněji; můžeme při dané funkci Φ definované na E_n zkoumat požadavky na funkce $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{P}$, aby platilo $\Phi(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{P}$.

23.43* Cvičení.

(a) Nechť Φ je funkce definovaná na E_n taková, že pro každé $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(E_1)$ je $\Phi(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{P}$. Pak Φ je spojitá.

N á v o d. Je-li $x^{(k)} = [x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}] \longrightarrow [x_1, \dots, x_n] = x$, $\Phi(x^{(k)}) \longrightarrow \alpha \neq \Phi(x)$, položte: $f_i(t) = x_i$ pro $t \notin (0, \frac{1}{2})$ a pro t tvaru $\frac{1}{2^k}$, $f_i(t) = x_i^{(k)}$ pro $t \in \langle \frac{1}{2^{k+1}} + \alpha_k, \frac{1}{2^k} - \alpha_k \rangle$, f_i je lineární na intervalech tvaru

$$\langle \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}} + \alpha_k \rangle, \langle \frac{1}{2^k} - \alpha_k, \frac{1}{2^k} \rangle,$$

kde α_k jsou volena tak, aby $0 < \alpha_k < \frac{1}{3} \frac{1}{2^k}$ a aby

$$\left| \int_{\frac{1}{2^{k+1}}} \Phi(f_1, \dots, f_n) \right| < \frac{1}{2^{2k}}, \left| \int_{\frac{1}{2^k} - \alpha_k}^{\frac{1}{2^k}} \Phi(f_1, \dots, f_n) \right| < \frac{1}{2^{2k}} .$$

1014-7781

(b) Nechť Φ je libovolná funkce definovaná na E_1 taková, že pro každé $f \in \mathcal{P}_0$ je $\Phi(f) \in \mathcal{P}$. Pak Φ je lineární na E_1.

N á v o d. Podle (a) je Φ spojitá na E_1. Jestliže pro nějaké $x \in E_1$, $h \neq 0$ je $\Phi(x+h) + \Phi(x-h) - 2\Phi(x) \neq 0$, položte $f(t) = x$ pro $t \notin (0, \frac{1}{2})$ a pro t tvaru $\frac{1}{2^k}$, $f(t) = x + h$ pro $t \in \langle \frac{1}{2^{k+1}} + \alpha_k, \frac{1}{2^k} - \alpha_k \rangle$, k liché, $f(t) = x - h$ pro $t \in \langle \frac{1}{2^{k+1}} + \alpha_k, \frac{1}{2^k} - \alpha_k \rangle$, k sudé, f je lineární na intervalech $\langle \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}} + \alpha_k \rangle, \langle \frac{1}{2^k} - \alpha_k, \frac{1}{2^k} \rangle$, kde $\{\alpha_k\}$ je volena tak, aby $0 < \alpha_k < \frac{1}{2^{2k}}$ a aby

$$\left| \int_{2^{-(k+1)}}^{2^{-(k+1)}+\alpha_k} \Phi(f) \right| < \frac{1}{2^{2k}}, \quad \left| \int_{2^{-k}-\alpha_k}^{2^{-k}} \Phi(f) \right| < \frac{1}{2^{2k}}$$

a dokažte, že $f \in \mathcal{P}_0$, $\Phi(f) \notin \mathcal{P}_0$. Podle 18.4 je Φ lineární na E_1.

(c) Platí dokonce tvrzení: Nechť Φ je libovolná funkce definovaná na E_n taková, že pro každá $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{P}_0$ je $\Phi(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{P}$. Pak Φ je lineární.

N á v o d. Užitím (b) dokažte, že Φ je lineární po každé přímce. Z toho již tvrzení snadno plyne.

23.44 Cvičení.

(a) Nechť f je funkce definovaná na otevřeném intervalu $I \subset E_1$, nechť $\varepsilon > 0$. Řekneme, že funkce f má na intervalu I primitivní funkci s přesností ε, existuje-li funkce g mající na I primitivní funkci tak, že $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in I$.

(b) Nechť f je funkce definovaná na intervalu E_1. Nechť pro každé $\varepsilon > 0$ má f primitivní funkci s přesností ε. Pak f má primitivní funkci. Dokažte!

(c) Nechť φ_1, φ_2 jsou libovolné funkce definované na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$. Nechť $\varphi_1(x_1) \neq \varphi_2(x_2)$ a nechť pro libovolné

1014-7781

$t \in \langle x_1, x_2 \rangle$ platí $|\varphi_1(x_1) - \varphi_1(t)| < \frac{1}{2} |\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)|$, $|\varphi_2(x_2) - \varphi_2(t)| < \frac{1}{2} |\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)|$. Nechť dále funkce φ_1 je spojitá v bodě x_1 zprava a funkce φ_2 v bodě x_2 zleva. Pak existuje spojitá funkce ψ definovaná na $\langle x_1, x_2 \rangle$ taková, že $\psi(x_1) = \varphi_1(x_1)$, $\psi(x_2) = \varphi_2(x_2)$. Dokažte!

(d) Nechť I_1, I_2 jsou otevřené intervaly, nechť $I = I_1 \cup I_2$ je interval. Nechť f je funkce definovaná na I, která má primitivní funkci s přesností ε jak na I_1, tak na I_2. Pak f má primitivní funkci s přesností ε na I. Dokažte!

N á v o d. Nechť φ_1, φ_2 jsou příslušné funkce. Jestliže existuje $x \in I_1 \cap I_2$ tak, že $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ je důkaz snadný. Pokud takové x neexistuje, nalezněte vhodný interval $\langle x_1, x_2 \rangle \subset I_1 \cap I_2$ tak, že jsou splněny předpoklady (c). Hledanou funkci nyní získáme kombinací funkcí φ_1, φ_2, ψ z (c).

(e) Nechť f je funkce definovaná na E_1, nechť $\varepsilon > 0$. Nechť pro každé $x \in E_1$ existuje okolí $U(x)$ tak, že f má primitivní funkci s přesností ε na $U(x)$. Potom f má primitivní funkci s přesností $\varepsilon > 0$ na E_1.

N á v o d. Z tvrzení (d) a Borelovy věty snadno odvodíte, že f má primitivní funkci s přesností ε na libovolném omezeném intervalu v E_1. Nechť φ_n jsou funkce z definice primitivní funkce s přesností ε na intervalu $(n, n+2)$ (n celé). Nyní stačí provést stejné "napojování" jako v důkazu tvrzení (d) na každém intervalu $(n, n+1)$ (pro funkce φ_{n-1}, φ_n).

23.45 Věta. Nechť $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{P}_0$ a nechť pro každé $t \in E_1$ je nejvýše jedna z funkcí $f_1, \ldots, f_n$ nespojitá v bodě t. Potom $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \in \mathcal{P}_0$.

N á v o d. Pro libovolné $\varepsilon > 0$, $x \in E_1$ existuje okolí $U(x)$ tak, že $n-1$ z funkcí $f_1, \ldots, f_n$ lze na tomto okolí "nahradit konstantou". Tímto nahrazením snadno sestrojíte k f primitivní funkci s přesností ε na $U(x)$. Nyní stačí použít 23.44.e, 23.44.b.

23.46 Cvičení. Ukažte, že neplatí tvrzení:
Je-li $h \in \mathcal{C}(E_1)$, $g \in \mathcal{P}$, je $h.g \in \mathcal{P}$.

N á v o d. Nechť f je funkce z 23.41.b. Položte $h(x) = x^{\frac{1}{2}} f(x)$, $g(x) = x^{-\frac{1}{2}} f(x)$. (K důkazu $g \in \mathcal{P}$ derivujte funkci $x^{\frac{3}{2}} f(x)$.)

23.47* Cvičení. Buď $\mathcal{A}_0$ systém všech lokálně omezených aproximativně spojitých funkcí na E_1 (viz téma 8.C). Ukažte, že

(a) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{P}_0$,

(b) je-li Φ spojitá v E_n, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}_0$, potom $\Phi(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{A}_0$.

F. FUNKCE S KONEČNOU γ-VARIACÍ

V tomto oddíle poukážeme na jedno nepatrné zobecnění definice funkcí s konečnou variací.

23.48 Definice (Young). Buď $\gamma > 0$. Řekneme, že funkce f definovaná na $\langle a,b \rangle$ má konečnou γ-variaci, jestliže číslo

$$\overset{b}{\underset{a}{V_\gamma}} f = \sup_D \left\{ \left[\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})|^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}} ; D \equiv \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \} \right\}.$$

je konečné. Systém všech funkcí s konečnou γ-variací na $\langle a,b \rangle$ označme symbolem $BV_\gamma(\langle a,b \rangle)$.

23.49 Cvičení.

(a) Je-li $\gamma \in (0,1)$ a $f \in BV_\gamma(\langle a,b \rangle)$ nekonstantní na $\langle a,b \rangle$, potom existuje v intervalu $\langle a,b \rangle$ bod nespojitosti funkce f. Dokažte!

N á v o d. Nechť f nabývá maxima v bodě c_1 a minima v bodě c_2, nechť např. $c_2 < c_1$. Uvažujte body $x_k \in \langle a,b \rangle$ $(k=1,\dots,n)$ takové, že $f(x_k) = f(c_2) + \frac{c}{n} k$, kde $c = f(c_1) - f(c_2)$.

(b) Nechť f splňuje předpoklady (a). Potom není f na žádném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a,b \rangle$ darbouxovská, pokud není na tomto intervalu konstantní. Dokažte!

N á v o d. Plyne z (a).

(c)(??) Může mít funkce f z (a) bod nespojitosti 2. druhu? Porovnejte s případem $\gamma = 1$!

23.50 Poznámka. Youngova definice 23.48 není jediným možným zobecněním definice funkcí s konečnou variací. Zájemce o další vlastnosti třídy BV_{γ} ($\langle a,b\rangle$) odkazujeme na literaturu Rjazanov, Funkcii klass V_{γ}, Vestnik Moskov. Univ. 23 (1968), 36-39.

G. INTEGROVATELNÉ FUNKCE

23.51 Poznámka. Různé třídy integrovatelných funkcí ani žádný integrál zde nebudeme konstruovat. Odkazujeme na skripta J. Lukeš, Teorie míry a integrálu I, kde je též uvedena řada problémů k této tematice. Upozorňujeme pouze na označení, kterého užíváme:

$R(\langle a,b\rangle)$ je třída riemannovsky integrovatelných funkcí na $\langle a,b\rangle$,

$(R)\int_a^b f$ je Riemannův integrál funkce f,

$N((a,b))$ systém newtonovsky integrovatelných funkcí,

$(N)\int_a^b f$ je Newtonův integrál,

$\mathcal{L}(M)$ je systém lebesgueovsky integrovatelných funkcí na množině M a

$(L)\int_M f$ je Lebesgueův integrál.

T É M A 24

Vztah funkce a grafu funkce

Obsah: A. Vzdálenost grafů funkcí.

B. Množinové vlastnosti grafů funkcí.

A. VZDÁLENOST GRAFŮ FUNKCÍ

24.1 Cvičení. Pro neprázdné podmnožiny A,B v E_2 položíme

$d(A,B) = \max\left\{\sup_{x\in A} q(x,B),\ \sup_{x\in B} q(x,A)\right\}$, kde q je metrika v E_2.

Dokažte:

(a) d není metrika ani na systému všech neprázdných podmnožin E_2 ani na systému všech neprázdných omezených podmnožin E_2.

(b) d je metrika na systému všech neprázdných kompaktních podmnožin E_2.

24.2 Cvičení.

(a) Nechť φ_n, φ jsou reálné funkce definované na intervalu $I\subset E_1$, nechť $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$. Pak $d\,(\text{graf}\,(\varphi_n), \text{graf}\,(\varphi)) \to 0$. (Graf funkce $f : M \to M_1$ je množina $\left\{[x,y] \mid x\in M,\ y = f(x)\right\}$). Platí obdobné tvrzení pro bodovou konvergenci?

(b) Existují dvě různé funkce φ, ψ definované na E_1 tak, že $d(\text{graf}\,(\varphi), \text{graf}\,(\psi)) = 0$. Vyveďte z toho, že tvrzení (a) nelze obrátit.

N á v o d. Položte $\varphi(x) = \psi(x) = \sin\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 1$.

(c) Je-li φ spojitá funkce na intervalu $I\subset E_1$, ψ libovolná funkce definovaná na I a je-li $d(\text{graf}\,(\varphi), \text{graf}\,(\psi)) = 0$, je $\varphi = \psi$.

(d) Nechť φ je darbouxovská funkce na intervalu $I\subset E_1$ taková, že pro libovolnou ψ definovanou na I platí: Je-li $d\,(\text{graf}\,(\varphi), \text{graf}\,(\psi)) = 0$, je $\varphi = \psi$. Pak φ je spojitá.

N á v o d. Kdyby φ byla nespojitá v bodě x_0, bylo by možno volit $\psi(x) = \varphi(x)$ pro $x \neq x_0$, $\psi(x_0) = \varphi(x_0) + \eta$, kde η je vhodné reálné číslo.

(e) Ukažte, že tvrzení (d) neplatí bez předpokladu darbouxovskosti!

(f) Nechť φ_n, φ jsou spojité funkce na kompaktním intervalu $I \subset E_1$. Nechť $d(\text{graf}(\varphi_n), \text{graf}(\varphi)) \to 0$. Pak $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$.

N á v o d. Buď $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby pro $x_1, x_2 \in I$, $|x_1 - x_2| < \delta$ platilo $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Je-li nyní $d(\text{graf}(\varphi_n), \text{graf}(\varphi)) < \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ je $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ pro každé $x \in I$. Z toho tvrzení snadno plyne.

(g) Ukažte, že v tvrzení (f) nelze vynechat ani předpoklad spojitosti φ ani předpoklad kompaktnosti I !

24.3 Cvičení. Pro neklesající funkci f definovanou na $\langle a,b\rangle$ označíme $A(f) = \{[x,y]\ ;\ x \in \langle a,b\rangle,\ f(x-) \leq y \leq f(x+)\}$.
Nechť f, f_n $(n \in N)$ jsou neklesající funkce na $\langle a,b\rangle$. Dokažte ekvivalenci následujících výroků:

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro $x \in W \subset \langle a,b\rangle$, kde W je hustá množina v $\langle a,b\rangle$, která obsahuje body a, b.

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, je-li $x = a$, $x = b$ nebo x je bodem spojitosti f.

(iii) $d(A(f_n), A(f)) \to 0$. (Viz 24.1.)

B. MNOŽINOVÉ VLASTNOSTI GRAFU FUNKCÍ

24.4 Uzavřené grafy.

(a) Existuje funkce, definovaná na E_1, jejíž graf je otevřenou podmnožinou E_2?

(b) Dokažte: Je-li φ spojitá funkce definovaná na E_1, je graf (φ) uzavřená podmnožina E_2.

(c) Uveďte příklad nespojité funkce φ na E_1, jejíž graf je uzavřená podmnožina E_2.

1014-7781

(d) Je-li φ lokálně omezená funkce na E_1, je spojitá, právě když graf (φ) je uzavřená podmnožina E_2. Dokažte!

$\boxed{24.5}$ **Husté a řídké grafy.**

(a) Dokažte: Existuje funkce φ definovaná na E_1 taková, že graf (φ) je hustý v E_2.

N á v o d. Tuto vlastnost má například funkce g definovaná v 4.26.

(b) Musí být funkce s vlastností (a) darbouxovská?

(c) Nechť φ je funkce definovaná na intervalu I. Nechť množina bodů spojitosti φ je hustá v intervalu I. Potom graf (φ) je řídká podmnožina E_2. Dokažte!

(d) Ukažte, že existuje funkce φ definovaná na E_1 a všude nespojitá na E_1 taková, že graf (φ) je řídká podmnožina E_2.

N á v o d. Volte za φ Dirichletovu funkci.

(e)* Nechť φ je darbouxovská funkce definovaná na intervalu $I \subset E_1$. Potom graf (φ) je řídká podmnožina E_2, právě když φ je spojitá v husté podmnožině intervalu I.

N á v o d. Nejdříve dokažte: z toho, že φ není spojitá v husté podmnožině I plyne existence intervalu $J \subset I$ a čísel $\alpha < \beta$ tak, že obě množiny $\{x \in J;\ \varphi(x) \leq \alpha\}$, $\{x \in J;\ \varphi(x) \geq \beta\}$ jsou husté v J. Z Darbouxovy vlastnosti funkce φ pak plyne: $J \times \langle \alpha, \beta \rangle \subset \overline{\text{graf}\ (\varphi)}$.

$\boxed{24.6}$ **Souvislé grafy.**

(a) Dokažte: Nechť φ je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \subset E_1$. Pak graf (φ) je souvislá množina.

N á v o d. Nechť graf $(\varphi) = A \cup B$, $A, B \neq \emptyset$. Položte $A_1 = \{x \in I;\ [x, f(x)] \in A\}$, $B_1 = \{x \in I;\ [x, f(x)] \in B\}$. Existuje-li $x \in I$, $x \in \overline{A}_1 \cap B_1$, je $[x, f(x)] \in \overline{A} \cap B$; existuje-li $x \in I$, $x \in A_1 \cap \overline{B}_1$, je důkaz analogický.

(b) Nechť φ je reálná funkce definovaná na intervalu $I \subset E_1$. Je-li graf (φ) souvislý, je φ darbouxovská. Dokažte!

(c)* Dokažte, že existuje darbouxovská funkce, jejíž graf není souvislý.

N á v o d. Nechť g je funkce z 4.26. Definujme $\varphi(x) = g(x)$, pokud $g(x) \neq x$, $\varphi(x) = x + 1$ pokud $g(x) = x$. Ukažte, že funkce φ má požadované vlastnosti.

(d)* Nechť φ je funkce první třídy, definovaná na intervalu $I \subset E_1$. Nechť pro každé dva body $x, x' \in I$, $x < x'$ platí $\varphi(x) \in \overline{\varphi((x,x'))}$, $\varphi(x') \in \overline{\varphi((x,x'))}$. Potom graf (φ) je souvislý.

N á v o d. Nechť graf $(\varphi) = A \cup B$, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, A a B jsou otevřené i uzavřené. Položte

$A_1 = \{x \in I ; [x, \varphi(x)] \in A\}$, $B_1 = \{x \in I, [x, \varphi(x)] \in B\}$.

Buď x bod spojitosti funkce $f|_{\overline{A}_1 \cap \overline{B}_1}$ (viz 12.7). Lze předpokládat $x \in A_1$. Pak existuje okolí bodu x v $\overline{A}_1 \cap \overline{B}_1$, které leží v A_1. Je-li $y \in B_1$, y dostatečně blízko k x, leží styčný interval množiny $\overline{A}_1 \cap \overline{B}_1$ obsahující bod y, celý v množině B_1. Z toho dostaneme, že i krajní body tohoto intervalu leží v B_1; avšak alespoň jeden z nich musí ležet v A_1, což je spor.

(e) Nechť φ je funkce první třídy definovaná na otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) φ je darbouxovská;

(ii) graf (φ) je souvislý;

(iii) pro každé $x \in I$ existují posloupnosti $x_n \nearrow x$, $y_n \searrow x$ tak, že $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$, $\varphi(y_n) \longrightarrow \varphi(x)$.

Dokažte!

N á v o d. Použijte 24.6.d.

T É M A 25

Modul spojitosti

Obsah: A. Modul spojitosti a jeho vlastnosti.

B. Stejně spojité funkce.

A. MODUL SPOJITOSTI A JEHO VLASTNOSTI

25.1 Označení. Nechť $\mathcal{M}$ je množina všech nezáporných neklesajících funkcí $g : (0, \infty) \longrightarrow E_1^*$, $\mathcal{M}_0$ je množina všech $f \in \mathcal{M}$, pro něž $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$.

25.2 Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na intervalu $I \subset E_1$; pro $\delta > 0$ položme

$$\omega_f^I(\delta) = \sup_{\substack{x,y \in I \\ |x-y| \le \delta}} |f(x) - f(y)| .$$

Funkci ω_f^I definovanou na $(0, \infty)$ nazýváme modulem spojitosti funkce f na intervalu I; místo ω_f^I píšeme někdy pouze ω_f.

25.3 Cvičení.

(a) Dokažte, že $\omega_f \in \mathcal{M}$ a pro $x, y \in I$ platí

$$|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x-y|) .$$

(b) Rozhodněte, zda ke každé funkci $g \in \mathcal{M}$ (resp. $g \in \mathcal{M}_0$) existuje funkce f definovaná na intervalu I tak, že $g = \omega_f^I$ v jistém pravém okolí bodu 0.

(c) Nechť $a > 0$, $\omega_f(a) \in E_1$. Musí být funkce ω_f spojitá na $(0,a)$? Musí být 1.Baireovy třídy na $(0,a)$?

25.4 Věta. Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, právě když $\omega_f^I \in \mathcal{M}_0$.

Speciálně: Nechť $\alpha > 0$ a nechť funkce f je α-hölderovská na intervalu I (viz téma 14). Potom $\omega_f^I \in \mathcal{M}_0$.

25.5 Cvičení.

(a) Nechť funkce f je monotonní na omezeném intervalu I. Potom $\omega_f^I \in \mathcal{M}_0$, právě když f je spojitá a omezená.

(b) Sestrojte funkci f, spojitou na $\langle 0,1 \rangle$, pro kterou

$$\lim_{\delta \to 0+} \delta^{-1} \omega_f(\delta) = +\infty .$$

(c) Rozhodněte, zda lze sestrojit funkci g na $\langle 0,1 \rangle$, pro kterou $\lim_{\delta \to 0+} \delta^{-1} \omega_g(\delta)$ neexistuje.

(d) Charakterizujte všechny funkce na intervalu I, pro něž $\lim_{\delta \to 0+} \delta^{-1} \omega_f^I(\delta) = 0$.

(e) Nechť funkce f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom $\lim_{\delta \to 0+} \dfrac{\omega_f(\delta)}{\delta} = \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f'(x)|$. Dokažte.

25.6 Cvičení. Rozhodněte, zda platí:

(a) Nechť $\alpha \geq 0$. Potom funkce f definovaná na intervalu I je α-hölderovská na I, právě když je funkce $\delta \longmapsto \delta^{-\alpha} \omega_f^I(\delta)$ omezená na $(0, \infty)$.

(b) Jestliže f je funkce na intervalu I a platí

$\lim_{\delta \to 0+} \delta^{-\alpha} \omega_f^I(\delta) = K \in E_1$ pro $\alpha \in (0, \infty)$, potom f je α-hölderovská na I a platí: Je-li $K' \in E_1$ takové, že $|f(x) - f(y)| \leq K' |x-y|^{\alpha}$ kdykoli $x,y \in I$, potom $K \leq K'$.

25.7 Cvičení. Sestrojte funkci f na $\langle 0,1 \rangle$ tak, aby pro každé $\alpha \in (0,\infty)$ bylo $\lim_{\delta \to 0+} \delta^{-\alpha} \omega_f(\delta) = +\infty$.

25.8 Problémy.

(a) Zkoumejte existenci derivace funkce ω_f^I.

(b) Vyšetřete vztah funkcí ω_{f+g} a $\omega_f + \omega_g$.

1014-7781

B. STEJNĚ SPOJITÉ FUNKCE

25.9 Označení. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ značí prostor všech spojitých funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$ s metrikou ρ :

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \sup_{\langle 0,1\rangle} |f-g| .$$

25.10 Definice. Pro $\sigma \in \mathcal{M}_0$ označme $\mathcal{C}[\sigma]$ množinu všech $f \in \mathcal{C}$, pro něž $|f(x) - f(y)| \leq \sigma(|x-y|)$, kdykoli $x,y \in \langle 0,1\rangle$. Jestliže $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, řekneme, že funkce množiny $\mathcal{B}$ jsou stejně spojité, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in \mathcal{B} \; \forall x,y \in \langle 0,1\rangle : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Dokažte: funkce množiny $\mathcal{B}$ jsou stejně spojité, právě když existuje $\sigma \in \mathcal{M}_0$ tak, že $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}[\sigma]$.

25.11 Poznámka. Je-li $f \in \mathcal{C}$, je $f \in \mathcal{C}[\sigma]$ pro nějaké $\sigma \in \mathcal{M}_0$ (např. $f \in \mathcal{C}[\omega_f^I]$). Vzniká otázka, jak "velká" je v prostoru $\mathcal{C}$ množina $\mathcal{C}[\sigma]$ pro dané $\sigma \in \mathcal{M}_0$. Jak dokážeme, je pro libovolně dané $\sigma \in \mathcal{M}_0$ množina $\mathcal{C}[\sigma]$ velmi "malá". Převážná většina funkcí f prostoru $\mathcal{C}$ (ve smyslu kategorií) se skoro nikde (ve smyslu míry) neshoduje s žádnou funkcí z $\mathcal{C}[\sigma]$. Přesnější formulace tohoto faktu je obsažena ve větě 25.14. Tato věta je dokázána obvyklou metodou kategorií (viz 20.B) za pomoci věty o hustotě (viz 8.19).

25.12 Lemma. Nechť $\varepsilon > 0$, $n \in N$, $\sigma \in \mathcal{M}_0$. Existuje $k \in N$, $\delta > 0$ a funkce $f \in \mathcal{C}$ tak, že

(i) $k > n$,

(ii) $\|f\| \leq \varepsilon$,

(iii) kdykoli $g \in \mathcal{C}$, $\|f-g\| < \delta$, $x \in \langle 0,1\rangle$, potom
$|g(x) - g(y)| > \sigma(|x-y|)$
pro každé $x \in \langle x - \frac{1}{2k}, x - \frac{1}{4k}\rangle$
nebo pro každé $y \in \langle x + \frac{1}{4k}, x + \frac{1}{2k}\rangle$.

N á v o d. Položte $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$. Zvolte $k \in N$ tak, aby $k > n$, $\sigma\left(\frac{1}{2k}\right) < \frac{\varepsilon}{4}$. Funkci f definujte takto: $f\left(\frac{i}{k}\right) = \varepsilon(-1)^i$ pro $i = 0,1,\dots,k$, v intervalech $\langle \frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\rangle$ lineárně.

1014-7781

Rozlište dva případy: (α) $\frac{x}{k} - \left[\frac{x}{k}\right] > \frac{1}{2}$

(β) $\frac{x}{k} - \left[\frac{x}{k}\right] \leq \frac{1}{2}$.

Tvrzení (iii) pak plyne z odhadu

$$|g(x) - g(y)| \geq |f(x) - f(y)| - |f(x) - g(x)| - |f(y) - g(y)| >$$
$$> |f(x) - f(y)| - 2\delta \geq \frac{\varepsilon}{4} > \sigma\left(\frac{1}{2k}\right) \geq \sigma(|x-y|) .$$

$\boxed{25.13}$ Lemma. Nechť $\sigma \in \mathcal{M}_0$. Pro $n \in N$ definujeme množinu $A_n \subset \mathcal{C}$ takto: $f \in A_n$, jestliže existuje $k \in N$, $k > n$, tak, že pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ platí $|f(x) - f(y)| > \sigma(|x-y|)$ pro všechna $y \in \left\langle x - \frac{1}{2k}, x - \frac{1}{4k} \right\rangle$ nebo pro všechna $y \in \left\langle x + \frac{1}{4k}, x + \frac{1}{2k} \right\rangle$.

Potom množina $\mathcal{C} \setminus A_n$ je řídká v prostoru $\mathcal{C}$.

Návod. Nechť $g \in \mathcal{C}$, $\varepsilon > 0$. Podle lemmatu 25.12 existuje $k \in N$, $\delta > 0$ a $h \in \mathcal{C}$ tak, že

(i) $k > n$,

(ii) $\|h\| \leq \varepsilon$,

(iii) kdykoli $f \in \mathcal{C}$, $\|f-h\| < \delta$, $x \in \langle 0,1 \rangle$, potom $|f(x) - f(y)| > \sigma(|x-y|) + \omega_g(|\cdot\cdot|)$ pro každé $y \in \left\langle x - \frac{1}{2k}, x - \frac{1}{4k} \right\rangle$ nebo pro každé $y \in \left\langle x + \frac{1}{4k}, x + \frac{1}{2k} \right\rangle$.

Pro tato f, x, y platí

$$|(g+f)(x) - (g+f)(y)| \geq |f(x) - f(y)| - |g(x) - g(y)| >$$
$$> \sigma(|x-y|) + \omega_g(|x-y|) - |g(x) - g(y)| \geq \sigma(|x-y|),$$

tedy $g+f \in A_n$.

$\boxed{25.14}$ Věta. Nechť $\sigma \in \mathcal{M}_0$. Existuje $f \in \mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle)$ tak, že pro všechna $g \in \mathcal{C}[\sigma]$ jest $\lambda_1\{\cdot;\ f(x) = g(x)\} = 0$.

Množina těch $f \in \mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle)$, které tuto vlastnost nemají, je 1.kategorie v $\mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle)$.

Návod. Nechť $A_n \subset \mathcal{C}$, $n \in N$, jsou množiny z lemmatu 25.13, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. $\mathcal{C} \setminus A$ je 1.kategorie v $\mathcal{C}$. Nechť $f \in A$, $g \in \mathcal{C}[\sigma]$, $B = \{x;\ f(x) = g(x)\}$.

1014-7781

Předpokládejte, že $\lambda_1 B > 0$. Podle věty 8.19 existuje $x \in B$ tak, že $D(B,x) = 1$. Položte $E = \{y;\ |f(x) - f(y)| > \sigma(|x-y|)\}$. Protože $B \cap E = \emptyset$, jest $D(E,x) = 0$. Podle definice množin A_n pro každé $n \in N$ existuje $k(n) > n$ tak, že

$$\lambda_1\left(E \cap \left\langle x - \frac{1}{2k(n)},\ x + \frac{1}{2k(n)}\right\rangle\right) \geq \frac{1}{4k(n)} .$$

Protože $\lim\limits_{n \to \infty} k(n) = \infty$, není $D(E,x) = 0$. To je spor, a tedy $\lambda_1 B = 0$.

$\boxed{25.15}$ **Lemma.** Pro $n \in N$ a $t > 0$ položme $\sigma_n(t) = n\, t^{1/n}$. Nechť $\alpha > 0$ a $f \in \mathscr{C}$. Jestliže existuje interval $J \subset \langle 0,1 \rangle$ tak, že f je α-hölderovská na J, potom existuje $g \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}(\sigma_n)$ tak, že $g = f$ na J.

N á v o d. Doplňte f konstantně na každé komponentě $\langle 0,1 \rangle \setminus J$.

$\boxed{25.16}$ **Věta.** Existuje funkce $f \in \mathscr{C}(\langle 0,1 \rangle)$ s touto vlastností: Na žádném intervalu $J \subset \langle 0,1 \rangle$ není funkce f α-hölderovská pro žádné $\alpha > 0$. Množina všech f s touto vlastností je reziduální v $\mathscr{C}(\langle 0,1 \rangle)$.

N á v o d. Položte $\sigma_n(t) = n\, t^{1/n}$. Označte G_n množinu všech $f \in \mathscr{C}$, pro něž existuje $g \in \mathscr{C}[\sigma_n]$ tak, že

$\lambda_1 \{x;\ f(x) = g(x)\} > 0$. Podle věty 25.14 jsou množiny G_n 1.kategorie, takže $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ je první kategorie v $\mathscr{C}$. Podle 25.15 funkce z $\mathscr{C} \setminus G$ nejsou α-hölderovské pro žádné $\alpha > 0$ na žádném intervalu $J \subset \langle 0,1 \rangle$.

$\boxed{25.17^*}$ **Problém.** Nechť $\sigma, \tau \in \mathcal{M}_0$ a nechť $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sigma(x)}{\tau(x)} = +\infty$.

Dokažte, že existuje $f \in \mathscr{C}[\sigma]$ tak, že pro žádný interval $J \subset \langle 0,1 \rangle$ není f elementem $\mathscr{C}[\tau]$ na J.

T É M A 26

Věty o střední hodnotě

Obsah: A. Věty pro jednostranné derivace.

B. Věty pro Diniho derivace.

C. Věty pro symetrickou derivaci.

A. VĚTY PRO JEDNOSTRANNÉ DERIVACE

26.1 Zobecnění Rolleovy věty. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť existuje $f^{(n)}$ na (a,b). Nechť $a \leq x_1 < \ldots < x_k \leq b$ jsou nulové body funkce f s násobnostmi $m_1,\ldots,m_k$ ($c \in E_1$ je nulovým bodem funkce f násobnosti m, jestliže $f(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0, f^{(m)}(c) \neq 0$) takové, že $m_1+\ldots+m_k \geq n + 1$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že $f^{(n)}(\xi) = 0$.

N á v o d. Uvažte napřed případ, že všechny kořeny jsou jednoduché a pak teprve případ obecný (použijte matematickou indukci) - viz též [D II], kap. V, § 7, věta 85.

26.2 Věta. Nechť P je polynom stupně n mající pouze reálné kořeny. Pak polynom $P^{(k)}$ $(k = 1,\ldots,n-1)$ má pouze reálné kořeny. Leží-li kořeny polynomu P v intervalu $\langle a,b\rangle$, leží v tomto intervalu i kořeny polynomů $P^{(k)}$.

26.3 Cvičení. Pomocí věty 26.2 dokažte, že polynom $P : x \mapsto \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right]$ (až na multiplikativní konstantu tzv. Legendreův polynom n-tého stupně) má všechny kořeny v $\langle -1, 1\rangle$.

26.4* Věta. Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a f'_+ existuje (vlastní, nevlastní) v $\langle a,b) \setminus M$, kde M je spočetná množina. Je-li $f'_+(x) \geq 0$ pro $x \in \langle a,b) \setminus M$, je f neklesající na $\langle a,b\rangle$.

N á v o d. Stačí dokázat, že $f(a) \leq f(b)$. Nechť $M = \{a_n\}$.

1014-7781

Pro $\varepsilon > 0$ označme

$$A = \{y \in \langle a,b\rangle ;\ \forall x \in \langle a,y\rangle \ [f(x) - f(a) \geq -\varepsilon(x-a) - \varepsilon \sum_{\substack{n\in N \\ a_n<x}} \frac{1}{2^n}]\}.$$

Dokažte, že $A \neq \emptyset$, A je interval (tj. $y \in A$, $a \leq x \leq y \Longrightarrow x \in A$).
Označte $\sup A = c$ a dokažte (pomocí spojitosti), že $c \in A$.
Uvažujte dva případy ($c \notin M$, $c = a_k$) a zjistěte (s využitím existence derivace $f'_+(c)$ nebo spojitosti f v bodě c), že $c = b$.
Vzhledem k libovolnosti $\varepsilon > 0$ už snadno dostanete tvrzení.

26.5 Poznámka. Analogická věta k větě 26.4 platí i pro nerostoucí funkce. Formulujte ji. Odtud a z předcházející věty dostáváme:
Nechť funkce f je spojitá na (a,b) (omezeném, neomezeném) a $f'_+(x) = 0$ pro $x \in (a,b) \setminus M$, kde M je spočetná. Potom f je konstantní na (a,b).

26.6 Cvičení. Ukažte, že podmínku spojitosti funkce f nelze zaměnit za podmínku spojitosti zprava - o tom podrobněji viz D. Preiss, Čas. pro pěstování matem. 94 (1969), 194-198. Povšimněte si, že z důkazu věty 26.4 plyne tento dodatek k 26.4:

26.7 Věta. Nechť jsou splněny předpoklady věty 26.4. Je-li navíc $f'_+ > 0$ na husté podmnožině intervalu $\langle a,b\rangle$ (tj. každý otevřený podinterval intervalu $\langle a,b\rangle$ obsahuje bod, ve kterém je $f'_+ > 0$), pak f je rostoucí v $\langle a,b\rangle$.
Lze toto tvrzení obrátit?

26.8 Zobecnění Lagrangeovy věty.

(a) Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a derivace f'_+ existuje (vlastní, nevlastní) na množině $P = \langle a,b) \setminus M$, kde M je spočetná. Je-li $k = \inf_{x\in P} f'_+(x)$, $K = \sup_{x\in P} f'_+(x)$, pak s výjimkou případů, kdy f je lineární na $\langle a,b\rangle$, je

$k(b-a) < f(b) - f(a) < K(b-a)$.

N á v o d. Použijte výsledků z 26.4 a 26.7 na funkce $g : x \longmapsto Kx - f(x)$, $h : x \longmapsto f(x) - kx$.

(b) Nechť funkce f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a nechť existuje derivace f' na $(a,b) \setminus K$, kde K je konečná množina. Potom existuje bod $\xi \in (a,b)$ tak, že $|f(b) - f(a)| \leq |f'(\xi)|\,(b-a)$. Dokažte!

N á v o d. Použijte Lagrangeovu větu o střední hodnotě na každý interval $I \subset (a,b) \setminus K$, jehož krajní body leží v $K \cup \{a,b\}$.

26.9 Cvičení. Pomocí věty 26.7 odvoďte, že neexistuje spojitá funkce f definovamá na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ taková, že $f'_+(x) = +\infty$ pro $x \in \langle 0,1) \rangle \setminus P$, kde P je spočetná množina.

B. VĚTY PRO DINIHO DERIVACE

26.10 Rolleova věta pro Diniho derivace. Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$ a nechť $f(a) = f(b) = 0$.

(a) Není-li $f \leq 0$ na $\langle a,b \rangle$, existuje alespoň jeden bod $c \in (a,b)$ tak, že $D^-f(c) \geq D_-f(c) \geq 0$, $D_+f(c) \leq D^+f(c) \leq 0$, kde D^-, D_-, D_+, D^+ jsou Diniho derivace definované v 7.8.

Je-li $f \leq 0$ na $\langle a,b \rangle$, je

$D_+f(a) \leq D^+f(a) \leq 0$, $D^-f(b) \geq D_-f(b) \geq 0$.

(b) Není-li $f \geq 0$ na $\langle a,b \rangle$, existuje alespoň jeden bod $c \in (a,b)$ tak, že $D_-f(c) \leq D^-f(c) \leq 0$, $D^+f(c) \geq D_+f(c) \geq 0$.

Je-li $f \geq 0$ na $\langle a,b \rangle$, je

$D^+f(a) \geq D_+f(a) \geq 0$, $D_-f(b) \leq D^-f(b) \leq 0$.

N á v o d. Důkaz probíhá na základě stejné myšlenky jako důkaz Rolleovy věty.

26.11 Cvičení.

(a) Ukažte na příkladech, že předpoklad spojitosti funkce f je podstatný. Odvoďte též z věty 26.10 Rolleovu větu.

(b) Z 26.10 odvoďte obvyklým postupem toto zobecnění Lagrangeovy věty: Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a,b)$ tak, že platí

buď $$D_-f(c) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \geq D^+f(c)$$

nebo $$D^-f(c) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq D_+f(c) \quad .$$

(c) Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$ a je-li $\underline{D} f \geq 0$ na $\langle a,b \rangle$, je f neklesající na $\langle a,b \rangle$. (O vztahu monotonie a "jistých derivací" pojednává téma 27.)

C. VĚTY PRO SYMETRICKOU DERIVACI

V předcházejícím jsme ukázali zobecnění Lagrangeovy věty o střední hodnotě, nahradíme-li obyčejnou derivaci tzv. Diniho derivacemi. V dalším se pokusíme nahradit derivaci tzv. symetrickou derivací (o ní se podrobněji dočtete v tématu 9).

26.12 Cvičení. Ukažte, že pro symetrickou derivaci neplatí Rolleova věta.

26.13 Věta. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, $f(a) = f(b) = 0$, nechť existuje symetrická derivace $f^{(s)}$ na (a,b). Potom existují dva body $x_1, x_2 \in (a,b)$ tak, že

$$f^{(s)}(x_1) \leq 0 \leq f^{(s)}(x_2) \quad .$$

N á v o d. Dokažte nejdříve lemma:
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, nechť existuje $f^{(s)}$ na (α, β), nechť $f(\alpha) > f(\beta)$. Potom existuje bod $c \in (\alpha, \beta)$ tak, že $f^{(s)}(c) \geq 0$.
(Platí dokonce, že existuje nespočetně mnoho takových bodů.)

26.14 Cvičení.

(a) Odvoďte z věty 26.13 analogii Lagrangeovy věty pro symetrickou derivaci.

(b) Ukažte, že je-li f spojitá na intervalu (a,b) a má-li v tomto intervalu nezápornou symetrickou derivaci, je f neklesající v (a,b). Ukažte, že předpoklad spojitosti je podstatný.

(c) Funkce f spojitá na intervalu (a,b) a mající v tomto intervalu symetrickou derivaci je na intervalu (a,b) lipschitzovská (viz téma 14), právě když $f^{(s)}$ je omezená na (a,b). Ukažte, že předpoklad spojitosti je podstatný.

(d) Sestrojte příklad funkce, která má symetrickou derivaci rovnou nule na intervalu (a,b) a která není konstantní v (a,b). Existuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ tak, že funkce s těmito vlastnostmi je konstantní na (α, β) ?
Co když přidáme navíc předpoklad spojitosti funkce f ?

1014-7781

T É M A 27

Vztah derivace a monotonie funkce

27.1 Cvičení.

(a) V prvém ročníku je dokazována věta: Je-li f reálná funkce, která má v otevřeném intervalu $I \subset E_1$ konečnou nezápornou derivaci, je f neklesající v I. Rozhodněte, zda lze vynechat v uvedeném tvrzení předpoklad konečnosti derivace (bez dodatečného předpokladu spojitosti funkce. Viz též 27.4.c).

(b) V 26.4 je uvedeno tvrzení, které je v jistém smyslu obecnější: Buď f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle \subset E_1$ a nechť f'_+ existuje a je nezáporná (vlastní, nevlastní) v $\langle a,b\rangle \setminus M$, kde M je spočetná množina. Potom f je neklesající v $\langle a,b\rangle$. Ukažte na příkladě, že množinu M nelze obecně nahradit nespočetnou - třeba řídkou - množinou.

(c)* Dokažte tvrzení: $f \in C(\langle a,b\rangle)$, $D^+f \geq 0$ v $\langle a,b) \setminus M$, M spočetná. Pak $f(b) \geq f(a)$.

N á v o d. Předpokládejte, že $f(b) < f(a)$. Pro pro vhodné $\eta > 0$ platí $f(b) + \eta b < f(a) + \eta a$. Nechť $g(x) = f(x) + \eta x$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Pro každé $y \in (g(b), g(a))$ položte $\varphi(y) = \sup \{t \in \langle a,b\rangle \, ; \, g(t) = y\}$. Pak $D^+g(\varphi(y)) \leq 0$, tedy $D^+f(\varphi(y)) \leq -\eta$. Z toho plyne, že $\varphi(y) \in M$; ale zobrazení $\varphi : (g(b), g(a)) \longrightarrow M$ je prosté, tedy M je nespočetná - spor.

27.2 Poznámky.

(a) Z předchozího vyplývá, že zobecňování těchto vět může být vedeno dvojím směrem:

(i) Místo derivace uvažujeme jednostrannou derivaci, derivovaná čísla (viz téma 7 nebo [D II], kap. V, § 8), symetrickou derivaci (viz téma 9) apod.

(ii) Požadujeme nezápornost derivace a její existenci s výjimkou jisté množiny bodů. Jak ukazuje příklad funkce -sgn x, musíme přidat některý další předpoklad o funkci f. Konečně je možno oba způsoby vhodně kombinovat.

V tomto tématu se budeme zabývat několika větami, které se většinou vztahují k bodu (ii). Této problematice je blízké rovněž téma 26.

(b) Prakticky z každé věty o funkcích neklesajících je možno přechodem k funkcím $(-f)$ odvodit analogickou větu pro funkce nerostoucí. Spojením obou vět dostaneme vždy větu, která za jistých předpokladů tvrdí, že funkce f je konstantní. Budeme tedy výslovně formulovat vždy pouze tvrzení o neklesajících funkcích; příslušné formulace tvrzení a důkazy pro nerostoucí funkce proveďte sami!

(c) Z každé věty právě uvedeného typu můžeme odvodit zobecnění primitivní funkce a tím i další zobecnění Newtonova integrálu. Tyto jednoduché důsledky také nebudeme přímo formulovat - přenecháme je k samostatnému studiu či jako námět k ročníkovým pracím.

(d)** Lze dokázat, že existuje nespočetná množina $M \subset (0,1)$ taková, že platí následující tvrzení: Je-li f spojitá funkce na $(0,1)$ taková, že $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (0,1) \setminus M$, je f neklesající.
Množiny M s touto vlastností jsou právě ty množiny, které neobsahují žádnou nespočetnou uzavřenou podmnožinu. Důkazy těchto tvrzení jsou však dosti obtížné.

$\boxed{27.3}$ Cvičení.

(a) Připomeňte si, že existuje spojitá nerostoucí funkce v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, která má skoro všude v tomto intervalu derivaci rovnou nule. (Například Cantorova funkce, viz 4.22.)

(b)* Dokažte toto tvrzení: Buď f absolutně spojitá v intervalu $I = \langle a,b \rangle$ a nechť f' existuje a je nezáporná v $I \setminus M$, kde M je nulová množina. Potom $f(b) \geq f(a)$. (Jak z této věty vyplyne, že f je neklesající v I?

N á v o d. Zvolte $\varepsilon > 0$.

(i) Je-li $x \in (a,b) \setminus M$, existuje $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ tak, že pro $0 < h < \delta$ je $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} > -\varepsilon$.

(ii) Intervaly $\langle x, x+h \rangle$, $(0 < h < \delta(x, \varepsilon))$ pokrývají $(a,b) \setminus M$ ve Vitaliově smyslu. (Viz [J II], kap. V, § 1).
Buď $d > 0$. Podle Vitaliovy věty (viz tamtéž) existují disjunktní intervaly $\langle x_i, x_i + h_i \rangle$, $(i = 1,2,\dots,n,)$, ležící v (a,b), $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $0 < h_i < \delta(x_i, \varepsilon)$, tak, že vnější míra

1014-7781

množiny $(I \setminus M) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i + h_i \rangle$ je menší než d.

(iii) Součet délek intervalů $\langle a, x_1)$, $(x_i + h_i, x_{i+1})$, $(i = 1 \ldots, n-1)$, $(x_n + h_n, b\rangle$ je menší než d.

(iv) Využijeme-li (vhodnou volbou d) absolutní spojitosti funkce f (pro intervaly $\langle a, x_1\rangle$, $\langle x_1 + h_1\ x_2\rangle$, $\ldots \langle x_n + h_n, b\rangle$) a pro zbývající intervaly volby čísel h_k snadno zjistíme, že $f(b) - f(a) > -\varepsilon(1 + b - a)$.

(c) Formulujte právě dokázané tvrzení ve smyslu poznámky 27.2.b.

(d) Nestačilo v předchozím tvrzení uvažovat pouze jednostrannou derivaci nebo například $D_+f(x)$?

27.4 Cvičení.

(a)* Předpoklad absolutní spojitosti v 27.3.b je značně silný. Odvodíme větu obecnější.
Budiž f definovaná na intervalu $I = (a,b)$ a nechť pro všechna $x \in I$ je $\underline{D} f(x) \geqq 0$. (Definice $\underline{D}f(x)$ viz 7.8.) Potom f je neklesající v I.

N á v o d. Nechť $x_0, y_0 \in I$, $x_0 < y_0$ a $f(x_0) > f(y_0)$. Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro funkci $\varphi(x) = f(x) + \varepsilon x$ platí $\varphi(x_0) > \varphi(y_0)$.

Buď $c = \dfrac{x_0 + y_0}{2}$ a buď $\langle x_1, y_1\rangle$ ten z intervalů $\langle x_0, c\rangle$, $\langle c, y_0\rangle$, pro nějž je $\varphi(x_1) > \varphi(y_1)$ (proč existuje?). Postupně sestrojíme posloupnost intervalů $\langle x_n, y_n\rangle$ do sebe zařazených, $y_n - x_n = \dfrac{1}{2^n}(y_0 - x_0)$ tak, že $\varphi(x_n) > \varphi(y_n)$. Existuje tedy jediný bod $\xi \in \langle x_n, y_n\rangle$ pro všechna přirozená n. Protože $\varphi(y_n) - \varphi(\xi) + \varphi(\xi) - \varphi(x_n) < 0$, je buď $\varphi(y_n) - \varphi(\xi) < 0$ nebo $\varphi(\xi) - \varphi(x_n) < 0$. Odtud dostaneme ihned $\underline{D}\varphi(\xi) \leqq 0$, což je spor, neboť $\underline{D}\varphi(x) = \underline{D} f(x) + \varepsilon \geqq \varepsilon$.

(b) Buď $M \subset (a,b)$ nulová množina. Potom existuje funkce ψ spojitá a neklesající na intervalu $\langle a,b\rangle$ taková, že $\psi'(x) = +\infty$ pro $x \in M$.

N á v o d. Viz 9.26.

(c)* Z 27.4.b plyne tvrzení: Budiž f definovaná na intervalu $I = (a,b)$ a nechť $\underline{D}f(x) \geq 0$ pro skoro všechna $x \in I$, $\underline{D}f(x) > -\infty$ pro všechna $x \in I$. Potom f je neklesající v I.

N á v o d. Budiž $M \subset I$ množina všech x, kde $\underline{D}f(x) < 0$. Sestrojme k této množině dle 27.4.b funkci ψ. Buď $\varepsilon > 0$. Funkce $f(x) + \varepsilon\psi(x)$ splňuje předpoklady 27.4.a, je tedy neklesající v I a protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolně zvoleno, je i f neklesající v I. Odůvodněte podrobně!

27.5* Věta.

(a) Nechť $f \in \mathscr{C}(\langle a,b \rangle)$ má všude v (a,b) derivaci (vlastní nebo nevlastní). Nechť $f' \geq 0$ s.v. v (a,b). Pak f je neklesající.

N á v o d. Podle 7.19 je $f' \in B_1(a,b)$. Z 27.4.c plyne, že f je neklesající na okolí každého bodu spojitosti derivace f. Nechť $(a_n, b_n) \subset (a, b)$ jsou všechny maximální intervaly, na nichž je f neklesající. Není-li f neklesající na (a,b), je množina

$F = (a, b) \setminus \bigcup_n (a_n, b_n) \neq \emptyset$. Tato množina je ovšem řídká v (a, b). Je-li $x_0 \in F$ bod spojitosti funkce $f'|F$, je nutně $f'(x_0) \geq 0$. (Uvědomte si, že $f'(a_n) \geq 0$, $f'(b_n) \geq 0$ pro každé n.), tedy $f' > -\infty$ na nějakém okolí bodu x_0, a tedy f je neklesající na tomto okolí - to je spor s maximalitou intervalů (a_n, b_n).

(b) V předchozí větě stačí předpokládat pouze existence derivace v $(a, b) \setminus S$, kde S je spočetná. Rovněž předpoklady o spojitosti funkce f lze zeslabit.

1014-7781

T É M A 28

Silná derivace

Obsah: A. Silná derivace.

B. Body stejnoměrné derivovatelnosti funkce.

C. Množina bodů nespojitosti derivace funkce.

A. SILNÁ DERIVACE

28.1 Definice. Buď f funkce definovaná na otevřeném intervalu $I \subset E_1$.

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in I$ silnou derivaci, jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2] \to [a, a] \\ x_1 \neq x_2}} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Hodnotu této limity nazveme silnou derivací v bodě $a \in I$ a budeme ji značit symbolem $f^*(a)$. Označme

$$D_f = \{ x \in I;\ \text{existuje vlastní } f'(x) \} ,$$

$$D_f^* = \{ x \in I;\ \text{existuje } f^*(x) \} .$$

28.2 Cvičení.

(a) Ukažte, že $D_f^* \subset D_f$ a pro $a \in D_f^*$ je $f^*(a) = f'(a)$. Tedy, existuje-li $f^*(a)$, existuje i $f'(a)$ a jsou si rovny. Platí i obrácené tvrzení?

(b) Nechť $a \in D_f^*$. Pokud a je izolovaným bodem množiny D_f^*, pak položme $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D_f}} f^*(x) \overset{\text{def.}}{=} f^*(a)$. Potom platí

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D_f^*}} f^*(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D_f^*}} f'(x) = f^*(a) = f'(a) .$$

(Limity v předcházejícím řádku jsou limity vzhledem k množině D_f^*, resp. D_f.)

N á v o d. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D_f$ a $y \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq y$

platí $\left| \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} - f^*(a) \right| < \varepsilon$.

Limitním přechodem $y \longrightarrow x$ dostanete, že pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D_f$ platí $|f'(x) - f^*(a)| < \varepsilon$.

Tedy $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D_f}} f'(x) = f^*(a)$. Vztah $D^* \subset D'$ implikuje

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D_f^*}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D_f}} f'(x)$. Použitím (a) obdržíte tvrzení.

(c) Nechť f' je spojitá v bodě $a \in I$. Potom f má v bodě a silnou derivaci.

N á v o d. Použijte větu o střední hodnotě.

(d) Nechť $a \in D_f^*$ a existuje f' v jistém otevřeném okolí bodu a. Potom f' je spojité v bodě a.

N á v o d. Použijte (b).

Poznámka.

(i) Z (a) a (c) plyne: f' spojitá v bodě $a \Longrightarrow$ existuje $f^*(a) \Longrightarrow$ existuje $f'(a)$. Nepřipomínají vám tyto implikace souvislost totálního diferenciálu a parciálních derivací?

(ii) Z (c) a (d) plyne: Nechť existuje vlastní f' v jistém otevřeném okolí bodu $a \in I$. Potom f' je spojitá v bodě a, právě když $a \in D_f^*$.

$\boxed{28.3^*}$ **Tvrzení.**

(a) Funkce f má v bodě a silnou derivaci $f^*(a)$ (tj. $a \in D_f^*$), právě když jsou splněny následující podmínky:

(i) existuje interval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset I$ takový, že $\alpha < a < \beta$ a f je absolutně spojitá na $\langle \alpha, \beta \rangle$.

(ii) existuje vlastní $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D_f}} f'(x) = A$.

Porovnejte s poznámkou 28.2 (ii). Viz též [D II], kap. VII, § 13.

N á v o d. Nechť $a \in D_f^*$. Zvolte reálná čísla α, β

$(\alpha < a < \beta,\ \langle\alpha,\beta\rangle \subset I)$ taková, že pro všechna $x_1, x_2 \in \langle\alpha,\beta\rangle$, $x_1 \neq x_2$ platí

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} < |f^*(a)| + 1.$$

Odtud plyne (i). Dále z 28.2.c vyplývá (ii).

Nechť platí (i) a (ii). Potom pro $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$ je

$$f(x) = f(\alpha) + (L)\int_\alpha^x f'.$$

Zvolte $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $(a-\delta,\ a+\delta) \subset \langle\alpha,\beta\rangle$ a pro $x \in (a-\delta,\ a+\delta)$, $x \neq a$, $x \in D_{f'}$ platí

$|f'(x) - A| < \varepsilon$. Je-li $a - \delta < x_1 < x_2 < a + \delta$, potom

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - A\right| = \left|\frac{1}{x_2 - x_1}\ (L)\int_{x_1}^{x_2} (f'(t) - A)\,dt\right| \leq \varepsilon .$$

(b) Funkce f má v bodě a silnou derivaci, právě když jsou splněny následující podmínky:

(i) existuje interval $\langle\alpha,\beta\rangle \subset I$ takový, že $a \in (\alpha,\beta)$ a f je spojitá na $\langle\alpha,\beta\rangle$.

(ii) D^+f je spojitá v bodě a.

N á v o d. Nechť $a \in D_f^*$. Zvolte interval $\langle\alpha,\beta\rangle$ podle (i). Spojitost plyne přímo z definice silné derivace. Je-li D^+f spojitá v bodě a, odvoďte z 7.9.c či 14.10.a, že f je lipschitzovská na okolí bodu a; nyní použijte (a).

28.4 **Příklady.**

(a) Definujte $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$

Ukažte, že funkce f je absolutně spojitá na $\langle -1,1\rangle$, $\lim_{x\to 0} f'(x)$ neexistuje a tedy neexistuje ani $f^*(0)$. Dokažte toto tvrzení přímo s použitím 28.3.a.

(b) Položte

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in (-1,0\rangle, \\ 0 & \text{pro } t \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}),\ n = 2,4,6,\dots, \\ t & \text{pro } t \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}),\ n = 1,3,5,\dots . \end{cases}$$

Pro $x \in (-1,1)$ položte

$$f(x) = (L) \int_0^x g(t)\, dt.$$

Dokažte, že $f^*(0) = 0$ a neexistuje derivace f' v bodech posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. K čemu slouží příklady z (a),(b)?

B. BODY STEJNOMĚRNÉ DERIVOVATELNOSTI FUNKCE

V tomto oddílu stále předpokládejme, že funkce f je definovaná na otevřeném intervalu $I \subset E_1$ a má na I vlastní derivaci f'.

28.5 Definice. Bod $\xi \in I$ se nazývá bodem stejnoměrné derivovatelnosti funkce f, jestliže:

ke každému $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U^{(\xi)}$ bodu ξ a $\delta > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0,\delta)$ a všechna $x \in U^{(\xi)}$, pro která $x + h \in I$ platí

$$\left|\Phi(x, h)\right| < \varepsilon \quad , \quad \text{kde}$$

$$\Phi(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) .$$

Bod $\xi \in I$ se nazývá bodem nestejnoměrné derivovatelnosti funkce f, jestliže není bodem stejnoměrné derivovatelnosti.

28.6 Cvičení.

(a) Bod $\xi \in I$ je bodem stejnoměrné derivovatelnosti funkce f, právě když $\xi \in D_f^*$.

(b) Buď $\xi \in I$. Označme

$$\psi(p;d) = \sup_{\substack{|h| \leq p \\ x \in \langle \xi - d; \xi + d \rangle \cap I}} \left|\Phi(x, h)\right|$$

pro $p > 0$, $d > 0$ a

$$\alpha(\xi) = \limsup_{\substack{[p,d] \to [0,0] \\ p > 0, d > 0}} \psi(p, d).$$

Dokažte následující tvrzení:

$\alpha(\xi) = 0$, právě když ξ je bodem stejnoměrné derivovatelnosti funkce f.

(c) Tedy platí následující ekvivalence:

$\alpha(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \xi$ je bod stejnoměrné derivovatelnosti funkce $f \Longleftrightarrow \xi \in D_f^* \Longleftrightarrow f'$ je spojitá v bodě ξ.

N á v o d. Užijte (b), (a), 28.2 (ii).

28.7* Cvičení. Nechť $\langle a,b\rangle \subset I$, $\beta > 0$. Potom množina

$$G_\beta = \{ x;\ x \in \langle a, b\rangle,\ \alpha(x) \geq \beta \}$$

je uzavřená a řídká v $\langle a, b\rangle$.

N á v o d. Nejdříve dokažte $G_\beta = \bar{G}_\beta$. Nechť G_β není řídká. Tedy existuje interval $\langle a', b'\rangle \subset G_\beta$. Buď $\xi \in \langle a', b'\rangle$. K libovolnému $\beta_1 < \beta$ a posloupnosti $\{\delta_n\}$, $\delta_n \searrow 0$ existuje bod $\xi' \in \langle a', b'\rangle$ a reálné číslo $h_1 \in (-\delta_1, \delta_1) - \{0\}$ tak, že platí

$$\left| \frac{f(\xi' + h_1) - f(\xi')}{h_1} - f'(\xi') \right| > \beta_1 .$$

Protože $f'(\xi')$ existuje, můžeme nalézt $h_2 > 0$, $|h_2| < |h_1|$ tak, že

$$\left| \frac{f(\xi' + h_2) - f(\xi')}{h_2} - \frac{f(\xi' + h_1) - f(\xi')}{h_1} \right| > \beta_1 .$$

Funkce $x \longmapsto \dfrac{f(x + h_2) - f(x)}{h_2}$ a

$x \longmapsto \dfrac{f(x + h_1) - f(x)}{h_1}$

jsou spojité v bodě ξ' a existuje okolí $U(\xi') \subset \langle a', b'\rangle$ bodu ξ' tak, že pro každý bod $x \in U(\xi')$ platí

$$\left| \frac{f(x + h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x + h_1) - f(x)}{h_1} \right| > \beta_1 .$$

Označte $\delta_2' = \min [\delta_2, |h_2|]$. Existuje $\xi'' \in U(\xi')$, $h_3 \in (-\delta_2', \delta_2') - \{0\}$ tak, že

$$\left| \frac{f(\xi'' + h_3) - f(\xi'')}{h_3} - f'(\xi'') \right| > \beta_1 .$$

1014-7781

Stejným způsobem jako se dokazovala existence okolí $U(f')=I_1$ dokažte, že existuje otevřený interval $I_2 \subset I_1$ s následující vlastností:
Existuje $h_4 > 0$, $|h_4| < |h_3|$ tak, že pro každé $x \in I_2$ platí

$$\left| \frac{f(x+h_3) - f(x)}{h_3} - \frac{f(x) + h_4) - f(x)}{h_4} \right| > \beta_1.$$

Budeme-li postupovat tímto způsobem dále, obdržíme klesající posloupnost otevřených množin $\{I_m\}$ a posloupnost bodů $\{h_m\}$,

$$|h_{2m}| < |h_{2m-1}| < \delta'_m \quad (\text{kde } \delta'_m = \min\,[\delta_m, |h_{2m-2}|])$$

tak, že pro každé $x \in I_m$ platí

$$\left| \frac{f(x+h_{2m-1}) - f(x)}{h_{2m-1}} - \frac{f(x+h_{2m}) - f(x)}{h_{2m}} \right| > \beta_1 .$$

Ukažte, že posloupnost $\{I_m\}$ je možno volit tak, aby

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m \neq \emptyset . \qquad \text{Zvolte} \qquad \eta \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m .$$

Pak pro každé přirozené číslo m platí

$$\left| \frac{f(\eta+h_{2m-1}) - f(\eta)}{h_{2m-1}} - \frac{f(\eta+h_{2m}) - f(\eta)}{h_{2m}} \right| > \beta_1.$$

Protože $h_{2m} \longrightarrow 0$, obdržíte spor s existencí derivace v bodě η.
Tedy G_β je řídká v $\langle a,b \rangle$.

C. MNOŽINA BODŮ NESPOJITOSTI DERIVACE FUNKCE

$\boxed{26.8}$* Věta. Nechť f je funkce definovaná na otevřené množině $M \subset E_1$, která má v každém bodě $x \in M$ vlastní derivaci $f'(x)$. Potom množina bodů nespojitosti funkce f' je typu F_σ a 1.kategorie. Formulujte podobné tvrzení pro body nestejnoměrné derivovatelnosti funkce f a pro body, ve kterých existuje silná derivace.

N á v o d. Je-li $M \subset E_1$ otevřená, pak existují otevřené intervaly $I_k \subset E_1$ tak, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = M$. Nechť a_k, b_k jsou koncové body intervalu I_k. Nechť $a_{kn} \searrow a_k$, $b_{kn} \nearrow b_k$ $(n \to \infty)$.

Buď v přirozené číslo. Potom

$$G^{k,n}_{\frac{1}{v}} = \left\{x;\ \ x \in \langle a_{kn}, b_{kn}\rangle,\ \ \alpha(x) \geq \frac{1}{v}\right\}$$

je uzavřená a řídká. Je-li A množina bodů nespojitosti funkce f', pak podle 28.6.c platí

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{v=1}^{\infty} G^{k,n}_{\frac{1}{v}} \qquad \text{a odtud plyne tvrzení.}$$

$\boxed{28.9}$ Cvičení.

(a) Nechť funkce f definovaná na otevřeném intervalu I má všude na I vlastní derivaci f'. Buď $\langle a,b\rangle \subset I$. Řekneme, že f' je stejnoměrná derivace funkce f vzhledem k $\langle a,b\rangle$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $h \in (0,\delta)$ a všechna $x \in \langle a,b\rangle$, pro která $x + h \in I$, platí

$$\left|\Phi(x, h)\right| < \varepsilon, \quad \text{kde } \Phi \text{ je zavedeno v 28.5.}$$

Porovnejte, jak tato definice souvisí s definicí v 28.5. Uveďte příklady!

(b) Jak závisí pojem "stejnoměrná derivace vzhledem k $\langle a,b\rangle$" na intervalu $\langle a,b\rangle$? Uveďte příklady!

1014-7781

T É M A 29

Záměna limity a derivace

Obsah: A. Záměna limity a derivace.

B. Stejnoměrná konvergence v bodě.

A. ZÁMĚNA LIMITY A DERIVACE

29.1 Cvičení. Zopakujte si větu o derivování "limitní funkce", kterou znáte z přednášek. Zkoumejte, zda jsou všechny předpoklady této věty (např. lokálně stejnoměrná konvergence, atd.) podstatné.

29.2* Věta. Nechť jsou funkce f_n, f, f_n', f' a Φ definované na intervalu $(a,b)\subset E_1$, vesměs spojité a nechť platí $f_n \longrightarrow f$, $f_n' \longrightarrow \Phi$. Potom platí $f' = \Phi$.

N á v o d.

(a) Zvolte libovolně interval $\langle c,d\rangle \subset (a,b)$ a pro každé $n\in N$ položte $H_n = \{t\in\langle c,d\rangle\,;\ |f_m'(t) - \Phi(t)| < 1$ pro všechna $m \geq n\}$. Dokažte užitím Baireovy věty, že existuje interval $\langle h,k\rangle\subset\langle c,d\rangle$ a $n_0\in N$ tak, že množina H_{n_0} je hustá v $\langle h,k\rangle$.

Posloupnost $\{f_m'\}$ je stejně omezená na $\langle h,k\rangle$. Z Lebesgueovy věty o záměně limity a integrálu a z vlastností neurčitého Lebesgueova integrálu plyne $\displaystyle\int_h^x \Phi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt = f(x) - f(h)$

a $f'(x) = \Phi(x)$ pro $x\in\langle h,k\rangle$. Odtud vyplývá, že $f' = \Phi$ na jisté husté podmnožině intervalu (a,b), a tedy i naše tvrzení.

(b) V návodu (a) jsme používali vět z teorie Lebesgueova integrálu. Bez jejich užití lze postupovat též tímto způsobem:

Označme G_n sjednocení všech otevřených intervalů $I\subset(a,b)$, pro které platí:

(i) $\displaystyle\sup_{t\in I}\Phi(t) - \inf_{t\in I}\Phi(t) < \frac{1}{n}$,

(ii) $-\frac{1}{n} + \inf_{t\in I} \Phi(t) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \sup_{t\in I} \Phi(t) + \frac{1}{n}$

pro libovolné $x, y \in I$, $x \neq y$.

Dokažte:

(α) Pro $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ je $f'(x) = \Phi(x)$.

(β) Množiny G_n, $n \in N$ jsou husté v (a,b).

(Postupujte takto: Zvolte libovolně interval $\langle c,d\rangle \subset (a,b)$ a položte $H_i = \left\{ t \in \langle c,d\rangle \,;\, |f_m'(t) - \Phi(t)| < \frac{1}{n} \text{ pro } m \geq i,\ m \in N \right\}$. Z Baireovy věty vyplývá, že existuje interval $\langle h,k\rangle \subset \langle c,d\rangle$ a $i_0 \in N$ tak, že H_{i_0} je hustá v $\langle h,k\rangle$. Pro $x \in \langle h,k\rangle$ zvolte otevřený interval I tak, že $x \in I$, $I \subset \langle h,k\rangle$, na kterém platí (i); pro f_m, $m \geq i_0$ bude na I platit i podmínka (ii), neboť pro $t \in I$ jest $\Phi(t) - \frac{1}{n} \leq f_m'(t) \leq \Phi(t) + \frac{1}{n}$; limitním přechodem ověřte, že (ii) platí i pro f. Je tedy $\langle h,k\rangle \subset G_n$, G_n je hustá v (a,b).)

Z Baireovy věty plyne, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ je hustá v (a,b), z čehož vyplývá dokazované tvrzení.

(c) Jiný možný postup důkazu - viz 29.17.

29.3 Poznámka. Porovnejte větu z odstavce 29.2 s větou připomenutou v poznámce 29.1. Uvědomte si, že ověření spojitosti funkcí vystupujících v předpokladech věty z 29.2 je jednodušší než vyšetřování stejnoměrné resp. lokálně stejnoměrné konvergence z předpokladů připomenuté věty.

29.4 Cvičení. Sestrojte posloupnost funkcí f_n, $f_n \longrightarrow f$, která

(a) vyhovuje předpokladům věty z 29.1 a nevyhovuje předpokladům věty z 29.2;

(b) vyhovuje předpokladům věty z 29.2 a nikoli předpokladům věty z 29.1.

N á v o d. Vyšetřete posloupnost funkcí

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n} x^2 \sin\frac{1}{x}\,, \quad x \in (-1,1) \quad \text{a}$$

$$g_n : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \quad x \in (0,1).$$

29.5* Cvičení. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť f_n, f, f_n' a Φ jsou spojité funkce definované na intervalu $(a,b) \subset E_1$ takové, že $f_n \longrightarrow f$, $f_n' \longrightarrow \Phi$. Pak existuje f' spojitá na (a,b).

Návod. Buď f Cantorova funkce na $\langle 0,1 \rangle$ (viz 4.22). Posloupnost f_n konstruujte takto: Položte pro $n \in N$ $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$; je-li M_n systém styčných intervalů n-tého řádu ke Cantorově diskontinuu (tj. $M_1 = \{(1/3, 2/3)\}$, $M_2 = \{(1/9, 2/9), (7/9, 8/9)\}$, atd.) a je-li $I \in M_n$, definujte $f_n(\bar{I}) = f(I)$; na množině $(0,1) - \bigcup_{I \in M_n \cup M_{n+1}} I$ dodefinujte f_n spojitě konstantami a na intervalech z M_{n+1} tak, aby f_n' byla spojitá. Dokažte, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle 0,1 \rangle$, $f_n' \longrightarrow 0$ na $\langle 0,1 \rangle$. Funkce f, jak známo, nemá v $\langle 0,1 \rangle$ spojitou derivaci - vyšetřované tvrzení tedy neplatí.

29.6* Cvičení. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť f_n, f, f_n', Φ jsou spojité funkce definované na intervalu $(a,b) \subset E_1$ takové, že $f_n \longrightarrow f$, $f_n' \longrightarrow \Phi$, a existuje vlastní $f'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Pak platí $f' = \Phi$.

Návod. Buď f funkce z odstavce 8.34. Nechť M_n jsou takové konečné neprázdné systémy otevřených podintervalů I na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, že platí

(i) Je-li $I, J \in M_n$, je $\operatorname{dist}(I, J) > 0$.

(ii) Je-li $A = \bigcup_{I \in M_n} I$; $c, d \in \bar{A}$, $c < d$, $A \cap (c,d) = \emptyset$, existuje právě jeden interval $J \in M_{n+1}$, $J \subset (c,d)$.

(iii) $M_n \subset M_{n+1}$.

Funkce f_n konstruujte podobně jako v předcházejícím příkladě. Ověřte, že splňují předpoklady věty a odvoďte spor!

29.7 Poznámka. Předcházející dvě cvičení ukazují, že předpoklady věty z 29.2 nelze v některých směrech "oslabit". Rozmyslete si další obdobné úlohy!

29.8 Cvičení. Formulujte a dokažte větu obdobnou větě z 29.2 pro řady funkcí.

29.9(??) <u>Problém.</u> Nechť funkce f je definovaná v $(a,b) \subset E_1$ a $f'(x)$ existuje vlastní pro všechna $x \in (a,b)$. Nechť $f' = 0$ na husté podmnožině intervalu (a,b). Rozhodněte, zda existují funkce f_n se spojitými derivacemi f_n' v (a,b) tak, že platí $f_n \longrightarrow f$, $f_n' \longrightarrow 0$.

29.10 <u>Problém.</u> Nechť f_n je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $(a,b) \subset E_1$, k nimž existují primitivní funkce. Nechť dále existuje funkce f tak, že platí $f_n \longrightarrow f$. Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro to, aby funkce f měla primitivní funkci?

29.11* <u>Cvičení.</u> Nechť funkce f_n definované v $(a,b) \subset E_1$ mají primitivní funkci, $f_n \longrightarrow f$ a je splněna podmínka

$$\forall x_0 \in (a,b)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in N\ \exists \delta > 0$$

$$\left[(n > n_0, |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right].$$

Pak existuje primitivní funkce k funkci f. Dokažte!

N á v o d. Dokažte, že f má primitivní funkci s přesností ε (viz 23.44) pro každé $\varepsilon > 0$.

<u>Poznámka.</u> Tvrzení z tohoto cvičení neřeší problém 29.10. Dokažte!

B. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE V BODĚ

29.12 <u>Definice.</u> Buďte f, f_n, $n \in N$, funkce definované na $(a,b) \subset E_1$ takové, že platí $f_n \longrightarrow f$. Buď $x_0 \in (a,b)$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k funkci f <u>stejnoměrně v bodě</u> x_0 (značíme $f_n \rightrightarrows f$ v $x_0 \in (a,b)$), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\forall n \geq n_0 \Longrightarrow | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon .$$

(Porovnejte stejnoměrnou konvergenci v bodě se stejnoměrnou konvergencí na množině!)

29.13 <u>Věta.</u> Buď $\{f_n\}$ posloupnost spojitých funkcí definovaných na intervalu $(a,b) \subset E_1$, $f_n \longrightarrow f$. Potom v každém intervalu $\langle c,d \rangle \subset (a,b)$

existuje bod $x_0 \in (c,d)$ tak, že platí $f_n \rightrightarrows f$ v $x_0 \in (c,d)$. Dokažte!

N á v o d. Buď $\varepsilon > 0$. Pro každé $n \in N$ položte

$H_n = \{x \in \langle c,d \rangle$; pro každé $p \geq n$, $q \geq n$ platí $|f_p(x) - f_q(x)| \leq$

$\leq \varepsilon\}$.

Z Baireovy věty dokažte existenci $n_0 \in N$ a intervalu $\langle h,k \rangle \subset \langle c,d \rangle$ tak, že $\langle h,k \rangle \subset H_{n_0}$. Použitím BC -podmínky pro stejnoměrnou konvergenci obdržíte dokazované tvrzení.

29.14 **Cvičení.** Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na $(a,b) \subset E_1$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ v $x_0 \in (a,b)$. Potom f je spojitá v bodě x_0.

29.15 **Cvičení.** Užitím tvrzení z 29.13 a 29.14 ukažte, že množina bodů spojitosti funkce $f \in B_1(\langle a,b \rangle)$ je hustá v intervalu $\langle a,b \rangle$ (viz téma 12).

29.16* **Věta.** Nechť f, g, f_n, $n \in N$ jsou funkce definované na intervalu $(a,b) \subset E_1$, $x_0 \in (a,b)$. Nechť jsou splněny následující podmínky:

(i) existuje vlastní $f_n'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$ a každé $n \in N$,

(ii) $f_n \longrightarrow f$ na (a,b),

(iii) $f_n' \rightrightarrows g$ v $x_0 \in (a,b)$.

Potom existuje $f'(x_0)$ a je $f'(x_0) = g(x_0)$.

N á v o d. Buď $\varepsilon > 0$, $m,n \in N$. Zvolte $x \in (a,b)$. Potom

$f_m(x) - f_m(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0)) = f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_0) - f_n(x_0)) =$

$= (x - x_0)(f_m'(\xi) - f_n'(\xi))$, kde ξ leží mezi x_0 a x.

Z (iii) plyne existence $n_0 \in N$ a $\delta > 0$ tak, že pro $m, n \geq n_0$, $|x - x_0| < \delta$ je $|f_m(x) - f_m(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0))| \leq \varepsilon\, |x - x_0|$.

Odtud vyplývá

$|f(x) - f(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0))| \leq \varepsilon\, |x - x_0|$, tj. pro $n \geq n_0$, $n \in N$ a $0 < |x - x_0| < \delta$ je

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \varepsilon .$$

Lze nalézt kladné $\delta_1 < \delta$ tak, aby pro $0 < |x - x_0| < \delta_1$ a pro $n \geqslant n_0$ platilo

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0) \right| < 2\varepsilon$$

a tedy s použitím (iii) dostaneta, že pro $0 < |x - x_0| < \delta_1$ je

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| < 3\varepsilon \ .$$

$\boxed{29.17}$ Cvičení. Pomocí 29.14 a 29.16 dokažte opět větu z odstavce 29.2.

$\boxed{29.18}$ Cvičení. Formulujte tvrzení analogické tvrzení z odstavce 29.16 pro řady a dokažte jej! Uvědomte si rozdíl mezi tímto tvrzením a větou, kterou znáte z přednášek.

T É M A 30

Interpolace a aproximace

Obsah: A. Lagrangeovy interpolační polynomy.

B. Weierstrassova věta.

C. Dodatky.

A. LAGRANGEOVY INTERPOLAČNÍ POLYNOMY

30.1 Lemma. Nechť v intervalu $\langle a,b\rangle$ je dáno $n+1$ různých bodů, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Dokažte, že existují polynomy ℓ_k $(k = 0,\dots,n)$ stupně n-tého, tak, že

$$\ell_k(x_i) = 0 \quad \text{pro } i \neq k, \qquad \ell_k(x_k) = 1.$$

30.2 Věta (Lagrangeovy interpolační polynomy). Nechť funkce f je definována na $\langle a,b\rangle$, $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ jsou body $\langle a,b\rangle$ jako v 30.1. Dokažte, že existuje právě jeden polynom L_n stupně nejvýše n-tého tak, že $L_n(x_i) = f(x_i)$ $(i=0,\dots,n)$.

N á v o d. Pro důkaz existence položte $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_i(x)$, při důkazu jednoznačnosti uvažte počet různých kořenů polynomu n-tého stupně.

Poznámka. Polynomu L_n se říká Lagrangeův interpolační polynom n-tého stupně pro funkci f.

30.3 Cvičení.

(a) Pomocí 30.2 dokažte, že polynom n-tého stupně je jednoznačně určen svými hodnotami v $n+1$ různých bodech!

(b) Dokažte pomocí (a), že pro libovolné $n\in N$, libovolné navzájem různé body $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ a libovolné $K\in E_1$ existuje $M\in E_1$ tak, že pro libovolný polynom $P : x \to c_0x^n + \dots + c_n$ s vlastností $|P(x_i)| \leq K$, $i=0,\dots,n$ platí $|c_i| \leq M, i=0,\dots,n$ (rozmyslete důkladně!).

N á v o d. Uvažte, že soustava $c_0 x_i^n + \dots + c_n = P(x_i)$, $i=0,\dots,n$ má právě jedno řešení, které lze psát ve tvaru $c_j = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} P(x_i)$, kde α_{ij} nezávisí na P.

(c) Nechť funkce f má $(n+1)$-derivaci v intervalu $\langle a,b \rangle$. Dokažte, že ke každému $x \in \langle a,b \rangle$ existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

N á v o d. Použijte Rolleovu větu na funkci

$$\varphi : y \longrightarrow f(y) - L_n(y) - \frac{f_n(x) - L_n(x)}{(x-x_0) \dots (x-x_n)} (y - x_0) \dots (y - x_n).$$

30.4 Cvičení.

(a) Buď $\langle a,b \rangle \subset E_1$. Pomocí 30.3.c dokažte, že při libovolném výběru bodů $\{x_{i,n}\}_{i=0}^{n}$ $(n=1,2,\dots)$ Lagrangeovy interpolační polynomy pro funkci $\exp : x \longrightarrow e^x$ konvergují stejnoměrně k $\exp$ na $\langle a,b \rangle$.

(b) Existuje spojitá funkce na $\langle a,b \rangle$, která tuto vlastnost nemá. Viz např. I.P. Natanson, Konstruktivnaja teorija funkcij, 1949, část 3, kap. II. Lze však formulovat toto obecnější tvrzení: Buď f spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$, buďte $\{x_{i,n}\}_{i=0}^{n}$ navzájem různé body z $\langle a,b \rangle$ $(n=1,2,\dots)$. Označme $E_n(f)$ hodnotu nejlepší aproximace f polynomy stupně nejvýše n-tého (viz 30.6) a $\gamma_n = \max \sum_{i=0}^{n} |\ell_i^n(x)|$, kde ℓ_i^n je definována obdobně jako v 30.1. Jestliže $\lim_{n \to \infty} \gamma_n E_n(f) = 0$, potom $L_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b \rangle$. Dokažte!

N á v o d. Označíme-li P_n n-tý polynom nejlepší aproximace pro f (viz 30.6), potom pro $x \in \langle a,b \rangle$ je

$$|f(x) - L_n(f,x)| \leq |f(x) - P_n(x)| + |L_n(f - P_n, x)| ,$$

odkud snadno dokážete tvrzení.

Poznámka. Při zadané "matici" bodů $\{x_{i,n}\}_{i=0}^{n}$, $n = 1,2,\dots$, není ovšem odhad rychlosti růstu γ_n snadný. Lze dokázat (viz literatura citovaná v (b), str. 512), že vždy je

$\gamma_n > \dfrac{\log n}{8\sqrt{\pi}}$ a tento odhad nelze obecně řádově zlepšit (tamtéž, str. 539). To je tzv. Bernstein-Faberova věta.

B. WEIERSTRASSOVA VĚTA

$\boxed{30.5}$ **Tvrzení.** Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a,b\rangle$ svého maxima; položme $\|f\| = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)|$. Dále označíme $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ množinu všech funkcí spojitých na $\langle a,b\rangle$, H_n množinu polynomů stupně $\leq n$ a $H = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n$. Dokažte, že

(i) $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ je lineární (= vektorový) prostor při obyčejném definování součtu funkcí a násobku funkce číslem. Dále je H lineární podprostor $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ nekonečné dimense (tj. ke každému $n\in N$ můžeme nalézt polynomy $P_1,\ldots,P_n\in H$, které jsou na $\langle a,b\rangle$ lineárně nezávislé). Tedy i $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ má nekonečnou dimensi.

(ii) $\rho(f,g) = \|f-g\|$ je metrika na $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$, ve které je $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ úplný metrický prostor. (Uvědomte si, že konvergence v metrice ρ je stejnoměrná konvergence.)

$\boxed{30.6}$ **Věta.** Položme $\hat{E}_n(f) = \inf\limits_{P\in H_n} \|f-P\|$ pro $f\in\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$.

Jestliže $f\in\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$, $n\in N$, potom existuje $\hat{P}\in H_n$ tak, že $\hat{E}_n(f) = \|f-\hat{P}\|$. Dokažte! (Takový polynom $\hat{P}$ nazýváme polynomem nejlepší aproximace n-tého stupně pro funkci f.)

N á v o d. Z definice $\hat{E}_n(f)$ odvoďte existenci posloupnosti $\{P_k\}\subset H_n$ takové, že $\hat{E}_n(f) \leq \|f-P_k\| \leq \hat{E}_n(f) + \frac{1}{k}$.

Pro tyto polynomy P_k je $\|P_k\| \leq \|f\| + \hat{E}_n(f) + 1 = M$.

Pomocí 30.3.b dokažte, že při označení $P_k(x) = a_0^{(k)}x^n + \ldots + a_n^{(k)}$ existuje K tak, že $|a_i^{(k)}| \leq K$ pro $i=0,\ldots,n$, $k=1,\ldots$.

Pomocí Bolzano-Weierstrassovy věty o existenci hromadné hodnoty posloupnosti ukažte, že existuje $\hat{P}\in H_n$ a vybraná posloupnost $\{P_{k_j}\}$ taková, že $\lim\limits_{j\to\infty} \|P - P_{k_j}\| = 0$. Nyní dokažte, že $\hat{P}$ je hledaný polynom nejlepší aproximace.

30.7 <u>Weierstrassova věta.</u> Buď f spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje polynom P tak, že pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$ platí

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon .$$

Důkaz viz [D II], kap. VI, § 24, věta 180.

30.8 <u>Cvičení.</u>

(a) Na základě 30.6 a 30.7 si uvědomte, že limita $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{E}_n(f) = 0$.

(b) Buď f spojitá funkce na E_1. Nechť ke každému $\varepsilon > 0$ existuje polynom P tak, že

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } x \in E_1.$$

Potom f je polynom. (Uvědomte si, že spojitou funkci na E_1 tedy nelze obecně aproximovat stejnoměrně polynomy!)

N á v o d. Existuje posloupnost polynomů P_n tak, že $P_n \rightrightarrows f$ na E_1 a tedy přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna $x \in E_1$ a všechna přirozená čísla $m,n \geq n_0$ platí

$$|P_m(x) - P_n(x)| < 2.$$

Tedy $P_m - P_n$ je polynom nultého stupně pro všechna $m,n \geq n_0$. Limitním přechodem obdržíme $f = P_n + \text{konst.}$

(c) Množina $\mathscr{C}(\langle 0,1\rangle)$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$ opatřena metrikou $\rho(f,g) = \sup\limits_{t\in\langle 0,1\rangle} |f(t) - g(t)|$ je separabilní metrický prostor. Dokažte!

30.9* <u>Lemma.</u> Nechť f má v E_1 spojité derivace až do řádu k a vně jistého kompaktního intervalu je nulová. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ má funkce $g_\lambda(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\lambda(x-t)^2}\, dt$ derivace všech řádů a je

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{x\in E_1} |g_\lambda^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| = 0, \quad j=0,\dots,k.$$

N á v o d. Ukažte, že $g_\lambda^{(j)}(x) - f^{(j)}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f^{(j)}(t) - f^{(j)}(x))\, e^{-\lambda(x-t)^2} dt$. Zvolte $\varepsilon > 0$. $f^{(j)}$ je stejnoměrně spojitá na E_1 (proč?) a tedy existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|x - t| < \delta$ je $|f^{(j)}(t) - f^{(j)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Buď $M > \sup_{x \in E_1} |f^{(j)}(x)|$ (ukažte, že takové M existuje). Platí

$$|g_\lambda^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \dots dt + \int_{-\infty}^{x-\delta} \dots dt + \int_{x+\delta}^{\infty} \dots dt \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{E_1} e^{-\lambda t^2} dt + 4M \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda t^2} dt \right) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\, 4M\, e^{-\frac{\lambda\delta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} dt = \frac{\varepsilon}{2} + 4M \sqrt{2}\, e^{\frac{-\lambda\delta^2}{e}}$$

pro všechna dostatečně velká x.

30.10* Zobecnění Weierstrassovy věty. Nechť $g \in C^k(\Omega)$, kde Ω je otevřená podmnožina E_1. Potom pro každý kompaktní interval $\langle a,b \rangle \subset \Omega$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom P tak, že $\sup_{x \in \langle a,b \rangle} |g^{(j)}(x) - P^{(j)}(x)| < \varepsilon$, $j = 0,\dots,k$.

Návod. Buď $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(E_1)$, $\varphi(x) = 0$ pro $x \notin \langle a-\delta, b+\delta \rangle$, $\varphi(x) = 1$ pro $x \in \langle a,b \rangle$. Buď $\varepsilon > 0$, položme $f(x) = g(x)\,\varphi(x)$ pro $x \in \Omega$, $f(x) = 0$ pro $x \notin \Omega$. Podle lemmatu 30.9 existuje $\lambda > 0$ tak, že $|g_\lambda{}^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $x \in E_1$, $j=0,\dots,k$; pro $x \in \langle a,b \rangle$ tedy platí $|g_\lambda^{(j)}(x) - g^{(j)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nyní ale řada $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (-1)^p \lambda^p (x-t)^{2p}$ konverguje stejnoměrně k $e^{-\lambda(x-t)^2}$ vzhledem k x, $t \in \langle a,b \rangle$. Obdobné tvrzení platí pro j-té derivace, $j=0,\dots,k$. Zvolíme-li tedy n dostatečně velké a položíme-li $P(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} (-1)^p \lambda^p \int_{a-\delta}^{b+\delta} (x-t)^{2p} f(t)\, dt$ bude pro $x \in \langle a,b \rangle$ platit $|g_\lambda^{(j)}(x) - P^{(j)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $j=0,\dots,k$ a tedy $|g^{(j)}(x) - P^{(j)}(x)| < \varepsilon$, $j=0,\dots,k$, $x \in \langle a,b \rangle$.

30.11 Cvičení.

(a) Symbolem $\mathcal{C}^k(\langle 0,1 \rangle)$ označme množinu všech funkcí definovaných na intervalu $\langle 0,1\rangle$, které mají spojité derivace až do řádu k na $\langle 0,1\rangle$. Na množině $\mathcal{C}^k(\langle 0,1\rangle)$ zavedeme metriku ρ vztahem $\rho(f, g) = \sum_{i=0}^{n} \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |f^{(i)}(t) - g^{(i)}(t)|$.

Potom $(\mathcal{C}^k(\langle 0,1\rangle), \rho)$ je separabilní metrický prostor.

(b) Pomocí Weierstrassovy věty o stejnoměrné aproximaci dokažte, že ke každé spojité funkci f na (a,b) existuje primitivní funkce.

N á v o d. Zvolte $\langle c,d\rangle \subset (a,b)$. Existuje posloupnost polynomů $\{P_m\}$ tak, že $P_n \rightrightarrows f$ na $\langle c,d\rangle$. Existují polynomy Q_n tak, že $Q_n' = P_n$. Tedy $Q_n' \rightrightarrows f$ na $\langle c,d\rangle$. Podle (které?) věty existuje funkce g na intervalu $\langle c,d\rangle$ s vlastnostmi

$$(Q_n(x) - Q_n(c)) \rightrightarrows g \quad \text{na } \langle c,d\rangle, \quad g' = f \quad \text{na } \langle c,d\rangle .$$

Nyní stačí vyjádřit interval (a,b) jako sjednocení rostoucí posloupnosti uzavřených intervalů. Další postup je nyní již snadný.

C. DODATKY

30.12 **Tvrzení.** Buď f spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$ taková, že $f(0) = 0$. Potom existuje posloupnost polynomů $\{A_n\}$, $A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} x^k$ (kde ke každému n existuje k_0 tak, že pro všechna $k \geq k_0$ je $a_{k,n} = 0$) tak, že

$$A_n \rightrightarrows f \quad \text{na } \langle 0,1\rangle \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} a_{k,n} = 0 \quad \text{pro } k=0,1,\dots .$$

N á v o d. Pro každé přirozené číslo n najděte $c_n \in \langle 0,1\rangle$ tak, že $|f(x)| < \frac{1}{n}$ pro všechna $x \in \langle 0, c_n\rangle$. Definujme

$$g(x) = \begin{cases} c_n^{-1} f(c_n) & \text{pro } x \in \langle 0, c_n) \\ x^{-n} f(x) & \text{pro } x \in \langle c_n, 1\rangle . \end{cases}$$

Zvolte polynom P_n tak, aby pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$ platilo

$$|P_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n} . \quad \text{Položte} \quad A_n(x) = x^n P_n(x)$$

a dokažte, že posloupnost $\{A_n\}$ splňuje tvrzení věty.

$\boxed{30.13}$ **Věta.** Buď Φ spojitá funkce na $\langle 0,1\rangle$. Polynomem ve Φ rozumíme $P_\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\Phi(x)\right]^k$.

Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby k libovolné spojité funkci f na $\langle 0,1\rangle$ existovala posloupnost $\{P_{\Phi,n}\}$ polynomů ve Φ s vlastností $P_{\Phi,n} \rightrightarrows f$ na $\langle 0,1\rangle$ je, aby Φ byla ryze monotonní na $\langle 0,1\rangle$. Dokažte!

N á v o d. Je-li Φ rostoucí na $\langle 0,1\rangle$, použijte Weierstrassovu větu na funkci $f * \Phi^{-1}$. Druhou implikaci dokažte sporem; předpokládejte, že existují $x_1, x_2 \in \langle 0,1\rangle$, $x_1 \neq x_2$, pro něž $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$. Funkci $f(x) = x$ nemůžete aproximovat. Tím obdržíte spor.

T É M A 31

Zavedení elementárních funkcí

Obsah: A. Úvod.

B. Funkce logaritmus jako řešení funkcionální rovnice.

C. Elementární funkce jako řešení diferenciálních rovnic.

D. Eulerova rovnice.

A. ÚVOD

31.1 Opakování. V přednášce z matematické analýzy se v prvním semestru zavádějí funkce sin, log funkcionální rovnicí. Zpravidla bez důkazu se vysloví následující věty:

Věta A. Existuje právě jedno reálné číslo (které označíme π) a právě jedna reálná funkce sin tak, že

(I_s) funkce sin je definovaná v E_1,

(II_s) $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \,.\, \sin(\frac{\pi}{2} - y)$, pro všechna $x,y \in E_1$,

(III_s) $\sin 0 = 0$,

(IV_s) funkce sin je rostoucí v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$,

(V_s) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Věta B. Existuje právě jedna funkce log s vlastnostmi

(I_L) funkce log je definovaná v intervalu $(0,+\infty)$,

(II_L) $\log(xy) = \log x + \log y$ pro všechna $x,y \in E_1$,

(III_L) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Lehko se nyní odvodí základní vlastnosti funkcí sin a log. Funkce cos se zavede vztahem

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

a funkce exp se definuje jako inversní funkce k funkci log na intervalu $(0,+\infty)$. V průběhu přednášek se pak věty A a B dokáží. Naznačme stručně myšlenky, jakým způsobem.

Začneme nejdříve s funkcí log. Její jednoznačnost vyplyne z tvrzení, že $\log 1 = 0$ a z tvrzení, že $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro každé $x \in (0,+\infty)$. (Odůvodněte podrobně!) Zavedeme-li funkci E vztahem

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in E_1$$

lehko zjistíte, že tato mocninná řada má poloměr konvergence $+\infty$, není těžké dokázat, že $E(0) = 1$, $E(x+y) = E(x)\,E(y)$ pro všechna $x,y \in E_1$, E je spojitá, kladná a rostoucí na E_1, $\lim_{x\to+\infty} E(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} E(x) = 0$ a že inversní funkce k funkci E splňuje požadavky (I_L) - (III_L). Poněkud obtížnější je důkaz věty A pro funkci sin. Z axiomů (I_s) - (V_s) odvodíme, že funkce sin má derivace všech řádů a pomocí Taylorova rozvoje odvodíme, že $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ Zavedeme-li nyní funkce S, C vztahy

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \in E_1,$$

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad x \in E_1$$

(obě mocninné řady mají poloměr konvergence $+\infty$!) a zadefinujeme-li π vztahem $\pi = \inf\left\{x > 0;\ C\left(\frac{x}{2}\right) = 0\right\}$, ukážeme, že funkce S a reálné číslo π vyhovují tvrzení věty A. Jednoznačnost funkce sin a čísla π pak vyplyne právě z Taylorova rozvoje (podrobně proveďte!).

B. FUNKCE LOGARITMUS JAKO ŘEŠENÍ FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Ukážeme jiný způsob řešení funkcionální rovnice $f(xy) = f(x) + f(y)$ - bez použití mocninných řad.

31.2 Lemma. Ke každému $a > 1$ a každému $x > 0$ existuje celé m tak, že $a^m \leq x \leq a^{m+1}$. Dokažte!

N á v o d. $\{a^m\}_{-\infty}^{\infty}$ je rostoucí. Pro $x \geq 1$ vede předpoklad $a^m \leq x$ pro všechna $m > 0$ ke sporu.

31.3 Lemma. Ke každému $a > 1$ a každému n celému, $n \geq 1$, existuje

$z > 1$, pro něž platí $z^n = a$. Dokažte!

N á v o d. Definujte indukcí posloupnost $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, $z_0 = a$, $z_n^2 \leq z_{n-1}$, $z_n > 1$ pro $n \in N$.

31.4 Věta. Pro každé $a > 1$ existuje právě jedna rostoucí funkce $f : (0,+\infty) \longrightarrow E_1$ tak, že $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(a) = 1$. Funkce f je navíc homeomorfismem $(0,+\infty)$ na E_1. Dokažte!

N á v o d. Položte $A_x = \left\{ \frac{m}{n} ;\ a^m \leq x^n,\ m,n \text{ celá},\ n > 0 \right\}$. Pro jednoznačnost dokažte $f(x) = \sup A_x$; použijte 31.2 na číslo x^n. Pro existenci ověřte, že funkce $f : x \longmapsto \sup A_x$ vyhovuje větě. Ukažte, že

$$x,y > 0,\quad a^m \leq x^n \leq a^{m+1},\quad a^k \leq y^n \leq a^{k+1} \implies$$
$$\left| f(xy) - f(x) - f(y) \right| < \frac{2}{n} .$$

Z toho dokažte pomocí 31.2 žádanou identitu. Funkce f je spojitá v bodě $x \in (0,+\infty)$: zvolte $\frac{1}{n} < \varepsilon$, a pak číslo z podle 31.3; $\delta > 0$ volte tak, aby $\frac{x+\delta}{x} < z$ a zároveň $\frac{x-\delta}{x} > \frac{1}{z}$. Protože funkce f je rostoucí, stačí nyní pouze dokázat, že $f((0,+\infty)) = E_1$.

31.5 Věta. Ke každému $a > 0$, $a \neq 1$ existuje právě jedno spojité $f : (0,+\infty) \longrightarrow E_1$ tak, že $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(a) = 1$. Dokažte!

N á v o d. Stačí dokázat jednoznačnost. Zvolte $b > 1$, najděte podle 31.4 f_0 tak, aby $f_0(xy) = f_0(x) + f_0(y)$. Položte $h = f * f_0^{-1}$. Potom h je spojité zobrazení E_1 na E_1, $h(x + y) = h(x) + h(y)$. Tudíž podle 18.4 $h(x) = c\,x$ a tedy $f(x) = c\,f_0(x)$.

Poznámka. Funkci f z věty 31.5 nazýváme logaritmem o základu a a píšeme $f(x) = \log_a x$. Naopak tedy můžeme $\log_a$ definovat jako jediné spojité řešení funkcionální rovnice $f(xy) = f(x) + f(y)$ na $(0,+\infty)$, splňující podmínku $f(a) = 1$.

31.6 Cvičení. Dokažte

(a) $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$,

(b) $\lim\limits_{x \to 0_+} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = +\infty$ pro $a > 1$,

(c) jestliže $a > 0$, $a \neq 1$, potom zobrazení inversní k $\log_a$ nazýváme exponencielou se základem a ($g : x \longmapsto a^x$, definitoricky klademe $1^x = 1$); odvoďte jeho základní známé vlastnosti.

31.7 Tvrzení. Zobrazení $f : [x,y] \longmapsto x^y$ je spojité v $(0,+\infty) \times E_1$; limita $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ existuje pro všechna a na hranici této oblasti, vyjma bodu $[0,0]$. Dokažte!

Návod. Uvažte, že $x^y = a^{y \log_a x}$.

31.8 Tvrzení. Libovolné spojité zobrazení $g : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$, pro něž $g(x\,y) = g(x)\,g(y)$ má tvar $g(x) = x^a$, kde $a \in E_1$. Dokažte!

Návod. Zvolte $b > 1$ a definujte $f : E_1 \longrightarrow E_1$ předpisem $f(x) = \log g(b^x)$; ukažte jako v 31.5, že $f(x) = c\,x$.

31.9 Poznámka. Zavést logaritmus o libovolném základu lze také jiným způsobem. Mějme funkcionální rovnici $f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} f(x)$. Každé její řešení na intervalu $(0,+\infty)$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ a není identicky nula, se nazývá logaritmem o obecném základu. Lze ukázat, že každá taková funkce je tvaru

$$(\nabla) \quad \lambda_a : x \longmapsto \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2^{-n}} - 1}{a^{2^{-n}} - 1} \quad \text{pro nějaké} \quad a \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

Číslo a nazýváme základem logaritmu ($\lambda_a(a) = 1$) a funkci λ_a logaritmem o základu a. K důkazu tohoto tvrzení je třeba znalosti dosti rozsáhlého aparátu; hlavně se užívají věty o monotonních a konvexních řešeních rovnic

$$\varphi[f(x)] - \varphi(x) = F(x) \qquad \text{a} \qquad \varphi[f(x)] = g(x)\,\varphi(x).$$

Pokud funkce f, F (resp. f, g) splňují jisté podmínky, pak existuje třída monotonních řešení φ a každé toto řešení lze zapsat vzorcem, z něhož je možno odvodit (∇). Zájemcům o toto téma dobře poslouží kniha: M. Kuczma, Functional equations, PWN 1969, Warszawa.

31.10 Poznámka. (Jiný přirozený způsob zavedení logaritmu.)

Položte $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Ukažte, že tato funkce je logaritmus, tj. splňuje axiomy (I_L) - (III_L) (viz [J I], kap. VII, § 2). Exponenciela se nyní definuje jako inversní funkce k logaritmu (srovnej s 31.1).

C. ELEMENTÁRNÍ FUNKCE JAKO ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

31.11 Věta o neurčitých koeficientech. Nechť řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mají kladný poloměr konvergence a nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ v jistém okolí bodu 0. Potom $a_n = b_n$ pro všechna n. Dokažte (viz 21.7.b)!

31.12 Lemma. Nechť je dána diferenciální rovnice $y' = y$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. Dokažte: za předpokladu, že tato rovnice má řešení f, které je analytické v bodě 0 (viz téma 21), je nutně $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ v jistém okolí bodu 0.

Návod. K určení koeficientů použijte větu o derivaci mocninné řady a větu 31.11.

31.13 Cvičení. Dokažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ má poloměr konvergence $+\infty$, a tedy její součet je řešením úlohy 31.12 na E_1.

31.14 Poznámka. Uvědomte si, že 31.13 odstraňuje předpoklad existence analytického řešení, který byl v 31.12 nutný (proč?). Metoda 31.12, 31.13 je jednou z metod řešení diferenciálních rovnic-řešení pomocí řad. Zopakujte ještě jednou její princip!

31.15 Cvičení. Položme pro z komplexní $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Dokažte, že $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Návod. Použijte větu o násobení absolutně konvergentních řad (viz [D II], kap. III, § 4).

31.16 Cvičení. Omezíme-li se v 31.15 na reálná x a definujeme-li funkci exp předpisem $\exp x = e^x$, $x \in E_1$, lehko odvodíme všechny známé vlastnosti exponenciální funkce.

1014-7781

31.17 **Cvičení.** Odstavce 31.12 - 31.16 dokazují existenci exponenciální funkce. Odvoďte odtud, že existuje právě jedna funkce log taková, že splňuje podmínky (I_L) - (III_L) úvodu. Ukažte, že vynecháním kterékoliv vlastnosti (I_L) - (III_L) se naruší jednoznačnost. Vypište další vlastnosti funkce log.

31.18 **Cvičení.** Metodou odstavců 31.12 - 31.16 dokažte existenci a jednoznačnost funkce sin s vlastnostmi (I_s) - (V_s) úvodu.

N á v o d. Řešte rovnici $y'' + y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Pro jednoznačnost ukažte, že každá funkce f splňující (I_s) - (V_s) je analytická v bodě 0 a řeší uvedenou rovnici. Použijte věty 31.11.

31.19 **Cvičení.** Naznačte, jak lze z 31.18 vybudovat teorii goniometrických funkcí.

31.20 **Cvičení.** Položte v analytickém vyjádření sin, které dostanete v 31.18, z komplexní a analogicky toto učiňte pro řadu vyjadřující cos. Dokažte, že pro libovolné z komplexní, $z = x + iy$, je $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (Eulerův vztah).

31.21 **Poznámka.** Z Eulerova vztahu lze pohodlně dokázat Moivreovu větu, rovněž z něho plyne, že komplexní exponenciela je funkce $2\pi i$-periodická, tedy např. nemá v komplexním oboru inversní funkci.

D. EULEROVA ROVNICE

Na závěr předvedeme pro zpestření jeden příklad funkcionální rovnice.

31.22* **Eulerova rovnice.** Eulerovou rovnicí nazýváme funkcionální rovnici

$$\varphi(x + \varphi(x)) = \varphi(x) \qquad (\triangle)$$

Ukažte, že jediná řešení této rovnice v E_1, která mají Darbouxovu vlastnost, jsou konstanty.

N á v o d. Nechť φ má Darbouxovu vlastnost a splňuje $(\triangle)$ pro všechna $x \in E_1$. Nechť existuje $a \in E_1$ tak, že $\varphi(a) > 0$. Položte $\psi(x) = x + \varphi(x)$ a ukažte, že $\psi^n(x) = x + n\varphi(x)$, kde $\psi^0(x) = x$, $\psi^n(x) = \psi(\psi^{n-1}(x))$. Dále ukažte, že $\varphi[\psi^n(x)] = \varphi(x)$ a pro všechna $x \in \langle a, \psi(a) \rangle$

1014-7781

$$\psi^n(a) \leq \psi^n(x) \leq \psi^{n+1}(a) \qquad (\Delta\Delta)$$

Jestliže $(\Delta\Delta)$ neplatí, pak existuje $b \in (a, \psi(a))$, pro něž nastává jedna z těchto dvou možností:

$$\psi^n(b) < \psi^n(a) < \psi^{n+1}(a) ,$$

$$\psi^n(a) < \psi^{n+1}(a) < \psi^n(b) .$$

V prvním případě existuje $c \in (b, \psi(a))$ tak, že $\psi^n(c) = \psi^n(a)$. Odtud $\varphi(a) = \varphi(c)$ a $a = c$. Obdobně ukažte, že nemůže nastat ani druhý případ. Z $(\Delta\Delta)$ plyne

$$a - x \leq n\left[\varphi(x) - \varphi(a)\right] \leq a - x + \varphi(a)$$

pro všechna $x \in \langle a, \psi(a)\rangle$ a všechna $n \in N$. Tedy pro $x \in \langle a, \psi(a)\rangle$ je $\varphi(x) = \varphi(a)$. Stejnou konstrukci lze provést v bodě $\psi^k(a)$, odkud plyne, že $\varphi(x) = \varphi(a)$ pro $x \in \langle \psi^k(a), \psi^{k+1}(a)\rangle$. Jelikož $\lim\limits_{k \to \infty} \psi^k(a) = +\infty$, platí $\varphi(x) = \varphi(a)$ pro všechna $x \geq a$, a tedy i pro $x \in E_1$.

$\boxed{31.23}$ Cvičení. Ukažte, že existuje nekonstantní řešení Eulerovy rovnice.

1014-7781

T É M A 32

Záměnnost u funkcí dvou proměnných

Obsah: A. Záměnnost limit.

B. Záměnnost parciálních derivací.

A. ZÁMĚNNOST LIMIT

32.1 Věta. Je-li funkce f spojitá v okolí bodu $[a,b]$, potom platí

$$(\heartsuit)\quad \lim_{[x,y]\to[a,b]} f(x,y) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right).$$

32.2 Cvičení.

(a) Uvědomte si přesný význam symbolů vystupujících ve vztahu ($\heartsuit$)!

(b) Stačí pro platnost vztahu ($\heartsuit$), že funkce f je spojitá v bodě $[a,b]$?

32.3 Cvičení. Limity ve vztahu ($\heartsuit$) označte po řadě (I),(II),(III). Dále nechť $[a,b] = [0,0]$. Dokažte následující tvrzení:

a) Pro funkci

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

neexistuje (I), existují (II),(III) a (II) = (III).

(b) Pro funkci

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} y + x \sin\dfrac{1}{y} & \text{pro } y \neq 0, \\ 0 & \text{pro } y = 0 \end{cases}$$

neexistuje (II), existují (I),(III) a (I) = (III).

(c) Pro funkci

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} x + y \sin\dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

neexistuje (III), existují (I),(II) a (I) = (II).

(d) Pro funkci

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{y} + y \sin\dfrac{1}{x} & \text{pro } xy \neq 0 \\ 0 & \text{pro } xy = 0 \end{cases}$$

existuje (I) a neexistuje (II),(III).

(e) Pro funkci

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} + y \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

existuje (II) a neexistují (I),(III).

(f) Pro funkci

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} + x \sin \dfrac{1}{y} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

existuje (III) a neexistují (I),(II).

(g) Pro funkci

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

existují (II),(III), (II) $\neq$ (III) a neexistuje (I).

32.4 Cvičení.

(a) Zjistěte, zda existuje funkce $f : E_2 \longrightarrow E_1$ taková, že neexistuje žádná z limit (I),(II),(III).

(b) Zjistěte, zda existuje funkce $f : E_2 \longrightarrow E_1$ taková, že existují limity (I),(II),(III) a všechny jsou navzájem různé.

(c) Dokažte následující tvrzení: Nechť existuje limita (I). Nechť v jistém okolí bodu b existují limity $\lim\limits_{x \to a} f(x,y) = \varphi(y)$. Potom existuje limita (III) a (I) = (III).

B. ZÁMĚNNOST PARCIÁLNÍCH DERIVACÍ

V tomto oddíle se budeme zabývat záměnností parciálních derivací, tj. zkoumáním, zda platí rovnost

$$(☼) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(a,b) .$$

32.5 Cvičení. Ukažte, že pro funkci

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} xy\, \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

v bodě $[a,b] = [0,0]$ neplatí rovnost (☼). Vyšetřete též spojitost funkcí f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ v bodě $[0,0]$, resp. v jeho okolí.

32.6 **Tvrzení.**

(a) Nechť funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ jsou spojité v bodě $[a,b]$. Potom platí (☼). (Viz např. [D I], věta 170.)

(b) Nechť funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ mají v bodě $[a,b]$ totální diferenciál. Potom platí (☼). (Viz [D II], věta 191.)

(c) Nechť $\frac{\partial f}{\partial y}$ existuje v okolí bodu $[a,b]$ a nechť $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ je spojitá v bodě $[a,b]$. Potom existuje i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ a platí (☼). (Viz [D II], věta 192.)

32.7 **Cvičení.** Porovnejte navzájem jednotlivá tvrzení z předcházejícího odstavce! Ukažte:

(a) Funkce

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} + y^3 \sin \frac{1}{y} & \text{pro } xy \neq 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0,\ y = 0, \\ y^3 \sin \frac{1}{y} & \text{pro } x = 0,\ y \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

splňuje předpoklady v 32.6.a a nesplňuje předpoklady v 32.6.b.

(b) Funkce

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} x^3 y^3 \sin \frac{1}{xy} & \text{pro } xy \neq 0, \\ 0 & \text{pro } xy = 0 \end{cases}$$

splňuje předpoklady v 32.6.b a nesplňuje předpoklady v 32.6.c.

32.8* **Poznámka.** Nechť $J \subset E_2$ je otevřený interval a buď $f : J \longrightarrow E_1$ funkce taková, že na J existují $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Předpokládejme navíc, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ je omezená na J. Potom skoro všude na J existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ a platí (☼) (Důkaz tohoto tvrzení je možno nalézt v časopise Math. Nachr. 22 (1960), 3-4.)

32.9 **Definice.** Nechť funkce f je definovaná na okolí bodu $[a,b]$.

Pro "malá" h,k položme $F(h,k) = f(a+h,b) \quad - f(a,b+k) + f(a,b)$.
Dvojnou limitu (pokud existuje vlastní) $\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{F(h,k)}{hk} = Df(a,b)$
nazveme <u>dvojnou derivací</u> funkce f v bodě $[a,b]$.

$\boxed{32.10}$ <u>Cvičení.</u> Dokažte následující tvrzení:

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \lim\limits_{k\to 0}\left(\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(h,k)}{hk}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0)$, obdobně

v obráceném pořadí (pořádně formulujte toto tvrzení!).

(b) Nechť existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ v okolí bodu $[a,b]$. Potom existují $\Theta_1, \Theta_2 \in (0,1)$ tak, že $F(h,k) = hk \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\Theta_1 h, \Theta_2 k)$.

N á v o d. Použijte větu o střední hodnotě.

(c) Nechť existují $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ v okolí bodu $[a,b]$, nechť funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ je spojitá v bodě $[a,b]$. Potom platí (☼) a hodnoty v této rovnosti jsou rovny $Df(a,b)$.

(d) Porovnejte (c) s tvrzením 32.6.c.

T É M A 33

Spojitost funkcí více proměnných

Obsah: A. Spojitost po přímkách.

B. Funkce odděleně monotonní.

A. SPOJITOST PO PŘÍMKÁCH

33.1 Cvičení.

(a) Dokažte, že funkce

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

má následující vlastnosti:

(i) pro všechna $x \in E_1$ je funkce $f(x,\cdot)$ spojitá na E_1,

(ii) pro všechna $y \in E_1$ je funkce $f(\cdot,y)$ spojitá na E_1,

(iii) funkce f není spojitá na E_2.

(b) Dokažte, že funkce

$$g : [x,y] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

má následující vlastnosti:

(i) pro každé $k \in E_1$ je funkce $\varphi : x \longmapsto g(x,kx)$ spojitá na E_1,

(ii) funkce $\psi : y \longmapsto g(0,y)$ je spojitá na E_1,

(iii) funkce g není spojitá na E_2.

(c) Dokažte, že funkce

$$h : [x,y] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^{4/3} y}{x^4+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

má stejné vlastnosti jako funkce g ze cvičení (b) a navíc:

(iv) h je neomezená funkce na libovolném okolí počátku.

(d) Dokažte, že funkce

$$\omega : [x,y] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}y}{e^{-2/x^2}+y^2} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \end{cases}$$

má následující vlastnosti:

(i) pro všechna $c \in E_1$ a $m,n \in N$ je funkce

$\varphi : x \longmapsto \omega(x, cx^{m/n})$ spojitá na E_1,

(ii) funkce $\psi : y \longmapsto \omega(0,y)$ je spojitá na E_1,

(iii) funkce f není spojitá na E_2.

(e) Zjistěte, která z následujících úvah je špatně a proč:

(i) Funkce

$$f : [x,y] \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad xy = 0, \\ 0 & \text{pro} \quad xy \neq 0 \end{cases}$$

není spojitá v počátku.

(ii) Funkce f má v počátku parciální derivace a

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

(iii) Funkce f má v počátku spojité parciální derivace.

(iv) Má-li funkce v počátku spojité parciální derivace, má i totální diferenciál.

(v) Má-li funkce v počátku totální diferenciál, je spojitá, tedy funkce f je spojitá.

$\boxed{33.2.}$ Cvičení. Buď f funkce z cvičení 33.1.b a nechť $\{[p_i,q_i]\}$ je posloupnost všech bodů z E_2 s racionálními souřadnicemi. Položte

$$F : [x,y] \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(x-p_i, y-q_i).$$

(a) Dokažte, že v každém bodě s alespoň jednou iracionální souřadnicí je funkce F spojitá (použijte vět z tématu 48, oddíl F).

(b) Dokažte, že v každém bodě s racionálními souřadnicemi je funkce F "spojitá po každé přímce tímto bodem procházející" (použijte Weierstrassovo kriterium pro stejnoměrnou konvergenci řad).

(c) Dokažte, že v každém bodě s racionálními souřadnicemi je funkce F nespojitá (podobná úvaha jako v (a)).

$\boxed{33.3}$ Cvičení. Analogickou úvahu jako ve cvičení 33.2 proveďte s funkcemi z odstavce 33.1.a a d.

33.4 <u>Cvičení.</u> Ukažte, že s funkcí z odstavce 33.1.c není možno provést úvahu z 33.2, tj. neexistuje funkce $F : E_2 \longrightarrow E_1$ s následujícími vlastnostmi:

(i) v každém bodě s alespoň jednou iracionální souřadnicí je F spojitá,

(ii) v každém bodě s racionálními souřadnicemi je nespojitá,

(iii) v každém bodě s racionálními souřadnicemi je "spojitá podle každé přímky",

(iv) pro každé $p,q \in R$ existuje posloupnost $\{[x_n,y_n]\}$, $[x_n,y_n] \longrightarrow [p,q]$ tak, že $F(x_n,y_n) \to \infty$.

Návod. V okolí každého bodu spojitosti je funkce omezená.

33.5 <u>Poznámka.</u> Důsledkem obecné Gelfandovy věty je následující tvrzení (důkaz viz Alexejewicz: Analiza funkcionalna, PWN 1969, str. 235-8): Nechť funkce $f : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \longrightarrow E_1$ je "spojitá na rovnoběžkách s osami". Potom existuje množina $T \subset \langle 0,1\rangle$ taková, že $\langle 0,1\rangle \setminus T$ je první kategorie a každý bod množiny $T \times \langle 0,1\rangle$ je bodem spojitosti funkce f.

33.6 ?? <u>Problém.</u> Naskýtá se otázka, zda je možno sestrojit funkci $f : E_2 \longrightarrow E_1$, která je "spojitá po každé přímce" a množina bodů nespojitosti funkce f je nespočetná (resp. kladné míry).
Je možno podat charakterisaci množiny bodů nespojitosti funkce s těmito vlastnostmi?

33.7 <u>Cvičení.</u>

(a) Z předcházejících příkladů vyplývá, že spojitost funkcí $f(x,\cdot)$ a $f(\cdot,y)$ pro všechna $x,y \in E_1$ na E_1 a spojitost funkce f na E_2 nejsou ekvivalentní. Co lze říci o jejich vztahu?

(b) Všimněte si též otázky existence parciálních derivací funkcí z odstavců 33.1 a 33.2.

(c) Lze sestrojit funkci f na E_2 tak, aby

 (i) funkce $f(x,\cdot)$ a $f(\cdot,y)$ byly v E_1 stejnoměrně spojité pro všechna $x,y \in E_1$,

 (ii) funkce nebyla spojitá na E_2?

(d) Dokažte větu:

Je-li funkce $f(x,\cdot)$ spojitá na E_1 pro každé $x \in E_1$ a je-li, pro každé $x_0 \in E_1$, $f(\cdot,y)$ spojitá v x_0 stejnoměrně vzhledem k $y \in E_1$ (co se tím přesně rozumí?), potom je již funkce f spojitá na E_2.

Uvědomte si rozdíl v předpokladech (c) a (d).

(e) Dokažte též následující větu:

Je-li funkce $f(\cdot, y)$ spojitá na E_1 pro každé $y \in E_1$ a stejnoměrně vzhledem k $x \in E_1$ lipschitzovská na E_1 (tj. existuje-li $K > 0$ tak, že pro všechna $x, y', y'' \in E_1$ platí $|f(x,y') - f(x,y'')| \leq K\,|y' - y''|$), je f spojitá na E_2.

Platí toto tvrzení v případě, když připustíme, že K může záviset na x (tj. když pouze $f(x,\cdot) \in \mathrm{Lip}_1(E_1)$ pro každé $x \in E_1$)?

$\boxed{33.8^*}$ Cvičení. Nechť $f : E_2 \longrightarrow E_1$ má následující vlastnosti:

(i) pro každé $x \in E_1$ je $f(x, \cdot)$ polynom,

(ii) pro každé $y \in E_1$ je $f(\cdot, y)$ polynom.

Potom f je polynom ve dvou proměnných.

B. FUNKCE ODDĚLENĚ MONOTONNÍ

$\boxed{33.9}$ Věta. Buď f reálná funkce definovaná na otevřené množině $G \subset E_2$. Předpokládejme, že pro každé $x_0 \in E_1$ je funkce φ_{x_0} definovaná předpisem $\varphi_{x_0} = f(x_0, y)$ spojitá na množině

$G^{x_0,*} = \{y \in E_1 ; [x_0, y] \in G\}$ a pro každé $y_0 \in E_1$ je funkce

$\psi_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ spojitá a monotonní na množině

$G^{*,y_0} = \{x \in E_1 ; [x, y_0] \in G\}$.

Potom f je spojitá na G.

Uvědomte si názorný smysl této věty.

N á v o d. Zvolte $[x_0, y_0] \in G$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existují $\delta > 0$, $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ tak, že

$$|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro} \quad |x - x_0| < \delta ,$$

$$|f(x_0 + \delta, y) - f(x_0 + \delta, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro} \quad |y - y_0| < \eta_1 ,$$

$$|f(x_0 - \delta, y) - f(x_0 - \delta, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro} \quad |y - y_0| < \eta_2 .$$

Buď $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ a buď $[x,y] \in G$ takový bod, že $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ a $y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$.

27566 P16

Předpokládejme, že funkce ψ_y je neklesající. Potom
$\left(f(x_0 - \delta, y) - f(x_0 - \delta, y_0)\right) + \left(f(x_0 - \delta, y_0) - f(x_0, y_0)\right) \leq$
$\leq f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq \left(f(x_0 + \delta, y) - f(x_0 + \delta, y_0)\right) + \left(f(x_0 + \delta, y_0) -\right.$
$\left.- f(x_0, y_0)\right)$ a odtud již plyne tvrzení.

$\boxed{33.10}$ **Definice.** Nechť funkce f je definovaná na množině $M \subset E_n$. Nechť $i \in N$, $1 \leq i \leq n$. Řekneme, že f je oddělené monotonní v proměnné x_i, jestliže je monotonní v proměnné x_i při "pevně zvolených" ostatních proměnných. (Precizujte! Funkce f může být neklesající nebo nerostoucí v proměnné x_i v závislosti na volbě zbývajících proměnných.)

$\boxed{33.11}$ **Označení.** Pro jednoduchost zápisu zaveďme následující označení:
$x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E_{n-1}$ $(n \geq 2)$.
Pro $\delta > 0$ a $x' \in E_{n-1}$ definujeme $(n-1)$-dimensionální krychli
$C(x', \delta) = \left\{ x \in E_{n-1} ;\ |x_i - x_i'| \leq \delta \quad \text{pro } i = 1,2,\ldots,n-1 \right\}$.
Množina vrcholů krychle $C(x', \delta)$ je množina 2^{n-1} bodů x takových, že $|x_i - x_i'| = \delta$ pro každé $i = 1,\ldots,n-1$.

$\boxed{33.12}$ **Lemma.** Buďte $\eta \geq 0$, $\delta > 0$, $y' \in E_1$, $x' \in E_{n-1}$, $H = C(x', \delta) \times \langle y' - \eta, y' + \eta \rangle$. Předpokládejme, že f je reálná funkce definovaná na H, která je spojitá v intervalu $\langle y' - \eta, y' + \eta \rangle$ pro každé pevné $x \in C(x', \delta)$ a odděleně monotonní v proměnných x_i pro $i = 1,\ldots,n-1$. Potom f nabývá maxima na množině H v bodě $[x^*, y^*]$, kde x^* je vrchol krychle $C(x', \delta)$.

N á v o d. Z předpokladu oddělené monotonie v proměnných $x_1,\ldots,x_{n-1}$ plyne, že pro každé $[x_1,\ldots,x_{n-1},y] \in H$ je $f(x_1,\ldots,x_{n-1},y) \leq$
$\leq f(x_1' \pm \delta, \ldots, x_{n-1}' \pm \delta, y)$ pro jistou kombinaci znamének +,-.
Každá z 2^{n-1} funkcí $f(x_1' + \varepsilon_1 \delta, \ldots, x_{n-1}' + \varepsilon_{n-1} \delta, y)$ nabývá maxima na intervalu $\langle y' - \eta, y' + \eta \rangle$ v jistém bodě
$y = y(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$, kde $\varepsilon_i = \pm 1$. Odtud již plyne tvrzení.

$\boxed{33.13^*}$ **Věta.** Nechť $f : [x_1,\ldots,x_{n-1},y] \longmapsto f(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$ je reálná funkce definovaná na otevřené množině $G \subset E_n$ $(n \geq 2)$.

Předpokládejme, že f je spojitá v každé proměnné a odděleně monotonní v proměnných x_i pro $i = 1,\ldots,n-1$. Potom funkce f je spojitá na G.

Návod. Důkaz proveďte indukcí. Pro $n = 2$ je tvrzení obsaženo v odstavci 33.9. Nechť $n > 2$. Protože f je spojitá v proměnných $x_1,\ldots,x_{n-1}$ a odděleně monotonní v $x_1,\ldots,x_{n-2}$ pro pevné x_{n-1} a y, je funkce f spojitá v $[x_1,\ldots,x_{n-1}]$ pro pevné y. Zvolte $[x', y'] \in G$ a $\varepsilon > 0$. Podle indukčního předpokladu existuje $\delta > 0$ tak, že $C(x', \delta) \times \{y'\} \subset G$ a $|f(x,y') - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $x \in C(x', \delta)$. Nechť $\{x_i^* ;\ 1 \leq i \leq 2^{n-1}\}$ je množina vrcholů krychle $C(x', \delta)$. Ze spojitosti funkce f podle proměnné y plyne existence kladných čísel η_i, $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ takových, že $C(x', \delta) \times \langle y' - \eta_i, y' + \eta_i \rangle \subset G$, přičemž pro všechna $y \in \langle y' - \eta_i, y' + \eta_i \rangle$ platí $|f(x_i^*, y) - f(x_i^*, y')| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Nechť $\eta = \min \{\eta_i ;\ 1 \leq i \leq 2^{n-1}\}$ a položte
$H = C(x', \delta) \times \langle y' - \eta, y' + \eta \rangle$. Potom pro každý bod $[x_i^*, y] \in H$, $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ platí $|f(x_i^*, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon$.
Podle odstavce 33.12 nabývá funkce f hodnoty $\sup\limits_{[x,y] \in H} f(x,y)$ v bodě $[x^*, y^*]$, kde x^* je vrchol krychle $C(x', \delta)$.
Stejně lze dokázat, že funkce f nabývá minima v bodě $[x^{**}, y^{**}]$, kde x^{**} je vrchol krychle $C(x', \delta)$. Odtud se již snadno dokáže, že pro libovolné $[x,y] \in H$ platí $|f(x,y) - f(x', y')| < \varepsilon$.

$\boxed{33.14}$ Cvičení. Uveďte příklady funkcí, které ukazují, že předpoklady o monotonii v odstavcích 33.9 a 33.13 není možno vynechat.

T É M A 34

Universální funkce

Obsah: A. Pojem universální funkce.

B. Universální funkce a baireovské třídy.

A. POJEM UNIVERSÁLNÍ FUNKCE

34.1 Úvod. Vysvětlíme nejprve, v jakém smyslu chápeme "universalitu funkce".

Nechť je dán systém $\mathcal{F}$ funkcí definovaných na intervalu $J \subset E_1$. Řekneme, že funkce F, definovaná na množině $J \times J$ je universální funkcí pro systém $\mathcal{F}$, je-li splněna následující podmínka:

Pro každou funkci $f \in \mathcal{F}$ existuje $t_f \in J$ tak, že platí $F(\cdot, t_f) = f$, tj. $F(x, t_f) = f(x)$ pro všechna $x \in J$.

V celém tématu název funkce znamená vždy konečnou funkci.

Zavedeme následující označení: $\mathcal{S}(E_1)$, resp. $\Lambda(E_1)$, resp. $\mathcal{C}(E_1)$ buď systém všech funkcí, resp. všech lebesgueovsky měřitelných funkcí, resp. všech spojitých funkcí definovaných na E_1. Analogicky definované systémy funkcí na $\langle 0,1 \rangle$ značíme $\mathcal{S}$, Λ, $\mathcal{C}$. Index 1 (nahoře) u označení systému značí množinu všech funkcí z tohoto systému, které nabývají pouze hodnot z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ (např. ${}^1\mathcal{S}(E_1)$, ${}^1\mathcal{S}$, ${}^1\mathcal{C}$ apod.).

34.2 Cvičení. Označte mohutnost množiny N všech přirozených čísel symbolem a, mohutnost množiny všech bodů intervalu $\langle 0,1 \rangle$ symbolem c, mohutnost množiny $\mathcal{S}$ symbolem $\bar{\bar{f}}$.

Ukažte, že platí $a < c < \bar{\bar{f}}$.

34.3 Cvičení. Nechť mohutnost systému $\mathcal{F}$ funkcí definovaných na intervalu $J \subset E_1$ je nejvýše rovna c (resp. je větší než c). Potom

1014-7781

existuje (resp. neexistuje) universální funkce systému $\mathcal{F}$. Dokažte!

$\boxed{34.4}$ Problém. Rozhodněte, zda existují universální funkce pro systémy funkcí

(a) $\mathcal{S}(E_1)$, ${}^1\mathcal{S}(E_1)$, $\mathcal{S}$, ${}^1\mathcal{S}$;

(b) $\Lambda(E_1)$, Λ.

$\boxed{34.5}$ Problém. Rozhodněte, zda existují universální funkce pro systémy funkcí $\mathcal{C}(E_1)$, ${}^1\mathcal{C}(E_1)$, $\mathcal{C}$, ${}^1\mathcal{C}$.

Návod. Uvažte, že hodnotami na množině všech racionálních čísel v E_1, resp. v $\langle 0,1\rangle$, je spojitá funkce na E_1, resp. $\langle 0,1\rangle$, jednoznačně určena.

V souvislosti s předcházejícím odstavcem se nabízí otázka, zda existuje universální funkce (pro systém $\mathcal{F}$), která má ještě některé další vlastnosti.

$\boxed{34.6}$ Cvičení. Dokažte, že neexistuje spojitá universální funkce pro systém $\mathcal{C}$, resp. ${}^1\mathcal{C}$.

Návod. V prvém případě uvažte, že universální funkce by byla omezená. V druhém případě lze odvodit spor následujícím obratem:

Zvolte posloupnost funkcí $f_n \in {}^1\mathcal{C}$, $f_n \longrightarrow f$. K těmto funkcím by musely existovat hodnoty $t_n \in \langle 0,1\rangle$ tak, že by platilo $F(\cdot,t_n) = f_n$. Existuje hromadný bod posloupnosti $\{t_n\}$ - označte ho t. Ukažte, že potom platí $F(\cdot,t) = f$. Vhodnou volbou funkce f odvoďte spor.

$\boxed{34.7}$ Cvičení. Rozhodněte, zda existuje spojitá universální funkce pro systém $\mathcal{C}(E_1)$, resp. ${}^1\mathcal{C}(E_1)$.

Návod. V prvém případě užijte Cantorovy diagonální metody. V druhém případě předpokládejte, že taková spojitá universální funkce F existuje. Je-li pro každé $n \in N$

$M_n = \{ f \in {}^1\mathcal{C}$; existuje $t_f \in \langle -n,n\rangle$ tak, že platí $f = F(\cdot,t_f)$ na $\langle 0,1\rangle \}$, jsou množiny M_n uzavřené v ${}^1\mathcal{C}$ a je $\bigcup_1^\infty M_n = {}^1\mathcal{C}$.

Podle Baireovy věty existuje $n_0 \in N$ tak, že M_{n_0} obsahuje vnitřní bod. Snadno sestrojíte posloupnost $\{f_k\}$, $f_k \in M_{n_0}$ tak, že $f_k \longrightarrow f$, $f \notin {}^1\mathcal{C}$. Pak postupujte podobně jako při důkazu v 34.6.

34.8 Problém. Rozhodněte, zda existuje spojitá universální funkce pro systém $\mathcal{H}_\alpha(<0,1>)$, $\alpha \in (0,+\infty)$, všech α-hölderovských funkcí definovaných na intervalu $<0,1>$.

Zformulujte přesně a pak řešte obdobný problém pro systém funkcí $\mathcal{C}^k$, $k \in N$.

B. UNIVERSÁLNÍ FUNKCE A BAIREOVSKÉ TŘÍDY

Než začnete řešit další úlohy, seznamte se s výsledky tematu 12. V dalším užíváme tam uvedeného označení.

34.9 Cvičení.

(a) Položme $B_0 = \mathcal{C}$ a definujme baireovské funkce na intervalu $<0,1>$ stejně jako v 12.B. Platí

$$B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_n \subset B_\infty \subset B \subset \Lambda \subset \mathcal{S} \quad ;$$

uvědomte si, co zatím víte o universálních funkcích těchto systémů.

(b) Tvrzení z 12.B dokažte též pro funkce definované na $<0,1> \times <0,1>$. Třídy baireovských funkcí na tomto intervalu označíme analogicky $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}$.

Užívejte pouze tvrzení, která jste dokázali!

34.10* Cvičení. Dokažte, že existuje funkce $F \in \mathcal{B}_1$, která je universální funkcí pro systém $\mathcal{C}$.

N á v o d. V systému $\mathcal{C}$ zavedeme obvyklým způsobem metriku. Zvolíme systém otevřených intervalů $I_{n_1,\dots,n_k} \subset (0,1)$, kde $k, n_1, \dots, n_k \in N$, s následujícími vlastnostmi:

(i) existuje-li $i \in N$, $0 \le i \le k$ takové, že $n_i \ne \bar{n}_i$, pak $I_{n_1,\dots,n_k} \cap I_{\bar{n}_1,\dots,\bar{n}_k} = \emptyset$;

(ii) pro každé $k \in N$ platí $\overline{I_{n_1,\dots,n_{k+1}}} \subset I_{n_1,\dots,n_k}$;

(iii) diam $(I_{n_1,\dots,n_k}) < 1/k$.

Položíme $Z = \left\{ s \in <0,1>;\ \text{existuje } \{n_k\},\ s \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{n_1,\dots,n_k} \right\}$,

1014-7781

V prostoru $\mathscr{C}$ zvolíme systém otevřených koulí $S_{n_1,\dots,n_k}$ tak, aby měl vlastnosti (ii) a (iii), kde místo symbolu I píšeme S a aby pro každé $k \in N$ tvořil systém všech koulí tvaru $S_{n_1,\dots,n_k}$ pokrytí prostoru $\mathscr{C}$.

Definujme zobrazení $\varphi : Z \longrightarrow \mathscr{C}$, $\varphi : t \longmapsto \varphi_t$ tak, aby pro $t \in Z$, $\{t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{n_1,\dots,n_k}$ bylo $\varphi_t = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{n_1,\dots,n_k}$.

Dokážeme, že zobrazení φ je spojité na množině Z a zobrazuje prostor Z na prostor $\mathscr{C}$.

Definujme dále funkci $\tilde{\Phi}$ předpisem

$$\tilde{\Phi}(x, t) = \varphi_t(x)$$

pro $x \in \langle 0,1 \rangle$ a $t \in Z$.

Dokážeme, že tato funkce je spojitá na množině $\langle 0,1 \rangle \times Z$. Užitím výsledků z 47.22 lze funkci $\tilde{\Phi}$ rozšířit na množinu $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$, přičemž rozšíření Φ je z třídy $\mathscr{B}_1$. Funkce Φ je hledanou universální funkcí pro systém $\mathscr{C}$.

34.11 Cvičení. Nechť je dána posloupnost funkcí $f_n \in B_k$. Položme $f: x \longmapsto \limsup f_n(x)$, je-li výraz vpravo konečný; v ostatních případech položíme $f(x) = 0$. Pro stručnost zavedeme označení $f = \mathrm{Lim}\, f_n$, které má právě popsaný smysl. Potom funkce f je baireovská (v které Baireově třídě leží?).

Vyslovte a dokažte obdobné tvrzení pro systémy $\mathcal{B}_\infty$, $\mathscr{B}_k$, $\mathscr{B}_\infty$.

N á v o d. Operaci Lim popište pomocí bodových limitních přechodů a skládání funkcí.

34.12 Cvičení. Označme B_0^* množinu všech funkcí ze třídy $B_0 = \mathscr{C}$, které jsou restrikcemi polynomů s racionálními koeficienty na $\langle 0,1 \rangle$. Bodovým limitním přechodem vytvoříme množinu B_1^* obdobně jako z třídy B_0 vytvoříme třídu B_1. Ukažte, že platí $B_1 = B_1^*$.

N á v o d. Užijte Weierstrassovy věty o aproximaci spojité funkce polynomy.

1014-7781

34.13 Cvičení. Vyjádřete každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ pomocí desetinného rozvoje (nepřipouštíme zápis s jednomístnou periodou 9, tj. končící "samými devítkami"). Toto vyjádření je jednoznačné. Číslice za desetinnou čárkou označte postupně $x_1, x_2, \dots$. Potom funkce $A_k : x \longmapsto x_k$, $k \in N$, jsou vesměs funkce z B_1. (Funkce A_k přiřazuje číslu x číslo x_k, určené k-tou cifrou v desetinném rozvoji čísla x.)

34.14 Cvičení. Pro každé $k \in N$ definujte funkci Θ_k předpisem

$$\Theta_k(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0,1 \rangle \setminus \{1/k\}, \quad \Theta_k(1/k) = 1.$$

Prvky systému B_0^* lze seřadit do prosté posloupnosti $P_1, P_2, \dots$. Položte pro $[x, t] \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$

$$F_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, \Theta_k(t).$$

Funkce F_0 leží ve třídě $\mathcal{B}$ a je universální funkcí pro třídu B_0. Dokažte!

34.15 Cvičení. Položte pro každé $t \in \langle 0,1 \rangle$ a $m \in N$

$$h_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2^{m-1}(2k-1)}(t)}{10^k}$$

(tj. je-li t zapsáno ve tvaru $t = 0,a_1 a_2 a_3 \dots$, je $h_1(t) = 0,a_1 a_3 a_5 \dots$, $h_2(t) = 0,a_2 a_6 a_{10} \dots$, atd.; užíváme názorného zápisu, i když není zcela korektní).

Pro každé $n \in N$ definujte indukcí

$$F_{n+1}(x,t) = \lim_{k \to +\infty} F_n(x, h_k(t))$$

pro $[x,t] \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$; F_0 je funkce definovaná v odstavci 34.14.

Dokažte, že $F_n \in \mathcal{B}$ a F_n je universální pro třídu B_n.

N á v o d. Použijte matematickou indukci a výsledků z předcházejících odstavců. Druhý indukční krok proveďte takto:

Nechť $f \in B_{n+1}$. Potom existuje posloupnost $\{f_k\}$ funkcí z třídy B_n, $f_k \longrightarrow f$. Buďte $t_k \in \langle 0,1 \rangle$ takové, že $F_n(\cdot, t_k) = f_k$. Ukažte, že je možno vybrat $t^* \in \langle 0,1 \rangle$ takové, že $h_k(t^*) = t_k$.

Potom platí $F_{n+1}(x,t^*) = \operatorname{Lim}_{k\to+\infty} F_n(x,t_k) = \operatorname{Lim}_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$,
pro všechna $x \in \langle 0,1\rangle$.

34.16 **Poznámka.** Obdobně lze zjistit, že funkce

$$F_\infty : [x,t] \longmapsto \operatorname{Lim}_{k\to+\infty} F_k(x,h_k(t))$$

je universální funkcí pro třídu B_∞ .

Metodou transfinitní indukce lze tyto výsledky dále rozšířit i na třídy B_α , kde α je libovolné spočetné ordinální číslo (viz poznámka 12.20). V části o universálních funkcích pro baireovské funkce ze systémů B_k, $k \in N$, atd. by bylo pro nás do jisté míry pohodlnější pracovat s funkcemi, které nabývají i nekonečných hodnot. Protože jsou předcházející odstavce psány velmi stručně a jde o úvahy dosti náročné, doporučujeme, aby při zpracování bylo použito původního pramene, tj. učebnice [Nat] (nebývá však snadno dostupná).

34.17 **Shrnutí.** Shrneme výsledky z předcházejících odstavců, jimiž se čtenář eventuálně podrobněji nezabýval:

Ke každé třídě B_k, $k \in N$, a B_∞ existuje universální funkce, která je prvkem systému $\mathcal{B}$. Odtud např. plyne, že mohutnost těchto systémů není větší než c. Předcházejících výsledků lze užít k doplnění tématu 12 následujícím způsobem:

34.18 **Věta.** Pro třídy baireovských funkcí platí $B_{n+1} \setminus B_n \neq \emptyset$, pro každé celé nezáporné číslo n, a $B \setminus B_\infty \neq \emptyset$.

N á v o d k důkazu. Nechť existuje takové $n \in N$, že platí $B_n = B_{n+1} = \ldots = B$. Nechť F_n je universální funkce pro třídu B_n.
Položte $\Phi(x,t) = \min\bigl(1, \max(F_n(x,t), 0)\bigr)$
pro $[x,t] \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$, a dále

$$\varphi : [x,t] \mapsto \lim_{m\to+\infty} \frac{m\,\Phi(x,t)}{1 + m\,\Phi(x,t)} .$$

Funkce φ nabývá na $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ pouze hodnot 0,1 a je $\varphi \in \mathcal{B}$. Funkce $f : x \mapsto 1 - \varphi(x,x)$ je prvkem systému B a tedy existuje $t_0 \in \langle 0,1\rangle$ tak, že $f = \varphi(\cdot, t_0)$.
Odtud odvoďte spor ($\varphi(t_0,t_0) = 1/2$). Pro funkci F_∞ proveďte analogickou úvahu.

$\boxed{34.19}$ Poznámka. Analogická tvrzení platí i pro třídy B_γ, kde γ je spočetné ordinální číslo.

$\boxed{34.20}$ Poznámka. V [Nat] je citován výsledek L.V. Kantoroviče. Pomocí tohoto výsledku lze nalézt pro třídu B_k universální funkci v třídě $\mathcal{B}_{k+1}$, $k = 0,1,\dots$. Pro $k=0$ srovnejte s odstavcem 34.10.

$\boxed{34.21}$ Problém. Materiál tohoto tématu poskytuje mnoho jednoduchých problémů, vhodných k procvičování. Problém formulovaný v 34.6 lze např. modifikovat tímto způsobem: Zjistěte, zda existuje spojitá funkce F taková, aby pro každou funkci f z vyšetřovaného systému funkcí existovalo t_f tak, že funkce $F(\cdot, t_f) - f$ je konstantní.

$\boxed{34.22}$ Problém. Rozhodněte, zda existuje konečná měřitelná funkce F definovaná na $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ taková, aby k libovolné funkci $f \in \Lambda$ (resp. $f \in {}^1\Lambda$) existovalo $t_f \in \langle 0,1\rangle$ tak, že platí $f = F(\cdot, t_f)$ skoro všude v $\langle 0,1\rangle$.

N á v o d. Dokažte, že libovolná funkce $f \in \Lambda$ je ekvivalentní (tj. je rovna skoro všude) nějaké funkci $\tilde{f} \in B_2$.

T É M A 35

Konvexní množiny a konvexní funkce v E_n

Text tohoto tématu je rozdělen do několika oddílů, které lze po prostudování prvého oddílu čísti vcelku nezávisle na sobě.

A. KONVEXNÍ MNOŽINY

35.1 Definice. Pro $M \subset E_n$ označme

$K(M) = \{ x \in E_n;\ x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\ \alpha \in \langle 0,1\rangle,\ x_1, x_2 \in M \}$.

Množinu M nazveme konvexní, platí-li $K(M) = M$.

35.2 Cvičení.

(a) Vysvětlete geometrický význam definice 35.1 a uveďte jednoduché příklady konvexních množin. Ukažte, že koule $U(x)$ o středu x je konvexní množina.

(b) Zjistěte, zda průnik a sjednocení konvexních množin je opět konvexní množina.

(c) Jsou-li M, P konvexní množiny, jsou množiny $M + P$, λM také konvexní. Dokažte!

(d) Charakterisujte úplně konvexní množiny v E_1.

(e) Zjistěte, zda uzávěr a vnitřek konvexní množiny je konvexní.

(f) Pro konvexní množinu M platí $M^o = (\bar{M})^o$.

(g) Nechť M je konvexní množina, $a \in M$, $b \in \mathrm{hr}\, M$, $\alpha \in \langle 0,1)$.
Potom $\alpha a + (1-\alpha)b \in M$.

(h) Nechť $M \subset E_n$, $n > 1$. Pro $x \in E_{n-1}$, $y \in E_1$ položíme
$M_x = \{ y \in E_1;\ [x,y] \in M \}$, $M^y = \{ x \in E_{n-1};\ [x,y] \in M \}$.

1014-7781

Je-li M konvexní množina, jsou i množiny M_x, M^y konvexní pro všechna $x \in E_{n-1}$, $y \in E_1$.

(ch) Pro $M \subset E_n$ nechť $W(M) = \left\{ \frac{1}{2}(x-y);\ x,y \in M \right\}$.

Zkoumejte vlastnosti množiny $W(M)$ v závislosti na vlastnostech množiny M.

35.3 Definice. Bod $x \in E_n$ nazveme konvexní lineární kombinací bodů $x_1,\dots,x_m$, existují-li nezáporná čísla $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ tak, že platí

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\ , \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

35.4 Věta. Množina $M \subset E_n$ je konvexní, právě když každý bod x, který je konvexní lineární kombinací bodů z M, leží v M.

N á v o d. Indukcí podle m dokažte, že konvexní lineární kombinace m bodů konvexní množiny M leží opět v M.

35.5 Definice. Nechť $M \subset E_n$. Nejmenší konvexní množinu obsahující množinu M budeme nazývat konvexním obalem množiny M a budeme ji značit ch M (zkratka anglického termínu "convex hull").

Platí tedy $\quad \mathrm{ch}\, M = \bigcap \left\{ P;\ M \subset P,\ K(P) = P \right\}$.

Dokažte pomocí 35.2.b, že tato definice je korektní.

35.6 Cvičení.

(a) Dokažte, že množina všech konvexních lineárních kombinací bodů množiny $M \subset E_n$ je právě množina ch M.

N á v o d. Je-li $P = K(P)$, $M \subset P$, je množina všech konvexních lineárních kombinací bodů z M částí množiny P.

(b) Pro $M \subset E_n$ platí $\operatorname{diam} M = \operatorname{diam} \mathrm{ch}\, M$. Dokažte!

N á v o d. Nechť x je konvexní lineární kombinací bodů x_1, x_2; potom $\|y - x\| \leq \max\,(\|y - x_1\|\ ,\ \|y - x_2\|\ )$. Užijte indukce. (Viz též 35.26.b.)

(c) Ukažte, že krychle $C(x, \delta)$ je konvexním obalem množiny svých vrcholů (viz 33.11).

B. KONVEXNÍ FUNKCE

35.7 Definice. Nechť $M \subset E_n$ je konvexní množina. Budeme říkat, že funkce $f : M \mapsto E_1$ je konvexní na množině M, jestliže množina

$M_f = \{[x,y]\ ;\quad x\in M,\ y \geq f(x)\}$ je konvexní v E_{n+1}.

35.8 Cvičení.

(a) Dokažte, že pro $n = 1$ je definice 35.7 ekvivalentní s definicí 13.1 (srovnej 13.29).

(b) Dokažte, že (tak jako pro $m=1$; viz 13.6) funkce je konvexní na množině $M\subset E_n$, právě když pro všechna $x_1,x_2\in M$, $m\in(0,\frac{1}{2}\rangle$,

$f(mx_1 + (1-m)\,x_2) \leq m\,f(x_1) + (1-m)\,f(x_2)$. (♡)

35.9 Poznámka. Je-li splněna nerovnost (♡) pro všechna $x_1,x_2\in M$ a jisté pevně zvolené $m\in(0,1)$, nazýváme funkci f m-konvexní na množině M. Také v E_n mají m-konvexní funkce podobné vlastnosti jako v E_1 (viz oddíl 13.C), nebudeme se jimi však podrobněji zabývat. (Viz E. Deák, Über konvexe und interne Funktionen, sowie eine Verallgemeinerung von beiden, Ann. Univ. Sci. Budapest. de Rolando Eötvös nom., sec. math., tomus V, 1962.)

35.10 Cvičení. Pomocí výsledků z témat 13 a 18 nalezněte $\frac{1}{2}$-konvexní funkci v E_2, která má tyto vlastnosti:

(i) pro každé $x\in E_1$ je funkce $f(x,\cdot)$ spojitá na E_1,

(ii) pro žádné $y\subset E_1$ není funkce $f(\cdot,y)$ spojitá.

35.11 Věta. Je-li funkce f konvexní na otevřené množině $M\subset E_m$, potom f je spojitá na M.

N á v o d. Zvolme libovolně $x_0\in M$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že $C_m(x_0,\delta)\subset M$. Množina všech vrcholů krychle $C_m(x_0,\delta)$ je konečná a f je proto na ní omezená. Odtud plyne omezenost f na $C_m(x_0,\delta)$ (použijte 35.6.c a konvexitu f). Označte $K = \sup\{|f(x)|\ ;\ x\in C_m(x_0,\delta)\}$. Nechť dále x je libovolný bod z $U_n(x_0;\delta)$; označte $u = \frac{\delta}{\|x-x_0\|}(x-x_0)$.

Bod x (resp. x_0) lze vyjádřit jako konvexní lineární kombinaci bodů x_0, $x_0 + u$ (resp. x, $x_0 - u$). Užitím nerovnosti (♡) z 35.8.b na tyto kombinace obdržíte dvojici nerovností, z které plyne

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{K - f(x_0)}{\delta}\,\|x - x_0\|\ .$$

Tím je dokázána spojitost funkce f v bodě x_0.

35.12 Cvičení.

(a) Ukažte, že v návodu k 35.11 je dokonce dokázána lokální lipschitzovskost funkce f (viz 14.1).

(b) Pokuste se dokázat spojitost (popř. lokální lipschitzovskost) konvexní funkce pomocí tématu 13 (funkci parcializujte na přímku, rovnoběžnou s i-tou osou).

35.13* Věta. Konvexní množina $M \subset E_n$ je lebesgueovsky měřitelná a $\lambda_n(\mathrm{hr}\, M) = 0$.

Návod. Užijte 35.11. Postupujte indukcí dle dimense prostoru E_n. Tvrzení zřejmě platí pro $n=1$ (viz 35.2.d).

Naznačíme přechod od n k $n+1$: Nechť $M \subset E_{n+1}$, $M = K(M)$. Protože $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} (M \cap U_{n+1}(0,k))$, stačí se zabývat případem omezené množiny M. Označte $M_1 = \{x \in E_n;\ \text{existuje } y \in E_1, [x,y] \in M\}$ a pro $x \in M_1$, $M_x = \{y \in E_1;\ [x,y] \in M\}$.

Podle indukčního předpokladu je $\lambda_n(\mathrm{hr}\, M_1) = 0$. Dále položte pro $x \in M_1$ $\varphi_1(x) = \inf M_x$, $\varphi_2(x) = \sup M_x$. Využijte konvexitu funkcí φ_1, $-\varphi_2$, aplikujte 35.11 na tyto funkce na $\mathrm{Int}\, M_1$. Dostanete, že grafy funkcí $\varphi_1 | \mathrm{Int}\, M_1$, $\varphi_2 | \mathrm{Int}\, M_1$ jsou λ_{n+1}-nulové množiny. Užijte ještě Fubiniovu větu a obdržíte $\lambda_{n+1}(\mathrm{hr}\, M) = 0$.

Tento důkaz je přirozený, nikoli však nejelegantnější - pokuste se nalézt elegantnější - užijte např. aparátu z 35.2.c.

C. TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL KONVEXNÍCH FUNKCÍ

V 13.2 jsme ukázali, že množina bodů, v nichž konvexní funkce na E_1 nemá derivaci, je spočetná a tedy nulová. Pokusíme se o zobecnění těchto úvah.

35.14 Cvičení. Množina bodů, v nichž konvexní funkce na E_n nemá totální diferenciál, nemusí být spočetná. Dokažte!

35.15 Věta. Nechť f je konvexní funkce na $C_n = C_n(0,1/2)$, $x_0 \in C_n^{\circ}$. Potom f má v bodě x_0 totální diferenciál, právě když f má v bodě x_0 parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1,\dots,n$.

N á v o d. Sporem dokažte, že pro libovolné $x \in C_n$ platí $f(x) \geq f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \circ (x - x_0)$, kde $\operatorname{grad} f(x_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_0)\right]$ pro libovolný bod $x_0 \in C_n^{\,o}$, ve kterém existují všechny parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0)$, $(i=1,\dots,n)$. Dále ukažte, že v těchto bodech platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\| x - x_0 \| < \delta \implies f(x) < f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \circ (x - x_0) + \varepsilon \| x - x_0 \| .$$

Odtud shrnutím plyne tvrzení.

$\boxed{35.16^*}$ Věta.

(a) Položme $D_{ik} = \left\{ x \in C_n^{\,o};\ \frac{\partial^+}{\partial x_i} f(x) - \frac{\partial^-}{\partial x_i} f(x) \geq \frac{1}{k} \right\}$

pro $i=1,\dots,n$, $k \in N$, kde $C_n = C_n(0,1/2)$.

(Odůvodněte korektnost definice D_{ik}.)

Potom množiny D_{ik} jsou všechny uzavřené a $\lambda_n D_i = 0$, kde $D_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{ik}$.

N á v o d. Důkaz prvého tvrzení proveďte sporem: Je-li $y_n \to x$, $y_n \in D_{ik}$ a $\frac{\partial^+}{\partial x_i} f(x) - \frac{\partial^-}{\partial x_i} f(x) < \frac{1}{k}$, pak podle 35.11 existuje j tak, že $\frac{\partial^+}{\partial x_i} f(y_j) - \frac{\partial^-}{\partial x_i} f(y_j) < \frac{1}{k}$, tedy $y_j \notin D_{ik}$, což je hledaný spor. K důkazu druhé části tvrzení užijte výsledků z tématu 13 a Fubiniovy věty.

(b) Označme D množinu všech bodů z $C_m^{\,o}$, ve kterých neexistuje totální diferenciál. Potom D je typu F_σ a první kategorie v $C_m^{\,o}$, přičemž $\lambda_n D = 0$.

N á v o d. Ukažte, že $D = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{ik}$ (užijte 35.15) a dle (a) je D typu F_σ. Řídkost množin D_{ik} pro všechna i, k dokažte z (a).

$\boxed{35.17}$ Shrnutí. Užitím předchozích výsledků dokažte tvrzení: Je-li funkce f konvexní na otevřené množině M, potom má skoro všude v M totální diferenciál; množina bodů, v nichž totální diferenciál neexistuje, je typu F_σ a prvé kategorie v M.

35.18* Poznámka. Naskýtá se otázka, zda charakteristika množiny bodů, v nichž konvexní funkce nemá totální diferenciál, uvedená v 35.17, je úplná. Tím rozumíme toto: je-li $M \subset E_n$ otevřená konvexní množina, $D \subset M$ nulová, typu F_σ a první kategorie v M, zdali potom existuje konvexní funkce f na M tak, aby D byla právě množinou všech bodů, ve kterých funkce f nemá totální diferenciál.

Odpověď je záporná, neboť lze dokázat, že množina bodů, kde funkce, konvexní na E_m, nemá totální diferenciál, leží na spočetně mnoha lipschitzovských nadplochách (a existují nulové množiny první kategorie typu F_σ, které tuto vlastnost nemají).

Můžeme se tedy znovu ptát, zda tato poslední charakteristika je úplná.

D. HLUBŠÍ VĚTY O KONVEXNÍCH MNOŽINÁCH

V tomto oddílu je odvozeno několik základních vět o konvexních množinách v E_n; tyto věty jsou důležitým prostředkem při hledání v jistém smyslu "minimálních" či "maximálních" množin či bodů.

35.19 Cvičení. Nechť $M \subset E_1$; označíme symbolem M^* symetrisaci množiny M, tj. množinu

$$M^* = \left\{ y = \frac{1}{2}(y_1 - y_2);\ y_1, y_2 \in M \right\}.$$

(a) Rozhodněte, zda platí pro $M, P \subset E_1$ tvrzení:

$$M \subset P \implies M^* \subset P^*,$$

$$(M \cup P)^* = M^* \cup P^*, \quad (M \cap P)^* = M^* \cap P^*.$$

(b) Charakterisujte M^*, je-li M libovolný interval v E_1.

(c) Ukažte, že platí obecně

$$x \in M^* \iff -x \in M^*.$$

35.20 Cvičení. Pro $M \subset E_n$, $n > 1$ definujeme symetrisaci takto: Nechť $x \in E_{n-1}$, $y_1, y_2 \in E_1$, pak

$$M^* = \left\{ [x, \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2)] ;\ [x, y_i] \in M,\ i = 1,2 \right\}.$$

Dále položme

$$\widetilde{M} = \left\{ [x, -y] ;\ [x, y] \in M \right\}.$$

1014-7781

(a) Co znamená vytváření množin M^*, $\widetilde{M}$ geometricky?

(b) Vyšetřujte sami vlastnosti M^* v E_n, $n > 1$ a ukažte, že platí $M^* = \bigcup_{x \in E_{n-1}} \left\{ [x,y] ;\ y \in \frac{1}{2}(M_x + \widetilde{M}_x) \right\}$.

(c) Je-li $M \subset E_n$ konvexní množina, potom i množiny M^* a $\widetilde{M}$ jsou konvexní. Dokažte!

35.21 Věta. Nechť $M \subset E_n$ je konvexní množina. Potom $\operatorname{diam} M^* \leq \operatorname{diam} M$, $\lambda_n(M^*) = \lambda_n(M)$.

Návod. K odvození prvého vztahu užijte vyjádření M^* z 35.20. Rovnost budeme dokazovat indukcí podle dimense prostoru E_n. Případ $n=1$ nečiní obtíží - užijte 35.19. Indukční krok dokažte pomocí Fubiniovy věty; uvažte, že platí $(M^*)_x = (M_x)^*$ a užijte 35.13.

35.22 Cvičení. Nechť $M \subset E_n$, $n > 1$, $\operatorname{diam} M \leq 1$, $M = \widetilde{M}$. Potom pro libovolné $y \in E_1$ platí $\operatorname{diam}(M^y) \leq [\max(1 - 4y^2, 0)]^{\frac{1}{2}}$ a pro $|y| > \frac{1}{2}$ je $M^y = \emptyset$. Jak se změní vzorec při $\operatorname{diam} M = d$?

35.23 Věta.

(a) Nechť $M \subset E_n$ je konvexní množina, $\operatorname{diam} M \leq 1$. Potom platí $\lambda_n(M) \leq \lambda_n[U_n(0, \frac{1}{2})]$.

Návod. Užijte opět indukce. Budeme dokazovat obecnější formuli:

Pro $P \subset E_n$, $P = K(P)$ platí $\lambda_n(P) \leq V_n \cdot (\operatorname{diam} P)^n$,

kde $V_n = \lambda_n [U_n(0, \frac{1}{2})]$.

Obtížnější se může jevit jen provedení indukčního kroku. Naznačíme část úprav:

$$\lambda_{n+1}(P) = \lambda_{n+1}(P^*) = \int_{E_1} \left(\int_{(P^*)^y} dx \right) dy = \int_{E_1} \lambda_n(P^*)^y \, dy = \ldots$$

je nutné užít odhadu 35.22 a vztahu V_n a $\lambda_n[U_n(0, \delta)]$.

(b) Nechť $M \subset E_n$. Potom platí $\widetilde{\lambda}_n(M) \leq V_n \cdot [\operatorname{diam} M]^n$.

Návod. Důkaz stačí provést jen pro $\operatorname{diam} M \in (0, +\infty)$. Užijte přitom (a) a 35.6.b.

35.24 Problém. Nechť $M \subset E_n$, $\operatorname{diam} M = 1$, $\tilde{\lambda}_n M = \lambda_n[U_n(0, \frac{1}{2})]$. Co lze říci o množině M?

35.25 Označení. $Q^k(M)$, $k \in N$, značí množinu všech konvexních lineárních kombinací nejvýše k bodů množiny $M \subset E_n$. Dále definujme rekurentním předpisem množiny $K^k(M)$, $k \in N$:

$$K^1(M) = K(M), \quad K^k(M) = K(K^{k-1}(M)), \quad k=2,3,\ldots \quad .$$

35.26 Cvičení.

(a) Ukažte, že platí rovnost $K^k(M) = Q^{2^k}(M)$, $k \in N$.

N á v o d. Užijte indukce vzhledem ke k.

(b) Ukažte, že platí $\operatorname{ch} M = \bigcup_{k=1}^{\infty} K^k(M) = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q^k(M)$.

35.27 Věta (Carathéodory). Pro libovolnou $M \subset E_n$ platí $\operatorname{ch} M = Q^{n+1}(M)$.

N á v o d. Využijte lineární závislosti m vektorů v případě, že $m > n$. Je-li $x \in Q^m(M)$, $m > n+1$, potom $x \in Q^{m-1}(M)$.

35.28 Lemma (Radon). Nechť množina $M \subset E_n$ má alespoň $n+2$ bodů. Potom existuje $A \subset M$ tak, že $\operatorname{ch} A \cap \operatorname{ch}(M \setminus A) \neq \emptyset$.

N á v o d. Podobně jako v 35.27 využijte lineární závislosti každých $n+1$ bodů množiny M; najděte $x_1, \ldots, x_k \in M$ a $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in E_1$ tak, že pro alespoň jedno $i \in \{1, \ldots, k\}$ je $\alpha_i \neq 0$,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0. \quad \text{Položte} \quad A = \{x_i \, ; \, \alpha_i > 0\}.$$

35.29 Věta (Helly). Nechť $\mathcal{B}$ je systém konvexních podmnožin E_n, obsahující alespoň $n+1$ množin. Nechť

(i) systém $\mathcal{B}$ je konečný, nebo

(ii) všechny množiny z $\mathcal{B}$ jsou kompaktní. Nechť každých $n+1$ množin z $\mathcal{B}$ má neprázdný průnik. Potom celý systém $\mathcal{B}$ má neprázdný průnik.

N á v o d. Nechť platí (i). Důkaz proveďte indukcí podle počtu množin systému $\mathcal{B}$. V indukčním kroku využijte lemma 35.28. Platí-li (ii), převeďte větu na případ (i) využitím kompaktnosti.

35.30 Cvičení. Nechť $r > 0$, $M \subset E_n$. Nechť množina M má alespoň $n+1$ bodů. Nechť ke každé $(n+1)$-bodové množině $P \subset M$ existuje bod

$x_p \in E_n$ tak, že $P \subset \overline{U(x_p, r)}$. Potom existuje bod $x \in E_n$ tak, že $M \subset \overline{U(x,r)}$. Dokažte!

N á v o d. Užijte větu 35.29 na systém $\mathcal{B} = \{\overline{U(y,r)};\ y \in M\}$.

$\boxed{35.31}$ **Věta.** Pro kompaktní množinu $M \subset E_n$ je množina ch M kompaktní.

N á v o d. Ukažte, že $K(M)$ je kompaktní a použijte 35.26.a, 35.27.

$\boxed{35.32^*}$ Jungova věta. Nechť $M \subset E_n$, diam $M \leq 1$. Potom existuje právě jedna uzavřená koule $B = \overline{U(x_o, r_o)}$ s těmito vlastnostmi:

(i) $M \subset B$,

(ii) je-li $B_1 = \overline{U}(x_1, r_1)$ uzavřená koule, pro niž $M \subset B_1$, potom $r_1 \geq r_o$.

Platí : $(\mathcal{L})$ $\quad r_o \leq \sqrt{\dfrac{n}{2(n+1)}}$.

N á v o d.

(a) Existence. Nechť $r_o = \inf \{ r;$ existuje $x \in E_n$ tak, že $M \subset \overline{U}(x,r) \}$. Zvolte $\{r_n\}$, $r_n \searrow r$. Potom existuje podposloupnost $\{r_{n_k}\}$ posloupnosti $\{r_n\}$ a posloupnost $\{x_k\}$, $x_k \in E_n$ tak, že $x_k \to x \in E_n$, $M \subset \overline{U(x_k, r_{n_k})}$. Dokažte, že $M \subset \overline{U(x,r)}$.

(b) Jednoznačnost dokažte sami z podmínky (ii).

(c) Odhad. Pomocí 35.30 ukažte, že stačí předpokládat, že M je $(n+1)$-bodová. V tomto případě pak ukažte, že $x \in$ ch M.

Je tedy $x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i$ $(a_i \in M)$, takže pro každé $j \in \{1,\dots,n+1\}$ platí

$$r^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\right) r^2 - (a_j - x) \circ \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (a_i - x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \left(r^2 - (a_j - x)\circ(a_i - x)\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \| a_i - a_j \|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i = \frac{1}{2}(1 - \alpha_j)$$ a sečtením pro $j = 1,\dots,n+1$ dostaneme $\quad r^2 \leq \dfrac{n}{2(n+1)}$.

1014-7781

35.33 Cvičení.

(a) Sestrojte množinu M tak, aby ve vztahu ($\mathcal{L}$) z věty 35.32 platila rovnost. Charakterizujte nejprve pro $n=2$ takové množiny M.

(b) Charakterizujte všechny množiny M, pro něž je nejmenší (ve smyslu velikosti poloměru) uzavřená koule obsahující M průnikem všech uzavřených koulí obsahujících M.

35.34(??) Lebesgueův problém. Kompaktní konvexní množina $M \subset E_n$ se nazývá universálním zakrytím, jestliže ke každé množině $A \subset E_n$ s vlastností $\operatorname{diam} A \leq 1$ existuje euklidovský pohyb f zachovávající orientaci (tj. zobrazení E_n na E_n, které vznikne složením otočení a posunutí) tak, že $f(A) \subset M$. Podle Jungovy věty 35.32 je

$$\overline{U\left(0, \sqrt{\frac{n}{2(n+1}}\right)}$$

universálním zakrytím v E_n. Dosud není vyřešen problém, který začátkem století formuloval H. Lebesgue: Popsat universální zakrytí v E_2, které má nejmenší Lebesgueovu míru.

35.35 Definice. Nechť $a \in E_n$, $a \neq 0$, $b \in E_1$, $L = \{x \in E_n;\ a \circ x = b\}$. Potom L nazýváme nadrovinou v prostoru E_n a množiny

$$L^+ = \{x \in E_n;\ a \circ x \geq b\}, \qquad L^- = \{x \in E_n;\ a \circ x \leq b\}$$

uzavřenými poloprostory určenými nadrovinou L. Jestliže množina $M \subset E_n$ leží celá v L^+, resp. L^- a $L \cap M \neq \emptyset$, nazýváme L opěrnou nadrovinou množiny M.

35.36 Cvičení.

(a) Množiny L, L^+, L^- z definice 35.35 jsou konvexní.

(b) Nechť M je kompaktní množina v E_n. Označíme-li systém všech opěrných nadrovin množiny M symbolem $\mathcal{C}$ a jsou-li L popsány tak, že platí $M \subset L^+$ pro všechna $L \in \mathcal{C}$, potom platí

$$\operatorname{ch} M = \bigcap_{L \in \mathcal{C}} L^+ .$$

(c) Použijte (b) k vyjádření kompaktní konvexní množiny.

35.37 Poznámka. V praxi je často nutné řešit optimalizační úlohy tohoto typu: Hledají se extrémy lineární funkce na množině řešení speciálních soustav lineárních nerovností. Geometrická interpretace tohoto problému je tato: jest nalézti opěrnou nadrovinu konvexního tělesa, které je průnikem konečně mnoha uzavřených poloprostorů, je-li dán směr normály této nadroviny. Tyto úlohy se řeší metodami tzv. lineárního programování.

35.38 Cvičení. Jestliže libovolné dvě opěrné nadroviny (které jsou spolu rovnoběžné) kompaktní konvexní množiny $M \subset E_n$ mají touž vzdálenost, říkáme, že M má konstantní šířku.

Nalezněte kompaktní konvexní množinu M konstantní šířky v E_2, která není uzavřeným kruhem.

E. ANTIKONVEXNÍ MNOŽINY

35.39 Definice. Množina $M \subset E_n$ se nazývá

(i) antikonvexní, jestliže pro každé body $x, y \in M$, $x \neq y$, a pro každé $m \in (0,1)$ platí $m x + (1-m)y \notin M$,

(ii) m-antikonvexní, jestliže $m \in (0,1)$ a platí: pro každé body $x, y \in M$, $x \neq y$, jest $m x + (1-m)y \notin M$,

(iii) totálně asymetrická, jestliže pro každé $x \in M$ a pro každé $y \in E_n$, $y \neq 0$, existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro každé $\delta \in (0, \delta_0)$ jest $x + \delta y \in M$ nebo $x - \delta y \notin M$.

(Viz S. Marcus, On anticonvex sets, Rev. Roum. MPA 13 (1968), 1399 - 1401.)

35.40 Cvičení.

(a) Ilustrujte pojmy zavedené v definici 35.39 na příkladech.

(b) Dokažte, že monotonní sjednocení antikonvexních (resp. m-antikonvexních) množin je antikonvexní (resp. m-antikonvexní) množina.

(c) Dokažte, že podmnožina antikonvexní (resp. m-antikonvexní, resp. totálně asymetrické) množiny je antikonvexní (resp. m-antikonvexní, resp. totálně asymetrická) množina.

(d) Dokažte, že každá $\frac{1}{2}$-antikonvexní množina je totálně asymetrická. Nalezněte totálně asymetrickou množinu, která není $\frac{1}{2}$-antikonvexní.

35.41 Problém. Vyšetřete vztah mezi konvexitou množiny M a antikonvexitou množiny hr M.

35.42 <u>Cvičení.</u> Nechť funkce $g : E_1 \longrightarrow E_1$ je třídy $\mathscr{C}^1$ v E_1. Potom graf g je antikonvexní množina v E_2, právě když g nemá žádný inflexní bod a není lineární na žádném intervalu.

35.43 <u>Problém.</u> Existuje zobrazení $f : \langle 0,1 \rangle \longrightarrow E_3$ s vlastnostmi

(i) $f(0) = f(1)$,

(ii) $f(\langle 0,1 \rangle)$ je antikonvexní,

(iii) žádné 4 různé body $f(\langle 0,1 \rangle)$ neleží na kružnici ??

35.44 <u>Cvičení.</u>

(a) Ukažte, že každá množina $M \subset E_1$ lineárně nezávislá nad tělesem R (viz 18.9) je m-antikonvexní pro každé $m \in (0,1) \cap R$. Každá Hamelova báze je tedy m-antikonvexní pro každé $m \in (0,1) \cap R$ v E_1 (a je nespočetná!).

(b) Pro každé $m \in (0,1) \cap R$ existuje neměřitelná m-antikonvexní množina v E_1 (viz 18.19.c).

(c) Uvažte, zda lze (b) rozšířit na případ libovolného $m \in (0,1)$.

35.45 <u>Věta.</u> Žádná totálně asymetrická podmnožina E_1 nemá kladnou Lebesgueovu míru.

N á v o d. Nechť M je totálně asymetrická, $\lambda_1 M > 0$. Pomocí 8.19 odvoďte spor.

35.46 <u>Lemma.</u> Nechť $n \geq 2$, $M \subset E_n$ je spočetná antikonvexní množina. Pak existuje $x \in E_n$ tak, že $M \cup \{x\}$ je antikonvexní.

N á v o d. Ukažte, že množina všech bodů ležících na přímkách určených všemi dvojicemi bodů z M, je první kategorie v E_n.

35.47 <u>Věta.</u> Nechť $n \geq 2$. Pak existuje antikonvexní množina, hustá v E_n.

N á v o d. S použitím lemmatu 35.46 sestrojte množiny A_n, $n \in N$ s vlastnostmi

(i) pro každé $n \in N$, $x \in D$ existuje $y \in A_n$ tak, že $\| x - y \| < \frac{1}{n}$

(ii) $A_n \subset A_{n+1}$ pro $n \in N$.

(D je libovolná, předem zvolená, hustá množina v E_n).
Použijte 35.40.b.

$\boxed{35.48}$ **Věta.** Existují $\frac{1}{2}$-antikonvexní množiny A_n, $n \in N$ tak, že

$$E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

N á v o d. Nechť H je Hamelova báze (viz 18.9).
Pro $n \in N$, $r_i \in R$ pro $i = 1,\dots,n$, položte

$$A(r_1, r_2, \dots, r_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i h_i ; \quad h_i \in H, \ h_i \neq h_j \ \text{pro} \ i \neq j \right\} .$$

Ukažte, že každá množina $A(r_1,\dots,r_n)$ je $\frac{1}{2}$-antikonvexní a že

$$E_1 = \bigcup_{\substack{r_i \in R \\ n \in N}} A(r_1, \dots, r_n) .$$

$\boxed{35.49(??)}$ **Problém.** Existuje konečně mnoho $\frac{1}{2}$-antikonvexních množin A_i v E_1 tak, že $E_1 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$??

1014-7781

TÉMA 36

Monotonní transformace

Obsah: A. Definice, základní vlastnosti.

B. Vztah monotonie a spojitosti.

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

36.1 **Definice.** Řekneme, že zobrazení f definované na množině $M \subset E_n$ s hodnotami v E_n je

(a) **monotonní,** jestliže pro každé $x, y \in M$ platí
$(f(x) - f(y)) \circ (x - y) \geq 0$;

(b) **ryze monotonní,** jestliže pro každé $x, y \in M$, $x \neq y$ platí
$(f(x) - f(y)) \circ (x - y) > 0$;

(c) **silně monotonní,** jestliže existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $x, y \in M$ platí
$(f(x) - f(y)) \circ (x - y) \geq c \; \| x - y \|^2$
($\| \dots \|$ je eukleidovská norma v E_n).

36.2 **Cvičení.** Srovnejte definice z odstavce 36.1 s definicí monotonní funkce pro $n = 1$. Jak vypadají silně monotonní funkce v E_1?

36.3 **Cvičení.**

(a) Je-li $A : E_n \longrightarrow E_n$ lineární zobrazení, zkoumejte následující podmínky:

(i) pro všechna $x \in E_n$ je $Ax \circ x \geq 0$,

(ii) pro všechna $x \in E_n$, $x \neq 0$ je $A x \circ x > 0$,

(iii) existuje $c > 0$ tak, že pro všechna $x \in E_n$ je
$A x \circ x \geq c \; \| x \|^2$.

(b) Zkoumejte nutné a postačující podmínky na totální diferenciál $d\,T$ zobrazení T, aby T bylo monotonní (ryze monotonní,

1014-7781

silně monotonní) zobrazení (analogické pro E_1, kde se vyšetřuje souvislost znaménka derivace a monotonie).

36.4 Omezenost.

(a) Buď f monotonní zobrazení E_n do E_n. Potom obraz libovolné omezené množiny je omezená množina.

Návod. Dokažte sporem.

(b) Buď f monotonní transformace definovaná na $U(0, R+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Potom množina $f(U(0,R))$ je omezená. Ukažte na příkladě, že je-li $\varepsilon = 0$, pak tvrzení nemusí platit.

B. VZTAH MONOTONIE A SPOJITOSTI

36.5 Hemispojitost. Buď M otevřená podmnožina E_n a f zobrazení definované na množině M s hodnotami v E_k. Řekneme, že zobrazení f je hemispojité (spojité po polopřímkách) v bodě $x_0 \in M$, jestliže pro každé $w \in E_n$ platí

$$\lim_{t \to 0_+} f(x_0 + t\,w) = f(x_0).$$

36.6 Cvičení.

(a) Uveďte příklady transformací, které jsou hemispojité a nejsou spojité alespoň v jednom bodě. (Srovnej s tématem 33.)

(b)(??) Předpokládejme, že zobrazení f je hemispojité v každém bodě E_n. Jak vypadá množina bodů spojitosti funkce f? Může být prázdná?

36.7 Tvrzení. Buď f hemispojité zobrazení E_n do E_n, x_0, $w \in E_n$. Nechť pro každé $y \in E_n$ platí:

$$(w - f(y)) \circ (x_0 - y) \geq 0.$$

Potom $f(x_0) = w$. Dokažte!

Návod. Pro libovolné z a $t > 0$ položte $y = x_0 - tz$. Použitím spojitosti skalárního součinu již vše snadno dokážete.

36.8 Věta. Buď f monotonní a hemispojité zobrazení E_n do E_n. Potom f je spojité. Dokažte!

1014-7781

N á v o d. Nechť $x_n \longrightarrow x_0$ a $f(x_n) \not\longrightarrow f(x_0)$. Podle odstavce 36.4.a existuje konstanta $L > 0$ tak, že $\| f(x_n) \| \leq L$. Podle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$ a $w \in E_n$ tak, že $f(x_{n_k}) \longrightarrow w$. Pomocí odstavce 36.7 dokažte, že $w = f(x_0)$. Odtud odvoďte spor.

36.9 Cvičení.

(a) Sestrojte spojitou monotonní transformaci E_n do E_n takovou, že $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\|$ neexistuje (srovnej s 16.6).

(b) Sestrojte monotonní transformaci $T : E_n \longrightarrow E_n$ takovou, že $T(E_n) = E_n$ a T není spojitá. (Srovnej s 16.10.b.)

36.10.(??) Problémy.

(a) Charakterizujte množinu bodů nespojitosti monotonní transformace. (Srovnejte s 16.7.a.)

(b) Charakterizujte množinu bodů, ve kterých má monotonní transformace totální diferenciál. (Srovnejte s 16.12.)

36.11** Věta. Je-li f monotonní a spojité zobrazemí E_n do E_n, $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = \infty$, pak $f(E_n) = E_n$. (K důkazu se používá jisté modifikace Brouwerovy věty o pevném bodu.)

Poznámka. Monotonní transformace lze definovat v obecných Hilbertových prostorech. Platí věta analogická tvrzení v tomto odstavci, pomocí které se dokazuje existence slabého řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu.

1014-7781

T É M A 37

Harmonické funkce

K harmonickým funkcím, o nichž pojednává toto téma, vede řešení některých fyzikálních problémů. Tyto problémy zde však formulovat nebudeme, čtenář se s nimi seznámí podrobněji v teorii parciálních diferenciálních rovnic, rovnic matematické fyziky, či v teorii potenciálu a harmonických funkcích.

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

37.1 Definice. Nechť f je funkce definovaná na otevřené množině $G \subset E_n$, která má v každém bodě $x \in G$ derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \quad (i=1,\dots,n).$$

Označme symbolem Δf funkci

$$\Delta f : x \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x), \qquad x \in G.$$

Řekneme, že funkce f je harmonická na množině G, jestliže

(i) f je spojitá na G,

(ii) $\Delta f = 0$ na G.

Množinu všech harmonických funkcí na G označme $\mathcal{H}_n(G)$ (někdy pouze $\mathcal{H}(G)$).

Poznámka. Rovnici $\Delta f(x) = 0$ ("neznámá" je funkce f) se říká Laplaceova rovnice. Prvky $\mathcal{H}(G)$ jsou tedy spojitá řešení Laplaceovy rovnice.

37.2 Cvičení. Ukažte, že existuje nespojité řešení Laplaceovy rovnice.

Návod. Pro $[x, y] \in E_2$, $[x, y] \neq [0, 0]$ definujte $\varphi_1(x, y)$ (resp. $\varphi_2(x, y)$) jako reálnou (resp. imaginární) část komplexního čísla $-(x + iy)^{-4}$. Položte

$$f(x, y) = e^{\varphi_1(x,y)} \cdot \cos \varphi_2(x, y), \quad f(0, 0) = 0.$$

Potom $\Delta f = 0$ v E_2 a f není spojitá v E_2.

37.3 Cvičení. Dokažte následující vlastnosti systému $\mathcal{H}_m(G)$:

(a) $\mathcal{H}_m(G)$ tvoří (vzhledem k obvyklým operacím) lineární prostor;

(b) Nechť $h \in \mathcal{H}_m(G)$, $G_1 \subset G$ otevřená. Potom $h \in \mathcal{H}_m(G_1)$ (korektněji bychom měli psát $h \mid G_1 \in \mathcal{H}_m(G_1)$).

(c) Nechť $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, G_α otevřené. Nechť h je taková funkce na G, že $h \in \mathcal{H}_m(G_\alpha)$ pro každé $\alpha \in A$. Potom $h \in \mathcal{H}_m(G)$.

(d) Systém $\mathcal{H}_m(E_n)$ odděluje body, tj. pro každé $y \neq x (\in E_n)$ existuje $h \in \mathcal{H}_m(E_n)$ tak, že $h(x) \neq h(y)$.

37.4 Cvičení. Určete dimensi prostoru $\mathcal{H}_m(G)$.

Návod. Pro $n > 1$, $\alpha \in E_1$ je funkce

$$[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow e^{kx_1} \cdot \cos k (x_2 - \alpha)$$

harmonická na E_n pro každé $k \in N$. V případě $n = 1$ záleží na počtu komponent množiny G.

37.5 Cvičení. Buď $F \in \mathcal{H}_m(G)$. Rozhodněte, zda lze F vždy spojitě rozšířit na $\overline{G}$.

37.6 Cvičení.

(a) Buď $G \subset E_n$ otevřená množina, f funkce na G.

Nechť na G existují $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,\dots,n)$. Potom zobrazení

$$x \longmapsto \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right]$$

množiny G do E_n budeme značit grad f (gradient funkce f).

Je-li v zobrazení G do E_n, $v = [v_1, \dots, v_n]$ a existuje-li pro každé $x \in G$ derivace $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$ $(i=1,\dots,n)$, potom funkci

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$$

definovanou na G nazveme <u>divergencí</u> v (zkratka $\operatorname{div} v$).

Dokažte, že : $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$

za předpokladu existence příslušných derivací.

(b) Nechť g má derivaci v intervalu $(a,b) \subset E_1$, $a \geqq 0$. Buď $G = \{x \in E_n ;\ a < \|x\| < b\}$. (Je ovšem $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.) Pro $x \in G$ definujme

$v(x) = x \cdot g(\|x\|)$.

Potom $\operatorname{div} v = 0$ na G, právě když existuje $c \in E_1$ tak, že

$$g(t) = \frac{c}{t^n} \quad \text{v} \ (a,b)$$

(neboli $v(x) = c \bullet \dfrac{x}{|x|^n}$).

(c) Nechť funkce h má derivaci druhého řádu v $(a,b) \subset E_1$ a nechť opět $G = \{x \in E_n;\ a < \|x\| < b\}$. Pro $x \in G$ definujeme $F(x) = h(\|x\|)$. Je-li $n > 2$, je

$F \in \mathcal{H}_m(G)$, právě když existují čísla C_1, C_2 tak, že

$h(t) = C_1 t^{2-n} + C_2$ v (a,b).

N á v o d. Platí $\operatorname{grad} F(x) = g'(\|x\|) \cdot \dfrac{x}{\|x\|}$. Položte $g(t) = \dfrac{1}{t} h'(t)$ a užijte (b).

(d) Zformulujte podobné tvrzení pro případ $n = 2$.

(e) Pro $n = 1$ podejte charakteristiku $\mathcal{H}_1(G)$ pro libovolnou otevřenou G.

(f) Buď $G \subset E_n$ otevřená množina $(n > 1)$, $0 \notin G$. Nechť f má spojité derivace druhého řádu na G; buď $R > 0$. Pro $t \in E_n$, $t \neq 0$ položte

$$\varphi(t) = \frac{R^2 t}{t \circ t} .$$

Potom $f \in \mathcal{H}_n(G)$, právě když $|t|^{2-n} f(\varphi(t)) \in \mathcal{H}_n(G)$.
Dokažte!

Poznámka. Uvědomte si, že $\varphi(\varphi(t)) = t$. Podejte geometrickou interpretaci zobrazení φ.

(g) Je-li u, $u^2 \in \mathcal{H}_n(G)$, pak u je konstantní na každé komponentě množiny G. Dokažte!

(h) Najděte všechny funkce f jedné proměnné s touto vlastností: Je-li $u \in \mathcal{H}_n(G)$, je $f * u \in \mathcal{H}_n(G)$.

Návod. Nejprve dokažte, že f'' je spojitá.

(i) Najděte nutné a postačující podmínky pro funkce $u, v \in \mathcal{H}_n(G)$, aby $u \cdot v \in \mathcal{H}_n(G)$.

$\boxed{37.7}$ Věta. Buď $G \subset E_n$ neprázdná, omezená a otevřená. Buď f spojitá funkce na $\bar{G}$, harmonická na G. Potom existují $b_1, b_2 \in \text{hr}\, G$ tak, že $f(b_1) \leqq f(x) \leqq f(b_2)$ pro každé $x \in G$ (tzv. věta o maximu a minimu harmonických funkcí).
Dokažte!

Návod. Buď $M_f = \max\limits_{x \in \bar{G}} f(x)$, $m_f = \max\limits_{x \in \text{hr}G} f(x)$. Nechť $M_f > m_f$. Pro malá $\varepsilon > 0$ platí pro funkci $g(x) = f(x) + \varepsilon x^2$ také $M_g > m_g$. (Je ovšem $x^2 = x \circ x$.) Buď $M_g = g(y)$. Protože je $y \in G$, je $\dfrac{\partial^2 g(y)}{\partial x_i^2} \leqq 0$ $(i=1,\dots,n)$, tedy $\Delta g(y) \leqq 0$. Na druhé straně je však $\Delta g(y) = \Delta f(y) + 2n > 0$.

B. DIRICHLETOVA ÚLOHA

$\boxed{37.8}$ Definice. Buď $G \subset E_n$ otevřená, $\emptyset \neq G \neq E_n$. Buď f spojitá funkce na hranici množiny G. Nechť existuje spojitá funkce F na $\bar{G}$ taková, že

$$F \in \mathcal{H}_n(G), \qquad F = f \quad \text{na} \quad \text{hr}\, G.$$

Potom funkci F nazýváme řešením Dirichletovy úlohy (příslušné k množině G a funkci f). Množinu $G \subset E_n$ nazveme <u>regulární</u>, jestliže pro k a ž d o u funkci spojitou na hr G existuje řešení příslušné Dirichletovy úlohy. Množiny, které nejsou regulární, nazveme <u>iregulární</u>.

37.9 <u>Věta</u> (jednoznačnost Dirichletovy úlohy).
Buď $G \subset E_n$ <u>omezená</u> otevřená množina. Buď f spojitá funkce na hr G. Potom existuje nejvýše jedno řešení Dirichletovy úlohy příslušné k f a G.

N á v o d. Užijte 37.7.

37.10 <u>Cvičení.</u> Na příkladě ukažte, že předpoklad omezenosti je v 37.9 podstatný.

N á v o d. Zkuste položit $G = \left\{ x \in E_2;\ \|x\| > 1 \right\}$ a $f = 1$ na hr G.

37.11 <u>Cvičení.</u>

(a) Buď $G \subset E_n$ omezená otevřená. Nechť h_n je posloupnost funkcí spojitých na $\bar{G}$ a harmonických na G. Nechť posloupnost $\{h_n\}$ konverguje stejnoměrně na hr G. Potom $\{h_n\}$ konverguje stejnoměrně na G. Dokažte!

N á v o d. Užijte 37.7.

(b) Pro $r > 0$ položte $G = \left\{ x \in E_n;\ 0 < \|x\| < r \right\}$, nechť dále $f(x) = 0$ pro $\|x\| = r$, $f(0) = 1$. Ukažte, že neexistuje řešení Dirichletovy úlohy příslušné k f a G.

N á v o d. Předpokládejte, že existuje řešení F Dirichletovy úlohy příslušné k f a G. Potom $0 \leqq F \leqq 1$ na G. Pro malá $\varepsilon > 0$ uvažujte na $G_\varepsilon = \left\{ x \in E_n;\ \varepsilon < \|x\| < r \right\}$ funkci $H_\varepsilon(x) = \dfrac{-p(\|x\|) + p(r)}{-p(\varepsilon) + p(r)}$, kde $p(t) = \log t$ pro $n = 2$, $p(t) = t^{2-n}$ pro $n > 2$. Protože $H_\varepsilon(x) = 0$ pro $\|x\| = r$, $H_\varepsilon(x) = 1$ pro $\|x\| = \varepsilon$, je funkce $H_\varepsilon - F$ harmonická a nekladná na hr G_ε. Podle 37.7 je $H_\varepsilon \geqq F$ na G_ε. Nyní zvolte $z \in G$. Pro každé $\varepsilon \in (0, \|z\|)$ je

$0 \leqq F(z) \leqq H_\varepsilon(z)$; odtud pro $\varepsilon \to 0+$ vyjde $F(z) = 0$. Je tedy $F = 0$ na G, takže $f(0) = 0$, což je spor.

(c) Transformujte Laplaceovu rovnici do polárních souřadnic.

37.12 Poznámka. Množina G z příkladu 37.11.b je tedy iregulární. V dalším sestrojíme příklady regulárních množin v E_2. Množinu všech komplexních čísel ztotožníme obvyklým způsobem s E_2. Připomeňme, že $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

C. HARMONICKÉ FUNKCE V E_2

37.13* Cvičení.

(a)* Množina $U(z_0, R) = \{z \in E_2;\ |z - z_0| < R\}$ je regulární.

N á v o d. Buď f spojitá na $\operatorname{hr} U(z_0, R)$. Položme

$$u(z_0 + r e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + R e^{i\vartheta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}\, d\vartheta$$

pro $r \in (0, R)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ (tomuto integrálu se někdy říká Poissonův integrál), $u(z_0 + R e^{i\varphi}) = f(z_0 + R e^{i\varphi})$. Dokažte, že funkce u řeší Dirichletovu úlohu příslušnou k f a $U(z_0, R)$. [Derivací za integračním znamením zjistíte, že u je harmonická na $U(z_0, R)$. Důkaz spojitosti u na $\overline{U(z_0, R)}$ je poněkud obtížnější.]

(b) Buď $G \subset E_2$ otevřená, h harmonická funkce na G. Potom h má spojité parciální derivace všech řádů na G. Dokažte!

N á v o d. Zvolte $z_0 \in G$ a vyšetřujte h v dostatečně malém okolí bodu z_0. Použijte 37.9, 37.13.a a větu o derivování za integračním znamením.

(c) Při stejném označení jako v (a) platí:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + R e^{i\vartheta})\, d\vartheta$$ (tzv. věta o průměru).

(d) Buď h harmonická a omezená v E_2. Potom je h konstantní (tzv. Liouvilleova věta).

N á v o d. Pomocí 37.9 a 37.13.c odvoďte, že pro každé $R > 0$ je $h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(R\, e^{i\vartheta})\, d\vartheta$. Zvolte $z = r\, e^{i\varphi}$.

Pro $R > r$ odhadněte $|h(r\, e^{i\varphi}) - h(0)|$ pomocí Poissonova integrálu pro $U(0,R)$ a uvažujte $R \to \infty$.

(e)* Buď $G \subset E_2$ oblast (= otevřená a souvislá množina), nechť $h_n \in \mathcal{H}_2(G)$, $h_n \nearrow h$ v G. Potom je buď $h \equiv +\infty$ na G nebo $h \in \mathcal{H}_2(G)$ (tzv. Harnackova věta).

N á v o d. Nejprve dokažte:

(*) Buďte $z_0 \in G$, $R > 0$ takové, že $h(z_0) < +\infty$ a $\overline{U(z_0,R)} \subset G$. Potom $h_n \rightrightarrows h$ v $\overline{U(z_0,R)}$.

K důkazu tohoto tvrzení zvolte $\varepsilon > 0$ tak, aby $\overline{U(z_0,R+\varepsilon)} \subset G$; nyní vyjádřete hodnoty funkce $h_m - h_n$ $(m > n)$ v kruhu $U(z_0,R)$ pomocí hodnot této funkce na $\mathrm{hr}\,(U(z_0, R+\varepsilon))$ (Poissonův integrál).

Pro $z \in \overline{U(z_0,R)}$ vyjde odhad

$$0 \leqq h_m(z) - h_n(z) \leqq \left(\frac{R+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \left(h_m(z_0) - h_n(z_0)\right).$$

Odtud již tvrzení v (*) plyne.

Položte $M = \{z \in G;\ h(z) < \infty\}$. Pomocí (*) dokažte, že M je otevřená i uzavřená v souvislé množině G.

Je-li $M = G$, je podle (*) funkce h harmonická na G.

(f) Buď $G \subset E_2$ oblast, $h \in \mathcal{H}_2(G)$, $h \geqq 0$ na G. Potom je buď $h \equiv 0$ na G anebo $h > 0$ na G. Dokažte!

N á v o d. Vyšetřujte posloupnost $h_n = n \cdot h$ a použijte (e).

37.14 Poznámka. Většina tvrzení, formulovaných v 37.13 pro E_2, platí obecně i pro E_m. (Vyslovte je kupř. též pro E_1.) Vyjádření Poissonova integrálu je ovšem jiné.

Zatím víme, že v E_2 je libovolný kruh regulární množina, kdežto kruh z něhož je "vynechán" střed z_0 je množina iregulární. Vzniká tedy otázka, jak poznat, zda daná množina je regulární. Některé odpovědi na tuto otázku a další informace o Dirichletově úloze v E_n lze nalézt např. v přístupně psaném článku J. Mařík: Dirichletova úloha, Čas.pěst.

mat. 82 (1957), 257-282, nebo ve skriptech Teorie potenciálu II. (Viz též [J II], kap. XIII, § 10 - cvičení.)

37.15 Poznámka. Všimněme si znovu některých vlastností harmonických funkcí v E_2. Uvažovali jsme prostor $X = E_2$ a jeho otevřené podmnožiny. Každé otevřené množině U jsme přiřadili systém funkcí, který jsme značili $\mathcal{H}(U)$. Víme, že $\mathcal{H}(U)$ je lineární prostor reálných spojitých funkcí. Máme tedy definováno zobrazení (označme ho $\mathcal{H}$) $\mathcal{H} : U \longrightarrow \mathcal{H}(U)$ systému otevřených množin v X. Toto zobrazení má vlastnosti:

(i) Jsou-li $U_1 \subset U_2$ otevřené, je $\mathcal{H}(U_2) \subset \mathcal{H}(U_1)$.

(ii) Je-li $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, U_α otevřené, a je-li f funkce na U taková, že $f \in \mathcal{H}(U_\alpha)$ pro každé α, potom $f \in \mathcal{H}(U)$ (dopouštíme se zde menších nekorektností).

Zobrazení s těmito vlastnostmi se nazývá svazek ("sheaf").

Dále víme, že v X existuje "dostatečné" množství regulárních množin (přesněji řečeno existuje otevřená báze metrického prostoru E_2, která je tvořena regulárními množinami). Zjistili jsme též, že limita neklesající posloupnosti harmonických funkcí je buď funkce harmonická nebo funkce identicky rovna $+\infty$.

V případě E_2, o kterém mluvíme, byly harmonické funkce definovány jako spojitá řešení Laplaceovy rovnice. Je ovšem užitečné vyšetřovat zcela abstraktně svazky, které mají vlastnosti vypsané výše. V definici regulární množiny je potom vhodné požadovat, aby pro každou spojitou funkci f na hranici existovalo právě jedno řešení Dirichletovy úlohy, které je nezáporné, jakmile $f \geqq 0$.

Není nutné vyšetřovat podmnožiny E_2 nebo E_m, tyto prostory lze nahradit jistými třídami obecných metrických nebo topologických prostorů. Teorie, která vyšetřuje vlastnosti "obecných harmonických funkcí", se nazývá axiomatická teorie harmonických prostorů.

T É M A 38

Některé věty o posloupnostech

Obsah: A. Cauchyova věta.

B. Stolzova věta.

A. CAUCHYOVA VĚTA

38.1 Cauchyova věta. Buď $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel, definujeme posloupnost $\{b_n\}$ vztahem: $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. Potom platí: existuje-li limita $\lim a_n = A$ (vlastní, nevlastní), existuje i $\lim b_n$ a $\lim b_n = A$. Dokažte!

N á v o d.

(a) Nechť sprvu $A \in E_1$. Existuje $K > 0$ tak, že $|a_n - A| \leq K$ pro všechna $n \in N$. Zvolte $\varepsilon > 0$ a najděte indexy n_o, n_1 $(n_1 > n_0)$ tak, aby

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro všechna} \quad n > n_o ,$$

$$\frac{Kn_o}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro všechna} \quad n > n_1$$

(na čem závisí n_1?) a využijte nerovnosti

$$|b_n - A| \leq \sum_{j=1}^{n_o} \frac{1}{n} |a_j - A| + \sum_{j=n_o+1}^{n} \frac{1}{n} |a_j - A|$$

pro každé $n > n_1$. Obdobně pro nevlastní A (viz též [D II], kap. II, § 4, věta 28 a cvičení 2).

(b) Užijte Stolzovu větu - 38.6.

Poznámka. Věta z odstavce 38.1 slouží jako základ tzv. Cesarově sčítací metodě (viz téma 43).

38.2 Cvičení. Ukažte, že může existovat $\lim b_n$ a nemusí existovat $\lim a_n$.

38.3 **Věta.** Buď $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel. Nechť existuje $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$. Potom existuje i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a $\lim \sqrt[n]{a_n} = A$. Dokažte!

N á v o d.

(a) Buď nejdříve $0 < A < +\infty$. Zvolte $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < A)$ a nalezněte n_0 tak, aby $a_{n_0}(A-\varepsilon)^{n-n_0} < a_n < a_{n_0}(A+\varepsilon)^{n-n_0}$ pro každé $n > n_0$. Dále využijte poznatku, že $\lim \sqrt[n]{A} = 1$ a nalezněte n_1 tak, aby $A - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < A + \varepsilon$ pro každé $n > n_1$. Obdobně pro $A = 0$ či $A = +\infty$.

(b) Použijte též Cauchyovu větu na výraz

$$\frac{1}{n}\left(\log a_1 + \log(a_2/a_1) + \ldots + \log(a_n/a_{n-1})\right).$$

38.4 **Cvičení.** Dokažte obecnější tvrzení, že vždy $(a_n > 0)$

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

38.5 **Cvičení.**

(a) Pomocí věty 38.3 vysvětlete, proč je Cauchyovo kriterium pro konvergenci řad "silnější" než d'Alembertovo kriterium. Nalezněte dále příklad řady, o jejíž konvergenci lze rozhodnout Cauchyovým, ale ne d'Alembertovým kriteriem.

(b) Pomocí věty 38.3 ukažte, že $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

B. STOLZOVA VĚTA

38.6 **Stolzova věta.** Nechť $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost a $\{y_n\}$ je rostoucí posloupnost reálných čísel, která není shora omezená. Nechť existuje (vlastní, nevlastní) limita $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$. Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$. Dokažte!

N á v o d. Důkaz rozdělte na dvě části.

(a) $A \in E_1$. Odvoďte z definice limity implikaci

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0\in N} \ \forall_{n\in N} \left(n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{x_n - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}} - A \right| < \varepsilon \right)$$

a pomocí toho odhadněte výraz $\left| \frac{x_n}{y_n} - A \right|$.

(b) A - nevlastní. Ukažte, že je možno použít (a) na převrácenou hodnotu.

38.7 Cvičení.

(a) Srovnejte Stolzovu větu s l'Hospitalovým pravidlem.

(b) Ukažte na příkladech, že Stolzovu větu není možno "obrátit".

(c) Ukažte, že nelze vynechat předpoklad neomezenosti posloupnosti $\{y_n\}$.

(d) Pomocí Stolzovy věty určete $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}}, \quad k \text{ přirozené (viz téma 44).}$$

1014-7781

T É M A 39

Hromadné hodnoty

Obsah: A. Hromadné hodnoty posloupností.

B. Posloupnosti funkcí.

C.* Přerovnávání řad s komplexními členy.

A. HROMADNÉ HODNOTY POSLOUPNOSTÍ

39.1 Definice. Zopakujte si pojem "hromadné hodnoty" posloupnosti reálných čísel (viz kupř. [D II], kap. II, § 2). Označme symbolem $H^*(\{a_n\})$ množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$, nechť dále $H(\{a_n\}) = H^*(\{a_n\}) \cap E_1$.

39.2 Cvičení.

(a) Udejte vztah $\limsup a_n$, $\liminf a_n$ a $H^*(\{a_n\})$.

(b) Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, právě když $H(\{a_n\}) = H^*(\{a_n\})$.

(c) Nalezněte posloupnost $\{a_n\}$ tak, aby množina $H(\{a_n\})$ byla: (α) prázdná, (β) jednobodová, (γ) dvoubodová, (δ) celé E_1.

39.3 Cvičení. Buď $a \in E_1$. Nechť $a_n = na - [na]$ (tzv. zlomková část čísla na), $n = 1,2,\dots$. Určete $H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ v závislosti na tom, zda a je celé, racionální či iracionální. Viz kupř. [D II], kap. II, § 2, cvič. 5 nebo téma 46.

39.4 Cvičení. Dokažte následující tvrzení:

Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $J \subset E_1$, nechť $\{a_n\} \subset J$ je posloupnost taková, že $H(\{a_n\}) \subset J$. Potom $H(\{f(a_n)\}) = f(H(\{a_n\}))$.

N á v o d. Uvažte, že jde o důkaz dvou inkluzí. Při důkazu jedné užijte např. Bolzano-Weierstrassovy věty o hromadné hodnotě omezené posloupnosti, při důkazu druhé pak Heineho definici limity.

$\boxed{39.5}$ Cvičení. Nalezněte $H(\{\sin n\pi a\}_{n=1}^{\infty})$ v závislosti na a. Ukažte odtud, že $\lim_{n\to\infty} \sin nx$ existuje, právě když x je celistvým násobkem π.

N á v o d. Použijte 39.3 a 39.4. Viz též [D II], kap. II, § 2, cvič. 6, 7.

$\boxed{39.6}$ Cvičení.

(a) Ukažte, že množina $H(\{a_n\})$ je uzavřená v E_1 pro každou posloupnost $\{a_n\}$.

(b) Naskýtá se otázka, zda charakteristika množin $H(\{a_n\})$ pomocí uzavřenosti (v (a)) je úplná. Odpověď na tuto otázku je pozitivní. Dokažte, že libovolná uzavřená množina v E_1 je množinou konečných hromadných hodnot určité posloupnosti.

N á v o d. Viz [G - O] kap. 5, § 2.

Poznámka. V [G - O] je pod čarou k tomuto problému uveden "jednodušší" návod důkazu předešlého tvrzení od ruského překladatele. Je tento důkaz správný?

$\boxed{39.7^*}$ Tvrzení.

(a) Buď $\{a_n\}$ omezená posloupnost. Potom množina $H(\{a_n\})$ je souvislá, právě když existuje vybraná posloupnost $\{y_n\}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že $H(\{a_n\}) = H(\{y_n\})$ a limita $\lim_{n\to\infty}(y_n - y_{n-1}) = 0$. Dokažte!

Uvědomte si, že v tomto případě (použijte 39.6.a) je množina $H(\{a_n\})$ buďto jednobodová nebo je uzavřený interval.

N á v o d. Nechť je splněna podmínka o vybrané posloupnosti a nechť posloupnost $\{a_n\}$ není konvergentní. Zvolte $x_1, x_2 \in H(\{a_n\})$, $x_1 < x_2$. Stačí nyní dokázat, že každé $\xi \in (x_1, x_2)$ leží v množině $H(\{a_n\})$. Druhá implikace je snadnější.

(b) Je předpoklad omezenosti posloupnosti $\{a_n\}$ v bodě (a) podstatný?

B. POSLOUPNOST FUNKCÍ

Připomeňme větu, že z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní posloupnost. V tomto oddíle ukážeme, že tato věta neplatí pro posloupnosti reálných funkcí.

39.8 **Definice.** Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ na množině M je stejně omezená, jestliže existuje $K > 0$ tak, že nerovnost $|f_n(x)| \leq K$ platí pro všechna $x \in M$ a všechna $n \in N$.
Ukážeme v dalším, že existuje posloupnost funkcí $\{f_n\}$ stejně omezených na nějakém intervalu $< a,b >$, pro niž žádná podposloupnost nekonverguje.

39.9 **Příklady.** Buďte f_n, g_n definovány na $< a,b > \subset E_1$ předpisem: $f_n(x) = \sin n x$, $g_n(x) = n x - [n x]$.
Ukažte, že žádná podposloupnost posloupnosti $\{f_n\}$ ani posloupnosti $\{g_n\}$ nekonverguje na $< a,b >$. Dokažte toto tvrzení přímo bez pomoci následující věty!
Se znalostmi teorie Lebesgueova integrálu lze odvodit větu značně obecnější.

39.10* **Věta.** Buď f omezená, lebesgueovsky integrovatelná funkce na intervalu $< 0,1 >$ (tj. $f \in \mathcal{L}(0,1)$). Rozšiřme f periodicky na E_1 s periodou 1. Předpokládejme dále, že f není na intervalu $< 0,1 >$ skoro všude rovna jisté konstantě. Potom žádná podposloupnost posloupnosti $\{f(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje na žádném intervalu $< a,b > \subset E_1$.

N á v o d.

(i) Pro libovolný omezený interval $< \alpha, \beta > \subset E_1$ je

$$(*) \quad \lim_{n \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(n x)\, dx = (\beta - \alpha) \int_0^1 f; \quad \text{označme } M = \int_0^1 f.$$

(ii) Předpokládejme, že $f(n_k x) \longrightarrow g(x)$ na $< a,b >$, zvolíte-li $< \alpha, \beta > \subset < a,b >$, jest $\int_{\alpha}^{\beta} g = \lim_{k \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(n_k x)\,dx = (\beta - \alpha) M$, tedy $\int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - M)\, dx = 0$. Odtud plyne, že $g = M$ s.v. v $< a,b >$ (jaké věty jsme použili?).

1014-7781

(iii) Aplikujete-li ($*$) na funkci $|f(x) - M|$ a interval $\langle a,b\rangle$, dostáváte $\lim_{k\to\infty}\int_a^b |f(n_k x) - M|\,dx =$

$$= (b-a)\int_0^1 |f(x) - M|\,dx,$$ ale

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b |f(n_k x) - M|\,dx = \int_a^b |g(x) - M|\,dx = 0$$

(vysvětlete!), tudíž $\int_0^1 |f(x) - M|\,dx = 0$ a $f = M$ s.v. v $\langle 0,1\rangle$.

C.* PŘEROVNÁVÁNÍ ŘAD S KOMPLEXNÍMI ČLENY

Zopakujte si následující věty o přerovnávání řad.

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně (tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, $a_n \in E_1$) a má součet s. Nechť $\{n_k\}$ je prostá posloupnost obsahující právě všechna přirozená čísla. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ (vzniklá z řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ "přerovnáním") je také absolutně konvergentní a má součet s (viz [D II], kap. III, § 2).

<u>Riemannova věta:</u> Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s <u>reálnými</u> členy je neabsolutně konvergentní. Buď $s \in E_1$ (případně $s = +\infty$, $s = -\infty$). Potom lze řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přerovnat tak, aby měla součet s (tj. existuje prostá posloupnost $\{n_k\}$ obsahující právě všechna přirozená čísla tak, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = s$). (Viz [D II], kap. III, § 2.)

39.11 **Věta.**

(a) Buď dána konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se součtem s. Buďte $L > 0$ a $\{n_k\}$ prostá posloupnost obsahující právě všechna přirozená čísla taková, že $|n_k - k| < L$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ je konvergentní a má součet s.

N á v o d. Odhadněte rozdíl $\sum_{k=1}^{m} a_{n_k} - \sum_{n=1}^{m} a_n$ s využitím Bolzano-Cauchyovy podmínky a toho, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Ukažte, že tvrzení z (a) nelze obecně zlepšit, tj. je-li dána prostá posloupnost $\{n_k\}$ obsahující právě všechna přirozená čísla, pro níž $\limsup_{k\to+\infty} |n_k - k| = +\infty$, existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taková, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ diverguje (resp. konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$).

(c) Vyšetřete, zda platí:

Pro každou neabsolutně konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a pro každou rostoucí funkci $f(x)$ definovanou na $\langle 1,+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ existuje "přerovnání" $\{n_k\}$ tak, že $|n_k - k| \leq f(k)$, $k=1,2,\dots$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ buď diverguje nebo konverguje k jinému součtu než $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (Lze ještě navíc hodnotu tohoto součtu předepsat?)

39.12 Označení. Buď dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s k o m p l e x n í m i členy. Symbolem $M = M(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ označme množinu součtů všech konvergentních řad, které vzniknou z řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přerovnáním. Dále zaveďme toto označení: $\mathrm{Re}^+ z = \max(\mathrm{Re}\, z, 0)$, $\mathrm{Re}^- z = -\min(\mathrm{Re}\, z, 0)$,

$$\mathrm{Im}^+ z = \max(\mathrm{Im}\, z, 0), \quad \mathrm{Im}^- z = -\min(\mathrm{Im}\, z, 0)$$

pro každé $z \in E$. Zřejmě jsou to nezáporná čísla a je

$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}^+ z - \mathrm{Re}^- z$, $\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}^+ z - \mathrm{Im}^- z$,

$|\mathrm{Re}\, z| = \mathrm{Re}^+ z + \mathrm{Re}^- z$, $|\mathrm{Im}\, z| = \mathrm{Im}^+ z + \mathrm{Im}^- z$.

Cílem zbývající části je zobecnění Riemannovy věty na řady s komplexními členy. V literatuře je pouze uváděno, že neabsolutně konvergentní řadu s komplexními členy lze přerovnat tak, že výsledná řada diverguje. Platí však mnohem obecnější věta:

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní řada s komplexními členy. Potom buď M obsahuje jediný bod nebo obsahuje právě všechny body jisté přímky nebo obsahuje všechna komplexní čísla. Její důkaz je upraven z článku V. Jarníka: Über Umordnung unendlichen Reihen, Věstník Král. Čes. Spol. Nauk 1927, kde je vyšetřen mnohem obecnější případ.
Důkaz věty rozložíme na několik částí. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ buď stále řada s kompl. členy. Zřejmě stačí předpokládat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

39.13 **Lemma.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$. Potom pro každé reálné φ řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}^+ (a_n e^{-i\varphi}) \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}^- (a_n e^{-i\varphi})$$

buď obě konvergují nebo obě divergují.

N á v o d. Sporem.

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, je dle známé věty (viz úvod) $M\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \{0\}$. Nechť v dalším $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. Vzhledem k 39.13 rozlišíme dva případy:

I. $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\,(a_n e^{-i\varphi})| < +\infty$ pro alespoň jedno φ;

II. $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\,(a_n e^{-i\varphi})| = +\infty$ pro každé φ.

39.14 **Případ I.** Nechť existuje φ_0 tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}(a_n e^{-i\varphi_0})| < +\infty$.

Potom $M\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ je přímka $u\, e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}$, $u \in E_1$.

N á v o d. Z 39.13 a z $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ vyplývá, že obě řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}^+\left(a_n e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}^- \left(a_n e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right)$$

jsou divergentní. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(a_n e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}\left(a_n e^{-i\varphi_0}\right)$

lze tedy přerovnat k libovolnému součtu (je neabsolutně konvergentní s reálnými členy). Nakonec stačí uvážit, že abs. konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(a_n e^{-i\varphi_0}\right)$ má součet 0.

39.15 Směr divergence. Nejprve dokažte toto tvrzení:

(a) Buď dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ a nechť $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $r_n \geq 0$, $\alpha \leq \varphi_n \leq \beta$, $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = +\infty$. Potom existuje alespoň jedno φ, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (nazývané směr divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$), které má tuto vlastnost: Pro každé $\delta > 0$ je

$$\sum{}' |z_n| = +\infty ,$$

kde sčítáme přes ty indexy n, pro něž je $\varphi - \delta < \varphi_n < \varphi + \delta$.

Návod. Důkaz proveďte metodou vložených intervalů, nebo sporem a Borelovou větou.

(b) Množina všech směrů divergence dané řady je uzavřená.

(c) Nechť je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a nechť pro každé reálné φ je $\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Re}(a_n e^{-i\varphi})| = +\infty$. Potom v každém otevřeném úhlu délky π existuje alespoň jeden směr divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Návod. Použijte tvrzení (a) na úhel $(\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2})$.

39.16 Případ II.

(a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\operatorname{Re}(a_n e^{-i\varphi})\right| = +\infty$ pro každé reálné φ. Nechť φ_0 a $\varphi_0 + \pi$ jsou směry divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom lze tuto řadu přerovnat k libovolnému součtu.

Návod. Bez újmy na obecnosti buď $\varphi_0 = 0$. Ukažte nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ lze rozložit na čtyři "disjunktní" posloupnosti $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{f_n\}$ tak, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} b_n = +\infty , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im} b_n| < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} b_n = -\infty , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im} c_n| < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} d_n = +\infty , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} f_n = -\infty ,$$

$$\operatorname{Im} d_n \geqq 0 , \qquad \operatorname{Im} f_n < 0 .$$

Volte nejprve b_n a c_n na základě toho, že $\varphi_0 = 0$ a $\varphi_0 + \pi = \pi$ jsou směry divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, zbylé členy určují d_n a f_n. Je-li z libovolné komplexní číslo, buď

$$a + bi = z - i \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Im} b_n - \operatorname{Im} c_n).$$

Přerovnání řady k součtu z nyní konstruujeme podobně jako v důkazu Riemannovy věty postupně takto: Pomocí d_j a f_j zajistíme "komíhání" imaginárních částí kolem b, pomocí b_j a c_j "komíhání" reálných částí kolem a. Na součty $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} c_n$ nemusíme brát ohled, neboť jsou to řady absolutně konvergentní a jejich součty jsme již odečetli. Na členy $\operatorname{Re} d_j$ a $\operatorname{Re} f_j$ ovšem brát ohled musíme! (Proveďte velmi detailně!)

(b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Re} (a_n e^{-i\varphi})| = +\infty$ pro každé reálné φ. Nechť existuje směr divergence φ_0 řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, že $\varphi_0 + \pi$ není její směr divergence. Potom lze řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přerovnat k libovolnému součtu.

N á v o d.

(i) Podle 39.15.b,c existují směry divergence φ_1, φ_2, řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, že $\varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_0 + \pi$, $\varphi_0 \geq \varphi_2 \geq \varphi_0 - \pi$ a φ_1 je maximální, φ_2 je minimální (nakreslete!).

V úhlu (otevřeném) $(\varphi_1, \varphi_2 + 2\pi)$ není tedy žádný směr divergence, tj. $\varphi_2 + 2\pi - \varphi_1 < \pi$ a tedy

$0 < \varphi_1 - \varphi_o < \pi$, $0 < \varphi_2 + 2\pi - \varphi_1 < \pi$,

$0 < \varphi_o - \varphi_2 < \pi$.

(ii) Buď dána tři čísla φ_o, φ_1, φ_2, která vyhovují nerovnosti uvedené v bodě (i). Potom lze každé komplexní číslo z vyjádřit ve tvaru $z = \alpha_o e^{i\varphi_o} + \alpha_1 e^{i\varphi_1} + \alpha_2 e^{i\varphi_2}$,

kde α_o, α_1, α_2 jsou kladná čísla (vypočtěte α_o a α_1 pomocí α_2, Im z, Re z !).

(iii) Posloupnost $\{a_n\}$ rozložme "disjunktně" na čtyři nekonečné posloupnosti $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{f_n\}$ tak, aby

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(b_n e^{-i\varphi_o}) = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(c_n e^{i\varphi_1}) = +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(d_n e^{-i\varphi_2}) = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im}(b_n e^{-i\varphi_o})| < +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im}(c_n e^{-i\varphi_1})| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im}(d_n e^{-i\varphi_2})| < +\infty .$$

(Využijte toho, že φ_o, φ_1, φ_2 jsou směry divergence. Nekonečnost počtu zbylých členů nezapomeňte zajistit!)

(iv) Buď dáno komplexní číslo z. Nejprve utvořme

$$z_o^* = z - e^{+i(\varphi_o + \frac{\pi}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(b_n e^{-i\varphi_o}) - e^{i(\varphi_1 + \frac{\pi}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_n e^{-i\varphi_1}) -$$

$- e^{i(\varphi_2 + \frac{\pi}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(d_n e^{-i\varphi_2})$. Jednotlivé kroky nyní realizujeme takto: Vyjádříme $z_j - f_{j+1} = \varkappa_j e^{i\varphi_o} + \lambda_j e^{i\varphi_1} + \mu_j e^{i\varphi_2}$

a zařadíme b_n, c_n a d_n v minimálním počtu, ale tak, aby

$\sum \operatorname{Re}(b_n e^{-i\varphi_o}) > \varkappa_j$; $\sum \operatorname{Re}(c_n e^{-i\varphi_1}) > \lambda_j$;

$\sum \operatorname{Re}(d_n e^{-i\varphi_2}) > \mu_j$. Položíme $z_{jn} = z_j - f_{jn} -$

$- e^{i\varphi_o} \sum \operatorname{Re}(b_n e^{-i\varphi_o}) - e^{i\varphi_1} \sum \operatorname{Re}(d_n e^{-i\varphi_1}) - e^{i\varphi_2} \sum \operatorname{Re}(d_n e^{-i\varphi_2})$.

(Sumační indexy nespecifikujeme.) Opakování tohoto postupu realizuje hledané přirovnání. (Proveďte detailně!)

39.17 Hromadné hodnoty. Řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přiřaďme množinu $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$, což je množina všech hromadných hodnot posloupnosti $\{s_n\}$, kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. (Komplexní číslo $s \in m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$, právě když existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $\{n_j\}$ tak, že $\lim_{j\to\infty} s_{n_j} = s$.)

Ukažte, že platí tato tvrzení: (analogická 39.2, 6)

(a) $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ je uzavřená.

(b) Je-li dána v komplexní rovině uzavřená množina M, existuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, že $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = M$.

N á v o d. Zvolte v M spočetnou hustou množinu a definujte vhodně s_n!

(c) Vyšetřete, kdy $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \emptyset$.

N á v o d. Pokuste se najít vztah s tvrzením 39.13.

(d) Vytvořme sjednocení $m\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}\right)$, kde uvažujeme všechna přerovnání $\{n_k\}$. Na příkladech ukažte, že tato množina může být prázdná nebo tvaru $\rho_0 + r_1\rho_1 + r_2\rho_2$, kde ρ_2, ρ_1, ρ_0 jsou komplexní čísla a r_1, r_2 jsou buď nula nebo probíhají všechna celá nebo všechna reálná čísla (6 různých případů). Lze ukázat (viz výše citovaný článek V. Jarníka), že tím jsou vyčerpány všechny možné případy.

T É M A 40

Kriteria konvergence řad

Obsah:
- A. Nutné podmínky pro konvergenci řady.
- B. Obecné kriterium konvergence.
- C. Integrální kriterium.
- D. Zobecnění Hadamardovy věty.
- E. Zobecnění integrálního kriteria.

A. NUTNÉ PODMÍNKY PRO KONVERGENCI ŘADY

40.1 Cvičení. Podmínka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je nutnou podmínkou pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ukažte na příkladě, že tato podmínka není postačující pro konvergenci takové řady.

40.2 Cvičení. Ukažte na příkladě, že pro posloupnost $\{a_n\}$ nezáporných čísel nestačí rovnost $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ke konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$. Srovnejte tento výsledek s Leibnizovým kriteriem.

40.3 Lemma (zesílení podmínky uvedené v 40.1).
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\lim_{n\to\infty} n.a_n$ existuje. Potom $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$.

40.4 Cvičení. Ukažte na příkladě, že z konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neplyne existence $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n$.

N á v o d. Položte $a_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \neq k^2$, $a_{k^2} = \frac{1}{k^2}$.

40.5 Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim_{n\to\infty} n.a_n = 0$.

N á v o d. Odhadněte $n.a_n$ pomocí $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

40.6 Cvičení. Na příkladě ukažte, že ani podmínka $\lim_{n\to\infty} n.a_n = 0$ není postačující pro konvergenci řad s kladnými členy i pro $\{a_n\}$ nerostoucí.

40.7 Cvičení. Na příkladě ukažte, že podmínku ze 40.5 nelze již řádově zesílit, tj. zvolíme-li $\varepsilon > 0$, existuje nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\lim_{n\to\infty} n^{1+\varepsilon} a_n = +\infty$.

B. OBECNÉ KRITERIUM KONVERGENCE

40.8 Věta (Kummer).

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti kladných čísel a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ diverguje. Nechť $x_n = b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}$.

Jestliže

(i) $\exists_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in N}\ \forall_{n\in N}\ \left[(n \geq n_0) \Rightarrow (x_n \geq \varepsilon)\right]$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li

(ii) $\exists_{n_0\in N}\ \forall_{n\in N}\ \left[(n \geq n_0) \Rightarrow (x_n \leq 0)\right]$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

N á v o d.

(i) Ukažte, že $\{b_n a_n\}$ je klesající a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ je konvergentní. Použijte nyní srovnávacího kriteria.

(ii) Lze rovnou odvodit z podílového kriteria.

40.9 Cvičení. Vyslovte Kummerovo kriterium v limitní formě.

40.10 Cvičení. V případě volby $b_n = 1$, $b_n = n$, $b_n = n \log n$ vyslovte příslušná kriteria. (Poslední volba dává tzv. l o g a r i t m i c k é k r i t e r i u m.)

40.11 Cvičení. Ukažte na příkladech, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy, pro kterou je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$, může konvergovat i divergovat. (Připomeňte d'Alembertovo kriterium!)

40.12 Cvičení. Označme $\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Je-li $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha_n = 1$, pišme $\alpha_n = 1 + \frac{\beta_n}{n}$. Je-li $\lim_{n\to\infty} \beta_n \neq 1$, lze použít Raabeovo kriterium (volba $b_n = n$ ve větě 40.8); je-li $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1$, nedává ani Raabeovo kriterium žádný výsledek. Proto opět položme $\beta_n = 1 + \frac{\gamma_n}{n}$. Pomocí logaritmického kriteria dokažte:

V případě, že $\{\gamma_n\}$ je omezená, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Není-li $\{\gamma_n\}$ omezená, můžeme pro $0 < \varepsilon < 1$ položit $\beta_n = 1 + \frac{\delta_n(\varepsilon)}{n^{1-\varepsilon}}$. Zjistěte nyní, co lze tvrdit o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jestliže platí

$$\Big[\exists_{0<\varepsilon<1}\ \exists_{\omega>0}\ \exists_{n_0\in N}\ \forall_{n\in N}\ (n \geq n_0) \Rightarrow \delta_n(\varepsilon) \gtreqless \omega\Big].$$

40.13 Gaussovo kriterium. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel a $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}$, kde $\{\gamma_n\}$ je omezená. Pak pro $\alpha > 1$ nebo $\alpha = 1$, $\beta > 1$ je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a pro $\alpha < 1$ nebo $\alpha = 1$, $\beta \leq 1$ je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

40.14 Cvičení. Nechť α, β, γ jsou kladná čísla. Určete poloměr konvergence R mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n+1)\ \beta\,(\beta+1)\dots(\beta+n+1)}{n!\ \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\, x^n$$

(tzv. Gaussova hypergeometrická řada) a určete pomocí Gaussova kriteria chování řady pro $x = R$ v závislosti na α, β, γ.

N á v o d. Vyjde $R = 1$, konvergence pro $\gamma > \alpha + \beta$, divergence pro $\gamma = \alpha + \beta$. Pokuste se pomocí Abelovy parciální sumace vyšetřit konvergenci pro $x = -R$ (konverguje pro $\gamma > \alpha + \beta - 1$) (viz též 45.2.e).

C. INTEGRÁLNÍ KRITERIUM

40.15 **Věta** (Maclaurin - Cauchy).

Buď f spojitá, kladná a nerostoucí funkce na intervalu $\langle 1, +\infty)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje, právě když existuje konečný $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Dokažte!

N á v o d. Viz [D II], věta 243, str. 580.

40.16 **Cvičení.** Ilustrujte použití této věty na příkladech řad typu

$$\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha_0} (\log n)^{\alpha_1} \dots (\underbrace{\log \log \dots \log n}_{k\text{-krát}})^{\alpha_k}},$$

kde $\alpha_0, \dots \alpha_k$ jsou reálná čísla, q tak velká, že všechny členy mají smysl.

40.17 **Cvičení.** Vyšetřete, zda některé předpoklady věty 40.15 (spojitost, kladnost, monotonie f) se nedají vypustit.

40.18 **Věta.** Nechť funkce f má v intervalu $\langle 1, \infty)$ spojitou první derivaci a nechť $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Potom vlastní limita

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(x) - \int_1^n f(x)\,dx \right)$$

existuje, právě když existuje zobecněný Newtonův integrál

$$\int_1^{\infty} f'(x)\, \rho(x)\,dx, \quad \text{kde} \quad \rho(x) = 1/2 - x + [x].$$

N á v o d. Užijte Soninovu formuli z 41.4.

40.19 **Věta (Hardy).**

Nechť f má spojitou derivaci v intervalu $\langle 1, +\infty)$ a nechť existují (Newtonovy) $\int_1^\infty f(x)\,dx$, $\int_1^\infty |f'(x)|\,dx$.

Potom $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konverguje.

Návod. Užijte věty 40.18 (věta byla dokázána v Proc. Lond. Math. Soc., (2) 9 (1910), str. 126).

40.20 **Cvičení.**

(a) Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty \frac{(\log n)^p}{n} e^{i\alpha n}$ (p, α reálná).

(b) Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{i\alpha n}}{n^\beta}$.

40.21 **Věta.** Nechť f má spojitou derivaci v $\langle 1, \infty)$ a nechť existuje (Newtonův) $\int_1^\infty f(x)\,dx$. Nechť $\int_1^\infty f'(x) \sin 2k\pi x\,dx = O\left(\frac{1}{k^r}\right)$, kde $r > 0$. Potom $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konverguje.

Návod. Ukažte, že $\rho(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}$ pro malá x a užijte 40.18.

40.22* **Cvičení.** Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{i\alpha n^\gamma}}{n^\beta}$ (α, β, γ reálná čísla).

Návod. Netriviální je případ $0 < \beta \leqq 1$, $\alpha \neq 0$. Snadno nahlédneme, že stačí vyšetřit jen případy $0 < \beta \leqq 1$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Dále $\int_1^\infty \frac{e^{i\alpha x^\gamma}}{x^\beta}\,dx$ existuje, právě když $\beta + \gamma > 1$. Integrál $\int_1^\infty |f'(x)|\,dx$, kde $f(x) = e^{i\alpha x^\gamma}/x^\beta$ existuje, právě když $\beta > \gamma$. V těchto případech aplikujeme

Hardyovu větu. Je-li $0 < \gamma < 1$, $1 \geqq \beta > 0$, $\gamma + \beta > 1$, využijeme přímo 40.18.

Vzhledem k předchozímu stačí dokázat existenci integrálu $\int_1^\infty f'(x)\rho(x)\,dx$. Zde využijeme toho, že $f^{(s)}(x) \sim (i\alpha\gamma)^s x^{s(\gamma-1)-\beta} e^{i\alpha x^\gamma}$ a zvolíme-li s tak, aby $s(\gamma - 1) - \beta < -1$, stačí užít $(s-1)$-násobně integraci per partes. (Pozor! - volte účelně primitivní funkce k ρ.) Je-li $0 < \beta \leqq 1$, $0 < \gamma < 2$, $\gamma + \beta > 1$, užijte věty 40.21. Případ $\gamma \geqq 2$ se stává pro toto kriterium nedostupný.

D. ZOBECNĚNÍ HADAMARDOVY VĚTY

V dalším $\{a_j\}$, $\{z_j\}$ apod. bude znamenat posloupnost reálných nebo komplexních čísel.

40.23 Cvičení. Zaveďte pojem konvergentního nekonečného součinu $\prod_{j=1}^{\infty} z_j$ a zopakujte si následující větu o souvislosti nekonečných součinů s nekonečnými řadami:

Součin $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |z_j|)$ je konvergentní, právě když řada $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|$ konverguje (viz též téma 45).

40.24 Věta. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) Existuje $m \in N$ tak, že řada $\sum_{j=m}^{\infty} \left|1 - \frac{z_{j+1}}{z_j}\right|$ konverguje;

(ii) Řada $z_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (z_{j+1} - z_j)$ absolutně konverguje a nemá součet nula.

N á v o d. Jestliže řada v (i) konverguje, pak z citované věty o nekonečných součinech odvoďte, že posloupnost $\left\{\frac{1}{z_j}\right\}_{j=m}^{\infty}$ je omezená. Jestliže platí (ii), potom existuje $m \in N$ tak, že $z_j \neq 0$ pro $j > m$ a posloupnost $\{1/z_j\}_{j=m}^{\infty}$ je omezená.

40.25 <u>Tvrzení.</u> Řada $\sum_{j=m}^{\infty} \left| 1 - \frac{z_{j+1}}{z_j} \right|$ $(m \in N)$ konverguje, právě když současně konvergují řady $\sum_{j=m}^{\infty} |z_{j+1} - z_j|$, $\sum_{j=m}^{\infty} \left| \frac{1}{z_{j+1}} - \frac{1}{z_j} \right|$.

Návod. Užijte předchozí věty.

40.26 <u>Lemma.</u> Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} z_k b_k$ konverguje pro každou posloupnost $\{b_k\}$ takovou, že $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$.

Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} z_k b_k$ konverguje pro každou posloupnost $\{b_k\}$ takovou, že $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - z_{k-1}| < \infty$.

Návod. Kdyby neplatilo první tvrzení, existovala by posloupnost $\{\varepsilon_k\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k |z_k| = \infty$.

(Stačí volit např. $\varepsilon_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \right)^{-1/2}$) .

Dokažte (při důkazu druhého tvrzení), že posloupnost $\{z_k\}$ je omezená; potom volte $\{b_k\}$ tak, aby $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ konvergovala k nule. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} B_n (z_n - z_{n+1})$ konverguje podle předpokladu. Nyní aplikujte první část.

40.27 <u>Věta</u> (Hadamard).

Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) Existuje $m \in N$ tak, že řada $\sum_{j=m}^{\infty} |1 - z_{j+1}/z_j|$ konverguje;

(ii) pro každou posloupnost $\{a_k\}$ platí: řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k$ konverguje.

Návod. Jestliže platí (i), potom podle 40.25 řady $\sum_{j=m}^{\infty} |z_j - z_{j+1}|$, $\sum_{j=m}^{\infty} |1/z_j - 1/z_{j+1}|$ konvergují, což spolu s Abelovou parciální sumací dává (ii). (Uvědomte si, že když $z_k = 0$ pro nekonečně mnoho k, potom (ii) neplatí.) Důkaz (ii) $\Longrightarrow$ (i) dokončete pomocí 40.26.

$\boxed{40.28}$ Věta. Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ posloupnosti takové, že $c_n \neq -1$ pro každé n a $b_{n+1}/b_n = (a_{n+1}/a_n)(1 + c_n)$ pro všechna n. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(ii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konverguje.

N á v o d. Položte $z_{n+1} = (1 + c_1)\dots(1 + c_n)$ a použijte věty 40.27.

$\boxed{40.29}$ Věta. Buď $\{z_j\}$ posloupnost taková, že $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Potom řada $\sum_{k=m}^{\infty} \left| \dfrac{z_{k-1} - z_k}{z_{k-1} - z} \right|$ nekonverguje pro žádné $m \in N$.

Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konverguje a $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ nekonverguje, potom pro každé $m \in N$ nekonvergují řady $\sum_{k=m}^{\infty} \left| \dfrac{z_k}{R_{k-1}} \right|$, $\sum_{k=m}^{\infty} \left| \dfrac{w_k}{S_k} \right|$, kde

$$R_{k-1} = \sum_{n=k}^{\infty} z_n \,, \qquad S_k = \sum_{n=0}^{k} w_n \,.$$

N á v o d. Lze psát $\dfrac{z_{k-1} - z_k}{z_{k-1} - z} = 1 - \dfrac{z_k - z}{z_{k-1} - z}$ a užijte věty 40.24.

Při důkazu druhého tvrzení pište $\left| \dfrac{z_k}{R_{k-1}} \right| = \left| 1 - \dfrac{R_k}{R_{k-1}} \right|$,

$$\left| \frac{w_k}{S_k} \right| = \left| 1 - \frac{\frac{1}{S_k}}{\frac{1}{S_{k-1}}} \right|$$

a opět užijte věty 40.24.

$\boxed{40.30}$ Věta (Dini). Buďte $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ posloupnosti takové, že $c_{k-1} > c_k > 0$, $d_{n-1} > d_n$, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, řada $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ diverguje. Pak všechny následující řady divergují:

1014-7781

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{R_{k-1}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{S_k}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_{k-1} - c_k}{c_{k-1}}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{k-1} - d_k}{d_{k-1}},$$

kde $R_{k-1} = \sum_{j=k}^{\infty} c_j$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} d_j$.

Dokažte!

40.31 Cvičení. Ilustrujte předchozí věty na příkladech.

E. ZOBECNĚNÍ INTEGRÁLNÍHO KRITERIA

40.32 Věta. Nechť f je nerostoucí, nezáporná funkce na intervalu $\langle \alpha_1, \infty)$. Buď $\{\alpha_j\}$ posloupnost reálných čísel.

(i) Jestliže existuje $M_1 > 0$ tak, že $\alpha_{j+1} - \alpha_j \geqq M_1$ pro všechna $j \in N$ a Lebesgueův integrál $\int_{\alpha_1}^{\infty} f(t)\,dt$ konverguje, potom řada $\sum_{j=1}^{\infty} f(\alpha_j)$ konverguje.

(ii) Jestliže existuje $M_2 \in E_1$ tak, že $0 < \alpha_{j+1} - \alpha_j \leqq M_2$, $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \infty$ a $\int_{\alpha_1}^{\infty} f(t)\,dt = \infty$, potom řada $\sum_{j=1}^{\infty} f(\alpha_j)$ diverguje.

40.33 Cvičení.

(a) Porovnejte 40.32 s větou 40.15.

(b) Ukažte, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^p e^{-\alpha \alpha_j^2}$ konverguje pro každé $p \in N$, $\alpha > 0$ a posloupnost $\{\alpha_j\}$ takovou, že $\lim(\alpha_{j+1} - \alpha_j) = c > 0$.

40.34 Příklad. Mějme funkci f splňující předpoklady věty 40.32 (i). Definujme posloupnost $\{\alpha_j\}$ takto:

$$\alpha_{2k+1} = 1 + k^2 - \frac{\cos \pi k}{1 + k^2}, \qquad \alpha_{2k} = 1 + k^2, \quad k=0,1,\dots .$$

Protože $\lim_{k\to\infty} (\alpha_{2k+1} - \alpha_{2k}) = 0$, nelze užít věty 40.32 (i).

Přesto však ukažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(\alpha_k)$ konverguje.

40.35 Poznámka. Předchozí příklad ukazuje, že v případě (i) by stačilo předpokládat, že posloupnost $\{\alpha_j\}$ je sjednocením (vysvětlete podrobněji!) konečného počtu posloupností, které splňují předpoklady věty 40.32 (i). V případě (ii) by stačilo, aby posloupnost $\{\alpha_j\}$ obsahovala jednu posloupnost splňující předpoklady věty 40.32 (ii). Vše provádějte podrobně!

40.36 Věta. Nechť $0 < \alpha_n < \alpha_{n+1}$, $n=1,2,\dots$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$; nechť funkce ϕ je kladná a neklesající na intervalu $\langle \alpha_1, \infty)$. Nechť konverguje Lebesgueův integrál $\int_{\alpha_1}^{\infty} \frac{dt}{t\,\phi(t)}$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\phi(\alpha_n)}\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$ konverguje.

N á v o d. Ukažte nejprve, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\phi(\alpha_{n+1})}\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$ konverguje.

40.37 Poznámka. Věta 40.36 je speciálním případem následujícího obecného tvrzení: Nechť jsou splněny předpoklady věty 40.36 a nechť Ψ je funkce neklesající a kladná na intervalu $\langle \alpha_1, \infty)$.

Jestliže $$\int_{\alpha_1}^{\infty} \frac{dt}{\Psi(t)\,\phi(t)} < \infty,$$

potom $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi(\alpha_n)}{\Phi(\alpha_n)}\left(\frac{1}{\Psi(\alpha_n)} - \frac{1}{\Psi(\alpha_{n+1})}\right)$$ konverguje.

40.38 Tvrzení (Brink). Nechť funkce f je konečná nezáporná a měřitelná na intervalu $\langle 0, \infty)$. Nechť $S = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in\langle k-1,k\rangle} |f(k) - f(t)|$ je konečná. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$.

N á v o d. Odhadněte rozdíl $d_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^{t} f(t)\,dt$.

(Ukažte, že předchozí věta je zobecněním integrálního kriteria, které znáte z přednášky.)

40.39* Věta. Nechť f je nezáporná funkce a nechť $\overset{\infty}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f = \sup_n \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f$ je konečná. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$.

40.40** Věta. Nechť f je reálná funkce, pro niž $\sup_n \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f < \infty$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ neabsolutně konverguje, právě když existuje vlastní $\lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\,dt$.

Návod. Rozložte funkci $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou nezáporné nerostoucí funkce na $\langle 0, \infty)$ (např. pomocí positivní a negativní variace - viz [D II]). Potom aplikujte větu 40.39.

40.41 Definice. Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost kladných čísel taková, že $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$. Pro $x > 0$ definujme $M(x)$ jako počet těch a_k, pro něž $a_k \geqq x$.

40.42 Lemma. Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, potom $\lim_{x \to 0+} x\,M(x) = 0$.

Návod. Uspořádejte posloupnost $\{a_k\}$ tak, aby byla nerostoucí. Pak využijte podmínky $a_k = o\,(k)$ (viz 40.3).

40.43 Cvičení.

(a) Funkce $M : x \longmapsto M(x)$ je nerostoucí na $(0, \infty)$.

(b) Sestrojte posloupnost $\{a_k\}$ tak, aby $\lim_{x \to 0+} x\,M(x) = 0$ a aby řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergovala.

40.44 Věta. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když integrál $\int_0^{\infty} M(x)\,dx$ konverguje. Platí $\int_0^{\infty} M(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. (Posloupnost $\{a_k\}$ má stále vlastnosti z 40.41!)

1014-7781

N á v o d. Opět uspořádejte $\{a_k\}$ v monotonní posloupnost a odvoďte pro $\varepsilon > 0$ vztah

$$\int_{\varepsilon}^{a_1} M(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n_0} a_k - \varepsilon\, M(\varepsilon), \quad \text{kde } a_{n_0+1} \leqq \varepsilon < a_{n_0}.$$

V případě, že uvedená řada konverguje, užijte lemmatu 40.42.

V případě, že tato řada diverguje, použijte nerovnosti

$$\int_{\varepsilon}^{a_1} M(x)\,dx \geqq (1/2) \sum_{a_n \geqq 2\varepsilon} a_n .$$

$\boxed{40.45}$ Cvičení. Pomocí věty 40.44 vyjádřete Riemannovu dzeta funkci (viz téma 41.7). Dostanete pro $x > 1$

$$\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x \int_1^{\infty} \frac{\{y\}}{y^{x+1}}\,dy \quad , \quad \text{kde}$$

$\{y\} = y - [y]$.

T É M A 41

Odhady rychlosti konvergence a divergence některých řad

41.1 Integrální odhad.

(a) Buď f spojitá, kladná a nerostoucí funkce na $\langle 1, +\infty)$.

Potom $\int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f + f(1)$.

Dokažte! Odhadněte $\int_k^{k+1} f(t)\,dt$.

Odtud odvoďte integrální kritérium pro konvergenci a divergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$! Je-li tato řada konvergentní, platí:

$$\int_{n+1}^{\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f \quad .$$

(b) Je-li f spojitá, kladná a neklesající funkce v $\langle 1, +\infty)$, je $\int_1^{n} f + f(1) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f$. Dokažte!

41.2 Cvičení.

(a) Pomocí 41.1a ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\log n} = 1$.

Lze ovšem dokázat více (viz 45.6).

(b) Pomocí 41.1a,b ukažte, že pro $\alpha > -1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}}{\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}} = 1$,

dokonce je pro $\alpha \geq 0$ $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \Theta_n\, n^{\alpha}$,

kde $|\Theta_n| \leq 1$.

1014-7781

41.3 **Tvrzení.**

(a) **Pokuste se výsledek 41.1.a ještě upřesnit: Buď f spojitá, nerostoucí funkce na $\langle 1,+\infty)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Potom existuje** vlastní limita $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f\right) = c$

a pro všechna $n \in N$ je $0 \leq c - \int_1^n f + \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n)$.

N á v o d. Pro m, n přirozená, $n > m$ dostaneme

$$0 \leq \int_m^n f - \sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \sum_{k=m+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \big(f(t) - f(k)\big)\,dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} \big(f(k-1) - f(k)\big) = f(m) - f(n).$$

Dále použijte B-C podmínku.

(b) Aplikujte tvrzení (a) na funkce $\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x^2}$! Příslušné **limity** jsou tzv. Eulerova konstanta a $\frac{\pi^2}{6}$.

41.4 **Soninova formule.** Nechť f' je spojitá na $\langle a,b\rangle$, buď $\rho(x) = \frac{1}{2} - x + [x]$. Potom $\sum_{\substack{a<n\leq b\\ n \text{ celé}}} f(n) = \int_a^b f + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho f'$ (integrály chápeme jako Riemannovy nebo Newtonovy). Je-li navíc f'' spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$, lze psát

$$\int_a^b \rho f' = \sigma(b)f'(b) - \sigma(a)f'(a) + \int_a^b \sigma f'', \quad \text{kde } \sigma(x) = \int_0^x \rho(t)\,dt.$$

N á v o d. **Neleží-li v $(a,b\rangle$ celé číslo, je levá strana nula a integrací per partes zjistíme, že totéž platí pro pravou stranu. Neleží-li v (a,b) celé číslo a je-li b celé, dostaneme limitním přechodem** pro $t \to b_-$

$$\int_a^b f + \lim_{t\to b_-} \rho(t)f(t) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho f' = 0$$

a nyní uvážíme, že $\lim_{t \to b_-} \rho(t) = -\frac{1}{2} = \rho(b) - 1$. V obecném případě rozdělíme interval na konečný počet intervalů právě uvažovaného typu: $(a, [a] + 1\rangle$, $([a] + 1, [a] + 2\rangle$, ... $([b], b\rangle$ a výsledky sečteme. Je-li navíc f'' spojitá, použijeme na integrál $\int_a^b \rho f'$ integraci per partes.

Poznámka. Funkce f může nabývat i komplexních hodnot!

41.5 **Cvičení.**

(a) Odvoďte ze Soninovy formule nerovnosti v 41.1 (předpokládáme monotonii a spojitost prvé derivace).

(b) Má-li funkce f spojitou třetí derivaci, lze na integrál $\int_a^b \sigma f''$ opět použít integraci per partes při vhodné volbě primitivní funkce k funkci σ. Opakováním tohoto postupu dostaneme tzv. Euler-Maclaurinovu formuli (viz [J II], kap. XVI).

41.6 **Cvičení.** Použijte Soninovu formuli na funkci $\log x$! Vyjde přímo

$$\log \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = 1 + \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{x^2}\, dx - \int_n^\infty \frac{\sigma(x)}{x^2}\, dx ,$$

kde $\left| \int_n^\infty \frac{\sigma(x)}{x^2}\, dx \right| \le \frac{1}{8n}$ a stejně jako v tématu 45 zjistíme, že konstanta $1 + \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{x^2}\, dx$ je rovna $\frac{1}{2} \log 2\pi$.

41.7 **Riemannova dzeta funkce.** Pro $x > 1$ je $\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}$.

Ukažte, že funkce ζ má v intervalu $(1, +\infty)$ všechny derivace. Pomocí výsledků tohoto tématu ukažte, že existuje vlastní limita: $\lim_{x \to 1_+} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1}\right)$; (použijte 41.1.a nebo 41.4.) Tato limita je rovna Eulerově konstantě (viz 41.3.b). O vztahu Riemannovy dzeta funkce k teorii čísel viz téma 45.

41.8 <u>Abelova parciální sumace.</u> Zopakujte si nejprve příslušnou část přednášky (viz [D II], kap. III, § 5). V praxi je velmi často užitečný tento její integrální tvar:

Buď $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ posloupnost reálných čísel, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$, $a_1, a_2 \dots$ buďte libovolná komplexní čísla. Nechť f je reálná nebo komplexní funkce definovaná na $\langle\alpha_1, x\rangle$, která má v tomto intervalu spojitou prvou derivaci. Potom

$$\sum_{\alpha_1\le\alpha_n\le x} a_n f(\alpha_n) = A(x)f(x) - \int_{\alpha_1}^{x} A(t)f'(t)dt, \quad \text{kde}$$

$A(t) = \sum_{\alpha_1\le\alpha_n\le t} a_n$. V součtech sčítáme přes ta n, pro něž α_n splňuje uvedenou podmínku.

N á v o d. $$A(x)f(x) - \sum_{\alpha_1\le\alpha_n\le x} a_n f(\lambda_n) = \sum_{\alpha_1\le\alpha_n\le x} \int_{\alpha_n}^{x} a_n f'(t)dt =$$
$$= \int_{\alpha_1}^{x} A(t)f'(t)dt.$$

41.9 <u>Cvičení.</u>

(a) Buď $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje pro $x \in (0, 2\pi)$, dokonce konverguje stejnoměrně v každém intervalu $(\delta, 2\pi-\delta)$, kde $0 < \delta < \pi$.

N á v o d. Položte $\alpha_n = n$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $a_n = \cos nx$. Pro odhad $A(t) = \sum_{1\le n\le t} \cos nx$ použijte buď přímého vyjádření tohoto součtu pro celá t nebo 41.4.

(b) Podobně vyšetřete konvergenci řad
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

(c) Odvoďte z formule uvedené v 41.8 Soninovu formuli!

N á v o d. Položte $\alpha_n = n$, $a_n = 1$ a vyjádřete $A(t)$.

1014-7781

T É M A 42

Mocninné řady

Zopakujte si vše, co je vám z přednášek známo o číselných řadách a mocninných řadách. Pro hlubší studium mocninných řad je nutné je vyšetřovat v komplexním oboru - není-li výslovně řečeno něco jiného, jsou dále chápány všechny vyšetřované řady jako řady komplexních čísel (množinu všech komplexních čísel značíme dále symbolem E).

A. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

42.1 Cvičení.

(a) Dokažte tvrzení: Nechť platí $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Na základě známých tvrzení o řadách s nezápornými členy zformulujte a dokažte další věty o absolutně konvergentních řadách v komplexním oboru.

42.2 Definice. Nechť a_n, $z_0 \in E$. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad , \quad z \in E,$$

nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n o středu z_0. Dále budeme psáti místo $\sum_{n=0}^{\infty}$ pouze $\sum$. Při vyšetřování vlastností mocninných řad se můžeme omezit na řady tvaru (odůvodněte proč!)

$$\oplus \qquad \sum a_n z^n \quad ;$$

Studujeme proto dále pouze vlastnosti řad o středu 0.

42.3 Věta. Nechť řada $\oplus$ konverguje absolutně v bodě $z_1 \in E$. Potom konverguje absolutně v každém bodě $z \in E$ pro nějž platí $|z| \leq |z_1|$.

1014-7781

$\boxed{42.4}$ <u>Definice.</u> Položme $R = \sup \{ |z| ;\ z \in E,\ \sum a_n z^n \text{ konverguje} \}$. Číslo R $(0 \leq R \leq +\infty)$ nazýváme <u>poloměr konvergence</u> mocninné řady $\oplus$. Je-li $U(z_0, r) = \{ z \in E;\ |z - z_0| < r \}$,

$C(z_0, r) = \{ z \in E;\ |z - z_0| = r \}$, nazýváme $K_R = U(0,R)$ <u>kruh konvergence</u> a $C_R = C(0,R)$ <u>konvergenční kružnice</u> mocninné řady $\oplus$. Tato terminologie souvisí s vlastnostmi řady $\oplus$, které vyšetříme v následujícím odstavci.

$\boxed{42.5}$ <u>Cvičení.</u> Dokažte tato tvrzení:

(a) Nechť řada $\oplus$ konverguje v bodě $z_1 \in E$. Potom konverguje absolutně v každém bodě $z \in E$, pro nějž platí $|z| < |z_1|$.

(b) Řada $\oplus$ konverguje vždy v bodě 0. Je-li $R = 0$, konverguje (absolutně) právě jen v bodě 0.

(c) Je-li $R > 0$, konverguje řada $\oplus$ absolutně pro každé $z \in K_R$ a diverguje pro každé $z \in E \setminus \overline{K_R}$.

(d) Je-li $R > 0$, konverguje řada $\oplus$ v K_R lokálně stejnoměrně.

$\boxed{42.6}$ <u>Cvičení.</u> Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ koeficientů řady $\oplus$ platí $\omega = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Potom řada $\sum a_n$ absolutně konverguje. Je-li $\omega > 1$, řada $\sum a_n$ diverguje. Pro poloměr konvergence R řady $\oplus$ platí $R = \omega^{-1}$, kde klademe $R = 0$ při $\omega = +\infty$ a $R = +\infty$ pro $\omega = 0$. Dokažte!

$\boxed{42.7}$ <u>Cvičení.</u>

(a) Seznamte se s výsledky z odstavců 38.3 a 38.4. Rozhodněte, kdy lze vyjádřit poloměr konvergence R řady $\oplus$ pomocí $\{a_n\}$ v jednodušším tvaru než pomocí formule z 42.6. Získané poznatky aplikujte v následujících úlohách.

(b) Vypočtěte poloměr konvergence mocninné řady $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$.

$\boxed{42.8}$ <u>Cvičení.</u> Určete poloměr konvergence R následujících mocninných řad:

(i) $\sum n!\, z^n$, (ii) $\sum (n+1)^{\alpha} z^{n+1}$, kde $\alpha \in E_1$,

(iii) $\sum z^{n!}$ (iv) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

42.9 Cvičení. Vypočtěte poloměr konvergence mocninné řady $\sum(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

Pro $z \in E_1$ je tato řada Maclaurinovým rozvojem funkce arctg.
Všimněte si, že funkce arctg i exp (viz téma 31 - určete nejprve poloměr konvergence Maclaurinova rozvoje funkce exp) jsou třídy $\mathcal{C}^\infty$ v E_1, avšak jejich poloměry konvergence jsou různé.

B. MOCNINNÉ ŘADY NA KONVERGENČNÍ KRUŽNICI

42.10 Poznámka. Vzhledem k problematice, kterou se budeme v tomto oddílu zabývat, předpokládáme dále, že pro poloměr konvergence R řady ⊕ platí $0 < R < +\infty$. V každém bodě $z \in E$, v němž ⊕ konverguje, označíme součet této řady symbolem $f(z)$. Množinu všech $z \in E$, pro něž řada ⊕ konverguje označíme $D(f)$. Platí zřejmě $K_R \subset D(f) \subset K_R \cup C_R$.
Bez újmy obecnosti se v dalším omezíme na případ $R = 1$ - odůvodněte, proč je to možné!

42.11 Cvičení.

(a) Najděte $D(f)$ pro funkci f určenou řadou (ii) v 42.8 pro $\alpha \geq 0$, resp. pro $\alpha < -1$.

(b) Najděte $D(f)$ pro funkci f určenou řadou (ii) v 42.8 pro $\alpha \in \langle -1,0)$.

N á v o d. Užijte substituce $z = \exp it$. Tím převedete úlohu na vyšetřování konvergence řad reálných funkcí reálné proměnné na intervalu $\langle 0,2\pi \rangle$. Tohoto obratu lze při $R = 1$ užít i v jiných příkladech.

(c) Zkoumejte, zda konvergence mocninné řady vyšetřované v předcházejících cvičeních je na C_1 stejnoměrná, resp. absolutní (srovnej 42.3).

42.12 Věta (zobecnění Dirichletova a Abelova kriteria).
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních funkcí na $P \subset E$ a $\{b_n\}$ posloupnost funkcí na $Q \subset E$. Potom řada $\sum a_n(x) \cdot b_n(y)$ konverguje stejnoměrně na množině $[x,y] \in P \times Q$, je-li splněna některá z následujících podmínek:

(a) řada $\sum a_n$ konverguje stejnoměrně na P a b_n je monotonní posloupnost reálných funkcí stejně omezených na Q,

(b) posloupnost $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ je omezená na P a $\{b_n\}$ je monotonní posloupnost reálných funkcí stejně omezených na Q a stejnoměrně (na Q) konvergující k nule,

(c) řada $\sum a_n$ konverguje stejnoměrně na P a funkce $y \longmapsto |b_o(y)| + \sum |b_n(y) - b_{n+1}(y)|$ je na Q omezená.

N á v o d. Označte $\varepsilon_m = \sup \left\{ |\sum_{k=m+1}^{n} a_k x| ;\ x \in P,\ n > m \right\}$ pro $m \in N$. Užijte Abelovu parciální sumaci a odvoďte odhad

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x) b_k(y)| \leq \varepsilon_m \left(|b_n(y)| + \sum_{k=m+1}^{n} |b_k(y) - b_{k+1}(y)| \right) ;$$

použijte BC-podmínku.

42.13 Cvičení.

(a) Užitím 42.12 dokažte, že řada z 42.11.b konverguje stejnoměrně na množině $\{z \in E;\ |z| \leq 1,\ |z - 1| > c\}$ pro každé $c \in (0,2)$.

(b) Mocninná řada $\sum (n+1)^{\alpha} z^{n+1}$, $\alpha \in \langle -1,0)$, $m \in N$ nekonverguje právě v m bodech C_1 (jak jsou tyto body na C_1 rozloženy?).

(c) Sestrojte mocninnou řadu, která nekonverguje na konvergenční kružnici C_1 právě v jediném daném bodě $z_1 \in C_1$.

(d) Sestrojte mocninnou řadu, která nekonverguje na konvergenční kružnici C_1 právě v bodech dané konečné množiny $M \subset C_1$.

42.14 Poznámka. V souvislosti s 42.13 je přirozené řešit tuto úlohu: Nalezněte mocninnou řadu, která konverguje na C_1 právě v bodech dané konečné množiny $M \subset C_1$. Řešení této úlohy podal W. Sierpiński.

42.15 Lemma. Pro každé $m \in N$ položme $g_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} z^k$. Pro $z = \exp it$, $t \in \langle -\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m} \rangle$ platí $|g_m(z)| \geq \frac{2m}{\pi}$. Jestliže je $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $|t| \geq \varepsilon > 0$, platí $|g_m(z)| \leq \frac{\pi}{\varepsilon}$.

N á v o d. Pro $t \neq 2k\pi$, k celé, platí

$$|g_m(z)| = \left| \left(\sin \frac{mt}{2} \right) / \left(\sin \frac{t}{2} \right) \right| .$$

42.16 Příklad (N.N.Luzin, 1911).

Dokažte, že pro $\alpha \in (0,1\rangle$ řada

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}} \; z^{1^2+2^2+\ldots+(m-1)^2} \Big(g_m(z)+z^m g_m\big(z \exp(-\tfrac{2\pi i}{m})\big) + \ldots$$

$$\ldots + z^{m(m-1)} g_m\Big(z \exp\big(-\frac{2\pi(m-1)i}{m}\big)\Big)\Big) = \sum a_n z^n$$

nekonverguje v žádném bodě konvergenční kružnice C_1 a platí $a_n \to 0$.

N á v o d. Užijte BC-podmínky a lemmatu 42.15; pomocí něj lze ke každému z a každému $m \in N$ nalézt $k \in N$, $0 \le k < m$ tak, že je

$$\left| g_m \Big(z \exp\big(-\frac{2k\pi i}{m}\big)\Big)\right| \ge \frac{2\pi}{m} .$$

42.17 Příklad (W. Sierpiński, 1912).

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost koeficientů mocninné řady z příkladu 42.16. Dokažte, že řada $\sum b_n z^n$, kde $b_{2k} = a_k$, $b_{2k+1} = -a_k$, $k = 0,1,\ldots$ konverguje na své konvergenční kružnici C_1 právě v jediném bodě $z = 1$.

Užitím tohoto příkladu řešte obdobné úlohy jako v 42.13 – všude nahraďte ve formulacích slovo "nekonverguje" slovem "konverguje". Tím vyřešíte úlohu formulovanou v 42.14.

42.18 Příklad (A. Pringsheim).

Řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k_n}}{n.\log n} \,.\, z^n$, kde $k_n = \left[\dfrac{\log n}{\log 2}\right]$

má poloměr konvergence $R = 1$ a konverguje všude na C_1, avšak nikoliv absolutně.

N á v o d. Ukažte nejprve, že $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\log n} = +\infty$. Položte $a_n = \dfrac{(-1)^{k_n}}{n.\log n}$, $n = 2,3,\ldots$. Znaménka v posloupnosti $\{a_n\}$ se střídají po 2^k členech, $k \in N$. Definujte

$$c_m = \sum_{n=2^{m}-1}^{n=2^{m}-1} |a_n| \quad \text{pro} \quad m = 2,3,\ldots \;. \text{ Platí}$$

$$0 < c_m - \int_{2^{m-1}}^{2^m} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{2^{m-1} \log 2^{m-1}} \;, \quad \text{kde}$$

$$\int_{2^{m-1}}^{2^m} \frac{dx}{x \log x} = \Big[\log \log x\Big]_{2^{m-1}}^{2^m} = \log \frac{m}{m+1} \quad . \quad \text{Je tedy}$$

$$\log \frac{m}{m-1} < c_m < \log \frac{m}{m-1} + \frac{1}{2^{m-1} \log 2^{m-1}} \quad .$$

Odtud vyplývá, že posloupnost c_m konverguje monotonně k nule.
Užijte Leibnizova kriteria na řadu $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{m-1} c_m$.
Z konvergence této řady plyne konvergence řady $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ (proč?).
Vyšetřovaná mocninná řada konverguje v bodě 1 neabsolutně, je tedy $R = 1$. Nyní užijte 42.12 a ukažte, že na $C_1 \setminus \{1\}$ konverguje vyšetřovaná řada lokálně stejnoměrně.
Stejnou metodou lze konstruovat ještě další zajímavé příklady.

42.19 Příklad (T. Vijayaraghavan). Mocninná řada

$$\sum a_n z^n = \frac{z^3}{1} - \frac{z^{2.3}}{1} + \frac{z^{3^2}}{2} - \frac{z^{2.3^2}}{2} + \dots + \frac{z^{3^n}}{n} - \frac{z^{2.3^n}}{n} + \dots$$

(pro názornost užíváme nekorektního zápisu) má tuto vlastnost: nechť A (resp. B) je množina všech bodů konvergenční kružnice C_1 vyšetřované mocninné řady, v nichž řada konverguje (resp. diverguje); potom platí $\bar{A} = \bar{B} = C_1$.

N á v o d. Vyšetřujte body $z \in C_1$ tvaru $z = \exp \dfrac{k\pi i}{3^m}$, kde $m \in N$ je dostatečně velké; rozlište případy sudých a lichých k.

42.20 Problém. Mocninná řada $\oplus$, pro kterou platí $\lim a_n = 0$ a jejíž poloměr konvergence $R = 1$ má tuto vlastnost: je-li $M \subset \langle -\pi, \pi)$ množina všech t takových, že řada konverguje v bodě $z = \exp it$, je M typu $F_{\sigma\delta}$. Dokažte!

42.21 Poznámka. V souvislosti s předcházejícím odstavcem není doposud známo, zda k libovolné množině $M \subset \langle -\pi, \pi)$ typu $F_{\sigma\delta}$ lze sestrojit řadu $\oplus$ s konvergentní kružnicí C_1, pro kterou by platilo (viz 42.10) $D(f) = K_1 \cup \{z \in C_1 \,;\ z = \exp it\ ,\ t \in M\}$. Je známo řešení tohoto problému např. pro množinu M otevřenou, resp. uzavřenou (S. Mazurkiewicz, Fund.Math. 3 (1922), str. 52-58), resp. pro M typu

F_σ (F. Herzog, G. Piranian, Duke Math. Journal 16 (1949), str. 529–534).

Některé speciální případy konstrukce řady příslušné k dané množině M jsme vyřešili v předchozích cvičeních a příkladech (pozor na různý význam symbolu M!). Upravte konstrukci ze 42.16 tak, aby pomocí ní bylo možno řešit tento problém pro případ, kdy $\langle -\pi, \pi) \setminus M$ je interval.

42.22 <u>Literatura.</u> Další informace vztahující se k této problematice lze nalézt v knihách

T.J. Bromwich, An Introduction to the Theory of Infinite Series, London 1926,

A.J. Markuševič, Těorija analitičeskich funkcij, díl I., Moskva 1967.

C. LIMITY NA KONVERGENČNÍ KRUŽNICI

42.23 <u>Poznámka.</u> Je-li funkce f definována mocninnou řadou ⊕, je spojitá na každé množině $M \subset D(f)$, na níž řada ⊕ konverguje stejnoměrně. Předpokládáme opět, že poloměr konvergence $R = 1$. Budeme vyšetřovat otázky existence limity funkce f v bodě $\xi \in C_1$ vzhledem k jistým podmnožinám množiny $D(f)$.

42.24 <u>Cvičení.</u>

(a) Dokažte, že v každém bodě $\xi \in C_1 - \{1\}$ existuje pro funkci f danou řadou $\sum z^n$ limita $\lim\limits_{z \to \xi, z \in D_f} f(z)$. Dále platí

$$\lim_{z \to 1, z \in D_f} |f(z)| = +\infty .$$

Všimněte si, že zároveň platí $D(f) \cap C_1 = \emptyset$.

(b) V dalším se omezíme na řady ⊕ s konvergenční kružnicí C_1 a budeme vyšetřovat pouze limity v bodě $\xi = 1$. Zdůvodněte, proč je toto možné bez újmy na obecnosti!

42.25 <u>Tvrzení.</u> Nechť $a_n \in E$, $\sum a_n$ konverguje. Nechť funkce f je definována řadou $\sum a_n z^n$ a nechť pro množinu $M \subset U(0,1)$ existuje konstanta $A \in \langle 1, +\infty)$ tak, že $\sup \left\{ \dfrac{|1 - z|}{1 - |z|};\ z \in M \right\} \leq A$.

Potom existuje následující limita a platí

$$\lim_{z \to 1, z \in M} f(z) = f(1) = \sum a_n .$$

1014-7781

N á v o d. Užijte věty 42.12.

42.26 Cvičení.

(a) Porovnejte předcházející tvrzení s Abelovou větou, kterou znáte z přednášek.

(b) Pro dané $A \in \langle 1, +\infty)$ popište geometricky množinu

$$\left\{ z \in U(0,1) \; ; \quad \frac{|z-1|}{1-|z|} \leq A \right\}.$$

Nakreslete příslušný obrázek!

42.27 Věta. Nechť $a_n \in E$, řada $\sum a_n z^n$ má poloměr konvergence $R = 1$ a určuje funkci f. Nechť M je množina z 42.25. Nechť dále existuje $\lim\limits_{z \to 1, z \in M} f(z)$ a platí $\lim n\, a_n = 0$. Potom je $1 \in D(f)$ a platí $f(1) = \sum a_n = \lim\limits_{z \to 1, z \in M} f(z)$.

N á v o d. Každému $z \in M$ lze přiřadit $p \in N$, $p = p(z)$ tak, že platí $p \leq \frac{1}{1-|z|} < p+1$. Při limitním přechodu $z \to 1$, $z \in M$ je $p \to +\infty$. Stačí proto dokázat, že pro $z \to 1$ je $f(z) - \sum\limits_{n=0}^{p} a_n \to 0$. Označte $P = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$, $Q = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n (1 - z^n)$.

Pak je $f(z) - \sum\limits_{n=0}^{p} a_n = |P - Q| \leq |P| + |Q|$.

Zvolte $\varepsilon > 0$. Je-li p dostatečně veliké, tj. $|z - 1|$ dostatečně malé, je pro každé $n \in N$, $n > p$ splněn vztah $|n\, a_n| < \varepsilon$. Následující naznačené odhady proveďte přesně a vše řádně zdůvodněte:

$$|P| = \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} n\, a_n \left(\frac{z^n}{n}\right) \right| < \ldots < \varepsilon$$ a vzhledem k vlastnostem množiny M (A je konstanta z 42.25) také

$$|Q| \leq \sum_{n=0}^{p} |a_n (1 - z^n)| \leq \sum_{n=0}^{p} n . a_n (1 - z) \leq \ldots \leq A . p^{-1} \sum_{n=0}^{p} |n . a_n| .$$

Pro dostatečně velké p je i $|Q| < \varepsilon$, z čehož vyplývá dokazované tvrzení.

Poznámka. Uvedená věta je větou tzv. Tauberova typu (viz téma 43).

42.28 Poznámka. Je-li řadou ⊕ definována funkce f, pro niž je $D(f) = K_1 \cup C_1$, neplyne z vět, které jsme dokázali, spojitost funkce f na $D(f)$. Lze sestrojit řadu ⊕ tak, že $D(f) = K_1 \cup C_1$, avšak množina bodů nespojitosti funkce f je hustá v množině C_1 (H. Steinhaus).

1014-7781

D. DERIVOVÁNÍ MOCNINNÝCH ŘAD

42.29 **Definice.** Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné definovaná v okolí bodu $z_0 \in E$, definujeme derivaci $f'(z_0)$ obdobně jako v reálném oboru, tj. jako $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$, pokud tato limita existuje v E. Takto definovaná derivace má obdobné vlastnosti jako derivace v reálném oboru.

42.30 **Cvičení.**

(a) Dokažte základní věty o derivování komplexních funkcí komplexní promenné (derivace součtu, součinu, ...).

(b) Zformulujte a dokažte tvrzení o spojitosti součtu stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí a o derivování řady funkcí "člen po členu" (pro komplexní obor!).

42.31 **Tvrzení.** Má-li mocninná řada $\oplus$ kladný poloměr konvergence R, má týž poloměr konvergence i řada

$$\Delta \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1} \quad ,$$

vzniklá formálním derivováním řady $\oplus$ "člen po členu".

42.32 **Tvrzení.** Nechť R je poloměr konvergence vyšetřované řady $\oplus$. Potom v K_R platí $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$. Dokažte!

42.33 **Poznámka.** Řady $\oplus$ a Δ konvergují obě v K_R, kde R je jejich poloměr konvergence. Množiny, v nichž konvergují tyto řady na C_R mohou však být různé. Uveďte příklad!

42.34 **Poznámka.** Z předchozích tvrzení plyne pro $z \in K_R$ a libovolné $k \in N$ vzorec pro k-tou derivaci řady

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\, a_n\, z^{n-k} \quad .$$

Speciálně platí $f^{(k)}(0) = (k!).a_k$, takže řadu $\oplus$ lze též psát ve tvaru

$$f(z) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \,.\, z^k \quad .$$

(Porovnejte tuto formuli s Taylorovým rozvojem.)

42.35 Lemma. Nechť $a_{m,n} \in E$ pro $m,n = 0,1,\dots$ a nechť platí

$$(*) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| < +\infty .$$

Potom platí $$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} .$$

Poznámka. Ukažte, že bez předpokladu $(*)$ nemusí rovnost platit!

N á v o d. Podle známých vět zdůvodněte rovnosti

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} a_{m,n} .$$

K odhadu rozdílu hodnoty $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$ a výrazu na pravé straně předcházející rovnosti užijte předpokladu.

42.36 Tvrzení. Nechť řada ⊕ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom pro $z_0 \in K_R$ a funkci touto řadou definovanou platí

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

pro každé $z \in U(z_0, R - |z_0|)$.

N á v o d. Platí $f(z) = \sum a_n \left[(z - z_0) + z_0\right]^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (z - z_0)^m \cdot z_0^{\,n-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n z_0^{\,n-m} (z - z_0)^m$$

v oboru, kde je $\sum |a_n| \cdot (|z - z_0| + |z_0|)^n < +\infty$.

Poznámka. Srovnejte nalezené vyjádření $f(z)$ z této věty s formulí z 42.34.

42.37 Příklad. Je-li $f(z) = \sum z^n$, $z \in U(0,1)$, lze řadu vpravo snadno sečíst. Rozviňte funkci f v mocninnou řadu o středu $z_0 \in U(0,1)$ a určete poloměr konvergence takto vzniklé řady. Načrtněte příslušný obrázek. Uvědomte si, že jsme dosud nedokázali větu o jednoznačnosti rozvoje funkce v mocninnou řadu!

42.38 Cvičení. Dokažte větu o jednoznačnosti rozvoje funkce v mocninnou řadu (viz téma 21). Uvědomte si, že pracujeme v komplexním oboru!

E. REGULÁRNÍ A SINGULÁRNÍ BODY

42.39 Poznámka. V teorii funkcí komplexní proměnné dospíváme k výsledkům, které při srovnání s analogickými výsledky pro funkce reálné proměnné, by se mohly zdát překvapující. D o k á z a l i j s m e, že funkce f určená jako součet řady $\oplus$ s kladným poloměrem konvergence R má v kruhu konvergence K_R v každém bodě derivace všech řádů.
Platí též následující tvrzení, které nebudeme dokazovat.

42.40 Věta. Nechť funkce f, definovaná na množině $U(z_0,r)$, $r > 0$ má na této množině všude derivaci. Potom existuje mocninná řada o středu z_0 s poloměrem konvergence $R \geqslant r$ tak, že na uvedené množině platí $\sum a_n(z - z_0)^n = f(z)$.

Poznámka. Teprve tato věta, která se probírá v přednášce z analýzy v komplexním oboru, nám umožní objasnit souvislost mezi vlastnostmi funkce f určené mocninnou řadou a velikostí poloměru konvergence R této řady.

42.41 Definice. Nechť řada $\oplus$ má kladný poloměr konvergence R. Označme její součet opět f. V každém bodě $z \in K_R$ lze rozvinout funkci f v mocninnou řadu o středu z, jejíž kruh konvergence označíme $K(z)$. Položíme $G_1 = \bigcup_{z \in K_R} K(z)$. Bod $z \in C_R \cap G_1$ nazveme regulárním bodem a bod $z \in C_R \setminus G_1$ singulárním bodem dané funkce f, resp. řady $\oplus$.

42.42 Cvičení. Na konvergenční kružnici C_R řady $\oplus$ s poloměrem konvergence $R \in (0, +\infty)$ leží alespoň jeden singulární bod. Množina těchto všech singulárních bodů je uzavřená v C_R, resp. v E,
Poznámka. Funkci f určenou řadou $\oplus$ nelze rozšířit z K_R na $U(0, r)$, $r > R$ tak, aby toto rozšíření mělo v $U(0, r)$ všude derivaci.

42.43 Poznámka. Funkci f určenou řadou $\oplus$ lze rozšířit z K_R na množinu G_1 (viz 42.41) zřejmým způsobem: Definujeme $f(z_1)$ pro $z_1 \in G_1$ pomocí rozvoje funkce f v bodě $z \in K_R$, kde $z_1 \in K(z)$. Dokažte korektnost této definice.

42.44 Příklad. Určete množinu G_1 pro funkci f, určenou řadou $\sum z^n$. Jediným singulárním bodem této funkce na C_1 je bod 1.

1014-7781

42.45 <u>Poznámka.</u> Ukažte, že regulární body řady ☮ nemusí být prvky množiny $D(f)$ a prvky množiny $D(f) \cap C_R$ nemusí být regulární body. Lze např. dokázat, že žádný bod konvergenční kružnice C_1 řady z 42.8 (iii) není regulárním bodem této řady.

Prakticky je velmi obtížné zjistit, které body konvergenční kružnice C_R, $R > 0$ řady ☮ jsou regulární. Dokažte toto tvrzení!

42.46 <u>Věta.</u> Nechť řada ☮ má poloměr konvergence $R = 1$. Rozvineme-li funkci f touto řadou určenou v mocninnou řadu o středu $z_1 = 1/2$, je bod 1 regulárním bodem funkce f právě tehdy, má-li nalezená řada poloměr konvergence $R' > 1/2$.

42.47 <u>Poznámka.</u> Některé praktické postupy, sloužící k nalezení regulárních bodů, jsou založeny na modifikaci postupu, vyplývajícího z věty v 42.46. Pro řady s reálnými koeficienty platí např. následující tvrzení: Jestliže pro koeficienty řady ☮ s poloměrem konvergence $R = 1$ platí některá z následujících podmínek

(a) $a_n \geqslant 0$ pro všechna $n \in N$,

(b) $\sum a_n = +\infty$ nebo $\sum a_n = -\infty$,

je bod 1 singulárním bodem řady ☮ .

42.48 <u>Poznámka.</u> Výsledek z 42.43 nás přivádí k následující myšlence: Funkci f určenou řadou ☮ s kladným poloměrem konvergence R lze rozšířit popsaným postupem z K_R na G_1, odtud stejným postupem na jistou množinu G_2, atd. Napadá nás přirozená otázka, kdy se tento proces "zastaví", tj. zda existuje $n \in N$ tak, že platí $G_n = G_{n+1} = \dots$

Tato otázka a jí podobné další otázky se již vymyká rozsahu tohoto tématu, setkáte se však s nimi v teorii funkcí komplexní proměnné při studiu tzv. analytických funkcí.

T É M A 43

Sčítací metody

Obsah:

A. DEFINICE, REGULÁRNÍ A MONOTONNÍ METODY

Označme symbolem $\mathcal{K}$ množinu všech konvergentních posloupností reálných čísel. Pro každou posloupnost $\{a_n\} \in \mathcal{K}$ jsme definovali její limitu $\lim a_n$ (zopakujte si definici!). Víme, že existují posloupnosti, které nemají limitu, nejsou konvergentní (uveďte příklad!). Chceme nyní i některým nekonvergentním posloupnostem přiřadit jakousi "limitu", přičemž toto přiřazení musí být v jistém smyslu "rozumné". V tomto tématu naznačíme, jak tohoto cíle dosáhnout.

Označme ještě symbolem Σ množinu všech konvergentních řad. (Uvědomte si rozdíly mezi pojmy: posloupnost - limita posloupnosti - - řada - součet řady!)

43.1 Definice. Nechť P je množina posloupností reálných čísel, f zobrazení množiny P do E_1. Potom dvojici (P, f) nazveme limitovací metodou a říkáme, že každá posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ z P je limitována metodou f k číslu $f(\{a_n\})$; číslo $f(\{a_n\})$ pak nazýváme f-limitou posloupnosti $\{a_n\}$, krátce její zobecněnou limitou.

Jestliže vezmeme v této definici posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, pak hovoříme o sčítací metodě, f-součtech či o zobecněných součtech.

Máme-li naopak definovánu sčítací metodu, lze na jejím základě zavést limitovací metodu. Vysvětlete a proveďte detailně! Je lhostejné, který z obou způsobů budeme užívat, neboť sčítací a limitovací metody spolu navzájem jednoznačně souvisejí. Rovněž nebude podstatné, zda věty budeme formulovat pro sčítací či limitovací metody.

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má za zobecněný součet číslo $a \in E_1$ (sčítací metodou f), značíme to:

$$ZS - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \quad f - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a(ZS), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a(f).$$

Obdobně pro zobecněnou limitu (ZL).

43.2 <u>Regulární metody.</u> Zřejmě nebudou mít velký význam všechny dvojice (P,f), v dalším budeme požadovat splnění jistých "rozumných" vlastností. Řekneme, že limitovací metoda (P,f) je <u>regulární</u> (či krátce f je regulární limitovací metoda), jestliže jsou splněny podmínky:

(i) P je lineární prostor (při obvyklých operacích) a

f je lineární zobrazení,

(ii) $\mathcal{K} \subset P$ a $f(\{a_n\}) = \lim a_n$ pro $\{a_n\} \in \mathcal{K}$.

Definujte obdobně regulární sčítací metody!

V dalším ukážeme že existují dvojice (P,f), které nesplňují ani podmínku (i) ani (ii), a že podmínky (i), (ii) jsou nezávislé.

43.3 <u>Příklady.</u>

(a) Buď $P = \left\{ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} ; \ a_n \in E_1, \ a_0 \text{ je iracionální} \right\}$,

$f : f(\{a_n\}) = 1$ pro každou posloupnost $\{a_n\} \in P$.

Ukažte, že (P,f) nesplňuje ani (i) ani (ii).

(b) Nechť P je systém všech posloupností,

$f(\{a_n\}) = \lim a_n$ pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$,

$f(\{a_n\}) = a_0$ pro nekonvergentní posloupnosti.

Ukažte, že (P,f) splňuje (ii) a nesplňuje (i).

(c) Nalezněte příklad (P,f) splňující (i) a nesplňující (ii).

43.4 <u>Monotonní metody.</u> Řekneme, že sčítací metoda (P,f) je <u>monotonní,</u> jestliže platí:

(iii) $\left\{\sum a_n\right\} \in P, \ a_n \geq 0$ pro všechna $n \in N \Longrightarrow f - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq 0.$

Lze definovat obdobným způsobem monotonní limitovací metody?

Ne každá regulární metoda je monotonní, jak ukazuje následující příklad.

43.5 <u>Příklad.</u>

(a) Označme c prostor všech konvergentních řad, L množinu všech řad s "konstantními" členy, přesněji:

1014-7781

$$\left\{\sum a_n\right\} \in L, \quad \text{právě když} \quad a_1 = a_2 = a_3 = \dots \quad .$$

Buď $P = c \oplus L$ (direktní součet dvou vektorových prostorů).

Pro $\left\{\sum a_n\right\} \in P$, $\{a_n\} = \{c_n\} + \{\lambda\}$, $\left\{\sum c_n\right\} \in c$

položme $f(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \lambda$.

Ukažte, že (P,f) je regulární, nemonotonní sčítací metoda.

(b) Podejte (odlišný) příklad nemonotonní, regulární sčítací metody!

Následující věta ukazuje, na jaké řady má smysl aplikovat pojem zobecněného součtu regulární monotonní metodou.

43.6 Věta. Nechť (P,f) je regulární monotonní sčítací metoda, nechť $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in N$, nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Potom $f = \sum a_n$ neexistuje (tj. $\left\{\sum a_n\right\} \notin P$).

Dokažte! Lze vynechat předpoklad regularity či monotonie?

Je tedy vidět, že regulární monotonní sčítací metodou lze kromě konvergentních řad sčítat jen řady se střídavými znaménky.

Z této věty dokažte následující tvrzení:

Nechť (P,f) je regulární monotonní sčítací metoda, nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje, ale nechť existuje $f - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty \quad ,$$

$\left(\text{kde } a_n^+ = \max(a_n, 0), \quad a_n^- = \max(-a_n, 0)\right)$.

43.7* Problém. Pro jaké sčítací metody platí

$$a_0 + ZS - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = ZS - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad ?$$

Rovnost chápejte jako dvě implikace, tj. ptáme se, kdy platí

(a) $ZS - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \implies ZS - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$,

(b) $ZS - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \implies ZS - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s + a_0$.

Vyšetřete tedy, kdy zobecněná limita závisí na konečně mnoha členech posloupnosti!

43.8 Cvičení.

(a) Ukažte, že existují regulární sčítací metody, které sčítají tutéž řadu k různým součtům.

1014-7781

N á v o d. Zkuste použít příklad 43.5.a.

(b)* Je možno sestrojit i regulární monotonní sčítací metody s touto vlastností?

B. CESAROVA A ABELOVA SČÍTACÍ METODA

V tomto odstavci uvedeme dvě důležité sčítací či limitovací metody.

43.9 **Definice.**

(a) C e s a r o v a s č í t a c í m e t o d a. Zvolme

$$P_c = \left\{ \{a_n\} \; ; \; \text{existuje vlastní } \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1} \right\}$$

a definujme zobrazení $f_c : P_c \longrightarrow E_1$ předpisem

$$f(\{a_n\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1} \quad .$$

Limitovací metoda (P_c, f_c) je podle tématu 38 regulární a nazývá se metoda Cesarova či metoda aritmetických průměrů (prvního řádu). Budeme ji značit symbolem (C,1). Z ní můžeme vytvořit sčítací metodu (proveďte podrobněji!), kterou budeme označovat stejně.

(b) A b e l o v a s č í t a c í m e t o d a. Nechť

$$P_A = \left\{ \sum a_n \; ; \; \text{existuje vlastní } \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} ;$$

pro $\sum a_n \in P_A$ položme

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Právě definovaná sčítací metoda (P_A, A) se nazývá Abelova (značení (A)). Regularita Abelovy metody plyne z Abelovy věty, která je probírána na přednášce.

43.10 **Vztah Abelovy a Cesarovy metody.**

(a) O vztahu sčítacích metod (C,1) a (A) hovoří tzv.

Frobeniova věta: Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ (C,1). Potom též $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A)$. (Dále je metoda (A) obecnější než metoda (C,1), viz (b).) Dokažte!

1014-7781

N á v o d. Označte $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, $\sigma_n = \dfrac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ukažte, že platí

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n (n+1)x^n .$$

Protože $\sigma_n \longrightarrow s$, je $s_n = o(n)$ a také $a_n = o(n)$. Tudíž řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(n+1)x^n$ konvergují alespoň na intervalu $(-1,+1)$.

Nakonec použijte vztahu

$$f(x) - s = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\sigma_n - s)x^n$$

k důkazu tvrzení.

(b) Ukažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$ je sčítatelná Abelovou metodou, ale není sčítatelná Cesarovou metodou. Odtud vyplývá, že (A)-metoda je skutečně silnější než (C,1)-metoda.

43.11 Cvičení. Ověřte monotonii sčítacích metod (A) a (C,1).

43.12 Cvičení. Ukažte, že $A\text{-}\lim a_n = \lim_{x\to 1-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Odtud odvoďte speciální výsledek, je-li posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

C. RIEMANNOVA SČÍTACÍ METODA

43.13* Věta. Nechť částečné součty s_n řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tvoří omezenou posloupnost. Buď g taková funkce v $\langle 0,+\infty)$, že $\int_0^{\infty} |g| < \infty$ a $\int_0^{\infty} g = -1$. Položme $G(x) = 1 + \int_0^{x} g$. Potom pro každé $h > 0$ konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n G(nh)$. Jestliže $f(h)$ je její součet a je-li $S = \limsup s_n$, $s = \liminf s_n$, $T = \frac{1}{2}(s+S)$, $\Delta = \frac{1}{2}(S-s)$,

$$\omega = \int_0^\infty |g| \quad , \text{ potom}$$

$$T - \omega\Delta \leq \liminf_{h\to 0+} f(h) \leq \limsup_{h\to 0+} f(h) \leq T + \omega\Delta \quad .$$

Dokažte!

Návod. Pomocí Abelovy parciální sumace odvodíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n G(n\,h) = \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{n=0}^{m-1} s_n \left[G(nh) - G\big((n+1)h\big)\right] + s_m G(mh) \Big) .$$

Je ovšem $\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$ a dále

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|G(nh) - G\big((n+1)h\big)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} |g| \leq \omega \in E_1 .$$

Odtud plyne konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n G(nh)$ pro $h > 0$.

Dále dokažte tento "pomocný" vztah:

$$(*) \quad \limsup_{h\to 0+} |f(h)| \leq \omega \limsup |s_n| \; .$$

K tomu zvolte $\alpha > \limsup |s_n|$ a n_0 přirozené, aby pro všechna $n > n_0$ bylo $|s_n| < \alpha$. Pak

$$|f(h)| \leq \left| \sum_{n=0}^{n_0} s_n \big(G(nh)\big) - G\big((n+1)h\big) \right| + \alpha \int_0^\infty |g| \; .$$

První sčítanec má limitu 0 pro $h \to 0_+$. Odtud $(*)$ plyne snadno.

Dále položte $b_0 = a_0 - T$, $b_i = a_i$, $t_n = b_0 + \ldots + b_n = s_n - T$.

Je $\limsup t_n = S - T = \Delta$, $\liminf t_n = s - T = -\Delta$,

$\limsup |t_n| = \Delta$. Položme ještě

$$f_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n G(nh) = f(h) - T$$

a aplikujme $(*)$ na f_1. Máme $\limsup_{h\to 0+} |f_1(h)| \leq \omega$, tedy

$\limsup_{h\to 0+} f(h) \leq T + \omega\Delta$. Podobně pro $\liminf_{h\to 0+} f(h)$.

$\boxed{43.14}$ Cvičení. Zvolte v 43.13 funkci g splňující všechny předpoklady tam uvedené, aby $G(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ pro $x > 0$, $G(0) = 1$. Sestrojte další funkce g, splňující předpoklady z 43.13.

43.15 Cvičení. Ponechme označení z 43.13. Platí toto tvrzení:

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak existuje $\lim_{h\to 0+} f(h)$ a platí
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{h\to 0+} f(h)$.

N á v o d. Plyne triviálně z 43.13, neboť pak $\Delta = 0$.

43.16 Definice. Ponechme označení z 43.13. Jestliže existuje $\lim_{h\to 0+} f(h) = A$, řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je R_G - sčítatelná k číslu A; číslo A nazveme R_G - součtem této řady. Je-li speciálně G funkce z 43.14, budeme říkat pouze R-součet a místo R_G-sčítatelná budeme říkat, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je sčítatelná Riemannovou sčítací metodou.

43.17 Cvičení. Pomocí 43.15 ukažte, že sčítací metoda R_G je regulární.

43.18* Cvičení. Pokuste se sestrojit řadu, která není konvergentní a je sčítatelná Riemannovou sčítací metodou.

43.19 Cvičení. Rozhodněte, zda Riemannova sčítací metoda je monotonní.

43.20* Problém. Porovnejte Riemannovu sčítací metodu s jinými sčítacími metodami, které znáte.

43.21 Poznámka. Riemannova sčítací metoda má značnou důležitost v teorii trigonometrických řad (viz téma 22).

D. LIMITOVACÍ METODA D

43.22 Hustota. V dalším ukážeme příklad ještě jedné zajímavé limitovací metody. Nejdříve však zavedeme některé pojmy.

Buď dána r o s t o u c í posloupnost $S = \{n_i\}$ (může být nekonečná, konečná, prázdná!) p ř i r o z e n ý c h čísel.

Definujme horní a dolní hustotu posloupnosti S vztahy

$$D^*(S) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n_i \le n} 1 \quad ,$$

$$D_*(S) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n_i \le n} 1 .$$

Jestliže $D^*(S) = D_*(S)$, nazýváme tuto společnou hodnotu hustotou posloupnosti S a značíme ji $D(S)$.

43.23 Příklady. Určete hustotu (resp. horní a dolní hustotu) následujících posloupností:

(a) S_1 je libovolná prázdná nebo konečná rostoucí posloupnost přirozených čísel,

(b) $S_2 = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $S_3 = \{2n\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $S_4 = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $a_1 = 1$, $a_k = 2^{n+1} + \ell$, jestliže $k = 2^n + \ell$, kde $\ell = 1,2,\dots,2^n$.

43.24 Definice. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, buď $t \in E_1$. Označme symbolem $\{n;\ x_n \leq t\}$ posloupnost těch přirozených čísel n, pro něž je $x_n \leq t$ (chápejme ji jako rostoucí posloupnost – toto je možné díky dobrému uspořádání přirozených čísel).

Říkáme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je D-konvergentní k D-limitě λ, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$D\{n;\ |x_n - \lambda| \geq \varepsilon\} = 0.$$

(a) Uveďte nějaké příklady!

(b) Ukažte, že D-limita je definována korektně, tj. jestliže $\text{D-lim}\ x_n = \xi$, $\text{D-lim}\ x_n = \eta$, potom $\xi = \eta$.

N á v o d. Předpokládejte, že $\xi \neq \eta$. Z toho vyplyne, že hustota posloupnosti všech přirozených čísel je 0 (uvažte, že sjednocení dvou posloupností s nulovou hustotou – chápané jako množinové sjednocení, které je uspořádáno do rostoucí posloupnosti – je opět posloupnost s nulovou hustotou).

43.25 Cvičení. Ukažte, že limitovací metoda D je regulární a monotonní.

N á v o d. Obtížnější je pouze důkaz linearity této metody (tj. (i) z 43.2). Užijte k němu inkluse

$$\{n;\ |x_n + y_n - (\xi + \eta)| \geq \varepsilon\} \subset \{n;\ |x_n - \xi| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{n;\ |y_n - \eta| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\},$$

kde $\xi = \text{D-lim}\ x_n$, $\eta = \text{D-lim}\ y_n$.

43.26 <u>Věta.</u> Nechť D-lim $x_n = \xi$, nechť posloupnost $\{x_n\}$ je omezená. Potom $\lim x_n = \xi$ (C,1). Dokažte! (Co nám tato věta vlastně říká?)

N á v o d. Předpokládejte, že $\xi = 0$. Označte N_n počet těch i ($i = 1,2,\dots,n$), pro něž $|x_i| \geq \varepsilon$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_n}{n} = 0$. Nyní vhodně odhadněte zlomek $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

43.27 <u>Tvrzení.</u> Nechť D-lim $x_n = \xi$, nechť funkce $g : E_1 \longrightarrow E_1$ je spojitá v bodě ξ. Potom D-lim $g(x_n) = g(\xi)$. Dokažte!
(Opět porovnejte s "klasickou" větou.)

B. SOUČIN ŘAD

V tomto odstavci budeme aplikovat sčítací metody na součin řad.

43.28 <u>Věta.</u> <u>Cauchyův součin</u> řad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, kde $c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$ (rozepište!). Jsou-li řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ <u>absolutně</u> konvergentní, je i řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolutně konvergentní a platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ (vyslovte obecnější větu o násobení absolutně konvergentních řad!).

Uvedená věta pro součin nemusí platit, požadujeme-li pouze neabsolutní konvergenci obou řad. Ukažte!

N á v o d. Uvažujte řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ a její druhou mocninu.

43.29 <u>Věta</u> (Mertens, 1875).
Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady, z nichž alespoň jedna konverguje absolutně. Potom Cauchyův součin řad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje a platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Dokažte!

N á v o d. Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Označte A_n, B_n, C_n n-té částečné součty příslušných řad. Potom platí

$$C_p = \sum_{m=0}^{p} a_m B_{p-m} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \beta_{m,p} \,, \quad \text{kde} \quad \beta_{m,p} = B_{p-m}$$

pro $m = 0,1,\dots,p$, $\beta_{m,p} = 0$ pro $m \geq p+1$. Koeficienty $\beta_{m,p}$ jsou omezené stejnou konstantou pro všechna m, p. Jestliže položíme $\varphi_m(p) = a_m \beta_{m,p}$, pak řada $\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(p)$ konverguje stejnoměrně na množině N (zde se používá absolutní konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$!).

Nyní stačí ukázat, že

$$\lim_{p\to\infty} C_p = \lim_{p\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \beta_{m,p} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lim_{p\to\infty} \beta_{m,p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \,.$$

Platí tato věta i pro jiné součiny, než je Cauchyův součin?

43.30 Věta. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ jsou konvergentní řady. Potom $(C,1) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab$. Dokažte!

N á v o d. Ukažte, že $\dfrac{u_0 v_0 + \dots + u_n v_n}{n+1} \longrightarrow uv$, jestliže $u_n \longrightarrow u$, $v_n \longrightarrow v$.

F. TAUBEROVSKÉ PODMÍNKY

Každá konvergentní řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se součtem s je (podle definice) sčítatelná libovolnou regulární metodou k témuž součtu. Obráceně ovšem ne každá sčítatelná řada - kupříkladu (C,1) - je konvergentní. Věty, které říkají, za jakého dalšího předpokladu je sčítatelná řada již konvergentní, se nazývají věty Tauberova typu. Dodatečný předpoklad této věty se obvykle pak nazývá tauberovská podmínka pro danou sčítací metodu. Ukážeme několik vět Tauberova typu pro metody (C,1) a (A).

43.31 Věta. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ (C,1), nechť $a_n \geq 0$ pro $n=0,1,\dots$. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Dokažte! Jaká je zde tauberovská podmínka?

43.32 <u>Věta.</u> Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\ (C,1)$, nechť existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n}$. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Dokažte!

43.33 <u>Cvičení.</u> Pomocí 43.32 ukažte, že existence vlastní limity $\lim_{n\to\infty} na_n$ je také tauberovská podmínka pro metodu (C,1).

43.34 <u>Poznámka.</u> Existují daleko obecnější tauberovské podmínky pro metodu (C,1), například omezenost zdola posloupnosti $\{na_n\}$ je takovou podmínkou. O tom se lze dočíst v knize G.H. Hardy, Divergent Series (ruský překlad z roku 1951) či v knize G.M. Fichtengolc, Kurs diferencialnovo i integralnovo isčistenija II, Moskva 1959.

43.35 <u>Cvičení.</u> Nalezněte pro Abelovu metodu tauberovskou podmínku obdobnou 43.31.

TÉMA 44

Nerovnosti

44.1 Youngova nerovnost. Ukažte na základě obrázku, že platí:

Nechť f je spojitá a rostoucí funkce na intervalu $\langle 0,c\rangle$, $c > 0$ a $f(0) = 0$. Pak pro $a \in \langle 0,c\rangle$, $b \in \langle 0,f(c)\rangle$ je

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx \geq ab$$

Při důkazu použijte vztahu

$$\int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} = xf(x) \quad \text{pro každé } x > 0.$$

Zjistěte, kdy platí rovnost!

44.2 Cvičení. Z odstavce 44.1 dokažte vhodnou volbou funkce f:

Pro $a,b \geq 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ platí $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Odvoďte, kdy platí rovnost!

Jiný důkaz této nerovnosti viz [D II], kap. V, § 12, věta 101.

44.3 Hölderova nerovnost. Pomocí 44.2 dokažte:

Nechť $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ pro $k = 1,\dots,n$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pak $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right]^{\frac{1}{q}} .$$

Odtud limitním přechodem dokažte, že pro libovolné dvě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ platí tzv. Hölderova nerovnost

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$ a zjistěte, kdy v této nerovnosti platí rovnost.

1014-7781

44.4 <u>Minkowského nerovnost.</u> Pro libovolné posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $p \geqslant 1$ platí

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}|a_n + b_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} .$$

N á v o d. Uvažte, že $|a_n + b_n|^p < |a_n| . |a_n + b_n|^{p-1} + |b_n| . |a_n + b_n|^{p-1}$ a použijte Hölderovu nerovnost.

44.5 <u>Prostor l_p.</u> Pro $p \geqslant 1$ označme

$l_p = \left\{\{a_n\};\ a_n \in K,\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p < +\infty\right\}$, kde K je množina všech komplexních (resp. reálných) čísel.

(a) Dokažte, že při této definici součtu

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

a násobku komplexním (resp. reálným) číslem

$$\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\}$$

je l_p lineární prostor nad tělesem komplexních (resp. reálných) čísel.

(b) Zobrazení $\varphi : a \longrightarrow \left[\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$, $a = \{a_n\} \in l_p$

má vlastnosti

(i) $\varphi(\{a_n\}) \geqslant 0$ pro každou $\{a_n\} \in l_p$,

(ii) $\varphi(\{a_n\}) = 0$, právě když $a_n = 0$ pro každé $n \in N$,

(iii) $\varphi(\{a_n\}) = |\lambda|\varphi(\{a_n\})$ pro každé $\lambda \in K$ a $\{a_n\} \in l_p$,

(iv) $\varphi(\{a_n + b_n\}) \leqslant \varphi(\{a_n\}) + \varphi(\{b_n\})$ pro všechna $\{a_n\}, \{b_n\} \in l_p$.

Tedy zobrazení $\rho : [\{a_n\}, \{b_n\}] \to \varphi(\{a_n - b_n\})$, $[\{a_n\}, \{b_n\}] \in l_p \times l_p$ je metrika na l_p.

(Zobrazení φ s vlastnostmi (i) - (iv) se říká norma na lineárním prostoru.)

(c) Metrický prostor l_p s metrikou ρ definovanou v (b) je úplný metrický prostor tj. posloupnost $\{a^{(k)}\} \subset l_p$ je konvergentní právě tehdy, jestliže platí

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{k_0 \in N} \ \forall_{k \in N} \ \forall_{j \in N} \ \left[(k \geq k_0) \Longrightarrow \rho\left(a^{(k+j)}, a^{(k)} \right) < \varepsilon \right].$$

N á v o d. Obtížnější je pouze důkaz postačitelnosti podmínky. Označme $a^{(k)} = \{a_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$. Pak pro pevné $k \in N$ vyhovuje posloupnost $\{a_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ obyčejné Bolzano-Cauchyově podmínce a tedy existují $a_n \in E_1$ tak, že $\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = a_n$. Nyní dokažte, že $a = \{a_n\} \in l_p$ a $\lim_{k\to+\infty} \rho(a^{(k)}, a) = 0$.

$\boxed{44.6}$ **Cvičení.**

(a) Dokažte, že pro $a_k \geq 0$, $k = 1,\dots,n$ je funkce

$$g : x \longmapsto \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^x \right]^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0 \quad \text{nerostoucí na } (0,+\infty).$$

Existuje tedy $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. Vypočtěte ji!

(b) Pomocí (a) odvoďte, že pro $1 \leq p_1 < p_2$ je $l_{p_2} \subset l_{p_1}$.

Dokažte, že tuto inklusi není možno nikdy zaměnit za rovnost!

T É M A 45

Stirlingova a Čebyševova věta

Obsah: A. Nekonečné součiny.

B. Stirlingova formule.

C. Čebyševova věta.

A. NEKONEČNÉ SOUČINY

45.1 **Definice.** Nechť p_n je číselná posloupnost, položme $P_n = p_1 p_2 \dots p_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$, $n = 1,2,\dots$. Jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ vlastní a nenulová, pak říkáme, že nekonečný součin $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ konverguje k P. Je-li $P = 0$ nebo $P = \infty$ říkáme, že nekonečný součin $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$ diverguje.

45.2 **Cvičení.**

(a) Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ je nutnou podmínkou pro konvergenci $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$. Je tato podmínka postačující?

(b) Na základě (a) uvažujme pouze ty nekonečné součiny, pro něž je $p_n > 0$, $n = 1,2,\dots$ a označme $p_n = 1 + a_n$. Dokažte nyní, že součin $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ je konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} \log (1 + a_n)$ je konvergentní.

(c) Jestliže až na konečný počet indexů je $a_n > 0$ nebo $a_n < 0$, pak součin $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ je konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

1014-7781

N á v o d. Uvažte, že za daného předpokladu je $\lim \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1$, použijte srovnávací kriterium a (b).

(d) Dokažte, že součin $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ diverguje k 0, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = -\infty$.

(e) Jako aplikaci nekonečných součinů zjistěte chování Gaussovy hypergeometrické řady 40.14 pro $x = -1$.

N á v o d. Označte a_n n-tý koeficient hypergeometrické řady. Vyjádřete

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{c_n}{n^2}$, kde posloupnost $\{c_n\}$ je omezená. Předpokládejme nejprve, že $\gamma - \alpha - \beta + 1 > 0$. Pak pro $n \geq n_0$ je $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$. Protože jde o řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, je nutné a stačí, aby $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ale $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_1}$. Stačí tedy dokázat, že $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ diverguje k 0. To dokažte pomocí 45.2.d.

Pro případ $\gamma - \alpha - \beta + 1 = 0$ uvažte, že podle (c) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ konverguje a tedy $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

$\boxed{45.3}$ Tvrzení. Nechť $\{p_n\}$ je rostoucí posloupnost prvočísel ($p_1 = 2$). Pro $x > 1$ je $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} = \zeta(x)$, kde ζ je Riemannova dzeta funkce (viz téma 41). Dokažte!

N á v o d. Uvažte, že $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p_n^x)^k}$.

Vynásobením konečného počtu takových členů dostaneme vyjádření

$$P_x^{(N)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} .$$ Z něho odvoďte

$$0 \leq P_x^{(N)} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^x} .$$ Odtud ihned plyne výsledek.

1014-7781

45.4 **Cvičení.** Z poslední nerovnosti v návodu k 45.3 odvoďte, že

$$p_1^{(N)} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \quad \text{a tedy, že} \quad \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \quad \text{diverguje k } +\infty .$$

Pak ale také $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k})$ diverguje k 0 a podle 45.2.d je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ řada divergentní. Z toho ihned plyne, že prvočísel je nekonečně mnoho.

B. STIRLINGOVA FORMULE

45.5 **Cvičení.** Zřejmě $n! \leq n^n$. Z druhé strany je $n! \geqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Přesněji dostaneme $n! = \sqrt{n^2 \prod_{k=1}^{n-1} k(n-k)} \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$, a protože

$$e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} > \frac{n^n}{n!} , \quad \text{také} \quad n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

45.6* **Stirlingova formule.**

(a) Uvažujme posloupnost $b_n = \log \frac{n!}{n^n}$. Je

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \log k - n\log n = \sum_{k=2}^{n} (k-1) \log (1 - \tfrac{1}{k}). \text{ Pro } 0 \leq t < 1$$

je, jak známo, $\log (1-t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$ a tedy pro $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{2}{3} t^3 . \Theta(t), \quad \text{kde } 0 < \Theta(t) \leq 1.$$

Je tedy $b_n = - \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{k^2} \Theta_1\left(\frac{1}{k}\right)\right)$,

kde $\Theta_1\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k-1}{k} . \Theta(k)$ tj. $0 \leq \Theta_1\left(\frac{1}{k}\right) \leq 1.$

Odtud

$$b_n = -(n-2) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \Theta_1\left(\frac{1}{k}\right)\right) .$$

Vyšetřeme nyní součet

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} . \quad \text{Podle výše uvedeného je pro } k \geqslant 2$$

$$\frac{1}{k} = -\log \left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k^2} \Theta_2\left(\frac{1}{k}\right) ,$$

kde $0 \leqslant \Theta_2\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant 1$. Odtud

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{\Theta_2\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2} .$$

Existuje tedy vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) = C$$

(tzv. Eulerova konstanta). Celkem tedy můžeme tvrdit, že existuje vlastní limita

$$a = \lim_{n\to\infty} \left(b_n + n - \frac{1}{2}\log n\right) = \lim_{n\to\infty} \log \frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}} .$$

(b) K určení této limity odvodíme tzv. Wallisovu formuli

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 ,$$

kde $(2n)!! = 2.4.6 \ldots 2n$, $(2n-1)!! = 1.3.5\ldots(2n-1)$.

N á v o d. Je-li n nezáporné celé číslo, položte $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

Snadno nahlédnete, že $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$,

$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

Odtud

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \, \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} ,$$

z čehož již dostáváme hledaný vztah.

Píšeme-li nyní Wallisovu formuli ve tvaru

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{1}{2n+1} \left[\frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!}\right] ,$$

dostaneme srovnáním s výsledkem (a) snadno, že $a = \log \sqrt{2\pi}$.

(c) Odhadněme nyní chybu. Buď $a_n = \log \frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}}$; jest nyní

$$a_n - a_{n+1} = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{2n+1}{2} .$$

$$\left(\log\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) =$$

$$= -1 + (2n+1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)(2n+1)^{2j-1}} = \frac{1}{12n\,(n+1)} .$$

1014-7781

Tedy $0 < a_n - a = \sum_{k=n}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) < \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{12n}$.

Konečně dostáváme tzv. Stirlingovu formuli

$$n! = \sqrt{2\pi}\, \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\, e^{\frac{\gamma_n}{12n}} , \quad \text{kde} \quad 0 < \gamma_n < 1,$$

tedy například

$$n! = \sqrt{2\pi}\, \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \left(1 + \frac{\beta_n}{6n}\right), \quad \text{kde} \quad 0 < \beta_n < 1.$$

45.7 **Cvičení.**

(a) Pomocí Stirlingovy formule sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \log \frac{2n+1}{2n-1} - 1\right) .$$

N á v o d. Upravte n-tý částečný součet dle Stirlingovy formule. (Vyjde $\frac{1}{2}$ (1 - log 2)) .

(b) Pomocí Stirlingovy formule vyšetřete poloměr R konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ a ukažte, že pro $x = R$ řada diverguje, pro $x = -R$ konverguje.

C. ČEBYŠEVOVA VĚTA

V tématu 41 se můžete setkat s Riemannovou dzeta funkcí definovanou pro $x > 1$ vztahem $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Snadno lze ukázat (viz 45.3), že pro $x > 1$ je

$$\zeta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} ,$$

kde $\{p_n\}$ je rostoucí posloupnost všech prvočísel. Cílem následujících úvah je odvodit na základě tohoto vyjádření některá tvrzení o rozložení prvočísel, tj. o chování funkce $\pi(x)$ pro velké hodnoty x ($\pi(x)$ označuje počet prvočísel nepřevyšujících x).

45.8 **Tvrzení.** Buď $x > 2$ reálné číslo, $r \leq x$, $p_1, \dots p_n$ všechna prvočísla menší nebo rovna r. Potom zřejmě

$$\pi(x) \leq n + [x] - \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{x}{p_j}\right] + \sum_{\substack{i,j \\ i<j}}^{n} \left[\frac{x}{p_i p_j}\right] \ldots + (-1)^n \left[\frac{x}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}\right] .$$

Dokažte!

N á v o d. Vynecháme-li závorky celé části, uděláme chybu nejvýše 1 a tedy v celém výrazu nejvýše $1 + n + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$. Je tedy

$$\pi(x) \leq n + 2^n + x \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \leq r + 2^r + x \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) .$$

Nyní uvažme, že $\prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \geq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k} \geq \log r - C$ s vhodnou kladnou konstantou C (viz téma 41 nebo uvažte, že je $\log (k + 1) - \log k = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{k}$, kde $\xi \in (k, k+1)$).

Je tedy $\pi(x) \leq r + 2^r + \frac{x}{\log r - C}$ pro všechna dostatečně velká r. Volíme-li $r = \alpha \log x$, $\alpha < \frac{1}{\log 2}$, dostaneme snadno, že pro všechna $x \geq 2$ je $\pi(x) \leq K \frac{x}{\log \log x}$, kde K je jistá konstanta. Odtud ihned plyne $\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$, tj. prvočísel je "podstatně méně" než přirozených čísel.

Poznámka. Dokázaný odhad není definitivní. Metodu v tomto bodě použitou ovšem zřejmě nejde zlepšit, neboť "chyba" 2^r je příliš velká oproti odhadu pro součin $\prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, který je - jak snadno nahlédneme - definitivní. K zlepšení odhadu pro $\pi(x)$ bychom tedy potřebovali jednak jinou souvislost mezi funkcemi π a ζ než byla uvedena výše a dále pak jemnější odhady chování funkce ζ (použili jsme ve skutečnosti pouze odhadu pro rychlost divergence harmonické řady).

45.9 Cvičení. Z 41.8 vyjde pro $x > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n) - \pi(n-1)}{n^x} = \lim_{T \to \infty} x \int_1^T \frac{\pi(t)}{t^{x+1}} \, dt .$$

Jelikož

$$\zeta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} , \text{ je } \log \zeta(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} + \Theta(x),$$ kde $\Theta(x)$ je funkce omezená v intervalu

1014-7781

$\langle 1, +\infty)$. Z 41.7 nyní víme, jak se "chová" funkce $\zeta(x)$ pro $x \to 1_+$. Odtud například již plyne, že nemůže platit odhad $\pi(x) \leq K x^{\alpha}$, kde K a α jsou kladné konstanty, $\alpha < 1$.

Návod. Z výše uvedených vztahů odvoďte, že $\log \zeta(x)$ by byla funkce omezená v intervalu $(1, +\infty)$, což je spor s výsledkem $\zeta(x)\,(x-1) \to 1$ pro $x \to 1_+$.

45.10 Prvočíselná věta. K odvození přesnějších odhadů bychom potřebovali "opačné" vyjádření $\zeta(x)$ pomocí $\pi(t)$ nebo alespoň nějaký způsob, jak odvodit z vlastností integrálů vlastnosti integrandu. Takový postup skutečně lze nalézt a pomocí něho odvodit slavnou "prvočíselnou větu"

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

(Hadamard, de la Vallée Poussin, 1896.) Poznamenejme, že tento vztah lze podstatně zesílit: existují kladné konstanty K, α, β tak, že pro všechna $x \geq 2$ je

$$\left| \pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t} \right| \leq C\, x\, e^{-\alpha \sqrt[\beta]{\log x}}$$

(Vinogradov 1968, $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{5}$). Pro vysvětlení uveďme, že

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t},$$

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\sqrt{x} - 2}{\log^2 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\log^2 \sqrt{x}} \qquad \text{tj.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log t}}{x} = 1.$$ Funkce $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ je však "vhodnější" než $\dfrac{x}{\log x}$. Elementární důkaz, používající pouze základních vlastností integrálu, pochází od P. Erdőse a A. Selberga z roku 1948 - viz např. Specht: Elementare Beweise der Primzahlsätze, Berlin, 1956.

$\boxed{45.11^*}$ Čebyševova věta. Existují dvě kladné konstanty C_1, C_2 tak, že pro všechna $x \geqslant 1$ je

$$C_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < C_2 \frac{x}{\log x} .$$

Dokažte!

N á v o d.

(a) Pro $n \geqslant 2$ platí $2^{-1} < \sqrt{n}\; 2^{-2n} \binom{2n}{n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tento vztah odvoďte buď pomocí Stirlingovy formule 45.6 nebo na základě vztahů

$$\binom{2n}{n}^2 \frac{2n}{2^{4n}} < \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(2j)^2}\right) < 1,$$

$$\frac{2^{4n}}{4n} \frac{1}{\binom{2n}{n}^2} = \prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{(2j-1)^2}\right) < 1 .$$

(b) V rozkladu čísla $\binom{2n}{n}$ na prvočinitele se vyskytují pouze prvočísla menší než $2n$ - jejich počet je tedy nejvýše $\pi(2n)$.

Exponent u prvočísla p v rozkladu $\binom{2n}{n}$ je nejvýše $\frac{\log 2n}{\log p}$ (ukažte!) a tedy $\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$.

Použitím (a) vyjde $\pi\ (2n) > \dfrac{\log \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}}{\log 2n}$ a odtud snadno použitím nerovnosti $\pi(x) \geqslant \pi\left(2\left[\frac{x}{2}\right]\right)$ odvodíme existenci konstanty C_1 z Čebyševovy věty.

Z druhé strany každé prvočíslo p, pro něž je $n < p \leqslant 2n$ nutně dělí číslo $\binom{2n}{n}$. Je tedy $n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leqslant \binom{2n}{n}$ a odtud použitím (a) dostaneme existenci kladné konstanty α_1 tak, že $\pi(2n) - \pi(n) < \alpha_1 \frac{n}{\log n}$.

Z tohoto vztahu plyne pro $x \geqslant 2$

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) < \alpha_2 \frac{x}{\log x}$$

s případně jinou konstantou $\alpha_2 > 0$. Nyní je $\left(\pi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \frac{x}{2}\right)$

$$\log\left((x)\pi(x)\right) - \log\left(\left(\frac{x}{2}\right)\pi\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \log x \left(\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log 2\,\pi\left(\frac{x}{2}\right) < \alpha_3 x$$

s vhodnou konstantou $\alpha_3 > 0$.

Píšeme-li nyní místo x postupně $\frac{x}{2^i}$ ($i = 0, 1, \ldots,$ pokud $\frac{x}{2^i} \geq 2$, tj. pro $i \leq \frac{\log \frac{x}{2}}{\log 2}$ a sečteme, vyjde

$$\log(x)\pi(x) = \sum_{0 \leq j \leq \frac{\log x/2}{\log 2}} \left(\log\left(\frac{x}{2^j}\right)\pi\left(\frac{x}{2^j}\right) - \log\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)\pi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)\right) <$$

$$< \alpha_3 x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2\alpha_3 x, \quad \text{tedy} \quad \pi(x) \leq 2\alpha_0 \frac{x}{\log x} .$$

45.12 Odvoďte z Čebyševovy věty existenci kladných konstant C_3 a C_4 tak, že

$$C_3\, n \log n \leq p_n \leq C_4\, n \log n\ !$$

Jaký výsledek lze odvodit z "prvočíselné věty"?

T É M A 46

Některé číselně-teoretické vlastnosti reálných čísel

A. DIOFANTICKÉ APROXIMACE

46.1 Dirichletova věta.

(a) Je-li $\alpha \in E_1$, $\varepsilon > 0$, existuje racionální číslo $r = \frac{p}{q}$ (lze předpokládat, že $q > 0$, p a q nesoudělná) tak, že $|\alpha - p/q| < \varepsilon$.

Návod. Buď n přirozené, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ a uvažujte intervaly $\langle \frac{k}{n} , \frac{k+1}{n})$ pro všechna celá k (v důkazu se podstatně využívá tzv. Archimedova vlastnost reálných čísel).

(b) V mnoha (i praktických) úlohách je užitečné vědět, jak je při daném $\varepsilon > 0$ velký jmenovatel q zlomku, pro nějž platí tvrzení z (a).

Dokažte tzv. Dirichletovu větu: buď $t \geq 1$ a $\alpha \in E_1$. Potom existují celá nesoudělná čísla p, q tak, že platí $0 < q \leq t$, $|\alpha - p/q| < 1/qt$.

Návod. Uvažujte $[t] + 2$ čísel $m\alpha - [m\alpha]$, $(m = 0,1,\ldots,[t])$ a 1 intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Musí (odůvodněte proč!) existovat interval $\langle \frac{j}{[t]+1} , \frac{j+1}{[t]+1} \rangle$ $(j = 0,1,\ldots[t])$, v němž leží alespoň dvě z těchto čísel. Jejich odečtením dostaneme existenci přirozeného q, $q \leq [t] < t$ a celého p tak, že platí uvedené nerovnosti. (Pozor na α racionální!)

(c) Je-li α iracionální číslo, existuje nekonečně mnoho dvojic p, q celých nesoudělných čísel tak, že $q > 0$ a

1014-7781

$|\alpha - \frac{p}{q}| < 1/q^2$ (odvoďte z b !). Je předpoklad iracionality čísla α podstatný?

(d) Vzniká nyní přirozená otázka, jak lze výsledek (c) zlepšit, tj. zda pro každé iracionální α má nerovnost

$$(*) \qquad |\alpha - p/q| < \frac{1}{q\,\varphi(q)}$$

nekonečně mnoho řešení v celých nesoudělných p, q, kde φ je nějaká kladná funkce, $\varphi(q) > q$. Lze ukázat (Hurwitz), že lze volit $\varphi(q) = \sqrt{5}\,q$ a konstantu $\sqrt{5}$ nelze dále obecně zvětšovat. Ukažte, že pro $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\varphi(q) = c\,q$, kde $c > \sqrt{5}$ má nerovnost $|\alpha - p/q| < \frac{1}{q\,\varphi(q)}$ nejvýše konečně mnoho řešení v celých nesoudělných p, q.

N á v o d. Píšeme-li $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{c}$, odvoďme z uvažované nerovnosti vztah

$$q^2 < \frac{\alpha^2}{\sqrt{5}\,(1-\alpha)} .$$

$\boxed{46.2^*}$ **Cvičení.**

(a) Buď nyní $\varphi(x) \geqq x$ neklesající funkce na intervalu $\langle 1, +\infty)$. Ptáme se, zda existuje iracionální číslo α, pro něž by nerovnost $(*)$ měla nekonečně mnoho řešení v celých (a tudíž také nekonečně mnoho řešení v celých nesoudělných) p, q, $q > 0$.

(b) Pro n přirozené buď M_n množina všech $\alpha \in E_1$ takových, že $|\alpha - p/q| \geqq \frac{1}{q\,\varphi(q)}$ pro všechna p, q celá, $q \geqq n$. Ukažte, že množiny M_n jsou řídké a uzavřené v E_1; Tedy množina $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je prvé kategorie v E_1. Existují tedy $\alpha \in E_1 \setminus M$, α iracionální (proč?) a pro toto α má nerovnost $(*)$ nekonečně mnoho řešení v celých nesoudělných p, q, $q > 0$ (podrobně odůvodněte!). Tím jsme provedli tzv. existenční důkaz.

(c) Konstrukce je poněkud složitější, ale lze dokázat trochu více. Nejprve ukažte následující lemma.

Lemma. Jsou-li a, b celá nesoudělná čísla, existují celá čísla x_0, y_0 tak, že pro $x = x_0$, $y = y_0$ je

$$(**) \qquad ax - by = 1 \quad .$$

Všechna řešení této rovnice jsou potom dána vztahy $x = x_0 + bt$, $y = y_0 + at$, kde t je celé číslo.

N á v o d. Uvažujte nejmenší kladné číslo d, které lze vyjádřit ve tvaru $ax - by$ s celými x, y a ukažte, že d dělí a i b. Pro zbytek tvrzení dokažte, že platí-li $(**)$, je $a(x-x_0) = b(y-y_0)$.

Konstrukce. Buď $A = 4$.

(i) Položme $p_0 = 0$, $q_0 = 1$. Jsou-li již definována p_n, q_n pro jisté nezáporné celé n, zvolme p_{n+1} a q_{n+1} tak, aby

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = 1$$

$$A \varphi(q_n) \leq q_{n+1} < (A + 1) \varphi(q_n)$$

Použijte lemmatu.

(ii) Buď $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_0}{q_n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} \right)$,

kde řada konverguje. Dále platí pro $n = 0,1,\ldots$

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{A^2}{A^2 - 1} \cdot \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad .$$

N á v o d. Použijte vztahů:

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad ,$$

$$q_k q_{k+1} \geq A^2 q_{k-1} q_k \quad (k=1,2,\ldots\ldots) \; .$$

(iii) Číslo α je iracionální.

N á v o d. Nechť $\alpha = p/q$, $q > 0$. Zvolme n tak, aby $q < \dfrac{A^2 - 1}{A^2} q_n$. Je $q < q_n$ a dle (ii)

$$\frac{1}{q q_n} \leq \frac{|pq_n - qp_n|}{qq_n} = \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad \frac{A^2}{A^2 - 1}$$

tj. $q > \dfrac{A^2 - 1}{A^2} q_{n+1}$, což je spor.

(iv) Nerovnost $(*)$ má nekonečně mnoho řešení v celých p, q, $q > 0$; nerovnost $|\alpha - p/q| > \frac{1}{10q\,\varphi(q)}$ je splněna pro všechna celá p, q, $q > 0$.

N á v o d. Pro 1. část buď $p = p_n$, $q = q_n$ a použijme (ii). Buďte p, q celá, $q > 0$. Určeme n tak, aby $q_{n-1} \leq q < q_n$. Potom dle (ii) je

$$q\,\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant q\left(\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{q_n} - \frac{A^2}{A^2 - 1}\ \frac{q}{q_n\,q_{n+1}} > \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{A}{A^2 - 1}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\varphi(q_{n-1})} \cdot \frac{A^2 - A - 1}{(A^2 - 1)(A + 1)} > \frac{1}{10\,\varphi(q)} \quad .$$

Závěrem tedy: K dané funkci $\varphi(q)$ existuje iracionální číslo α tak, že nerovnost $(*)$ má nekonečně mnoho řešení v celých nesoudělných p, q, $q > 0$ a nerovnost $|\alpha - p/q| > \frac{1}{10q\,\varphi(q)}$ je splněna pro všechna celá p, q.

$\boxed{46.3^*}$ Cvičení.

(a) Buď φ kladná funkce definovaná na intervalu $\langle 1, +\infty)$ a buď M_φ množina všech iracionálních $\alpha \in E_1$ takových, že nerovnost $(*)$ má nekonečně mnoho řešení v celých nesoudělných p, q, $q > 0$. Ukažte, že je-li $I \subset E_1$ interval, je $I \cap M_\varphi$ nespočetná.

(b) Jsou-li φ_1 a φ_2 dvě funkce, splňující výše uvedené předpoklady, $t \in E_1$, existuje $x \in M_{\varphi_1}$, $y \in M_{\varphi_2}$ tak, že $t = x + y$; je-li $t \neq 0$ lze nalézt $u \in M_{\varphi_1}$, $v \in M_{\varphi_2}$ tak, že $t = u\,v$.

N á v o d. Podle 46.2.b je $E_1 \setminus M_\varphi$ první kategorie. Je-li $A \subset E_1$ množina reziduální (tj. $E_1 \setminus A$ je první kategorie), $B \subset E_1$ reziduální, jsou množiny $A \cap B$, $A + t$ a pro $t \neq 0$ i tA také reziduální.

(c) Ukažte, že množina M_φ je typu G_δ (M_n z 46.2.b jsou uzavřené).

(d) Konstrukci uvedenou v 46.2.c můžeme upravit ještě několika způsoby a dokázat podstatně více: Buď $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost nul a jedniček. Volme v bodě (i) konstrukce 46.2.c p_{n+1}, q_{n+1} takto: je-li $\varepsilon_{n+1} = 0$, nechť platí $A\varphi(q_n) \leq q_{n+1} < (A+1)\varphi(q_n)$, je-li $\varepsilon_{n+1} = 1$, nechť platí $(A + 1)\varphi(q_n) \leq q_{n+1} < (A+2)\varphi(q_n)$. V obou případech $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = 1$ a pro určitost volme q_{n+1} nejmenší možné. Tím každé posloupnosti ε přiřadíme jisté iracionální číslo $\alpha = \alpha_\varepsilon$. Ukažte:

(i) Pro každé α_ε platí tvrzení uvedené na závěr 46.2.c, pouze konstantu 1/10 nutno poněkud zmenšit.

(ii) Zobrazení $\varepsilon \longrightarrow \alpha_\varepsilon$ je prosté. Tím dokážeme: Existuje konstanta $c > 0$ a nespočetná množina iracionálních čísel $\alpha \in (0,1)$ (proč?) takových, že pro každé toto $\alpha \in (0,1)$ (*) má nekonečně mnoho řešení v celých p, q, $q > 0$ a nerovnost $|\alpha - p/q| > \frac{c}{q\,\varphi(q)}$ je splněna pro všechna celá p, q, $q > 0$.

(e) Volme navíc v konstrukci 46.2.c za p_0, q_0 libovolná nesoudělná čísla, $q_0 > 0$. Výsledek se změní pouze v tom, že nerovnost $|\alpha - p/q| > \frac{c}{q\,\varphi(q)}$ dokážeme pro $q \geq q_0$. Odtud dostaneme: Existuje nespočetná množina $N_\varphi \subset E_1$ hustá v E_1 taková, že ke každému $\alpha \in N_\varphi$ existuje konstanta $c = c(\alpha) > 0$ tak, že nerovnost $|\alpha - p/q| \geq \frac{c}{q\varphi(q)}$ je splněna pro všechna celá p, q a nerovnost (*) má nekonečně mnoho řešení v celých nesoudělných p,q, $q > 0$ (volte v konstrukci 46.2.c za p_0, q_0 všechny dvojice celých nesoudělných čísel, $A = 4,5,\dots$). Dokažte, že množina N je první kategorie. Pokuste se určit její typ ($G_{\delta\sigma}$?)!

46.4 Liouvillova věta.

(a) Následující věta (Liouville, 1844) ukazuje, že kořeny polynomů s celočíselnými koeficienty se nedají příliš dobře aproximovat racionálními čísly.

Buď n přirozené číslo a buď P(x) polynom n-tého stupně s celočíselnými koeficienty. Je-li α kořen tohoto polynomu, který není racionálním číslem, existuje konstanta c (závislá jen na polynomu P) tak, že pro všechna celá p,q, $q > 0$ je

$$|\alpha - p/q| \geq \frac{c}{q^n} .$$

N á v o d.

(i) Stačí předpokládat, že α je reálné a tedy iracionální.

(ii) Existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - \alpha| < \delta$ je $P(x) \neq 0$.

(iii) Buďte p,q celá, $q > 0$. Není-li $|\alpha - p/q| \geq \delta \geq \frac{\delta}{q^n}$, je $0 \neq P\left(\frac{p}{q}\right) = P\left(\frac{p}{q}\right) - P(\alpha) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) P'(\xi)$, kde

$0 < |\xi - \alpha| < \delta$.

Odtud $\frac{1}{q^n} \leq \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$,

kde $M = \sup_{|x-\alpha|<\delta} |P'(x)| > 0$.

(b) Poznámka. V roce 1955 ukázal Roth, že za předpokladů Liouvilleovy věty lze pro každé $\varepsilon > 0$ nalézt konstantu $c > 0$ (závislou jen na P a ε) tak, že vždy je $|\alpha - p/q| \leq \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$.

46.5 Chinčinova věta.

(a) V 46.2 jsme ukázali, "jak mnoho" ve smyslu kategorií je reálných čísel, které mají jisté vlastnosti vzhledem k aproximaci racionálními čísly. Ukážeme nyní, jak je to s Lebesgueovou mírou těchto množin.

(b) Věta (Chinčin). Buď $\varphi(x)$ funkce definovaná na intervalu $\langle 1, +\infty)$, $\varphi(x) \geq 2$. Nechť řada $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q)}$ konverguje.

Potom existuje množina $S \subset E_1$ Lebesgueovy míry nula tak, že ke každému α, $\alpha \notin S$ můžeme nalézt kladnou konstantu c (závislou jen na α) takovou, že pro všechna celá p,q, $q > 0$ je $|\alpha - p/q| \geq \frac{c}{q\varphi(q)}$.

N á v o d.

(i) Nechť pro každé přirozené q je S_q množina těch

1014-7781

$\alpha \in \langle 0,1\rangle$ pro něž pro vhodné celé p je $(*)$.

(ii) $\lambda_1(S_q) = \frac{2}{\varphi(q)}$.

(iii) Buď $S = \bigcap_{Q=1}^{\infty} \bigcup_{q=Q}^{\infty} S_q$. Potom $\lambda_1(S) = 0$ a S splňuje požadavky věty.

(c) Lze ukázat (důkaz je velmi složitý), že je-li φ rostoucí a řada $\sum_{\varphi=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q)}$ diverguje, existuje množina M Lebesgueovy míry nula tak, že pro každé $\alpha \notin M$ má nerovnost $(*)$ nekonečně mnoho řešení v celých nesoudělných p, q, $q > 0$.

46.6 **Cvičení.**

(a) Vyšetřete jednostranné derivace Riemannovy funkce. Vyšetřete také případ, když klademe funkční hodnotu v racionálním bodě p/q místo $\frac{1}{q}$ rovnu $\frac{1}{q^{\alpha}}$, $\alpha \in E_1$. (Vyšetřete i spojitost, resp. existenci Riemannova integrálu takové funkce!)

(b) Nechť jsou splněny předpoklady Chinčinovy věty pro funkci φ. Buď $f(x) = 0$ pro x iracionální, $f(x) = \frac{1}{q\varphi(q)}$ pro $x = \frac{p}{q}$, p,q celá nesoudělná, $q > 0$. Ukažte, že f má konečnou variaci na intervalu $\langle 0,1\rangle$ a ukažte, že je-li x iracionální, $x \in M_{\varphi}$, potom f' buď neexistuje nebo není vlastní. (Použitím věty o derivaci funkce s konečnou variací odtud plyne jiný důkaz Chinčinovy věty.)

46.7 **Problém.**

(a) Úlohu aproximovat jedno reálné číslo čísly racionálními lze zobecnit takto: Buďte Θ_{ij} reálná čísla, $i=1,2,\dots,r$, $j = 1,2,\dots,s$. Ptejme se, jak "malé" mohou být současně (tj. pro $i=1,2,\dots,r$) výrazy $T_i = |\Theta_{11}x_1 + \Theta_{12}x_2 + \dots + \Theta_{1s}x_s - y_1|$, kde $x_1,x_2,\dots,x_s$, $y_1,y_2,\dots,y_r$ jsou celá čísla, která nejsou současně rovna nule. Analogií Dirichletovy věty je následující Kroneckerova věta.

(b) Pro každé přirozené t existují celá čísla $x_1,x_2,\dots,x_s$, $y_1,y_2,\dots,y_r$ tak, že

$$|T_i| < t^{-\frac{s}{r}}, \quad i = 1,2,\dots,r, \quad 0 < \max |x_j| \le t.$$

1014-7781

N á v o d. Postupujte analogicky jako v 46.1.b: uvažujte v E_r body o souřadnicích $\Theta_{i1}m_1 + \dots + \Theta_{is}m_s$, $i = 1,2,\dots,r$ "posunuté" do jednotkové krychle, kde $m_j = 0,1,\dots,t$.

(c) Klademe-li v Kroneckerově větě $s = 1$, dostaneme tzv. simultánní aproximace: Jsou-li dána čísla $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_r$ a přirozené t, existuje přirozené q a celá čísla $p_1,p_2,\dots,p_r$ tak, že $\left|\Theta_i - \frac{p_i}{q}\right| \leq \frac{1}{qt^{1/r}} \leq \frac{1}{q^{1+1/r}}$, $i = 1,2,\dots,r$.

Můžeme klásti otázku podobně jako ve 46.1.d. Výsledky jsou do jisté míry analogické. Analogicky jako v 46.5.b ukažte Chinčinovu větu v tomto obecném tvaru:

Buď $\varphi(x)$ neklesající kladná funkce definovaná na intervalu $(0,+\infty)$ a nechť $\varphi(x) \geq 2$. Nechť řada $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q)}$ konverguje. Potom existuje množina $R \subset E_r$ Lebesgueovy míry nula tak, že je-li $\Theta = [\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_r] \in E_r \setminus R$, existuje konstanta c (závislá jen na Θ) tak, že pro všechna celá $p_1,p_2,\dots,p_r$, $q > 0$ je

$$|\Theta_i - p_i/q| \geq \frac{c}{q\varphi(q)}, \quad i = 1,2,\dots,r.$$

Poznámka. Věty uváděné v první části tohoto tématu patří do tzv. teorie diofantických aproximací (viz např. krásnou knihu J.W.S.Cassels: An Introduction to Diophantine Approximation).

B. TRANSCENDENTNÍ ČÍSLA

46.8 **Cvičení.**

(a) Reálná čísla obvykle dělíme pouze na čísla racionální a iracionální. Ukažte, že pro přirozené n je $\sqrt{n}$ buď číslo přirozené nebo iracionální.

N á v o d. Nechť $\sqrt{n} = p/q$, kde p,q jsou přirozená nesoudělná čísla, $q > 1$. Buď A přirozené, $A < \sqrt{n} < A + 1$. Potom $\sqrt{n} = \frac{nq - Ap}{p - Aq}$, $0 < nq - Ap < p$, $0 < p - Aq < q$, což je spor.

1014-7781

Poznámka. Zobecněte předchozí tvrzení pro $\sqrt[k]{n}$!

(b) Reálná čísla však můžeme rozdělit ještě podle následujícího hlediska:

Definice. Říkáme, že reálné nebo komplexní číslo α je algebraické, existuje-li polynom $P(x)$ stupně alespoň prvého s celočíselnými koeficienty tak, že $P(\alpha) = 0$. V opačném případě nazýváme α transcendentním číslem.

(c) Ukažte, že:

(i) Každé racionální číslo je algebraické.

(ii) Množina algebraických čísel je spočetná.

(iii) Množina transcendentních čísel je nespočetná a tedy (Cantor, 1874) existují transcendentní čísla.

(d) (Liouville, 1844). Číslo $\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{m!}}$ je transcendentní.

N á v o d. Je-li $q = 2^{m!}$, existuje celé p tak, že $|\alpha - p/q| < \frac{1}{2^{(m+1)!}} = \frac{1}{q^{m+1}}$. Odtud plyne transcendentnost podle 46.3. Iracionalitu lze dokázat jako v 46.2.c (iii).

(e) Naproti tomu (uvedeno bez důkazu) existují transcendentní čísla α, pro něž nerovnost $|\alpha - p/q| > \frac{1}{4q^2}$ je splněna pro všechna celá p,q. Podobnou vlastnost má číslo 0,123456789101112... .

$\boxed{46.9}$ Transcendentnost e.

(a) Studium transcendentních čísel je velmi obtížné. Není například doposud známo, je-li Eulerova konstanta (viz 45.6) transcendentní. Zaměříme se proto pouze na vyšetření iracionality, případně transcendence čísel e a π. Tyto důkazy hrály historicky velmi důležitou úlohu.

(i) Číslo e je iracionální (Fourier, 1815).

N á v o d. Nechť $e = p/q$, p,q přirozené. Je
$$\frac{1}{q!} < e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{q+2}{q+1},$$
což je spor.

(ii) Číslo π je iracionální.

N á v o d. Je-li f polynom a $F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(IV)}x - \dots$ je $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\, dx = F(0) + F(\pi)$.

Je-li nyní $\pi = p/q$ s přirozenými p,q, n přirozené, buď

1014-7781

$f(x) = \frac{1}{n!} q^n x^n (\pi - x)^n$. Výpočtem zjistíme snadno, že $F(0) + F(\pi)$ je kladné celé číslo. Integrál lze ale odhadnout výrazem $\frac{\pi}{n!} \left(\frac{\pi^2 q}{4}\right)^n$, což pro velká n je menší než 1.

(iii) Číslo π nemůže být kořenem kvadratického polynomu P s celými koeficienty (speciálně číslo π^2 je iracionální).

N á v o d. Postupujte jako v (ii), ale volte

$f(x) = \frac{1}{n!} \Big(P(x)\big(P(x) - P(0)\big)\Big)^{2n}$.

(b)* Číslo e je transcendentní (Hermite, 1873).

N á v o d.

(i) Je-li f polynom, $F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots$, je

$$\int_0^x e^{-t} f(t)\, dt = F(0) - e^{-x} F(x).$$

(ii) Nechť $a_0 + a_1 e + \dots + a_n e^n = 0$, kde $a_0, \dots, a_n$ jsou celá, $a_0, a_n \neq 0$. Z (i) dostaneme, že

$F(0)e^k - F(k) = e^k \int_0^k e^{-t} f(t)\, dt$ $(k = 1, \dots, n)$, a tedy

$$a_0 F(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k F(k) = - \sum_{k=1}^{n} a_k e^k \int_0^k e^{-t} f(t)\, dt. \qquad (*')$$

(iii) Buď $f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} \prod_{k=1}^{n} (x - k)^p$, kde p je prvočíslo, $p > |a_0|$, $p > n$. Ukažte, že $F(0)$ je celé číslo, které není dělitelné p; $F(1), F(2), \dots, F(n)$ jsou celá čísla dělitelná p (použijte Leibnizovy formule pro výpočet derivací součinu dvou funkcí).

(iv) Platí $|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} \left(n^{n+1}\right)^p$ pro $x \in \langle 0, n \rangle$.

Ve výrazu $(*')$ je dle (iii) vlevo celé číslo nedělitelné p, tedy celé číslo různé od nuly, výraz vpravo je pro dostatečně velká p v absolutní hodnotě menší než 1, což je spor.

46.10 **Poznámky.**

(a) V roce 1882 dokázal Lindemann, že číslo π je transcendentní a tím vlastně i nemožnost rektifikace kružnice a kvadratury kruhu (k tomu viz V. Kořínek, Základy algebry, § 52). Důkaz je v základě podobný důkazu transcendence e, ale využívá řady vlastností algebraických (komplexních) čísel a vztahu $e^{\pi i} = -1$.

(b) Lze dokázat obdobně větu podstatně silnější (Lindemann, Weierstrass): Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ navzájem různá algebraická čísla, $a_1, a_2, \dots, a_n$ algebraická čísla, která nejsou současně rovna nule, je $a_1 e^{\alpha_1} + \dots + a_n e^{\alpha_n} \neq 0$. V této větě je obsažena jak transcendence e $(e.e - e^2 = 0)$ tak i transcendence π $(e^{\pi i} + 1 = 0)$, tak i transcendence přirozených logaritmů algebraických čísel různých od jedné.

(c) Dlouho neřešený tzv. sedmý Hilbertův problém je formulován jako následující tvrzení (dokázané až v roce 1932 A.O. Gelfondem): Jsou-li a, b algebraická čísla, $a \neq 0, 1$, b iracionální, je a^b transcendentní.

Z této věty například plyne, že dekadické logaritmy všech racionálních čísel jsou buď čísla racionální nebo transcendentní. Elementární (ale složitý) důkaz, spočívající na Rolleově větě (pro reálná a, b) je v knize: Gelfond, Linnik: Elementary methods in analytic number theory (existuje ruský překlad).

Zájemce o hlubší studium teorie čísel odkazujeme na skripta B. Novák, Vybrané partie z teorie čísel, SPN Praha, 1972.

T É M A 47

Rozšiřování funkcí

Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory. Pro $X \subset P$ buď $\mathcal{F}(X)$ nějaký systém funkcí definovaných na X s hodnotami v Q takový, že je-li $Y \subset X$, $f \in \mathcal{F}(X)$, potom $f|Y \in \mathcal{F}(Y)$. Buď $f : D \subset P \longrightarrow Q$, $f \in \mathcal{F}(D)$ taková, že existuje $\bar{f} : P \longrightarrow Q$ s vlastnostmi

(i) $\bar{f}|D = f$,

(ii) $\bar{f} \in \mathcal{F}(P)$.

V případě, že taková funkce $\bar{f}$ existuje, budeme říkat, že $\bar{f}$ je rozšíření funkce f v systému $\mathcal{F}$ z množiny D.

A. ROZŠIŘOVÁNÍ SPOJITÝCH FUNKCÍ

47.1 Cvičení. Buď (P,ρ) interval $\langle 0,1 \rangle$ s eukleidovskou metrikou, (Q,σ) bude i v celém oddíle E_1. Ukažte na příkladech, že obecně nemusí existovat rozšíření v systému spojitých a omezených funkcí z množiny $(0,1)$.

47.2 Tietzeova věta. Buď $A \subset P$ uzavřená množina. Potom existuje rozšíření $\bar{f}$ každé funkce f v systému spojitých a omezených funkcí z množiny A a navíc

$$\sup_{x \in A} |f(x)| = \sup_{x \in P} |\bar{f}(x)| .$$

N á v o d. Je-li $0 \leq f \leq 1$, definujte

1014-7781

$$\bar{f} : p \longmapsto \begin{cases} \inf\limits_{x \in A} \left\{ f(x) + \dfrac{\rho(p,x)}{\operatorname{dist}(p,A)} - 1 \right\} & \text{pro } p \in P \setminus A, \\ f(p) & \text{pro } p \in A \end{cases}$$

a ukažte, že takto definovaná funkce $\bar{f}$ má všechny požadované vlastnosti.

47.3 Poznámka. Na příkladech ukažte, že takových rozšíření, jejichž existence je dokázána v Tietzeově větě, existuje k dané funkci obecně více.

47.4 Věta. Buď $A \subset P$. Nechť pro každou spojitou a omezenou funkci f na A existuje rozšíření $\bar{f}$ v systému spojitých a omezených funkcí z množiny A. Potom množina A je uzavřená.

N á v o d. Nechť existuje posloupnost $\{x_n\} \subset A$, $x_0 \notin A$ tak, že $\rho(x_{n+1}, x_0) < \rho(x_n, x_0)$ a $x_n \longrightarrow x_0$. Položme $M = \{\rho(x_n, x_0)\} \cup \{0\}$. Množina M je uzavřená v E_1 a existuje spojitá funkce (sestrojte ji!) $g : E_1 \longrightarrow E_1$ taková, že

(i) $g(\rho(x_n, x_0)) = \dfrac{1}{n\pi}$,

(ii) $g(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$.

Položme $f : x \longmapsto \sin \dfrac{1}{g(\rho(x, x_0))}$ pro $x \in A$. Pro tuto funkci neexistuje rozšíření v systému spojitých a omezených funkcí z množiny A.

B. ROZŠIŘOVÁNÍ STEJNOMĚRNĚ SPOJITÝCH, LIPSCHITZOVSKÝCH A HÖLDEROVSKÝCH FUNKCÍ

47.5 Věta. Buď (P, ρ) metrický prostor a D jeho hustá podmnožina. Nechť f je stejnoměrně spojitá funkce na D. Potom existuje právě jedno rozšíření $\bar{f}$ v systému stejnoměrně spojitých funkcí z množiny D. Dokažte!

N á v o d. Užijte BC-podmínku pro konvergenci a úplnost E_1.

47.6 Cvičení.

(a) Dokažte analogické tvrzení větě 47.5 pro zobrazení f na husté množině D prostoru (P,ρ) s hodnotami v úplném metrickém prostoru (Q,σ).

(b) Pokuste se dokázat "obrácení" předcházejícího tvrzení, tj.:

Buď D hustá podmnožina metrického prostoru (P,ρ). Nechť pro každé stejnoměrně spojité zobrazení $f: D \longrightarrow Q$ existuje rozšíření $\bar{f}$ v systému stejnoměrně spojitých funkcí z množiny D. Potom (Q,σ) je úplný metrický prostor.

47.7 Definice. Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory, $\alpha \in (0,1\rangle$. Říkáme, že zobrazení $f: P \longmapsto Q$ je α-hölderovské, jestliže existuje konstanta $K > 0$ tak, že pro všechna $x,y \in P$ platí $\sigma(f(x), f(y)) \leq K\,[\rho(x,y)]^{\alpha}$. Místo 1-hölderovské zobrazení říkáme také lipschitzovské zobrazení. Lipschitzovské zobrazení, pro které $K = 1$, nazýváme neexpansivní.

47.8 Poznámky.

(a) Lipschitzovským a α-hölderovským reálným funkcím je věnováno téma 14.

(b) Analogicky jako v tématu 14 je možno dokázat (pouze jednoduchým ověřením definic), že funkce z definice 47.7 jsou stejnoměrně spojité.

(c) V dalších odstavcích tohoto oddílu bude opět $Q = E_1$.

(d) Použijeme-li věty 47.2 (resp. 47.5), obdržíme spojité (resp. stejnoměrně spojité) rozšíření α-hölderovské funkce. V následujících odstavcích ukážeme existenci rozšíření dokonce v systému α-hölderovských funkcí z množiny D.

47.9 Rozšiřování lipschitzovských funkcí. Buď (P,ρ) metrický prostor a A jeho uzavřená podmnožina. Nechť f je omezená lipschitzovská funkce definovaná na A. Potom existuje rozšíření $\bar{f}$ v systému omezených lipschitzovských funkcí z množiny A takové, že navíc platí

(i) $\sup\limits_{x\in A} |f(x)| = \sup\limits_{x\in P} |\bar{f}(x)|$,

(ii) $\sup\limits_{\substack{x,y\in A\\ x\neq y}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)} = \sup\limits_{\substack{x,y\in P\\ x\neq y}} \dfrac{|\bar{f}(x)-\bar{f}(y)|}{\rho(x,y)}$.

1014-7781

N á v o d. Definujte funkci

$$F : x \longmapsto \sup_{y \in A} \left\{ f(y) - \rho(x,y) \sup_{\substack{u,v \in A \\ u \neq v}} \frac{|f(u) - f(v)|}{\rho(u,v)} \right\}$$

a položte

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{pro } x \in P, \text{ pro něž } \sup_{y \in A} |f(y)| \geq |F(x)|, \\ \sup |f(y)|, & \text{je-li } \sup |f(y)| < F(x), \\ -\sup |f(y)|, & \text{je-li } -\sup |f(y)| > F(x). \end{cases}$$

47.10 Rozšiřování α-hölderovských funkcí.

Buď A uzavřená podmnožina metrického prostoru (P,ρ) a f omezená α-hölderovská funkce na A. Potom existuje rozšíření $\bar{f}$ v systému omezených α-hölderovských funkcí z množiny A takové, že

(i) $\sup_{x \in A} |f(x)| = \sup_{x \in P} |\bar{f}(x)|$,

(ii) $$\sup_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho^{\alpha}(x,y)} = \sup_{\substack{x,y \in P \\ x \neq y}} \frac{|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)|}{\rho^{\alpha}(x,y)} .$$

N á v o d. Dokažte si tato tvrzení:

(a) Buď (P, ρ) metrický prostor, $\alpha \in (0,1)$. Položme

$$\sigma : [x,y] \longmapsto \rho^{\alpha}(x,y).$$

Potom (P, σ) je metrický prostor.

(b) Funkce f je α-hölderovská v (P,ρ), právě když je lipschitzovská v (P,σ).

C. ROZŠIŘOVÁNÍ VEKTOROVÝCH FUNKCÍ

47.11 Věta. Buď A uzavřená podmnožina metrického prostoru (P,ρ) a $f : A \longrightarrow E_n$ spojité a omezené zobrazení. Potom existuje rozšíření $\bar{f}$ v systému spojitých a omezených funkcí z množiny A.

N á v o d. Zobrazení f chápejte jako n-tici reálných funkcí a použijte 47.2.

47.12 Poznámka. V Tietzově větě bylo dokázáno, že navíc platí

$\sup_{x\in A} |f(x)| = \sup_{x\in P} |\bar{f}(x)|$. Pro vektorové funkce analogická rovnost s normami neplatí. Platí však jistá nerovnost. Odvoďte ji! Na příkladě ukažte, že neplatí analogie tvrzení z odstavce 47.9 pro vektorové funkce a systém omezených neexpansivních funkcí.

47.13 Věta. Buď $K = \overline{U(0,1)}$ jednotková koule v E_n a $f : K \longrightarrow E_n$ neexpansivní zobrazení. Potom existuje rozšíření $\bar{f}$ v systému neexpansivních zobrazení množiny K.

Návod. Definujte $r(x) = x$ pro $x \in K$, $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ pro $x \in E_n \setminus K$. Snadno se zjistí, že $r : E_n \longrightarrow K$ je neexpansivní zobrazení (nakreslete si obrázek v E_2!). Položte $\bar{f} : x \longmapsto f(r(x))$ pro $x \in E_n$.

47.14 Poznámka. Z důkazu v 47.13 bylo vidět, že jsme mohli E_n nahradit Hilbertovým prostorem. Není však možno Hilbertův prostor nahradit Banachovým prostorem. Platí následující tvrzení:

Buď K uzavřená koule Banachova prostoru B. Nechť libovolné neexpansivní zobrazení $f : K \longrightarrow B$ je možno rozšířit v systému neexpansivních zobrazení z K. Potom B je Hilbertův prostor.

47.15 Cvičení. Pomocí odstavce 47.13 dokažte větu o rozšiřování lipschitzovských zobrazení bez zvětšení konstanty lipschitzovskosti.

D. ROZŠIŘOVÁNÍ DIFERENCOVATELNÝCH FUNKCÍ

47.16 Lemma. Buď $b \in E_n$, $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(E_n)$ tak, že $\varphi \geq 0$, $\varphi(b) > 1$ a $\varphi(x) = 0$ pro $\|x - b\| > \varepsilon$. Dokažte!

47.17 Věta. Buď K kompaktní, G otevřená v E_n, $K \subset G$. Potom existuje $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(E_n)$ tak, že $\varphi = 1$ na K, $\varphi = 0$ na $E_n \setminus G$, $0 \leq \varphi \leq 1$ na E_n. Dokažte!

Návod. Ke každému $b \in K$ sestrojte podle 47.16 $\varphi_b \in \mathcal{C}^\infty(E_n)$ tak, aby $\varphi_b(b) > 1$, $\varphi_b = 0$ na $E_n \setminus G$. Položte $U_b = \{x ;\ \varphi_b(x) > 1\}$. Podle Borelovy věty existují $b_1, \dots, b_r$ tak, že $K \subset \bigcup_{k=1}^{r} U_{b_k}$. Položte $\varphi_0 = \sum_{k=1}^{r} \varphi_{b_k}$. Je $\varphi_0(x) > 1$

pro $x \in K$, $\varphi_0(x) = 0$ pro $x \in E_n \setminus G$. Buď $\psi : E_1 \longrightarrow E_1$ taková funkce, že $\psi(0) = 0$, $\psi(x) \leq 1$ pro $x \leq 1$, $\psi(x) = 1$ pro $x > 1$ a $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}(E_1)$. Funkce $\varphi = \psi * \varphi_0$ je hledaná funkce.

47.18 Věta. Buď f spojitá funkce na kompaktní množině $K \subset E_n$. Potom existuje funkce F, která je spojitá na E_n, shoduje se s f na K a má na $E_n \setminus K$ spojité derivace všech řádů.

N á v o d. Pomocí Weierstrassovy věty 30.7 sestrojte polynomy $P_1, P_2, \ldots$ tak, aby pro $Q_k = \max_{x \in K} |P_k(x)|$ bylo $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k < \infty$ a $f = \sum_{k=1}^{\infty} P_k$ na K. Buď $G_k = \left\{x;\ \mathrm{dist}(x,K) < \frac{1}{k}\right\}$, $H_k = \left\{x;\ |P_k(x)| < Q_k + 2^{-k}\right\}$.
Podle 47.17 existují φ_k tak, že $\varphi_k = 1$ na K, $\varphi_k = 0$ na $E_n \setminus (H_k \cap G_k)$. Položte $F = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k P_k$. Potom $|\varphi_k P_k| < Q_k + 2^{-k}$ na E_n, tedy F je spojitá. Buď $x_0 \in E_n \setminus K$. Pro velká k je $x_0 \in E_n \setminus \overline{G_k}$, tedy v okolí x_0 je $F = \sum_{k=1}^{k_0} \varphi_n P_n$ pro vhodné $k_0 \in N$.

47.19** Whitneyovo rozšíření: Buď $K \subset E_n$ kompaktní, $m \in N \cup \{0\} = N^*$. Nechť α je spojitá konvexní funkce zobrazující $\langle 0, +\infty)$ do $\langle 0, +\infty)$ taková, že $\alpha(0) = 0$. Pro všechna $k = [k_1, \ldots, k_n] \in N^* \times \ldots \times N^*$, $k_1 + \ldots + k_n = |k| \leq m$, buďte f^k spojité funkce definované na K takové, že

$$\left| \sum_{|k| \leq m} \frac{(z - x)^k}{k!} f^k(x) - \sum_{|k| \leq m} \frac{(z-y)^k}{k!} f^k(y) \right| \leq \alpha(\|x-y\|)(\|x-z\|^n + \|y-z\|^m)$$

pro všechna $x, y \in K$, $z \in E_n$ (kde $k! = k_1! k_2! \ldots k_n!$ a $a^k = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}$ pro $a = [a_1, \ldots, a_n] \in E_n$, $k \in N^* \times \ldots \times N^*$).
Potom existuje $g \in \mathcal{C}^m(E_n)$ tak, že

$$\frac{\partial^s g(x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} = f^s(x) \quad (x \in K,\ s = [s_1, \ldots, s_n],\ |s| \leq m).$$

Důkaz je uveden např. v knize B. Malgrange, Ideals of differentiable functions - ruský překlad Moskva, 1968.

E. ROZŠIŘOVÁNÍ FUNKCÍ Z JINÝCH SYSTÉMŮ

47.20 Rozšiřování monotonních funkcí. Viz odstavce 16.15 a 16.16 v tématu o monotonních funkcích.

47.21 Rozšiřování periodických funkcí. Viz odstavec 17.8 v tématu o periodických funkcích.

F. ROZŠIŘOVÁNÍ SPOJITÝCH FUNKCÍ NA BAIREOVSKÉ FUNKCE

V tomto oddíle uvedeme poněkud jiné věty o rozšiřování. Rozšíření spojité funkce nebude sice funkce spojitá, ale bude mít "rozumné" vlastnosti.

47.22 Věta. Buď $M \subset E_1$ a $f : M \longrightarrow E_1$ spojitá a omezená funkce. Potom existuje $\bar{f} : E_1 \longrightarrow E_1$ taková, že platí:

(i) $\bar{f} \in B_1(E_1)$,

(ii) $\bar{f}|M = f$.

N á v o d. Položte

$$\mathring{f} : x \mapsto \begin{cases} \inf \{\sup f(y);\ y \in (x-\delta, x+\delta) \cap M\} & \text{pro } x \in \bar{M}, \\ 0 & \text{pro } E_1 \setminus \bar{M}. \end{cases}$$

Použijte nyní 12.10.

47.23 Poznámky.

(a) Všimněte si, že množina M ve větě 47.22 nemá žádné speciální vlastnosti.

(b) Pokuste se dokázat analogické tvrzení v metrických prostorech.

(c) Věta 47.22 je speciálním případem obecné věty uvedené v knize K. Kuratowski, Topology I (ruský překlad z r. 1966), která říká, že libovolnou funkci z Baireovy třídy $B_n(M)$ lze rozšířit na funkci z třídy $B_{n+1}(E_1)$.

T É M A 48

Konvergence posloupnosti funkcí

A. OBECNÁ KONVERGENCE

48.1 Axiomy konvergence. Nechť X je neprázdná množina, buď X_∞ množina všech posloupností prvků z X. Nechť dále $D \subset X_\infty$ je jistá třída posloupností (kterým říkáme konvergentní) a nechť $LIM : D \to X$ je zobrazení D do X. Dvojici (D, LIM) nazýváme konvergencí na X, jestliže platí:

(i) Je-li $x_n = x \in X$ pro každé $n \in N$, potom $\{x_n\} \in D$ a $LIM\, x_n = x$ (místo $LIM \{x_n\}$ píšeme pouze $LIM\, x_n$).

(ii) Je-li $\{x_n\} \in D$, $LIM\, x_n = x$, potom je $\{x_{k_n}\} \in D$ ($\{x_{k_n}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$) a $LIM\, x_{k_n} = x$.

Uvažujte též následující axiomy:

(iii) Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ nekonverguje k x (co se tím rozumí?), potom z ní můžeme vybrat posloupnost, jejíž žádná podposloupnost nekonverguje k x.

(P1) Jestliže $\{x_n\} \in D$, $LIM\, x_n = x$, $k \in N$, $y_n = x_{n+k}$, potom $\{y_n\} \in D$, $LIM\, y_n = x$.

(P2) Jestliže $\{x_n\} \in D$, $LIM\, x_n = x$, $\{y_n\} \in X_\infty$, $k \in N$, $x_n = y_{n+k}$, potom $\{y_n\} \in D$, $LIM\, y_n = x$.

(M) Jestliže $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in D$, $\mathrm{LIM}\, x_n = \mathrm{LIM}\, y_n = x$,

potom $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$ leží v D a konverguje k x.

$\boxed{48.2}$ Cvičení. Ukažte, že

(a) (i), (ii) $\not\Longrightarrow$ (iii),

(b) (i), (ii) $\Longrightarrow$ (P1),

(c) (i), (ii) $\not\Longrightarrow$ (P2),

(d) (i), (ii), (iii) $\Longrightarrow$ (P2) & (M),

(e) (i), (ii) $\not\Longrightarrow$ (M).

N á v o d. Použijte příkladů z 48.3.

(f) Zkoumejte též další ze vzájemných vztahů uvedených axiomů.

$\boxed{48.3}$ Příklady. V následujících příkladech zkoumejte splnění jednotlivých axiomů:

(a) X je dvoubodová množina, $X = \{a, b\}$; D sestává pouze z konstantních posloupností; $\mathrm{LIM}\,\{a, a, \dots\} = a$, $\mathrm{LIM}\,\{b, b, \dots\} = b$.

(b) X je dvoubodová množina, $X = \{a, b\}$; D obsahuje posloupnosti, které jsou od určitého indexu konstantní; LIM definujte obdobně jako v (a).

(c) $X = E_1$; D sestává z konvergentních posloupností; LIM je limita posloupnosti reálných čísel.

(d) $X = E_1$; D sestává ze všech shora omezených posloupností;

$\mathrm{LIM} : a_n \longmapsto \limsup a_n$.

(e) $X = E_1$; $\{x_n\} \in D$, právě když posloupnost $\{x_n\}$ je konvergentní v "obvyklém smyslu" a $x_n \leq \lim x_n$ pro každé $n \in N$; LIM je "obvyklá limita".

(f) $X = E_1$; $\{x_n\} \in D$, právě když posloupnost $\{x_n\}$ je konvergentní v "obvyklém smyslu" a $x_n \leq \lim x_n$ až na konečně mnoho indexů; LIM je "obvyklá limita".

(g) $X = E_1$; D sestává ze všech posloupností konvergujících k nule; LIM je "obvyklá limita".

$\boxed{48.4}$ Lineární konvergence. Buď X lineární (vektorový) prostor.

Konvergenci $\mathrm{LIM} : D \subset X_\infty \longrightarrow X$, která splňuje (i) a (ii), nazýváme <u>lineární</u>, jestliže platí:

(L1) $\left[\{x_n\}, \{y_n\} \in D\right] \Longrightarrow \left[\{x_n + y_n\} \in D \text{ et } \mathrm{LIM}\,(x_n + y_n) = \right.$

$\left. = \mathrm{LIM}\, x_n + \mathrm{LIM}\, y_n\right]$,

(L2) $\left[\{x_n\} \in D,\ c \in E_1\right] \Longrightarrow \left[\{cx_n\} \in D \text{ et } \mathrm{LIM}\, cx_n = c.\mathrm{LIM}\, x_n\right]$.

$\boxed{48.5}$ <u>Cvičení.</u>

(a) Dokažte: $\{x_n\} \in D,\ x \in X \Longrightarrow \{x_n + x\} \in D$ et

$\mathrm{LIM}\,(x_n + x) = x + \mathrm{LIM}\, x_n$.

(b) Zkoumejte, které z konvergencí v 48.3 jsou lineární (X musí být vektorový prostor!).

(c) Uveďte další příklady lineárních konvergencí.

(d) Uvažujte následující axiom a jeho vztah k axiomům (L1) a (L2):

(L3) $\{x_n\} \in D,\ c_n \in E_1,\ c_n \longrightarrow c \Longrightarrow \{c_n x_n\} \in D$ et

$\mathrm{LIM}\, c_n x_n = c\ \mathrm{LIM}\, x_n$.

B. KONVERGENCE POSLOUPNOSTI FUNKCÍ

$\boxed{48.6}$ <u>Základní definice.</u> Nechť f_n, f jsou funkce definované na množině $P \subset E_1$. Řekneme, že

(a) posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje <u>bodově</u> k funkci f <u>na množině P</u>, jestliže pro každé $t \in P$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ (značíme $f_n \longrightarrow f$ na P),

(b) posloupnost $\{f_n\}$ konverguje <u>stejnoměrně</u> k funkci f <u>na P</u>, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $t \in P$ platí $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ (značíme $f_n \rightrightarrows f$ na P),

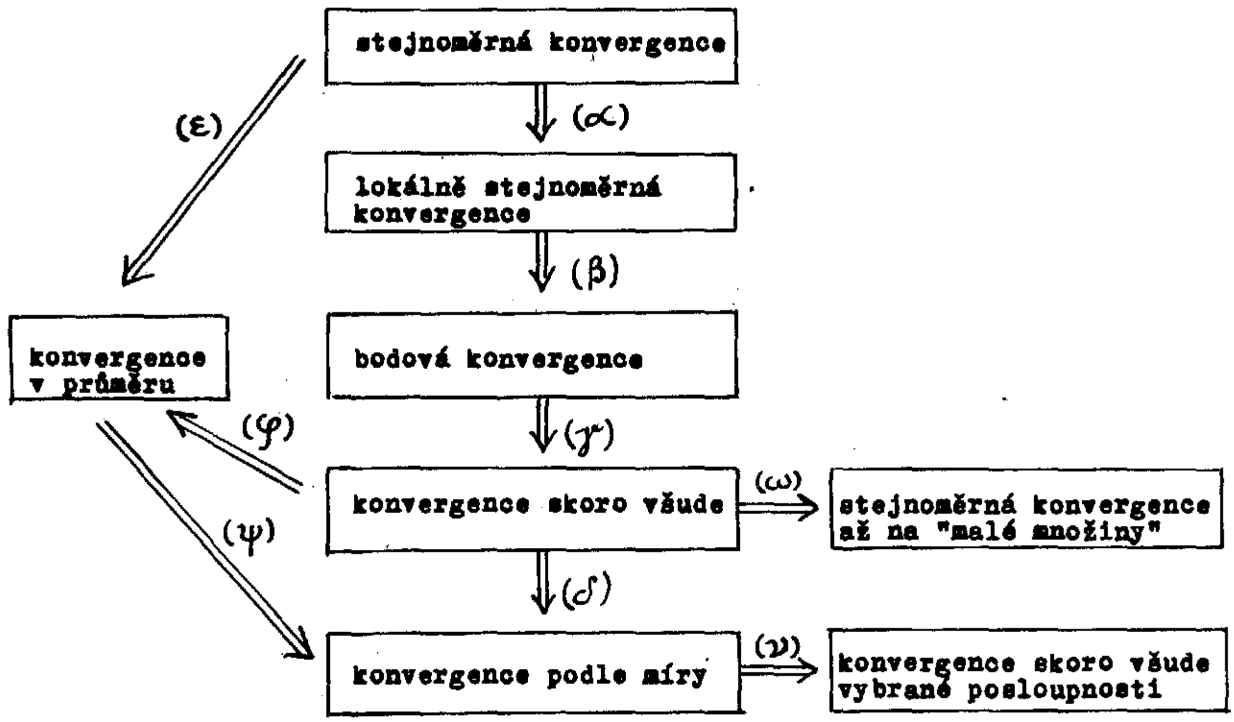
(c) posloupnost $\{f_n\}$ konverguje <u>lokálně stejnoměrně</u> k f <u>na P</u>, jestliže pro každou kompaktní množinu $K \subset P$ je $f_n \rightrightarrows f$ na K (značíme $f_n \overset{\text{lok}}{\rightrightarrows} f$ na P),

(d) posloupnost $\{f_n\}$ konverguje <u>skoro všude</u> k f <u>na P,</u> jestliže existuje množina $M \subset P$ nulové míry tak, že $f_n \longrightarrow f$ na $P \setminus M$ (značíme $f_n \xrightarrow{s.v.} f$ na P),

(e) posloupnost $\{f_n\}$ konverguje <u>podle míry</u> k f <u>na P,</u> jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\lambda}_1\{x \in P \,;\; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$, (značíme $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ na P),

(f) posloupnost $\{f_n\} \subset \mathscr{L}(P)$ konverguje <u>v průměru</u> k funkci $f \in \mathscr{L}(P)$ <u>na P,</u> jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \int_P |f_n - f| = 0$ (značíme $f_n \xrightarrow{\mathscr{L}_1} f$ na P).

48.7 <u>Vztahy mezi jednotlivými konvergencemi.</u> Schematicky je možno znázornit příslušné vztahy následující tabulkou:



(a) Implikace α, β, γ, δ jsou přímým důsledkem definic.

(b) Implikace (ε) platí za předpokladu, že P je množina konečné míry a že $f_n \in \mathscr{L}(P)$ pro každé $n \in N$ (použijte Lebesgueovu větu, viz též $[\pi]$, věta 20, str. 20).

(c) Implikace (φ) platí kupř., jsou-li splněny předpoklady

1014-7781

Lebesgueovy věty (viz $[\pi]$, věta 19, str. 20).

(d) Implikace (ω) je tzv. Jegorovova věta (viz [J II], kap.II, § 2 či $[\pi]$, dodatek, odstavec D.II).

(e) Implikace (ν) - viz např. [J II], kap. III, § 5, věta 68.

(f) Vyslovte též Diniho větu, která udává, za jakých podmínek z bodové konvergence plyne stejnoměrná konvergence.

48.8 Implikace (ψ).

(a) Buď S množina všech tříd ekvivalentních měřitelných funkcí definovaných na množině $P \subset E_1$ konečné míry (říkáme, že $f \doteq g$, jestliže $f(t) = g(t)$ pro skoro všechna $t \in P$). Pro $f, g \in S$ položme

$$\rho(f,g) = \int_P \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|}\, dt.$$

Ukažte, že (S, ρ) je metrický prostor.

N á v o d. Při ověření trojúhelníkové nerovnosti použijte vztah $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$ pro $a, b \in E_1$.
Viz též $[\pi]$, př. 8.18.

(b) Buď $P \subset E_1$ množina konečné míry, f_n, f měřitelné funkce na P. Potom $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ na P, právě když $\lim \rho(f_n, f) = 0$.

N á v o d. Buď $\varepsilon > 0$ a označte $A_n = \{x \in P;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Potom

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\lambda_1(A_n) \le \int_{A_n} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \le \int_P \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} =$$

$$= \int_{A_n} \ldots + \int_{P \setminus A_n} \ldots \le \lambda_1(A_n) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\lambda_1(P).$$

(c) Důkaz implikace (ψ). Buďte $f_n \in \mathcal{L}(P)$, $\lambda_1(P) < +\infty$. Nechť $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1} f$ na P. Potom $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ na P.

N á v o d. Plyne z nerovnosti

$$\int_P \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \leq \int_P |f_n - f|$$

a z předešlého 48.8.b.

48.9 Příklady.

(a) Existuje posloupnost funkcí, která konverguje lokálně stejnoměrně na P a nekonverguje stejnoměrně na P. Udejte příklady! (Může být v tomto případě množina P kompaktní?)

(b) Udejte příklad posloupnosti funkcí, která konverguje bodově na intervalu $(0,1)$ a nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu $(a,b) \subset (0,1)$.

N á v o d. Uvažte, že Riemannova funkce je první Baireovy třídy.

(c) Existuje posloupnost funkcí, která konverguje podle míry na E_1 a nekonverguje skoro všude na E_1.

N á v o d. Pro $m,n \in N$ a $x \in E_1$ položte

$$f_m^n(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } \frac{m-1}{n} \leq x \leq \frac{m}{n}, \\ 0 & \text{v ostatních bodech.} \end{cases}$$

Uvažujte posloupnost $f_1^1, f_1^2, f_2^2, f_1^3, f_2^3, \dots$.

(d) Existuje posloupnost funkcí, která konverguje bodově a nekonverguje v průměru.

N á v o d. Použijte známé příklady k Lebesgueově větě při vynechání předpokladu o existenci integrabilní majoranty.

(e) Ukažte, že předpoklad konečnosti míry v 48.8.c není podstatný.

48.10 Cvičení. Zkoumejte jednotlivé konvergence ze 48.6 ve smyslu definic 48.1 a 48.4.

C. METRICKÁ KONVERGENCE

48.11 Definice. Buď X neprázdná množina a (D,LIM) konvergence na X. Řekneme, že konvergence LIM je metrická na X, jestliže existuje metrika ρ na X taková, že pro všechny posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ a $x_0 \in X$ platí:

$\{x_n\} \in D$, $LIM\ x_n = x_0$, právě když $\rho(x_n, x_0) \longrightarrow 0$.

48.12 **Příklady.**

(a) Konvergence podle míry je metrická na množině tříd ekvivalentních měřitelných funkcí S (viz 48.8).

(b) Buď $J \subset E_1$ interval. Potom bodová konvergence není metrická na množině $\mathcal{S}$ všech funkcí definovaných na J.

N á v o d. Proveďte sporem, buď $(\mathcal{S}, \rho)$ příslušný metrický prostor. Nechť $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ značí množinu všech spojitých funkcí na J. Potom $\overline{\mathcal{C}}$ (uzávěr v $(\mathcal{S}, \rho)$) je právě B_1 (funkce prvé Baireovy třídy - viz téma 12, oddíl A). Dále $\overline{B_1} = B_2 \neq B_1 = \overline{\mathcal{C}}$, což je spor s tím, že uzávěr podmnožiny metrického prostoru je vždy uzavřená množina.

(c) Buď K konečná množina. Potom bodová konvergence je metrická na množině $\mathcal{S}$ všech reálných funkcí definovaných na množině K.

N á v o d. Položte $\rho(f,g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|$ pro $f, g \in \mathcal{S}$. Potom $(\mathcal{S}, \rho)$ je metrický prostor s požadovanými vlastnostmi.
<u>Poznámka.</u> Je-li n počet prvků množiny K, je prostor $(\mathcal{S}, \rho)$ isomorfní s E_n.

(d) Konvergence skoro všude není metrická na množině $\mathcal{S}$ všech funkcí definovaných na E_1.

N á v o d. Proveďte důkaz sporem. Sestrojte posloupnost funkcí, která konverguje k nule podle míry, ale nekonverguje k nule skoro všude (viz 48.9.c). Potom použijte větu 48.7.e, podle které z této posloupnosti můžete vybrat posloupnost konvergující k 0 skoro všude v E_1.

(e) Buď X množina všech omezených funkcí na množině P. Dokažte, že stejnoměrná konvergence je metrická na X.

N á v o d. Pro $f, g \in X$ položte $\rho(f,g) = \sup_{t \in P} |f(t) - g(t)|$. Potom (X, ρ) je požadovaný metrický prostor $\big((X, \rho)$ je dokonce úplný$\big)$.

(f) Buď $X = \mathcal{L}(P)$ množina všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí na P. Na X zaveďme rovnost ve smyslu skoro všude. Potom konvergence v průměru je metrická na X.

1014-7781

N á v o d. Pro $f,g \in X$ položte $\varrho(f,g) = \int_P |f - g|$.

48.13* <u>Hlubší studium prostoru (S, ϱ).</u>

(a) S je lineární (vektorový) prostor (rovnost skoro všude!).

(b) S je úplný metrický prostor.

N á v o d. Buď $\{f_n\}$ cauchyovská posloupnost v (S, ϱ). Analogicky jako v 48.7.e ukažte, že existuje vybraná posloupnost $\{f_{n_i}\}$ a množiny $A_i \subset P$ tak, že $\lambda_1(A_i) < 2^{-i}$ a $|f_{n_i}(s) - f_{n_{i+1}}(s)| < 2^{-i}$ pro $s \in P \setminus A_i$.
Položte $F_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$. Potom $\lambda_1(F_k) < 2^{-k+1}$ a pro $s \in P \setminus F_k$ platí $|f_{n_i}(s) - f_{n_j}(s)| \leq \sum_{m=k}^{\infty} |f_{n_m}(s) - f_{n_{m+1}}(s)| < 2^{-k+1}$, $(j > i \geq k)$. Odtud plyne existence měřitelné funkce f na P tak, že $f_{n_i} \longrightarrow f$ s.v. na P. Podle 48.7.a (implikace $\mathcal{J}$) a 48.12.a je $\varrho(f_{n_i}, f) \longrightarrow 0$. Tedy libovolná cauchyovská posloupnost prostoru (S, ϱ) obsahuje konvergentní vybranou posloupnost (v konvergenci podle míry). Odtud plyne tvrzení.

(c) Prostor (S, ϱ) není normovatelný (tj. neexistuje norma $\|\cdot\|$ na S tak, že $\|f - g\| = \varrho(f,g)$ pro libovolné $f,g \in S$).

(d) <u>Definice.</u> Buď (X, ϱ) metrický prostor takový, že množina X je lineární (vektorový) prostor. Označme "+" : $X \times X \longrightarrow X$ a "." : $E_1 \times X \longrightarrow X$ jeho algebraické operace. Řekneme, že (X, ϱ) je <u>metrický lineární prostor</u>, jestliže operace "+" a "." jsou spojitá zobrazení na příslušných kartézských součinech prostorů.

(e) <u>Poznámka.</u> Uvědomte si, že ne každý metrický a lineární prostor je metrickým lineárním prostorem. (Stačí volit X jako množinu všech reálných čísel a ϱ jako diskrétní metriku!).

(f) (S, ϱ) je metrický lineární prostor.

(g)** Poznámka. Lineární normované prostory mají "hodně" otevřených konvexních množin, např. každá otevřená koule je taková množina. Metrické lineární prostory tuto vlastnost nemusí mít. Např. (S, ρ) obsahuje právě dvě konvexní otevřené množiny: $\emptyset$ a S.

Prostor (S, ρ) má celou řadu dalších "perverzních" vlastností. Např. jediným spojitým lineárním funkcionálem definovaným na S je nulová forma. V případě lineárního normovaného prostoru $(X, \|\ldots\|)$ se toto nemůže přihodit, neboť platí následující tvrzení: Pro každé $x \in X$ existuje spojitý lineární funkcionál f definovaný na X takový, že $f(x) = \|x\|$.

48.14 Poznámky

(a) Místo E_1 jsme mohli uvažovat obecné metrické prostory a místo Lebesgueovy míry v E_1 též abstraktní prostory s mírou.

(b) Lze též zavést obecnější konvergenci v průměru stupně p $(p \geq 1)$ vztahem $\lim_{n \to \infty} \int_P |f_n - f|^p = 0$. Místo $\mathcal{L}(P)$ pak dostaneme obecnější prostory $\mathcal{L}_p(P)$ - viz téma 49.

D. SYSTÉMY FUNKCÍ UZAVŘENÉ NA LIMITNÍ PŘECHODY

48.15 Definice. Buď $\mathcal{S}$ systém všech reálných funkcí definovaných na neprázdné množině $\Omega \subset E_1$. Nechť je na $\mathcal{S}$ definovaná konvergence ve smyslu odstavce 48.1. Řekneme, že množina $Y \subset \mathcal{S}$ je systém funkcí uzavřený vzhledem ke konvergenci LIM, jestliže $\mathrm{LIM}\,(D \cap Y_\infty) \subset Y$, tj. platí-li implikace: $\{f_n\} \subset D \cap Y_\infty$, $\mathrm{LIM}\, f_n = f \Longrightarrow f \in Y$.

Poznámka. Pojem výše definovaný je zobecněním definice systému uzavřeného vzhledem k bodové konvergenci - viz téma 12, odstavec 12.

48.16 Cvičení. Vypracujte cvičení z odstavců 12.13 a 12.15.b. Cvičení 12.13.a, 12.13.b, 12.13.c formulujte obecněji ve smyslu předcházející definice!

48.17 Cvičení. V těchto skriptech jste se setkali s mnoha systémy reálných funkcí a s mnoha typy konvergence. Můžete si - vcelku přirozeně - položit otázku, zda jsou jednotlivé třídy těchto funkcí uzavřeny na různé limitní přechody. Tak např. zjistěte, zda platí implikace:

(a) $f_n \in BV(\langle a,b\rangle)$, $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle \Longrightarrow f \in BV(\langle a,b\rangle)$,

(b) f_n poslospojité zdola (a,b), $f_n \nearrow f \Longrightarrow f$ polospojitá zdola,

(c) f_n polynomy na E_1, $f_n \overset{lok}{\rightrightarrows} f$ na $E_1 \Longrightarrow f$ polynom,

(d) f_n měřitelné v E_1, $f_n \longrightarrow f$ s.v. $\Longrightarrow f$ měřitelná.

Uvědomíte-li si, že v těchto skriptech uvádíme zhruba 40 tříd funkcí a 10 typů konvergencí, můžete vytvořit 400 otázek a jejich řešení si znázornit ve formě "hokejové tabulky". Zjistíte-li, že některé systémy nejsou uzavřené na jistý typ konvergence, můžete hledat některé doplňující podmínky, za jakých se uzavřenými stanou.

48.18 Poznámka. Definujme následující systémy:

r_0 = {systém všech reálných funkcí na $\langle 0,1\rangle$, které jsou zprava spojité v každém bodě $\langle 0,1)$},

j_0 = {systém všech reálných funkcí na $\langle 0,1\rangle$, jejichž body nespojitosti jsou pouze 1.druhu},

r_1 (resp. j_1) = {všechny bodové limity posloupností funkcí z r_0 (resp. j_0)},

r_2 (resp. j_2) = {bodové limity posloupností funkcí z r_1 (resp. j_1)}.

Lze dokázat, že $B_1 \subsetneqq r_1 \subsetneqq j_1$ (viz Coke S. Reed, Pointwise limits of sequences of functions, Fund. Math. LXVII, 1970, 183-193). Výsledky právě citovaného článku spolu s prací C.T.Tucker, Limit of a sequence of functions with only countably many points of discontinuity, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 118 - 122, implikují $B_2 = r_2 = j_2$.

E. SPOJITOST LIMITNÍ FUNKCE

48.19 Lokálně stejnoměrná konvergence v bodě.

(a) Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ definovaných na množině $M \subset E_1$ konverguje k funkci f lokálně stejnoměrně v bodě $x_0 \in M$ vzhledem k množině M, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ a $\delta > 0$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(b) Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k funkci f lokálně stejnoměrně

1014-7781

na intervalu (a,b), právě když f_n konvergují k f lokálně stejnoměrně v každém bodě intervalu (a,b) (vzhledem k (a,b)). Dokažte!

Návod. Nechť f_n konvergují lokálně stejnoměrně v každém bodě. Zvolte kompaktní množinu $K \subset (a,b)$ a $\varepsilon > 0$. Buď $x_0 \in K$. Nalezněte $\delta(x_0) > 0$ a $n(x_0) \in N$ tak, aby $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in (x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0))$ a všechna $n \geq n(x_0)$. Zřejmě $K \subset \bigcup_{x_0 \in K} (x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0))$. Nyní použijte Borelovu větu.

(c) Nechť f_n konvergují lokálně stejnoměrně k funkci f v bodě $x_0 \in M$ vzhledem k M. Potom $f_n(x_0) \longrightarrow f(x_0)$, dokažte!

(d) Funkce $f_n : x \longmapsto \operatorname{arctg} nx$ konvergují v bodě $x_0 = 0$, ale nekonvergují lokálně stejnoměrně v bodě $x_0 = 0$ vzhledem k E_1.

48.20 Zpola stejnoměrná konvergence v bodě.

(a) Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ definovaných na množině $M \subset E_1$ konverguje k funkci f spola stejnoměrně v bodě $x_0 \in M$ vzhledem k M, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ s následující vlastností:

Pro každé přirození číslo $n \geq n_0$ můžeme nalézt $\delta > 0$ ($\delta = \delta(n, \varepsilon)$) tak, aby pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap M$ platilo $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(b) Nechť f_n konvergují k f lokálně stejnoměrně v bodě $x_0 \in M$ vzhledem k M. Potom konvergují zpola stejnoměrně v x_0 vzhledem k M. Dokažte!

(c) Položte

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2/n, +\infty), \\ nx & \text{pro } x \in (0, 1/n), \\ 2-nx & \text{pro } x \in \langle 1/n, 2/n\rangle . \end{cases}$$

Zkoumejte lokálně stejnoměrnou a zpola stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ v bodě $x_0 = 0$ vzhledem k E_1.

(d) Nechť f_n konvergují zpola stejnoměrně k funkci f v bodě

$x_0 \in M$ vzhledem k M. Potom $f_n(x_0) \longrightarrow f(x_0)$, dokažte!

(e) Položme $f_n : x \longmapsto \sqrt[n]{|x|}$. Potom $\{f_n\}$ konvergují bodově k charakteristické funkci množiny $E_1 \setminus \{0\}$ a nekonvergují k ní zpola stejnoměrně v bodě 0 vzhledem k E_1.

(f) Buď f_n charakteristická funkce množiny $(0,1/n) \cap R$. Potom posloupnost f_n nekonverguje zpola stejnoměrně v 0 (vzhledem k E_1) k žádné funkci.

48.21 Spojitost limitní funkce.

(a) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na (a,b) spojitých v bodě $x_0 \in (a,b)$ a nechť $f_n \longrightarrow f_0$ na (a,b). Potom funkce f_0 je spojitá v bodě x_0, právě když f_n konvergují k f_0 zpola stejnoměrně v bodě x_0 vzhledem k (a,b).

N á v o d. Nechť f_0 je spojitá v bodě x_0, zvolte $\varepsilon > 0$. Nalezněte $n_1 \in N$ tak, aby pro $n \geqq n_1$ bylo $|f_n(x_0) - f_0(x_0)| < \varepsilon/3$ (konvergence) a $\delta_0 > 0$, $\delta_i > 0$ tak, aby $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/3$ pro $x \in (x_0 - \delta_i, x_0 + \delta_i)$, $i = 0,1,2,\dots$ (spojitost). Položte $\delta(n, \varepsilon) = \min(\delta_0, \delta_n)$. Pro důkaz opačné implikace použijte následující lemma, jehož důkaz naleznete v [D II], dodatek, § 3, věta 247.

Lemma. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na intervalu (a,b) spojitých v bodě $x_0 \in (a,b)$ a nechť $f_n \longrightarrow f$ na (a,b). Potom funkce f je spojitá v bodě x_0, právě když platí podmínka (P):

(P) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in N$ a $\delta > 0$ tak, že pro libovolné $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(b) Zpola stejnoměrná limita spojitých funkcí v každém bodě intervalu (a,b) je spojitá funkce.

(c) Lokálně stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce. Prostudujte si též [D II], dodatek, § 3.

F. KONVERGENCE V DÉLCE A VE VARIACI

48.22 Úmluvy a označení. Na E_2 uvažujme normu $\|\cdot\| : [x,y] \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$. Buď $F : \langle a,b\rangle \longrightarrow E_2$ a položme

$$VF = \overset{b}{\underset{a}{V}}(F) = \sup_{D\in\mathscr{D}} \sum_{k=1}^{m} \|F(x_k) - F(x_{k-1})\| ,$$

kde $\mathscr{D} = \left\{D;\ D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}\right\}$.

Nechť $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow E_1$. Buď Vf variace funkce f na $\langle a,b\rangle$ (viz téma 19) a $Lf = VF_f$, kde $F_f : x \longmapsto [x,f(x)]$.

Lf nazýváme <u>délkou grafu funkce f</u> na intervalu $\langle a,b\rangle$.

48.23 Poznámka. Nechť funkce f má v intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci f'. Potom platí

$$Lf = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx .$$

(Viz [JI].)

48.24 Lemma. Pro libovolnou funkci $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow E_1$ platí

$$\left((b-a)^2 + (Vf)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq Lf \leq (b-a) + Vf .$$

N á v o d. Přímo z definice odvoďte vztah $Vf \leq Lf \leq (b-a) + Vf$. Z Hölderovy nerovnosti (viz téma 44) odvoďte pro nezáporná čísla A_1, A_2, B_1, B_2 nerovnost $\left((A_1+A_2)^2 + (B_1+B_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$

$\leq (A_1^2 + B_1^2)^{\frac{1}{2}} + (A_2^2 + B_2^2)^{\frac{1}{2}}$; odtud dokažte indukcí podle n pro každé $n\in N$ a nezáporná čísla a_j, b_j, $j=1,\ldots,n$ nerovnost

$$\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^{n}(a_j^2 + b_j^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

ze které již snadno obdržíte zbytek dokazovaného tvrzení.

Důsledek. Množina $BV(\langle a,b\rangle)$ všech funkcí s konečnou variací je totožná s množinou funkcí, které mají graf konečné délky.

48.25 Cvičení. Sestrojte posloupnost funkcí $\{f_n\}$ definovaných na intervalu $\langle 0,1\rangle$ tak, aby $f_n \rightrightarrows f$, $Vf = 0$, $Lf = 1$, $Vf_n \longrightarrow +\infty$, $Lf_n \longrightarrow +\infty$.

48.26 Cvičení. Rozhodněte o platnosti následujících implikací:

(a) $(Vf_n \longrightarrow Vf) \Longrightarrow (f_n \longrightarrow f)$,

(b) $(Lf_n \longrightarrow Lf) \Longrightarrow (f_n \longrightarrow f)$,

(c) $V(f_n - f) \longrightarrow 0 \Longrightarrow (f_n \rightrightarrows f)$,

(d) $V(f_n - f) \longrightarrow 0 \Longrightarrow (f_n \longrightarrow f)$,

(e) $\{V(f_n - f) \longrightarrow 0, f_n(a) \longrightarrow f(a)\} \Longrightarrow (f_n \rightrightarrows f)$.

48.27 Věta. Nechť $f_n \longrightarrow f$ na $\langle a,b\rangle$. Předpokládejme, že f je konstantní. Potom platí

$$(Vf_n \longrightarrow Vf) \Longleftrightarrow (Lf_n \longrightarrow Lf).$$

N á v o d. Použijte 48.24.

48.28 Cvičení. Sestrojte posloupnost $\{f_n\}$ absolutně spojitých funkcí definovaných na intervalu $\langle 0,1\rangle$ takovou, že platí

(i) $f_n \rightrightarrows f$,

(ii) f je absolutně spojitá,

(iii) $Vf_n \longrightarrow Vf$,

(iv) $Lf_n \not\longrightarrow Lf$.

N á v o d. Volte např. $f(x) = x$, $x \in \langle 0,1\rangle$ a funkce f_n monotonní - řešení snadno naleznete, načrtnete-li si obrázek.

48.29 Cvičení. Sestrojte posloupnost funkcí $\{f_n\}$ takovou, že platí:

(i) $f_n \rightrightarrows 0$,

(ii) $f_n' \longrightarrow 0$,

(iii) $Lf_n \longrightarrow \infty$.

N á v o d. Na intervalu $\langle 1/(n+1),\ 1/n\rangle$ sestrojte funkce $f_n : 1/(n+1) \longmapsto 0$, $|f_n| \leq 1/n$, $\overset{1/n}{\underset{1/n+1}{V}} f_n > n$, $f_n : 1/n \longmapsto 0$, $f_n : x \longmapsto 0$ pro $x \notin \langle 1/(n+1),\ 1/n\rangle$ a existuje f_n' na intervalu $\langle 1/(n+1),\ 1/n\rangle$.

48.30 Cvičení. Sestrojte posloupnost funkcí $\{f_n\}$ definovaných na intervalu $\langle 0,1\rangle$ takovou, že platí:

(i) $f_n \longrightarrow f$,

(ii) $Vf_n \longrightarrow V_f$,

(iii) $V(f_n - f) \longrightarrow +\infty$.

N á v o d. Položte $\{f_n\}$ charakteristické funkce jednobodové množiny $\{1/n\}$. Tato posloupnost má potřebné vlastnosti.

48.31 Cvičení. Sestrojte posloupnost funkcí $\{f_n\}$ definovaných na intervalu $\langle 0,1\rangle$ takovou, že

(i) $f_n \longrightarrow f$,

(ii) $Lf_n \longrightarrow Lf$,

(iii) $L(f_n - f) \longrightarrow \infty$.

48.32 Fatouovo lemma. Nechť $f_n \longrightarrow f$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom platí $\liminf\limits_{n\to\infty} Vf_n \geqq Vf$, $\liminf\limits_{n\to\infty} Lf_n \geqq Lf$.

N á v o d. Nechť $\liminf\limits_{n\to\infty} Vf_n = a < \infty$ a buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in N$ tak, že pro $n > n_0$ a libovolné dělení D platí

$$\sum_{k=1}^{m} |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| \geqq a - \varepsilon \quad .$$

Odtud plyne tvrzení. Analogicky dokážeme druhou nerovnost.

48.33 Definice.

(a) $f_n \xrightarrow{V} f \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f_n \longrightarrow f)$ et $(Vf_n \longrightarrow Vf)$,

(b) $f_n \xrightarrow{L} f \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f_n \longrightarrow f)$ et $(Lf_n \longrightarrow Lf)$,

(c) $f_n \xrightarrow{SV} f \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f_n \longrightarrow f)$ et $(V(f_n-f) \longrightarrow 0)$,

(d) $f_n \xrightarrow{SL} f \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f_n \longrightarrow f)$ et $(L(f_n-f) \longrightarrow b - a)$,

(e) $f_n \overset{V}{\rightrightarrows} f \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f_n \rightrightarrows f)$ et $(Vf_n \longrightarrow Vf)$,

(f) $f_n \overset{L}{\rightrightarrows} f \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f_n \rightrightarrows f)$ et $(Lf_n \longrightarrow Lf)$,

(g) $f_n \overset{SV}{\rightrightarrows} f \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f_n \rightrightarrows f)$ et $(V(f_n-f) \longrightarrow 0)$,

(h) $f_n \overset{SL}{\rightrightarrows} f \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f_n \rightrightarrows f)$ et $(L(f_n-f) \longrightarrow b - a)$.

$\boxed{48.34}$ Poznámky.

(a) $(f_n \xrightarrow{SV} f) \Longleftrightarrow (f_n \xrightarrow{SL} f) \Longleftrightarrow (f_n \overset{SV}{\rightrightarrows} f) \Longleftrightarrow (f_n \overset{SL}{\rightrightarrows} f)$,

(b) $(f_n \xrightarrow{SV} f) \Longrightarrow (f_n \xrightarrow{L} f)$,

(c) $(f_n \xrightarrow{SV} f) \Longrightarrow (f_n \xrightarrow{V} f)$.

$\boxed{48.35}$ Označení. Funkci ℓ_D^f, příslušnou k funkci f a dělení $D = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$, definujeme takto:

ℓ_D^f je lineární na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i=1,\dots,n$ a $f(x_i) = \ell_D^f(x_i)$, $i=1,\dots,n$.

Funkci ℓ_D^f nazýváme po částech lineární vepsanou funkcí funkce f, příslušnou k dělení D. (Pokud není dělení D pro prováděné úvahy podstatné, píšeme pouze ℓ^f místo ℓ_D^f).

$\boxed{48.36}$ Tvrzení. Nechť $f \in BV(\langle a,b \rangle)$. Potom existuje posloupnost po částech lineárních vepsaných funkcí ℓ_n^f funkce f tak, že platí $\ell_n^f \xrightarrow{V} f$, $\ell_n^f \xrightarrow{L} f$.

N á v o d. Buď P hustá spočetná podmnožina intervalu $\langle a,b \rangle$, která obsahuje všechny body nespojitosti funkce f. Sestrojte posloupnost dělení $\{D_n\}$ tak, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = P$ a dále sestrojme funkce $\ell_{D_n}^f$ příslušné dělení D_n. Toto je hledaná posloupnost.

$\boxed{48.37}$ Věta. $(f_n \xrightarrow{L} f) \Longrightarrow (f_n \xrightarrow{V} f)$.

N á v o d. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom existuje po částech lineární funkce ℓ_D^f vepsaná funkci f tak, že platí $L\ell_D^f > Lf - \varepsilon$.

Příslušné dělení D nechť je určeno body $a = x_0 < \dots < x_n = b$.

Označíme (musíme však užít podrobnějšího označení):

$L(\ell_D^f ; \langle x_{i-1}, x_i \rangle) = L_i$, $L(f; \langle x_{i-1}, x_i \rangle) - L_i = \varepsilon_i$,

$x_i - x_{i-1} = d_i$, $i=1,\dots,n$.

Užitím předcházejících výsledků obdržíme

1014-7781

$$\overset{x_i}{\underset{x_{i-1}}{V}}(f_n) \leq \left(L_i^2 - d_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\,(L_i d_i)^{\frac{1}{2}} + 2\,\varepsilon_i$$ pro všechna dostatečně velká n. Úpravou a použitím Hölderovy nerovnosti (viz téma 44) obdržíme $\quad Vf_n \leqq Vf + 2\,(\varepsilon\, Lf)^{\frac{1}{2}} + 2\varepsilon$.

Odtud a z odstavce 48.32 plyne žádané tvrzení.

48.38 Cvičení. Sestrojte posloupnost funkcí $\{f_n\}$ definovaných na intervalu $\langle 0,1\rangle$ takovou, že platí:

(i) $f_n \xrightarrow{V} f$,

(ii) $f_n \not\overset{V}{\rightrightarrows} f$.

Návod. Položte

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (1/n,\, 1\rangle\ , \\ 1 & \text{pro } x = 0, \\ \text{je lineární jinde na } (0,1). & \end{cases}$$

48.39* Věta. Nechť $f_n, f \in BV\,(\langle a,b\rangle)$, f je spojitá na $\langle a,b\rangle$, $f_n \xrightarrow{V} f$. Potom platí $f_n \overset{V}{\rightrightarrows} f$.

48.40* Věta. Nechť $f_n, f \in BV\,(\langle a,b\rangle)$, f je singulární funkce (tj. funkce, jejíž derivace je rovna nule skoro všude).

Potom $(f_n \xrightarrow{L} f) \Longleftrightarrow (f_n \xrightarrow{V} f)$.

48.41* Věta. Nechť $f_n \in BV\,(\langle a,b\rangle)$, $f \in AC\,(\langle a,b\rangle)$. Potom platí $(f_n \xrightarrow{L} f) \Longleftrightarrow (f_n \xrightarrow{SV} f)$.

Poznámka. O důkazech posledních dvou vět a vůbec o těchto konvergencích se čtenář může podstatně více dočíst v článcích:

C.R. Adams - J.A. Clarkson: On convergence in variation, Bull.Amer. Math.Soc. 40 (1934),

C.R. Adams - H. Lewy: On convergence in length, Duke Math. Jour. 1 (1935),

A.P. Morse: Convergence in variation and related topics, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937)

a v M. Řezníček: Diplomová práce z roku 1970 (MFF KU).

48.42 Problémy.

(a) Zkoumejte uzavřenost různých systémů funkcí vzhledem ke konvergencím definovaným v tomto oddíle.

(b) Nepozorný čtenář by mohl přehlédnout hned první gramatickou větu v tomto oddíle (předpokládáme odmocninovou normu v E_2!) a tím by mohl špatně dopadnout. Konvergence zde definované jsou závislé na volbě normy v E_2 (i když všechny tyto normy jsou ekvivalentní)! Je možno se o tom přesvědčit např. zavedením normy $|||\cdot|||: [x,y] \longmapsto |x| + |y|$.
V tomto případě pro každou posloupnost $\{f_n\}$ např. platí:

$$(f_n \xrightarrow{V} f) \Longleftrightarrow (f_n \xrightarrow{L} f) ,$$

(porovnejte s odstavcem 48.37 a 48.40!). Okamžitě se tedy naskýtají následující problémy:

(i) Při které normě v E_2 jsou všechny konvergence definované v odstavci 48.33 ekvivalentní?

(ii) Zvolme $n \in N$ $(1 < n < 8)$ a n pevně zvolených konvergencí z odstavce 48.33. Při které normě v E_2 jsou tyto konvergence ekvivalentní?

(iii) "Obrácení (ii)", tj. ukázat, že právě při takto zvolené normě v E_2 je pevně zvolených n konvergencí ekvivalentních.

(iv) Studujte tyto konvergence při různých normách v E_2!

1014-7781

T É M A 49
Konvoluce funkcí

Obsah: A. Definice a základní vlastnosti.

B. Fourierova transformace.

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

$\boxed{49.1}$ **Definice.** Buď $M \subset E_1$ měřitelná množina, nechť $1 \leq p \leq +\infty$. Symbolem $\mathscr{L}_p(M)$ označme množinu všech měřitelných (obecně komplexních) funkcí na M, pro něž Lebesgueův integrál $\int_M |f|^p$ konverguje. Místo $\mathscr{L}_p(E_1)$ píšme krátce $\mathscr{L}_p$.

Pro $f \in \mathscr{L}_p(M)$ položme $\|f\|_p = \left(\int_M |f|^p\right)^{1/p}$.

$\boxed{49.2}$ **Cvičení.**

(a) Ukažte, že množina $\mathscr{L}_p(M)$ je lineární (= vektorový) prostor (při jakých operacích?).

(b) Ukažte, že zobrazení $f \longmapsto \|f\|_p$ má vlastnosti:

(i) $f = 0$ s.v. $\Longleftrightarrow \|f\|_p = 0$,

(ii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$,

(iii) $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$

(precizujte!, použijte výsledků tématu 44).

$\boxed{49.3}$ **Poznámka.** Položíme-li $\rho_p(f,g) = \|f-g\|_p$ pro $f,g \in \mathscr{L}_p(M)$, má funkce ρ_p "skoro" všechny vlastnosti metriky na $\mathscr{L}_p(M)$ (někdy se říká, že ρ_p je pseudometrika). Protože ovšem $\rho_p(f,g) = 0$, právě když $f = g$ skoro všude na M, netvoří dvojice $(\mathscr{L}_p(M), \rho_p)$ metrický prostor. Zavedeme-li na $\mathscr{L}_p(M)$ třídy

ekvivalence "$f \sim g$, právě když $f = g$ s.v. na M",
a označíme-li symbolem $L_p(M)$ množinu všech ekvivalentních tříd z $\mathcal{L}_p(M)$ a definujeme-li "vhodně" metriku na $L_p(M)$, dostaneme již metrický prostor (dokonce Banachův). Proveďte tyto úvahy podrobně a precisně, kupříkladu podle [J II], kap. XIV, § 3.

49.4 <u>Cvičení.</u>

(a) Ukažte, že součin dvou funkcí z $\mathcal{L}_p(M)$ nemusí již ležet v $\mathcal{L}_p(M)$.

(b) Z Hölderovy nerovnosti (téma 44) ukažte, že pro $f \in \mathcal{L}_p(M)$, $g \in \mathcal{L}_q(M)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, je $f.g \in \mathcal{L}_1(M)$ a $\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. V dalším ukážeme, jak definovat "součin" $f \circledast g$ funkcí f,g tak, aby $f \circledast g \in \mathcal{L}_1$ pro $f, g \in \mathcal{L}_1$.

49.5 <u>Věta.</u> Buďte $f, g \in \mathcal{L}_1$. Potom pro s.v. $x \in E_1$ leží funkce $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ v $\mathcal{L}_1$. Můžeme tedy pro tato x definovat funkci $f \circledast g$ předpisem $f \circledast g(x) = \int_{E_1} f(x-y)g(y)dy$.

Funkci $f \circledast g$ (kterou v bodech nulové množiny, kde není definována, dodefinujeme hodnotou nula) nazýváme konvolucí funkcí f a g. Dokažte dále, že $f \circledast g \in \mathcal{L}_1$ a $\|f \circledast g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

N á v o d. Dokažte nejdříve, že funkce $[x,y] \longmapsto f(x-y)g(y)$ je měřitelná a integrovatelná v E_2 (např. pomocí věty o substituci). Potom užijte Fubiniovu větu.

49.6 <u>Cvičení.</u> Ukažte, že konvoluce má tyto vlastnosti:

(i) $f \circledast g = g \circledast f$,

(ii) $f \circledast (g \circledast h) = (f \circledast g) \circledast h$,

(iii) $(\alpha f + \beta g) \circledast h = \alpha (f \circledast h) + \beta (g \circledast h)$

pro všechna $f,g,h \in \mathcal{L}_1$, $\alpha, \beta \in E_1$.

49.7 <u>Poznámka.</u> Množina $\mathcal{L}_1$ je tedy komutativní okruh (dokonce tzv. Banachova algebra). Za aditivní operaci bereme obvyklé sčítání funkcí, za multiplikativní operaci bereme konvoluci (jak je to se sčítáním v "nepříjemných" bodech? - pozor na pojem skoro všude!). Vzniká otázka, zda existuje multiplikativní jednotkový prvek, tj. taková funkce $u \in \mathcal{L}_1$, že $u \circledast f = f$ pro všechna $f \in \mathcal{L}_1$.

49.8 **Cvičení.** Algebra $\mathcal{L}_1$ nemá multiplikativní jednotkový prvek.

N á v o d. Dokazujte sporem. Za funkci f vezměte charakteristickou funkci intervalu $\langle -\delta, \delta \rangle$, kde $\delta > 0$ je zvoleno tak, aby $\int_{-2\delta}^{2\delta} |u| < 1$.

49.9 **Spojitost konvoluce.** Nechť funkce g je omezená a měřitelná na E_1 a nechť $f \in \mathcal{L}_1$. Potom konvoluce $f \circledast g$ (definovaná jako v 49.5, nepředpokládáme zde $g \in \mathcal{L}_1$) je stejnoměrně spojitá na E_1 a $\sup_{x \in E_1} |f \circledast g(x)| \le \|f\|_1 \cdot \sup_{x \in E_1} |g(x)|$. Dokažte!

N á v o d. Dokažte nejdříve tvrzení:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h \ (|h| < \delta \Rightarrow \int_{E_1} |f(t+h) - f(t)| \, dt < \varepsilon),$$

použijte k tomu např. poznatku, že spojité funkce s kompaktním nosičem jsou "husté" v $\mathcal{L}_1$, přesněji ke každému $\eta > 0$ a ke každé funkci $f \in \mathcal{L}_1$ můžeme nalézt spojitou funkci φ s kompaktním nosičem v E_1 tak, že $\int_{E_1} |f - \varphi| < \varepsilon$.

49.10 **Poznámka.** Buď $p > 1$, q takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Využitím Hölderovy nerovnosti a použitím věty, podle které jsou spojité funkce s kompaktním nosičem "husté" dokonce v $\mathcal{L}_p$, lze vyslovit větu: Nechť $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q$. Potom konvoluce $f \circledast g$ je stejnoměrně spojitá a $\sup_{x \in E_1} |(f \circledast g)(x)| \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

49.11 **Poznámka.** Někteří autoři definují konvoluci výrazem $\int_0^x f(x-t)g(t)dt$, který dostaneme z definice $f \circledast g$ uvedené v 49.5, uvažujeme-li funkce f, g identicky rovné nule na $(-\infty, 0)$.

Budou-li f, g spojité funkce, zdá se jisté, že tato nová konvoluce funkcí f, g bude funkce velmi rozumných vlastností. Proto je překvapující následující výsledek [V.Jarník, Fund. Math. XII 1951, str. 58-64]: V metrickém prostoru $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ všech dvojic $[f,g]$ funkcí f, g spojitých na $\langle 0,1\rangle$ s metrikou

$$\rho([f_1,g_1],[f_2,g_2]) = \max\left(\max_{x\in\langle 0,1\rangle}|f_1(x)-f_2(x)|, \max_{x\in\langle 0,1\rangle}|g_1(x)-g_2(x)|\right)$$

existuje množina M první kategorie v $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tak, že pro funkci

$h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$ je $\overline{D}h(x) = +\infty$, $\underline{D}h(x) = -\infty$

pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$, pokud $[f,g] \in (\mathcal{C}\times\mathcal{C}) \setminus M$. Lze navíc sestrojit spojitou funkci f tak, že pro funkci $h(x) = \int_0^x f(x-t)f(t)dt$

je $\overline{D}h(x) = +\infty$, $\underline{D}h(x) = -\infty$ pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$.

B. FOURIEROVA TRANSFORMACE

V dalším se budeme zabývat tzv. Fourierovou transformací, která je obdobou Fourierových řad.

49.12 __Definice.__ Buď $f \in \mathcal{L}_1$. Definujeme funkci $\hat{f}$ na E_1 předpisem

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_1} f(x)e^{-ixy}dx \quad \text{pro} \quad y \in E_1.$$

Ukažte korektnost definice! Zobrazení $f \longmapsto \hat{f}$ se nazývá __Fourierova transformace.__ Vysvětlete vztah Fourierovy transformace a Fourierových řad! (Pro $\alpha, \beta \in E_1$ se definuje $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$.)

49.13 __Věta__ (tzv. Riemann-Lebesgueovo lemma). Buď $f \in \mathcal{L}_1$. Potom funkce $\hat{f}$ je stejnoměrně spojitá na E_1 a $\lim_{|y|\to\infty} |\hat{f}(y)| = 0$.

(Symbolem $\lim_{|y|\to\infty} |\hat{f}(y)| = 0$ rozumíme následující:

1014-7781

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists y_0 > 0 \ \forall y \ (|y| > y_0 \implies |\hat{f}(y)| < \varepsilon).$)

Porovnejte tuto větu s Riemann-Lebesgueovým lemmatem z teorie Fourierových řad ([J II], kap. XIII, § 4, věta 181).

N á v o d. K odhadu rozdílu $\hat{f}(y+h) - \hat{f}(y)$ využijte nerovnosti $\left|\sin \frac{hx}{2}\right| \leq \left|\frac{hx}{2}\right|$. Při důkazu druhého tvrzení použijte návodu z odstavce 49.9 a vztahu $\hat{f}(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_1} f(t - \frac{\pi}{y}) e^{-ity}\, dt.$

49.14 Poznámka. Fourierova transformace $f \longmapsto \hat{f}$ je tudíž zobrazení množiny $\mathcal{L}_1$ do množiny $\mathcal{C}_0$, kde $\mathcal{C}_0$ je systém všech spojitých funkcí g na E_1, pro něž $\lim\limits_{|y|\to\infty} |g(y)| = 0$. Ukažte, že toto zobrazení je lineární a omezené (tj. $\sup\limits_{x\in E_1} |\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$).

Lze dokázat, že Fourierova transformace je dokonce prosté zobrazení prostoru L_1 do $\mathcal{C}_0$, je-li totiž $\hat{f} \equiv 0$ na E_1, je $f = 0$ s.v. na E_1. Je-li dokonce $\hat{f} \in \mathcal{L}_1$, potom pro s.v. $x \in E_1$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_1} \hat{f}(y) e^{ixy} dy$ (co vlastně říká poslední věta?).

O těchto problémech se více dozvíte až ve vyšších ročnících při přednáškách z funkcionální analýzy a teorie transformací.

49.15 Cvičení. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pro $f, g \in \mathcal{L}_1$ je $\widehat{f \circledast g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(b) Buďte $f, g \in \mathcal{L}_1$. Potom $\int_{E_1} \hat{f} g = \int_{E_1} f \hat{g}$.

(c) Najděte nutnou a postačující podmínku k tomu, aby funkce $\hat{f}$ byla lichá.

(d) Buď $f \in \mathcal{L}_1$, $g : x \longmapsto -ix f(x)$, nechť $g \in \mathcal{L}_1$. Potom $(\hat{f})' = \hat{g}$.

N á v o d. Použijte Lebesgueovu větu o limitním přechodu za integrálem a využijte odhadu $\left| \frac{e^{ixh} - 1}{h} \right| \leq |x|$.

1014-7781

(e) Nechť $f \in \mathcal{L}_1$ je absolutně spojitá na E_1, nechť $f' \in \mathcal{L}_1$. Potom $\widehat{f'}(y) = iy\,\hat{f}(y)$ pro všechna $y \in E_1$.

N á v o d. Ukažte nejprve, že $\lim_{|y|\to\infty} |f(y)| = 0$ a použijte integrace per partes. Může být předpoklad absolutní spojitosti funkce f zeslaben?

(f) Ukažte, že pro funkci $f : x \longmapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ je $\hat{f} = f$.

N á v o d. Pomocí (d) dokažte, že $\frac{d}{dy}\left[\hat{f}(y)\exp\left(\frac{y^2}{2}\right)\right] = 0$ na E_1.

1014-7781

TÉMA 50

Obecná měřitelnost

Obsah: A. Systémy měřitelných funkcí.

B. Vztahy mezi $\Lambda^{\#}$ a $\mathfrak{M}$.

C. Vlastnosti Λ v závislosti na $\mathfrak{M}$.

D. Vlastnost (W).

A. SYSTÉMY MĚŘITELNÝCH FUNKCÍ

50.1 **Motivace.** Nechť $f : (P, \rho) \longrightarrow E_1$ je reálná funkce na metrickém prostoru (P, ρ). Zopakujte definici spojitosti funkce f a větu: "Funkce f je spojitá na (P, ρ), právě když pro každé $c \in E_1$ jsou množiny $M_c(f) = \{x \in P;\ f(x) > c\}$, $M^c(f) = \{x \in P;\ f(x) < c\}$ otevřené."
Ukažte na příkladě, že otevřenost množin $M_c(f)$ pro všechna $c \in E_1$ nestačí ke spojitosti funkce f.
Připomeňte definici funkce polospojité shora, zdola (viz téma 10).
Dále vyslovte různé ekvivalentní formy definice $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí $f : X \to E_1$, jestliže $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou.

50.2 **Definice.** Nechť X je množina, $\mathfrak{M} \subset \exp X$ systém jejích podmnožin, přičemž $\emptyset, X \in \mathfrak{M}$. Označme

$$\Lambda^{\#} = \Lambda^{\#}(\mathfrak{M}) = \{f : X \longrightarrow E_1;\ M_c(f) \in \mathfrak{M} \text{ pro každé } c \in E_1\}$$

(kde $M_c(f) = f^{-1}((c, +\infty)) = \{x \in X;\ f(x) > c\}$),

$$\Lambda^{b} = \Lambda^{b}(\mathfrak{M}) = \{f : X \longrightarrow E_1;\ M^c(f) \in \mathfrak{M} \text{ pro každé } c \in E_1\},$$

$$\Lambda = \Lambda(\mathfrak{M}) = \Lambda^{\#} \cap \Lambda^{b} .$$

Funkcím ze systémů $\Lambda^{\#}, \Lambda^{b}, \Lambda$ říkejme <u>zdola $\mathfrak{M}$-měřitelné</u>, <u>shora $\mathfrak{M}$-měřitelné</u>, <u>$\mathfrak{M}$-měřitelné</u>.

1014-7781

50.3 **Příklady.**

(a) Nechť X je množina, $x_0 \in X$. Položme

$$\mathcal{M}(x_0) = \{\emptyset\} \cup \{Y \subset X\,;\ x_0 \in Y\}$$

(systém všech podmnožin množiny X obsahující bod x_0 spolu s prázdnou množinou).

Charakterizujte systémy $\Lambda^{\#}$, $\Lambda^{\flat}$, Λ.

(b) Nechť N je množina všech přirozených čísel,

$$\mathcal{M} = \{Y \subset N\,;\ Y \text{ je konečná nebo } N \setminus Y \text{ je konečná}\}$$

(algebra generovaná systémem všech konečných podmnožin množiny N).

Dokažte, že funkce f leží v systému $\Lambda^{\#}$, právě když platí:

existuje $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = L$ (vlastní či nevlastní) a

buď (i) existuje konečná množina K_f tak, že $f(n) \leq L$ pro $n \notin K_f$,

nebo (ii) existuje konečná množina M_f tak, že $f(n) > L$ pro $n \notin M_f$.

Obdobně charakterizujte systémy $\Lambda^{\flat}$ a Λ.

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

(iii) $\Lambda^{\#} = \Lambda^{\flat}$,

(iv) $f, g \in \Lambda^{\#} \implies f + g \in \Lambda^{\#}$,

(v) $f, g \in \Lambda^{\#} \implies f \cdot g \in \Lambda^{\flat}$.

(c) Nechť X je nespočetná množina. Položte

$$\mathcal{M} = \{A \subset X\,;\ A \text{ je konečná}\} \cup \{X\}.$$

Charakterizujte systémy $\Lambda^{\#}$, $\Lambda^{\flat}$, Λ.

(d) Nechť $X = \langle a,b \rangle$, nechť $\mathcal{M}$ je systém všech intervalů (resp. otevřených, resp. uzavřených v $\langle a,b \rangle$), obsahujících bod a ($a\ \emptyset \in \mathcal{M}$).

Charakterizujte systémy $\Lambda^{\#}$, $\Lambda^{\flat}$, Λ.

B. VZTAHY MEZI $\Lambda^{\#}$ A $\mathfrak{M}$

V tomto oddílu se pokusíme objasnit vztah mezi množinovými vlastnostmi systému $\mathfrak{M}$ a algebraickými či konvergenčními vlastnostmi systému $\Lambda^{\#}$.

50.4 **Cvičení.**

(a) Pro $A \subset X$ platí
$$c_A \in \Lambda^{\#} \quad , \text{ právě když } \quad A \in \mathfrak{M}$$
(c_A značí charakteristickou funkci množiny A),

(b) $f \in \Lambda^{\#}$, $k \geq 0 \implies k f \in \Lambda^{\#}$ (platí i pro $k < 0$?),

(c) $f \in \Lambda^{\#}$, $f \geq 0 \implies f^2 \in \Lambda^{\#}$,

(d) $f \in \Lambda^{\#}$, $k \in E_1 \implies f + k \in \Lambda^{\#}$,

(e) $f \in \Lambda^{\#}$, $k \in E_1 \implies \max(f,k), \min(f,k) \in \Lambda^{\#}$.

50.5 **Supremum a infimum v $\Lambda^{\#}$.**

(a) $f,g \in \Lambda^{\#} \implies \max(f,g) \in \Lambda^{\#}$, právě když
$A,B \in \mathfrak{M} \implies A \cup B \in \mathfrak{M}$.

(b) $f_n \in \Lambda^{\#} \implies \sup\limits_{n \in N} f_n \in \Lambda^{\#}$,
právě když $A_n \in \mathfrak{M} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda^{\#}$.

(c) $f,g \in \Lambda^{\#} \implies \min(f,g) \in \Lambda^{\#}$, právě když
$A,B \in \mathfrak{M} \implies A \cap B \in \mathfrak{M}$.

(d) Jestliže $f_n \in \Lambda^{\#} \implies \inf\limits_{n \in N} f_n \in \Lambda^{\#}$,
potom $A_n \in \mathfrak{M} \implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

(e) Ukažte na příkladě, že tvrzení (d) nelze obrátit.

(f) $f_n \in \Lambda^{\#} \implies \sup\limits_{n \in N} f_n, \inf\limits_{n \in N} f_n \in \Lambda^{\#}$, právě když
$A_n \in \mathfrak{M} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n , \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

50.6 **Limitní přechody.** Nechť Γ je libovolný systém funkcí na množině X s vlastností $f_n \in \Gamma$, $n \in N \Longrightarrow \sup_{n \in N} f_n, \inf_{n \in N} f_n \in \Gamma$.

Potom platí

(i) $g_n \in \Gamma$, $\limsup g_n = g \Longrightarrow g \in \Gamma$,

(ii) $g_n \in \Gamma$, $\liminf g_n = g \Longrightarrow g \in \Gamma$,

(iii) $g_n \in \Gamma$, $\lim g_n = g \Longrightarrow g \in \Gamma$.

50.7 Součet v $\Lambda^\#$.

(a) Platí (7.i) $\Longrightarrow$ (7.ii) $\Longrightarrow$ (7.iii), kde

(7.i) $A_n \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{M}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$,

(7.ii) $f, g \in \Lambda^\# \Longrightarrow f + g \in \Lambda^\#$,

(7.iii) $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \cap B \in \mathfrak{M}$, $A \cup B \in \mathfrak{M}$.

N á v o d. (7.i) $\Longrightarrow$ (7.ii) dokažte pomocí ekvivalence $f(x) + g(x) > c \Longleftrightarrow$ existuje $r \in R$ tak, že $f(x) > r$ a $g(x) > c - r$.

(b) Ukažte na příkladech, že neplatí implikace (7.ii) $\Longrightarrow$ (7.i), (7.iii) $\Longrightarrow$ (7.ii).

N á v o d. Použijte příklady 50.3.b,c.

50.8 Násobek v $\Lambda^\#$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(8.i) $f \in \Lambda^\#$, $k \in E_1 \Longrightarrow kf \in \Lambda^\#$,

(8.ii) $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$, $X \setminus A_1 \in \mathfrak{M}$.

N á v o d. (8.i) $\Longrightarrow$ (8.ii):

Nechť $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. Definujte funkci f takto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \\ -1 & \text{pro } x \in A_1, \\ -\frac{1}{n} & \text{pro } x \in A_n \setminus A_{n-1}. \end{cases}$$

Ukažte, že $f \in \Lambda^\#$, takže podle (8.i) jest $M_0(-f) = \{x \in X ;\ -f(x) > 0\} \in \mathfrak{M}$. Ale $M_0(-f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\boxed{50.9}$ **Součin v $\Lambda^{\#}$.**

(a) Následující výroky jsou ekvivalentní:

(9.i) $f, g \in \Lambda^{\#} \Longrightarrow f.g \in \Lambda^{\#}$,

(9.ii) $\mathfrak{M}$ je σ-algebra,

(9.iii) $f, g \in \Lambda^{\#}$, $k \in E_1 \Longrightarrow kf \in \Lambda^{\#}$, $f + g \in \Lambda^{\#}$,

(9.iv) $f, g \in \Lambda^{\#}$, $k \in E_1 \Longrightarrow kf \in \Lambda^{\#}$, $\max(f,g) \in \Lambda^{\#}$.

N á v o d. Implikace (9.ii) $\Longrightarrow$ (9.i) a (9.ii) $\Longrightarrow$ (9.iii) se dokáží obvyklým způsobem - viz např. [J II], kap. II, § 1. K důkazu zbylých implikací použijte 50.4, 50.5, 50.7, 50.8 a vztah $c_{A \cap B} = c_A . c_B$.

(b) Z tvrzení (a) ihned plyne, že součin dvou zdola polospojitých funkcí nemusí být zdola polospojitá funkce. Dokažte to přímo.

C. VLASTNOSTI Λ V ZÁVISLOSTI NA $\mathfrak{M}$

$\boxed{50.10}$ **Cvičení.**

(a) $c_A \in \Lambda^{b}$, právě když $X \setminus A \in \mathfrak{M}$,

(b) $f \in \Lambda^{b}$, právě když $-f \in \Lambda^{\#}$,

(c) $\Lambda^{\#} \subset \Lambda^{b} \Longrightarrow \Lambda^{\#} = \Lambda^{b} = \Lambda$,

(d) pomocí tvrzení (a), (b) odvoďte z každého tvrzení pro $\Lambda^{\#}$ v oddílu B. duální tvrzení pro Λ^{b}.

$\boxed{50.11}$ **Cvičení.** Z výsledků oddílu B. dokažte:

(a) $f \in \Lambda$, $k \in E_1 \Longrightarrow k f \in \Lambda$,

$f \in \Lambda$, $f \geq 0 \Longrightarrow f^2 \in \Lambda$,

$f \in \Lambda$, $k \in E_1 \Longrightarrow f + k \in \Lambda$,

$f \in \Lambda$, $k \in E_1 \Longrightarrow \max(f,k)$, $\min(f,k) \in \Lambda$.

(b) Nechť $A_n \in \mathfrak{M}$, $n \in N \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$;

potom $f_n \in \Lambda \Longrightarrow \inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$, $\lim f_n \in \Lambda$, pokud tyto funkce existují.

50.12 **Věta.** Nechť $\mathfrak{M}$ je σ-algebra. Potom

(i) $f, g \in \Lambda$, $k \in E_1 \Longrightarrow f.g,\ f+g,\ k\,f, \max(f,g), \min(f,g) \in \Lambda$,

(ii) $f_n \in \Lambda \Longrightarrow \inf f_n,\ \sup f_n,\ \lim f_n,\ \liminf f_n,\ \limsup f_n \in \Lambda$

(pokud tyto funkce existují).

50.13 **Problémy.** Pokuste se formulovat a dokázat tvrzení obdobná tvrzením z oddílů B, C, jestliže

(a) funkce mohou nabývat i hodnot $-\infty$, $+\infty$ a v definici systémů $\Lambda^{\#}$, $\Lambda^{\flat}$, Λ zaměníme množinu E_1 množinou E_1^*,

(b) nepožadujeme, aby $\emptyset$, $X \in \mathfrak{M}$,

(c) v definici systémů $\Lambda^{\#}$, $\Lambda^{\flat}$, Λ použijeme místo množin $M^c(f)$, $M_c(f)$ množiny $\hat{M}^c(f) = f^{-1}\big((-\infty, c>),\ \hat{M}_c(f) = f^{-1}(<c, +\infty)\big)$.

50.14 **Problém.** Tak jako v prostoru s mírou, můžeme i pro libovolný systém $\mathfrak{M}$ definovat jednoduché funkce: Funkci f nazveme jednoduchou (resp. #-jednoduchou, resp. $\flat$-jednoduchou), jestliže množina $f(X)$ je konečná a $f \in \Lambda$ (resp. $f \in \Lambda^{\#}$, resp. $f \in \Lambda^{\flat}$). Zkoumejte vlastnosti jednoduchých funkcí v závislosti na vlastnostech systému $\mathfrak{M}$. Pro libovolný systém $\mathfrak{M}$ platí tato věta:

Je-li $f \in \Lambda^{\#}$, potom existuje posloupnost #-jednoduchých funkcí f_n tak, že $f_n \longrightarrow f$. Platí obdobná věta pro systém Λ ?

D. VLASTNOST (W)

50.15 **Definice.** Nechť X je libovolná množina, $\mathcal{K}$ libovolná množina reálných funkcí definovaných na X. Řekneme, že systém $\mathcal{K}$ má vlastnost (W), jestliže existuje třída $\mathfrak{M} \subset \exp X$ tak, že $\mathcal{K} = \Lambda(\mathfrak{M})$.

V souvislosti s touto definicí vznikají otázky, v jistém smyslu duální k otázkám výše naznačeným:

(i) Jak pro daný systém $\mathcal{K}$ rozhodnout, má-li vlastnost (W)?

(ii) Jestliže systém $\mathcal{K}$ má vlastnost (W), jak popsat všechny třídy $\mathcal{M} \subset \exp X$, pro které $\mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{M})$?

Uvedeme zde několik jednodušších výsledků.

$\boxed{50.16}$ Cvičení. Ukažte, že systém $\mathcal{M}$ z definice 50.15 nemusí být určen jednoznačně.

N á v o d. Nechť X je alespoň dvoubodová množina, $A \subset X$, $\emptyset \neq A \neq X$. Položte $\mathcal{M} = \{\emptyset, A, X\}$, $\mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{M})$.

$\boxed{50.17}$ Věta. Nechť $\mathcal{K}$ je libovolný systém reálných funkcí definovaných na množině X. Nechť $\mathcal{M}(\mathcal{K}) = \{M^c(f);\ c \in E_1,\ f \in \mathcal{K}\} \cup \{M_c(f);\ c \in E_1,\ f \in \mathcal{K}\}$.

(a) $\mathcal{K}$ má vlastnost W, právě když $\mathcal{K} \supset \Lambda(\mathcal{M}(\mathcal{K}))$;

(b) jestliže $\mathcal{K}$ má vlastnost (W) a $f \in \mathcal{K}$, potom $f^+ \in \mathcal{K}$.

N á v o d. K důkazu (b) použijte 50.11.a.

$\boxed{50.18}$ Příklady.

(a) Dokažte, že systém všech spojitých funkcí na intervalu $I \subset E_1$ má vlastnost (W). Je systém $\mathcal{M}$ z definice 50.15 určen jednoznačně?

(b) Dokažte, že systém všech lebesgueovsky měřitelných funkcí na intervalu $I \subset E_1$ má vlastnost (W).

(c) Dokažte, že systém všech funkcí na E_1, které mají primitivní funkci, nemá vlastnost (W).

N á v o d. Aplikujte 50.17.b na funkci

$f : x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $0 \longmapsto 0$.

(d) Systém všech darbouxovských funkcí na E_1 nemá vlastnost (W). Dokažte!

N á v o d. Aplikujte 50.17.a na funkci

$h : x \longmapsto 0$, $x \in g^{-1}(0)$

$\quad x \longmapsto 1$, $x \notin g^{-1}(0)$,

kde g je funkce z 4.26.

(e) Další příklady naleznete v článku A.M. Bruckner, Canad. Math. Bull. 10 (1967), 227 - 231.

$\boxed{50.19}$ <u>Vlastnost (W^*).</u>

(a) Nechť $\mathcal{K}$ je systém funkcí definovaných na množině X. Řekneme, že systém $\mathcal{K}$ má <u>vlastnost (W^*)</u>, jestliže existuje množina $\mathcal{M} \subset \exp X$ tak, že

$$\mathcal{K} = \{ f \in \Lambda(\mathcal{M});\ f \text{ je omezená} \} .$$

(b) Systém $R(\langle a,b\rangle)$ všech riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle \subset E_1$ má vlastnost (W^*).

N á v o d. Položte $\mathcal{M} = \{ G \cup A ;\ G \subset (a,b) \text{ otevřená}, A \subset \langle a,b\rangle,\ \lambda_1 A = 0 \}$.

Při důkazu inkluze $R(\langle a,b\rangle) \supset \{ f \in \Lambda(\mathcal{M});\ f \text{ je omezená} \}$ zvolte libovolnou omezenou funkci $f \in \Lambda(\mathcal{M})$; pro každé $r \in R$ je $f^{-1}(\langle r,+\infty)) = G_r \cup A_r$, $f^{-1}((-\infty,r)) = G_r' \cup A_r'$,

kde G_r, G_r' jsou otevřené, A_r, A_r' nulové množiny. Položte $A = \bigcup_{r\in R} (A_r \cup A_r')$ a dokažte, že f je spojitá v každém bodě množiny $\langle a,b\rangle \setminus A$.

Zbytek tvrzení plyne z věty:

Funkce je riemannovsky integrovatelná, právě když je omezená a skoro všude spojitá.

1014-7781

TÉMA 51

O křivkách a oblastech

Obsah:

A. KONTINUA A OBLOUKY

51.1 Opakování.

(a) Buď M souvislá podmnožina metrického prostoru P. Potom libovolná množina $Q \subset P$ taková, že $M \subset Q \subset \bar{M}$ je souvislá.

N á v o d. Buď $x \in \bar{M}$. Množina $M \cup \{x\}$ je souvislá. Užijte tvrzení o sjednocení souvislých množin.

(b) Buď f spojité zobrazení kompaktního (resp. souvislého) prostoru P do metrického prostoru Q. Potom $f(P)$ je kompaktní (resp. souvislá) množina v prostoru Q.

(c) Nechť f je prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru P na prostor Q. Potom f je homeomorfismus.

51.2 Definice.

(a) Neprázdnou kompaktní souvislou podmnožinu K metrického prostoru P nazýváme kontinuum.

(b) Kontinuum, které obsahuje alespoň dva různé body, nazýváme vlastní kontinuum.

(c) Nechť $f : \langle 0,1 \rangle \longrightarrow E_2$ je homeomorfismus. Potom množinu $f(\langle 0,1 \rangle)$ nazýváme oblouk.

(d) Nechť f je homeomorfní zobrazení množiny C (jednotková kružnice)

$$C = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x^2 + y^2 = 1\}$$

do E_2. Množinu $f(C)$ nazýváme topologická kružnice.

51.3 Cvičení.

(a) Buď f spojité zobrazení metrického prostoru P do prostoru Q. Nechť $K \subset P$ je kontinuum. Potom $f(K)$ je kontinuum.

(b) Množina C z 51.2.d není oblouk.

51.4 Věta. Buď $K \subset P$ kontinuum. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) K je lokálně souvislé kontinuum;

(ii) ke každému $\varepsilon > 0$ existují kontinua $K_1, \dots, K_n$ taková, že

$$\operatorname{diam} K_i < \varepsilon \quad \text{a} \quad K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \; ;$$

(iii) existuje spojité zobrazení $f : \langle 0,1 \rangle \longrightarrow P$ takové, že $f(\langle 0,1 \rangle) = K$.

D ů k a z vyplývá z tvrzení uvedených v [Čech] a je, stejně jako důkaz následujícího tvrzení, velmi obtížný.

51.5 Věta. Spojitý obraz lokálně souvislého kontinua je lokálně souvislé kontinuum.

D ů k a z viz opět [Čech].

B. GRAFY SPOJITÝCH FUNKCÍ

51.6 Definice. Neprázdnou množinu $K \subset E_2$ nazveme k_1-křivkou, jestliže existuje spojitá funkce $f : \langle a,b \rangle \longrightarrow E_1$ tak, že

$$K = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \in \langle a,b \rangle, \; y = f(x)\} .$$

(k_1-křivka je tedy grafem spojité funkce definované na intervalu $\langle a,b \rangle$).

51.7 Cvičení. Nechť $K \subset E_2$ je k_1-křivka. Dokažte, že platí:

(a) K je omezená množina;
(b) K je uzavřená množina;
(c) K je kompaktní množina;
(d) K je souvislá množina;

(e) K je lokálně souvislá množina;
(f) K je vlastní kontinuum;
(g) K je řídká v E_2.

51.8 Poznámka. Buď $K \subset E_2$ k_1-křivka, tj. K je grafem funkce $f : \langle a,b \rangle \longrightarrow E_1$. Potom existuje právě jedno zobrazení $F: \langle a,b \rangle \longrightarrow E_2$, a to $F : t \longmapsto [t, f(t)]$, takové, že $F(\langle a,b \rangle) = K$. Zobrazení F je prosté. Je zobrazení F spojité?

51.9 Cvičení.

(a) Jednotková kružnice v E_2 není k_1-křivka.

(b) Buď $\mathcal{T} : E_2 \longrightarrow E_2$ lineární transformace. Nechť $K \subset E_2$ je k_1-křivka. Zkoumejte, zda $\mathcal{T}(K)$ je opět k_1-křivka.

C. SPOJITÁ ZOBRAZENÍ INTERVALU $\langle 0,1 \rangle$

51.10 Definice (Jordan). Neprázdnou množinu $K \subset E_2$ nazveme k_2-křivkou, existuje-li spojité zobrazení $F : \langle 0,1 \rangle \longrightarrow E_2$ takové, že $F(\langle 0,1 \rangle) = K$. Každé zobrazení F s touto vlastností nazýváme parametrizace k_2-křivky K.

51.11 Cvičení.

(a) Dokažte, že k_2-křivka K má vlastnosti (a)-(f) z odstavce 51.7.

(b) Množina $K = \{[x,y] \in E_2 ; x \in \langle 0,1 \rangle , y = 0\}$ je k_2-křivka. Zobrazení $F_1 : t \longmapsto [t,0]$, $t \in \langle 0,1 \rangle$,

$$F_2 : t \longmapsto [\sin \pi t, 0], \quad t \in \langle 0,1 \rangle ,$$

$$F_3 : t \longmapsto [|t \sin \frac{\pi}{2t}| , 0], \quad t \in (0,1\rangle , \; F_3(0)=[0,0]$$

jsou parametrizací křivky K. Dokažte!

(c) Zjistěte, zda jednotková kružnice v E_2 je k_2-křivka.

51.12 Poznámka. Porovnejte poznámku 51.8 se cvičením 51.11.b.

51.13 Cvičení.

(a) Formulujte a dokažte pro k_2-křivky problém analogický problému z odstavce 51.9.b.

(b) Každá k_1-křivka je k_2-křivka.

(c) Množina $K = \{[x,y] \in E_2;\ y = \sin\frac{1}{x},\ x \in (0,1\rangle\} \cup (\{0\} \times \langle -1,1\rangle)$ není k_2-křivka. Dokažte; pokuste se o důkaz bez užití věty z odstavce 51.4.

D. ŘÍDKÁ KONTINUA

51.14 **Definice** (Cantor). Každé vlastní kontinuum řídké v E_2 nazýváme k_3-křivkou.

51.15 **Cvičení.**

(a) Každá k_1-křivka je k_3-křivka (viz 51.7).

(b) Zjistěte, zda množina ze cvičení 51.11.b a množina ze cvičení 51.13.c jsou k_3-křivky.

(c) Uvědomte si, že množina $K = \{[x,y] \in E_2;\ x,y \in \langle 0,1\rangle\}$ není k_3-křivka.

51.16 **Poznámka.** Ze cvičení 51.15.b plyne, že každá k_2-křivka je k_3-křivka. Ze cvičení 51.15.c plyne, že "jednotkový čtverec" není k_3-křivka.

V roce 1890 dospěl G. Peano k překvapujícímu výsledku:

Množina K z 51.15.c je k_2-křivka. Každá k_2-křivka, která není řídká v E_2 (není tedy k_3-křivkou) se nazývá Peanova křivka.

Konstrukce parametrisace F k_2-křivky K z 51.15.c, tj. spojitého zobrazení $F : \langle 0,1\rangle \longrightarrow E_2$, $F(\langle 0,1\rangle) = K$, je popsána v knize [G - O]; elegantní důkaz o existenci takového zobrazení pochází od K. Petra. Při této příležitosti si uvědomte obsah tvrzení z následujícího odstavce.

51.17 **Cvičení.**

(a) Existuje prosté zobrazení $G : \langle 0,1\rangle \longrightarrow E_2$ takové, že $G(\langle 0,1\rangle) = K = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

N á v o d. Množiny $\langle 0,1\rangle$ a $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ mají stejnou mohutnost.

(b) Neexistuje prosté spojité zobrazení $G : \langle 0,1\rangle \longrightarrow E_2$ takové, že $G(\langle 0,1\rangle) = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

N á v o d. Nechť takové zobrazení G existuje. Potom podle 51.1.b je G homeomorfismus. Nechť $x_1, x_2, x_3 \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ jsou tři navzájem různé body. Množina $M = (\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle) \setminus (\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\})$ je souvislá a je tedy podle 51.1.c souvislá i množina $G^{-1}(M)$. Odtud odvoďte spor.

E. DALŠÍ DEFINICE KŘIVEK

51.18 **Definice.**

(a) Množinu $K \subset E_2$ nazveme k₄-křivkou, existuje-li prosté spojité zobrazení $F : \langle 0,1\rangle \longrightarrow E_1$ takové, že $F(\langle 0,1\rangle) = K$. (Zobrazení F je homeomorfismus (proč?).)
Zobrazení F se nazývá parametrizace k_4-křivky K.

(b) Množinu $K \subset E_2$ nazveme k_5-křivkou, existuje-li homeomorfní zobrazení jednotkové kružnice C na K.
(k_5-křivky se někdy též nazývají topologické kružnice.)
Homeomorfismus z této definice se opět nazývá parametrizace k_5-křivky K.

51.19 **Cvičení.**

(a) Vyšetřujte platnost podmínek (a) - (g) z odstavce 51.7 pro k_4-křivky a k_5-křivky.

(b) Každá k_1-křivka je k_4-křivka; k_4-křivka není obecně k_1-křivka. Dokažte!

(c) Každá k_5-křivka je současně k_2-křivka a k_3-křivka. Dokažte!

(d) Systém všech k_4-křivek v E_2 je disjunktní se systémem všech k_5-křivek v E_2.

51.20 **Poznámky.**

(a) Všimněte si, že např. přímka a hyperbola (tj. poměrně jednoduché rovinné křivky známé z elementární geometrie) nejsou křivkami ve smyslu žádné z definic 51.6, 51.10, 51.14 a 51.18.

(b) Křivku lze definovat též jako obraz $F(I)$ intervalu $I \subset E_1$ při zobrazení $F : I \longrightarrow E_2$, při čemž zobrazení F má různé další vlastnosti. Např. $F|J$ není konstantní pro žádný interval $J \subset I$, nebo F je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ (tzv. $\mathcal{C}^1$-křivky apod.).

(c) Lze rovněž studovat podmnožiny E_2 určené takto: Nechť ϕ jest funkce, definovaná v E_2. Položíme

$M = \{[x,y] \in E_2 \ ; \ \phi(x,y) = 0\}$.

Za určitých předpokladů o funkci ϕ má množina M řadu vlastností, se kterými jsme se setkali u křivek - někteří autoři užívají k definici křivky právě popsaného postupu.

F. OBJEM A MÍRA KŘIVEK

51.21 Cvičení.

(a) Je-li $K \subset E_2$ k_1-křivka, dokažte, že platí

$$\nu_2(K) = \lambda_2(K) = 0 \quad .$$

Poznámka. Tento výsledek odpovídá naší názorné představě; některé další výsledky se mohou zdát překvapující.

(b) Buď $K \subset E_2$ kontinuum. Potom platí

$$(\lambda_2(K) = 0) \Longrightarrow (\nu_2(K) = 0) \quad .$$

(c) Najděte příklad kontinua $K \subset E_2$ s kladnou Lebesgueovou mírou, pro které $\nu_2(K)$ není definováno.

(d) Uvědomte si, že $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ je k_2-křivka s kladnou mírou. Má tuto vlastnost každá Peanova křivka? (viz 51.16).

51.22 Tvrzení. Existuje k_3-křivka kladné míry.

N á v o d. Nechť $M = \{[x,y] \in E_2 \ ; \ x,y \in \langle 0,1\rangle\}$. Označme $K_0 = M$, $K_1 = K_0 \setminus U(p_1,r_1)$, kde pro $p_1 \in E_2$, $r_1 > 0$ je

$$U(p_1,r_1) = \{q \in E_2 \ ; \ \|p_1 - q\| < r_1\} \quad , \quad \text{atd. - tj.}$$

definujeme indukcí $K_n = K_{n-1} \setminus U(p_n,r_n)$. Pak položíme $K = \bigcap_n K_n$. Při vhodné volbě posloupnosti bodů $\{p_n\}_1^\infty$ a čísel

1014-7781

$\{r_n\}_1^{\infty}$ získáme kontinuum K požadovaných vlastností.

51.23 Poznámka. Konstrukce provedená v předcházejícím odstavci je založena na stejném principu jako konstrukce speciálních k_3-křivek, které bývají v literatuře nazývány "kontinua Sierpińského". Tzv. "koberec Sierpińského" lze konstruovat tak, že má vlastnosti, požadované v 51.22 (viz [Alex]).

51.24 Poznámka. Lze sestrojit k_4-křivku (resp. k_5-křivku) tak, že

$$\lambda_2(K) > 0 \quad .$$

Příslušná konstrukce je uvedena v [G - O].

51.25 Cvičení. Je-li $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x,y \in \langle 0,1 \rangle\}$ a $K \subset M$ taková množina, že platí $\lambda_2(K) = 1$, říkáme, že K má plnou míru. Z odstavce 51.21 vyplývá, že neexistuje k_1-křivka $K \subset M$ plné míry a rovněž ani k_1-křivka $K \subset M$, pro kterou platí $\lambda_2(K) > 0$.

Dokažte následující tvrzení:

(a) Existuje k_2-křivka $K \subset M$ plné míry.

(b) Neexistuje k_3-křivka (resp. k_4-křivka, k_5-křivka) $K \subset M$ plné míry.

(c) K danému $\varepsilon \in (0,1)$ existuje k_3-křivka (resp. k_4-křivka, resp. k_5-křivka) $K \subset M$ taková, že platí $\lambda_2(K) > 1 - \varepsilon$.

N á v o d - viz [G - O] .

G. DÉLKA KŘIVKY

51.26 Poznámka. Buď $K \subset E_2$ k_1-křivka a $f : \langle a,b \rangle \longrightarrow E_1$ taková funkce, že $K = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \in \langle a,b \rangle, \; y = f(x)\}$.

Délkou křivky K (budeme ji označovat $L(K)$) nazveme délku grafu funkce f. (Definice viz 48.22 - přečtěte si rovněž odstavce 48.23 a 48.24.)

51.27 Cvičení. Nechť $K \subset E_2$ je k_4-křivka a F její parametrisace. Položme $L_v(K) = V(F ; \langle 0,1 \rangle)$ - definice $V(F ; \langle 0,1 \rangle)$ viz opět téma 48. Zkoumejte, zda $L_v(K)$ nezávisí na volbě parametrisace F.

51.28 Cvičení.

(a) Definujte přesně pojem "vepsaná lomená křivka" k dané k_4-křivce K a všimněte si vztahu mezi její délkou (součet délek konečně mnoha úseček) a veličinou $L_v(K)$.

(b) Srovnejte $L(K)$ a $L_v(K)$ v případě, že $L(K)$ existuje (každá k_1-křivka je též k_4-křivkou). Porovnejte opět s tématem 48.

(c) Vypočtěte $L_v(K)$ a diam K pro $K = \{[x,y] \in E_2 ;\ x \in \langle 0,1 \rangle ;\ y = f(x)\}$, kde $f : \langle 0,1 \rangle \longrightarrow E_1$ je Cantorova funkce (viz téma 4).

51.29 Poznámka. Formální přenesení definice $L_v(K)$ na k_2-křivky nevede k rozumné definici "délky křivky" (v čem spočívají obtíže?). Určete $V(F_i ; \langle 0,1 \rangle)$ pro zobrazení F_i, $(i=1,2,3)$ z odstavce 51.11.b.

51.30 Cvičení. Jednotkovou kružnici C lze vyjádřit jako sjednocení dvou oblouků (definice viz 51.2.c), které mají společné pouze koncové body. Každý z těchto oblouků je k_4-křivka (definice viz 51.18.a). Na základě 51.27 definujte "délku" k_5-křivky a ukažte korektnost této definice (srovnejte s 51.29). Zkoumejte základní vlastnosti této "délky".

51.31 Cvičení. Nechť je $K = \{[x,y] \in E_2 ;\ xy = 0,\ x,y \in \langle -1,1 \rangle\}$. Ukažte, že K je k_2-křivka a též k_3-křivka. "Názorná délka", odpovídající našim praktickým zkušenostem, je pro tuto křivku K rovna 4. Jelikož K je k_2-křivka lze každé parametrizaci F (F nemusí být homeomorfismus!) přiřadit $V(F; \langle a,b \rangle)$, kde $F(\langle a,b \rangle) = K$. Ukažte, že výraz $\inf V(F; \langle a,b \rangle)$, kde infimum se bere přes všechny parametrizace F, nemá smysl "názorné délky".

51.32 Cvičení. Pro křivku K z předcházejícího odstavce vyšetřujte suprémum součtu délek všech disjunktních oblouků $K_i \subset K$ (suprémum se bere přes jednotlivé konečné systémy oblouků s popsanými vlastnostmi). Porovnejte obdrženou hodnotu s "názornou délkou".

Další úvahy jsou náročnější a vyžadují v některých případech hlubší znalosti z teorie míry apod.

51.33 Cvičení. Pro délku křivky K definovanou jakýmkoliv způsobem je vhodné požadovat zachování těchto vlastností (dále jim budeme říkat "délkové axiomy"):

Funkci L_* definovanou na množině všech kontinuí $K \subset E_2$ budeme nazývat délkou L_*, platí-li

(i) pro každé kontinuum $K \subset E_2$ je $0 \leq L_*(K) \leq +\infty$;

(ii) je-li $K_1, \dots, K_n$ konečný systém kontinuí, $K_i \subset K$ pro $i = 1, \dots, n$, $K_i \cap K_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, platí

$$\sum_{i=1}^{n} L_*(K_i) \leq L_*(K) \quad ;$$

(iii) pro každé kontinuum $K \subset E_2$ platí $L_*(K) \geq \operatorname{diam} K$.

Zjistěte, zda dosud zmíněné "délky" měly alespoň některé z vlastností popsaných "délkovými axiomy".

51.34* Cvičení. Nechť $K \subset E_2$ je kontinuum. Definujeme $L_b(K)$ následujícím způsobem:

(a) Jestliže K není lokálně souvislé kontinuum, klademe $L_b(K) = +\infty$;

(b) jestliže K je lokálně souvislé kontinuum, klademe $L_b(K) = \sup_S \ell(S)$, kde S je sjednocení konečně mnoha vzájemně disjunktních oblouků $K_i \subset K$, $i = 1, \dots, n$, a

$$\ell(S) = \sum_{i=1}^{n} L_v(K_i)$$

($L_v(K_i)$ je definováno shodně jako v 51.27.)

Dokažte, že mezi všemi "délkami" L_*, které vyhovují "délkovým axiomům, existuje minimální délka (co se tím rozumí? - vyjádřete přesně!). Touto minimální délkou je právě L_b .

51.35* Cvičení. Nechť $K \subset E_2$ je kontinuum. Pro $r > 0$ definujme $U(K,r) = \{[x,y] = s \in E_2;\ \operatorname{dist}(s,K) < r\}$, kde $\operatorname{dist}(s,K)$ značí vzdálenost množin $\{s\}$ a K. Položme

$$\varphi(K, r) = \frac{\lambda_2(U(K,r))}{2r} \quad .$$

Definujeme $L_M(K) = \lim_{r \to 0_+} \varphi(K, r)$, pokud limita existuje.

1014-7781

(L_M bývá někdy nazývána "Minkowského délka".)

Dokažte, že rovněž L_M je délkou ve smyslu 51.33.

N á v o d. Na základě 51.34 se pokuste pro

$$\overline{L}_M(K) = \limsup_{r \to 0_+} \varphi(K,r), \quad \underline{L}_M(K) = \liminf_{r \to 0_+} \varphi(K,r)$$

dokázat nerovnosti

$$\overline{L}_M(K) \leq L_b(K), \qquad \underline{L}_M(K) \geq L_b(K).$$ (Důkazy těchto nerovností i užitých výsledků z 51.34 nejsou však lehké.)

51.36 Cvičení. Dokažte toto tvrzení:

Nechť $K \subset E_2$ je kontinuum a $\lambda_2(K) > 0$. Potom $L_M(K) = +\infty$.

51.37 Poznámka. Ukážeme ještě jeden obecný přístup k definici délky.

Pro $\alpha > 0$ definujme v E_n tzv. α-rozměrnou Hausdorffovu míru.

(a) Nechť $A \subset E_n$ je libovolná množina, α, $\varepsilon > 0$. Položme

$$H_\alpha^\varepsilon(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{diam}(A_n)\right]^\alpha ,$$

kde infimum bereme přes všechny spočetné rozklady množiny A na množiny A_i s vlastností $\operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon$ pro všechna i a $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Potom H_α^ε je vnější míra v E_n. Dokažte!

(b) Dokažte, že rovněž množinová funkce H_α^*, $\alpha > 0$, definovaná na E_n předpisem

$$H_\alpha^*(A) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} H_\alpha^\varepsilon(A)$$, je vnější míra na E_n.

(c) Jestliže $\alpha = n$, je Hausdorffova vnější míra H_α^* shodná v E_n s vnější Lebesgueovou mírou λ_n^* (až na násobek).

Pomocí známého Carathéodoryova postupu lze z vnější míry získat α-rozměrnou míru H_α v E_n, kterou nazýváme α-rozměrná Hausdorffova míra.

Míra H_1 nám může v E_2 posloužit k definici délky k_i-křivek pro $i=1,\dots,5$.

1014-7781

H. OBLASTI V E_2

51.38 **Definice.**

(a) Komponentou množiny $A \subset E_2$ nazýváme množinu M těchto vlastností:

(i) M je souvislá množina, $M \subset A$;

(ii) je-li $\tilde{M}$ souvislá množina, $M \subset \tilde{M} \subset A$, potom je $M = \tilde{M}$.

(b) Oblastí v E_2 nazýváme každou množinu $G \subset E_2$, která je otevřená a souvislá.

(c) Lomenou čarou rozumíme dále oblouk K (tj. k_4-křivku, viz 51.18), k němuž existuje spojité zobrazení $F : \langle a,b \rangle \longrightarrow E_2$, $F(\langle a,b \rangle) = K$ a dělení D intervalu $\langle a,b \rangle$, $D = \{a=x_0 \ldots x_n=b\}$ takové, že $F | \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ je lineární zobrazení pro $i=1,\ldots,n$.

51.39 **Cvičení.** Nechť lze každé dva body x, y množiny $M \subset E_2$ "spojit" lomenou čarou $L \subset M$. Potom M je souvislá množina. Dokažte!

51.40 **Tvrzení.** Nechť $G \subset E_2$ je oblast. Potom každé dva body x, $y \in G$ lze "spojit lomenou čarou $L \subset G$". Dokažte!

N á v o d. K danému bodu $x \in G$, který nelze "spojit lomenou čarou" s bodem $y \in G$, sestrojte množinu G_x všech bodů z, ke kterým existuje lomená čára $L \subset G$ spojující body x, z. $G_x \neq G$ – ukažte, že G_x je otevřená a současně uzavřená v G.

51.41 **Cvičení.** Dokažte tato tvrzení:

(a) Komponenty A_1, A_2 libovolné množiny $A \subset E_2$ jsou totožné nebo disjunktní.

(b) Komponenty otevřené množiny $G \subset E_2$ jsou oblasti.

(c) Komponenty uzavřené množiny $F \subset E_2$ jsou souvislé, uzavřené množiny.

(d) Komponenty kompaktní množiny $K \subset E_2$ jsou kontinua.

(e) Každou otevřenou množinu $G \subset E_2$ lze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha oblastí (porovnejte toto tvrzení s analogickým tvrzením, které znáte pro E_1).

51.42 **Definice.** Nechť doplněk oblasti $G \subset E_2$, tj. $E_2 \setminus G$, je souvislá množina. Potom oblast nazýváme jednoduše souvislou oblastí. Nechť množina $E_2 \setminus G$ má právě n komponent, $n=2,3,\ldots$. Potom oblast G

nazýváme n-násobně souvislou oblastí.

Nechť množina $E_2 \setminus G$ má nekonečně mnoho různých komponent.

Potom oblast G nazýváme ∞-násobně souvislou oblastí.

51.43 Příklady.

(a) Najděte příklady jednoduše souvislé (resp. n-násobně souvislé, resp. ∞-násobně souvislé) oblasti $G \subset E_2$.

(b) Všimněte si počtu prvků množiny $E_2 \setminus G$, kde G je jednoduše souvislá oblast v E_2 (uveďte příklady, nedokazujte však obecné tvrzení).

(c) Sestrojte příklad otevřené množiny $G \subset E_2$, která není souvislá, jejíž hranice je však souvislá.

(d) Hranice oblasti nemusí být souvislá množina - uveďte příslušné příklady. Má tento fakt nějaký vztah k zavedeným pojmům v 51.42?

51.44 Cvičení.

(a) Hranice jednoduše souvislé omezené oblasti $G \subset E_2$ je k_3-křivka.

(b) Sestrojte jednoduše souvislou oblast omezenou $G \subset E_2$, jejíž hranice není k_5-křivkou.

51.45 Věta. Nechť K je k_5-křivka. Potom množina $E_2 \setminus K$ je sjednocením dvou disjunktních oblastí G_1, G_2, z nichž právě jedna je omezená (tu nazýváme vnitřek K; neomezenou oblast nazýváme vnějšek K).

Důkaz tohoto zdánlivě jednoduchého tvrzení (Jordanova věta) je velmi obtížný. Viz např. I. Černý, Základy analysy v komplexním oboru.

51.46 Příklad. Sestrojte příklad jednoduše souvislé oblasti $G \subset E_2$, která je omezená a v níž nelze spojit libovolný bod $x \in G$ lomenou čarou L s bodem $y \in \overline{G}$ tak, že $L \setminus \{y\} \subset G$. Je hranice této oblasti k_5-křivka?

Tento příklad naznačuje postup, který není jednoduchý, jehož lze využít k charakterizaci takových jednoduše souvislých oblastí, jejichž hranice je k_5-křivka (Jordanovy oblasti).

51.47 Literatura. K velku obtížnému oddílu G vám doporučujeme tuto literaturu:

C.A. Rogers, Hausdorff Measures, Cambridge 1970,

G. Nöbeling, Jahr. Deutschen Math. Ver. 1942.

1014-7781

H i s t o r i c k ý   p ř e h l e d

Matematika ve své dnešní podobě je dílem mnoha tisíců matematiků, kteří různou měrou přispěli k jejímu vývoji. Se jmény těch nejznámějších jste se setkali v těchto skriptech. Chceme na závěr čtenáře stručně seznámit s životními osudy těch, kteří se patrně nejvíce zasloužili o rozvoj těch partií matematiky, do nichž spadá látka předcházejícího textu. Krátký pohled na historii matematiky může být užitečný k pochopení některých souvislostí.

Řecký matematik EUKLEIDES (latinsky EUCLIDES; asi 350 - asi 300 p.n.l.) shrnul všechny v jeho době známé poznatky z aritmetiky a geometrie ve svém díle "STOICHEIA"(lat. "Elementa"). Toto Euklidovo dílo, které patří k nejpřekládanějším dílům, ovlivňovalo matematiky téměř po 2000 let. V něm mimo jiné vybudoval s relativně značným úspěchem axiomaticky geometrii. Český překlad F. Servíta pod názvem "Základy" vydala JČMF v roce 1907.

Nejslavnějším starověkým matematikem byl ARCHIMEDES (asi 287 - 212 p.n.l). Žil v Syrakusách na Sicílii. Byly mu již známy některé ideje integrálního počtu, v souvislosti s nimiž se objevuje též po něm nazvaný Archimedův axiom. Zmíněných idejí užíval k výpočtu obsahů resp. objemů jednoduchých geometrických útvarů - pro číslo π mu byl např. znám odhad $3,1409 < \pi < 3,1419$. Dbal velmi přesnosti výsledků, které publikoval.

Vývoj matematiky se pak na několik století prakticky zastavil. Zdánlivě formální zlepšení - zavedení proměnných v matematice a jejich označování písmeny francouzským advokátem FRANCOISEM VIETOU (lat. Vieta; 1540 - 1603) ovlivnilo podstatně další vývoj. Viete spočítal stejnou metodou jako Archimedes číslo π na 9 desetinných míst a odvodil vzorec

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \dots \cos\frac{\pi}{2^n} \dots$$

Krátce po něm určil LUDOLPH VAN CEULEN (1540 - 1610), učitel šermu v Delftu, opět stejnou metodou číslo π na 35 desetinných míst - po něm získalo číslo π označení "Ludolphovo číslo".

Po zavedení proměnných došlo v krátké době k rozvoji analytické geometrie. O její vznik se zasloužil francouzský právník PIERRE DE FERMAT (1601 - 1665). Užíval poněkud těžkopádné symboliky, závislé na symbolice Vietově, a jeho objevy byly publikovány až po jeho smrti v roce 1679, i když byly známy i jiným učencům ještě za jeho života. Objev analytické geometrie je proto přisuzován RENÉ DESCARTESOVI (lat. CARTESIUS; 1596 - 1650). Ten své objevy publikoval r. 1637 v díle "DISCOURS DE LA MÉTHODE" (Rozprava o metodě). Jeho symbolika byla lepší než symbolika Fermatova. Descartes se prý dostal jako voják v době bitvy na Bílé Hoře i do Prahy. - Fermat byl všestrannějším matematikem. Za svého života vyslovil řadu vět, které dokázal, a též mnoho domněnek, z nichž některé byly dokázány, jiné vyvráceny. Problém, který je znám jako "velká věta Fermatova", není však např. dosud rozřešen. Popsal též jako prvý metodu hledání maxim a minim funkcí, kterou v pozměněné formě užíváme dodnes. Spolu s BLAISEM PASCALEM (1623 - 1662) jest též zakladatelem teorie pravděpodobnosti, jejíž rozvoj byl stimulován hazardními hrami v kostky a karty.

Pascal byl synem známého učence. V 25 letech vstoupil do kláštera, aby se cele mohl věnovat matematice a literatuře. Sestrojil též jeden z prvých počítacích strojů. Spolu s Fermatem si dopisovali s páterem - minoritou MARINEM MERSENNEM (1588 - 1648), který byl v písemném styku téměř se všemi evropskými vědci (bývá citován výrok H. BOSMANSE, který napsal "informovat o nějakém objevu Mersenna znamenalo ho oznámit celé Evropě"). Tuto "funkci informátora" převzal po Mersennově smrti Angličan JOHN COLLIN (1625 - 1683).

Postupně docházelo k podstatnějšímu rozvoji infinitesimálního počtu. Shrnutí do té doby známých poznatků provedl BONAVENTURA CAVALIERI (asi 1598 - 1647) ve své knize, vydané roku 1635. Zmíněná kniha Descartesova byla též ovlivněna tímto dílem. O podobné dílo jako Cavalieri se pokusil též nizozemský jezuita GREGORIUS A SANCTO VINCENTIO (1584 - 1667), který byl v letech 1629 - 1631 profesorem matematiky v Praze. Zde při velkém požáru však o část díla, které psal, přišel. Od něho pochází název "exhaustivní metoda" pro ideje integrálního počtu, které byly známy již Archimedovi.

S posloupnostmi a řadami pracoval Angličan JOHN WALLIS (1616 - 1703), který byl v letech 1643 - 1703 profesorem v Oxfordu. Dospěl - i když ne často přesným postupem - k řadě nových výsledků. Autorem mnoha výsledků obdobné povahy byl Holanďan CHRISTIAN HUYGENS (1629 - 1695), který žil v Paříži. Rovněž, z dnešního hlediska ne zcela přesně, dospěl k řadě výsledků a byl ve své době spolu s Wallisem nejlepším znalcem myšlenek, vedoucích k objevu infinitesimálního počtu. Na rozdíl od jiných učenců té doby, kteří se lehce zřekli archimedovské přesnosti, se o tuto přesnost ve svých dílech snažil. Jako vědec byl velmi všestranný - proslul ještě svými objevy ve fyzice a astronomii, tj. ve vědách, kterými se většina matematiků v té době zabývala. V 17. století se skupiny učenců začínaly formovat ve školy. Tehdy byly vytvořeny prvé akademie a učené společnosti. Prvá akademie byla založena v Neapoli r. 1560. Jedním ze zakládajících členů anglické Royal Society (1662) byl Wallis. Prvým presidentem Francouzské akademie (1666) byl Huygens.

Za objevitele diferenciálního a integrálního počtu bývají pokládáni ISAAC NEWTON (1643 - 1727) a GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 - 1716). Newton byl tělesně velmi slabý a ve škole patřil v prvních letech k nejslabším žákům. Jeho ctižádost a píle jej však v životě dovedly k nejvyšším poctám.

Byl v Cambridge žákem ISAACA BARROWA (1630 - 1677), který byl podrobně obeznámen se zmíněným Cavalieriho dílem a který vedl na tamější universitě katedru matematiky. Barrow rozpoznal Newtonův talent a r. 1669 mu dobrovolně vedení katedry předal. Z obavy před morem přebýval Newton v letech 1665--1666 ve svém rodišti na venkově a vytvořil zde "teorii fluxí" - infinitesimální počet. Jeho terminologie a symbolika byla poněkud těžkopádná, což mělo později negativní vliv. Newton vynikl také ve fysice. Vždy velmi otálel s publikováním svých výsledků, např. "Metoda fluxí" byla publikována až po jeho smrti v roce 1736. Vztah mezi "fluxemi" a "fluentami" objasnil Barrow r. 1670 a tak ukázal souvislost mezi derivováním a integrací (přesněji: hledáním primitivní funkce). Nedorozumění a nepřesnosti však byly odstraněny teprve později.

Leibniz se narodil v Lipsku a strávil největší část života na hannoverském dvoře. Byl velmi nadaný a všestranný. Titul bakalář získal za práci z logiky, titul magister za práci z filosofie, později získal titul doktora práv. Diplomacie ho přivedla do Paříže, kde se setkal s Huygensem, a později i do Londýna. Sestrojil též počítací stroj, který byl dokonalejší než Pascalův. V letech 1673 - 1676 vytvořil diferenciální a integrální počet se symbolikou velmi blízkou naší. Jisté podněty z Anglie mohl však získat teprve v roce 1675, neboť je prokázáno, že se při prvém pobytu v Londýně s "informátorem" Collinem nesetkal. Teprve když byl dvorním radou a knihovníkem u dvora v Hannoveru, setkal se roku 1676 na cestě do Londýna s Collinem, kterého informoval o svých výsledcích, a seznámil se s výsledky Newtonovými. Objevy v "calculu differentialis" publikoval roku 1674, v "calculu sumatorius" roku 1686 - později však začal po dohodě s JOHANNEM BERNOULLIM (1667 - 1748) užívat označení "calculus integralis". S Newtonem se nikdy v životě nesetkal, vyměnili si však několik dopisů a měli k sobě vzájemně velikou úctu. Leibniz prvý začal užívat symbolu $\int$ a jeho jméno nese rozvoj

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots ,$$

který však neobjevil on sám. Jeho zásluhy o vědu a speciálně matematiku jsou takové, že vynikající učenec NORBERT WIENER (1894 - 1964), zakladatel kybernetiky, považoval Leibnize za "patrona" této vědy.

Později začal úporný boj o prioritu objevu infinitesimálního počtu mezi oběma školami - německou a anglickou; nebyl však podněcován autory těchto objevů. Newton byl v roce 1703 zvolen presidentem Royal Society a žil pak v Londýně jako dozorce a pak ředitel královské mincovny. Byl povýšen do šlechtického stavu. Leibniz byl r. 1700 zvolen členem pařížské Akademie věd a téhož roku presidentem berlínské Akademie věd. Roku 1716 chtěl jet do Anglie osobně pohovořit s Newtonem o objevech a objasnit otázku vzájemné nezávislosti obou vytvořených koncepcí, nebylo mu to však z politických důvodů povoleno. Zemřel roku 1716 a byl pohřben bez poct v Hannoveru - teprve po 70 letech byla na jeho hrob zasazena kamenná deska s nápisem "Ossa Leibnizi". Newton byl r. 1727 pohřben s velikými poctami ve Westminsterském opatství. Oba tito géniové ovlivnili další prudký rozvoj infinitesimálního počtu.

Prvou tištěnou učebnici diferenciálního a integrálního počtu napsal francouzský matematik GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE de l'HOSPITAL (1661 - 1704); obsahovala též známé "l'Hospitalovo pravidlo". Angličan BROOK TAYLOR (1685-- 1731) užil známé Taylorovy řady k řešení jistých diferenciálních rovnic, nikdy se však konvergencí této řady nezabýval (ostatně někteří posluchači naší fakulty tak činí dodnes). Taylor byl od roku 1715 sekretářem Royal Society. Konvergenci Taylorovy řady vyšetřoval profesor Edinburgské university COLIN MACLAURIN (1698 - 1746).

Pronikání nových poznatků do praxe a jejich šíření bylo do této doby velice těžké - prvé časopisy, otiskující matematická pojednání, začaly vycházet teprve ve druhé polovině 17. stol.

Po španělském vpádu emigrovala z Antverp do Basileje rodina BERNOULLI, ve které se po několik generací objevovali lidé s vynikajícím matematickým talentem.

JAKOB BERNOULLI (1654 - 1705) začal studoval teologii, již zmíněný JOHANN BERNOULLI medicínu. Později se oba věnovali plně matematice. Jakob vedl v Basileji na universitě katedru matematiky v letech 1687 - 1705 a po jeho smrti ji převzal a vedl až do své smrti Johann. Tito učenci se zasloužili spolu s Leibnizem a Newtonem o vznik variačního počtu, zabývali se diferenciálními rovnicemi apod. Jakob napsal spis "Ars conjectandi", který obsahoval Huygensovu práci z teorie pravděpodobnosti, a stal se tak dalším z tvůrců teorie pravděpodobnosti. Vzájemná rivalita a zdravá ctižádost hnala oba bratry rychle vpřed. Již před rokem 1700 objevili prakticky vše, co je obsahem základních kursů matematické analýzy; jejich stupeň přesnosti výkladu však byl pro dnešní dobu nevyhovující.

V další generaci vynikli zejména dva synové Johannovi MIKULÁŠ BERNOULLI (1695 - 1726) a DANIEL BERNOULLI (1700 - 1782). Oba byli povoláni r. 1725 do Petrohradské akademie věd. Mikuláš, který se věnoval studiu teorie pravděpodobnosti, zemřel tam již r. 1726. Daniel odešel z Petrohradu r. 1733, když dostal místo profesora anatomie a botaniky v Basileji; od roku 1750 tam přednášel i fysiku.

Ojedinělým zjevem v matematice byl LEONHARD EULER (1707 - 1783). Ač původem Švýcar, prožil Euler velkou část svého života v Petrohradě.

Vystudoval v Basileji, kde byl žákem Johanna Bernoulli. Do Petrohradu odešel roku 1727 a kromě období 1741 - 1766, kdy pracoval v berlínské akademii, zde strávil celý život. Byl to člověk obdivuhodně nadaný, všestranný a velmi pilný. Byl dvakrát ženat a měl 13 dětí. Roku 1735 přišel o jedno oko a roku 1766 o druhé. Díky fenomenální paměti však dokázal pracoval dále. Napsal téměř 900 pojednání a knih a jeho práce vycházely postupně i po jeho smrti až do poloviny 19. stol.; přispěly k ustálení symboliky v analýze i algebře. Pochází od něj i název "variační počet" - v tomto oboru publikoval významné práce. Setkáte se s Eulerovou přímkou, konstantou, formulí atd. - již jenom jeho výsledky z číselné teorie by mu zajistily nesmrtelnou slávu. Zabýval se i hříčkami (tahy koněm na šachovnici, "sedm mostů v Královci"), které nepřímo ovlivnily vznik nových matematických disciplín, a byl i obratným popularizátorem. Jeho výklad byl prost nepřesnosti, postrádal však ještě často hlubší zdůvodnění.

Též mezi francouzskými encyklopedisty byl vynikající matematik JEAN LE ROND d'ALEMBERT (1717 - 1783), nemanželský šlechtický syn, nalezený v blízkosti kostela St. Jean le Rond. Jeho talent mu umožnil rychlou kariéru - od roku 1754 byl sekretářem Akademie a proto též nejvlivnějším vědcem Francie. Vynikal v aplikacích matematiky na hydromechaniku a spolu s Danielem Bernoullim byl zakladatelem teorie parciálních diferenciálních rovnic. Pokusil se roku 1746 o důkaz tzv. základní věty algebry a zavedl též mimo jiné pojem limity.

Dalším velkým matematikem 18. stol. byl syn statkáře z Normandie PIERRE SIMON LAPLACE (1749 - 1827). S pomocí d'Alemberta se stal profesorem na vojenské škole v Paříži. Jako ostatní matematikové té doby se věnoval hlavně aplikacím; má velké zásluhy o počet pravděpodobnosti a o vznik operátorového počtu. Pracoval celý život v matematice a obdržel mnoho poct od Napoleona i od Ludvíka XVIII. Na rozdíl od některých jiných matematiků té doby měnil lehce své politické přesvědčení a jeho široké svědomí mu umožňovalo pokračovat v práci i přes všechny politické převraty. Překladatel jeho díla do angličtiny N. Bowditch z Bostonu o něm napsal: "Kdykoliv jsem narazil na Laplaceův obrat "což nám snadno vyplyne", byl jsem si jist, že mám před sebou hodiny tvrdé práce, abych vyplnil mezery a nalezl a dokázal, jak nám to snadno vyplyne".

JOSEPH LUIS LAGRANGE (1736 - 1813) byl italsko-francouzského původu a byl již v devatenácti letech profesorem matematiky v Turíně. Když se Euler vrátil roku 1766 zpět do Petrohradu, byl Lagrange pozván Friedrichem II. do Berlína (v pozvání byla věta "je nutné, aby největší matematik Evropy žil v blízkosti největšího krále"), kde pracoval až do Friedrichovy smrti roku 1786. Pak odešel do Paříže, kde působil na Ecole normale (1795) a na Ecole polytechnique (1797). Byl velice všestranný, má vynikající zásluhy o variační počet stejně jako o teorii čísel apod. Prakticky v jistém smyslu založil "teorii funkcí reálné proměnné" - odmítal navazovat na Newtona či d´Alemberta a vycházel při studiu funkcí z Taylorovy řady; nedospěl však ke zcela uspokojivým výsledkům. Snad největší zásluhy má však o teoretickou fyziku svým spisem "Méchanique analytique".

Posledním známým matematikem té doby, o němž se zmíníme, byl ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT (1713 - 1765), s jehož jménem se můžete setkat v teorii diferenciálních rovnic.

Na konci 18. stol. se začala rozmáhat jistá skepse. Matematika podle tehdejších představ dosáhla svého vrcholu. Za 15 let po Laplaceově smrti napsal Arago v jeho nekrologu: "Pět matematiků - Clairaut, Euler, d´Alembert, Lagrange a Laplace - si rozdělilo mezi sebou svět, jehož existenci odhalil Newton. Objasnili ho ve všech směrech, pronikli do oblastí, které byly považovány za nepřístupné, ..., a konečně - a v tom leží jejich nepomíjející sláva - podrobili vše ... jednotnému zákonu."

V 18. stol. se matematika velmi prudce rozvíjela, její logické výstavbě nebyla však věnována náležitá péče. Proto došlo v 19. stol. k revizi základů matematické analýzy. Na přelomu století žil a pracoval německý matematik KARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855), význačný profesor götingenské university. Podal několik důkazů tzv. základní věty algebry, založil prakticky moderní teorii čísel, pracoval intensívně též v geometrii a jeho práce jsou spojeny s počátky teorie potenciálu jakožto odvětví matematiky. Některé ze svých významných myšlenek nepublikoval.

V podobných oblastech matematiky pracoval i o něco starší francouzský matematik ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752 - 1833). Napsal významné práce, mj. na svou dobu dokonalá díla z diferenciálního a integrálního počtu. Byl po jistou dobu na Ecole normale a examinátorem na Ecole polytechnique. Na této škole též působil AUGUSTINE LOUIS CAUCHY (1789 - 1857). Cauchy byl jedním z matematiků, usilujících o větší přesnost práce v matematice. Je znám především svými pracemi z teorie funkcí komplexní proměnné. Zpracoval základy infinitesimálního počtu způsobem blízkým současnému pojetí - použil d´Alembertova pojmu limity a přesné definice derivace funkce. Řady vyšetřoval pečlivě a zabýval se otázkami konvergence, podal též prvý existenční důkaz pro řešení diferenciální rovnice. Za svého života strávil též několik let v Turíně a v Praze.

Velikým myslitelem stíhaným nepřízní osudu byl pražský rodák BERNARD BOLZANO (1781 - 1848). Je prokázáno, že dosáhl některých objevů v matematice před Cauchym a jinými významnými matematiky. Pracoval velmi přesně s pojmem spojitosti funkce, formuloval též větu o existenci hromadného bodu

1014-7781

omezené posloupnosti, atd. O exaktnosti jeho úvah svědčí obsah části rukopisu jeho nedokončeného díla "Grössenlehre", která byla objevena teprve ve 20. letech a vydána ve 30.letech našeho století. Byl i významným logikem. Bolzano a Cauchy byli prvními matematiky, kteří ve větách a definicích cílevědomě užívali kvantifikátorů. Roku 1805 byl jmenován profesorem náboženství na pražské universitě, avšak pro své pokrokové názory byl roku 1820 suspendován. Ve své době byl znám spíše jako sociální myslitel než matematik.

Jiným všestranným matematikem té doby byl KARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804 - 1851), známý svými pracemi z teorie eliptických funkcí (na jeho počest užíváme termínu "jakobián"). Značný význam měly též práce, jejichž autorem byl francouzský baron JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768 - 1830).

Interpretem Gaussových výsledků a jeho nástupcem v Götingen byl PIERRE LEJEUNE GUSTAV DIRICHLET (1805 - 1859). Pečlivě prozkoumal Fourierovy výsledky a významně přispěl k chápání pojmu funkce. Zabýval se též aplikacemi matematiky a je autorem četných výsledků v teorii čísel.

Dirichletovým nástupcem v Götingen byl GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826 - 1866). Tento matematik uveřejnil poměrně malý počet prací, avšak všechny byly významné. Daleko hlouběji nežli Cauchy a Dirichlet se zabýval problémem integrovatelnosti funkcí. Proslul též pracemi z geometrie, teorie komplexních funkcí apod. Prvý ve svých přednáškách uváděl již příklad spojité funkce, která nemá derivaci v žádném bodě (příklad takové funkce sestrojil již před rokem 1835 Bolzano). Prvý příklad takové funkce publikoval roku 1875 KARL WEIERSTRASS (1815 - 1897), uváděl jej však ve svých přednáškách již od roku 1861. Weierstrass byl řadu let učitelem na gymnasiu a profesorem na berlínské universitě se stal teprve roku 1856. Byl známý svým uměním přednášet i svou přesností. I on významně přispěl k revizi základů analýzy - pracoval velmi přesně s komplexními funkcemi a objevil pojem stejnoměrné konvergence; dokonale objasnil některé základní pojmy matematické analýzy apod.

Vynikajících úspěchů dosáhl největší ruský matematik 19. století PAFNUTIJ LVOVIČ ČEBYŠEV (1821 - 1894). Publikoval významné práce z číselné teorie a zabýval se problémy počtu pravděpodobnosti a matematické analýzy, zejména otázkami aproximace funkcí a integrace algebraických i racionálních funkcí.

Na počátku 19. století byly představy o "číslech" a "veličině" stejně nedokonalé jako v době antiky. Weierstrass byl jedním z prvých matematiků, kteří ve svých přednáškách budovali teorii racionálních čísel. Ve druhé polovině století se stala potřeba vybudování teorie iracionálních čísel krajně naléhavou. Snahu po aritmetizaci matematiky a její neuspokojivý stav vyjádřil LEOPOLD KRONECKER (1823 - 1891), profesor berlínské university, známým výrokem: "Celá čísla vytvořil náš milý bůh, vše ostatní je dílem člověka."

Přibližně v sedmdesátých letech dospěli nezávisle k cíli Weierstrass, RICHARD DEDEKIND (1831 - 1916), GEORG CANTOR (1845 - 1918) a jiní - vybudovali teorii reálných čísel. Cantor má též trvalé zásluhy o modernizaci matematiky vybudováním naivní teorie množin. Jeho teorie měla řadu odpůrců, z nichž nejvýznamnější byl Kronecker. Životní strádání podlomilo Cantorovo duševní zdraví a konec svého života strávil v sanatoriu. Význam Cantorových idejí pochopil v té době jen malý počet matematiků - jedním z nich byl např. český matematik MATYÁŠ LERCH (1860 - 1922), od něhož pochází český termín "množina". Odpůrců však postupně ubývalo, zejména pak na počátku 20. stol., kdy HENRI LEBESGUE (1875 - 1941) publikoval roku 1901 svou teorii míry.

Snahy o vytvoření logických základů matematiky vyvrcholily úsilím o vybudování axiomatiky jednotlivých matematických disciplín. Tyto snahy mají své kořeny již ve starověku. V minulém století mají největší význam axiomatická teorie přirozených čísel, kterou vytvořil GIUSEPPE PEANO (1858 - 1932) roku 1889 a axiomatická teorie euklidovské geometrie, kterou vybudoval DAVID HILBERT (1862 - 1943) roku 1889.

Vývoj matematiky ve dvacátém století ukázal, že axiomatická metoda nemůže splnit vše to, co si od ní matematici na začátku tohoto století slibovali. V našem století se tempo vývoje matematiky ještě zrychlilo. Vznikají nejen nové teorie, ale i celá odvětví matematiky; štěpí se i odvětví, jehož historii jsme chtěli stručně popsat. Dochází k tak vysokému stupni specializace, že si přestávají rozumět i matematici pracující v blízkých oborech. Silně se rozvíjejí zejména abstraktní partie matematiky. Stěží lze hodnotit úspěchy matematických škol, a ještě hůře úspěchy a objevy jednotlivců; mnohé význačné objevy prvé poloviny tohoto století budou jistě ještě překonány.

Zmíníme se ještě stručně o těch, kteří podstatně přispěli k vývoji matematiky v českých zemích.

Životní tragedií BERNARDA BOLZANA (1781 - 1848) bylo, že nemohl uplatnil své mimořádné schopnosti pro vědeckou práci v logice a v matematice a prožil svůj život bez náležitých kontaktů s těmi, kteří se nejvíce zasloužili o tvorbu matematiky 19. století. Malé možnosti vědeckého uplatnění v té době způsobily, že někteří význační čeští matematici hledali uplatnění mimo české země. Jedním z nich byl EMIL WEYR (1848 - 1894),

1014-7781

který přijal místo profesora matematiky na vídeňské universitě. Jeho bratr EDUARD WEYR (1852 - 1903) zůstal v Praze, kde působil na pražské universitě i technice. Oba obohatili naši matematickou literaturu o kvalitní díla, která sloužila jako učebnice matematiky pro vysokoškolské studenty.

MATYÁŠ LERCH (1860 - 1922) působil po deset let na švýcarské universitě ve Freiburgu, odkud se vrátil roku 1906 jako profesor matematiky na techniku v Brně; později přešel roku 1919 na nově zřízenou Masarykovu universitu (nyní UJEP). Ač napsal veliké množství vědeckých publikací, rovněž nemohl nalézt v českých zemích uplatnění.

O rozvoj matematiky a fyziky se zasloužila v českých zemích též Jednota československých matematiků a fyziků, která se vyvinula ze studentského spolku založeného roku 1862. Prvá česky psaná vědecká práce z matematiky byla vydána roku 1862 Královskou českou společností nauk. Záslohou JČMF bylo dovršeno obrození české matematiky.

KAREL PETR (1868 - 1950) se zasloužil o rozvoj české matematiky nejen svými vědeckými pracemi, ale i tím, že vychoval značný počet středoškolských učitelů i vědeckých pracovníků v matematice. Je autorem kvalitních učebnic diferenciálního a integrálního počtu, kterých užívali zejména posluchači university v období mezi světovými válkami.

K nejlepším žákům Karla Petra náležel všestranně nadaný EDUARD ČECH (1893 - 1960) a VOJTĚCH JARNÍK (1897 - 1970), který vynikl svými pracemi v číselné teorii a matematické analýze.

Jména osob, vyskytujících se ve skriptech

Abel, N.H.	(1802-1829)
Adams, C.R.	(?)
d'Alembert, J.	(1717-1783)
Alexandrov, P.S.	(1896)
Alexejewicz, A.	(?)
Archimedes	(287-212 p.n.l.)
Arzelà, C.	(1847-1912)
Aull, C.E.	(?)
Baire, R.L.	(1874-1932)
Baisnab, A.P.	(?)
Banach, S.	(1892-1945)
Bari, N.K.	(1901-1961)
Barrow, I.	(1630-1677)
Bernoulli, D.	(1700-1782)
Bernoulli, Jakob	(1654-1705)
Bernoulli, Johann	(1667-1748)
Bernoulli, M.	(1695-1726)
du Bois-Reymond, P.	(1831-1889)
Bolzano, B.	(1781-1848)
Borel, E.	(1871-1956)
Bosmans, H.	(1852-1928)
Brink, ?	?
Bromwich, T.J.	(1875-1929)
Brouwer, L.E.J.	(1881- ?)
Bruckner, A.M.	(?)
Bruijn, N.G. de	(1918-)
Cantor, G.	(1845-1918)
Caratheodory, C.	(1873-1950)
Carleson, L.	(?)
Cassels, J.W.S.	(?)
Cauchy, A.L.	(1789-1854)
Cavalieri, B.	(asi 1598-1647)
Cesaro, E.	(1859-1906)
Ciesielski, Z.	(?)
Clairaut, A.C.	(1713-1765)
Clarkson, J.A.	(?)
Coke, S.R.	(?)
Collin, J.	(1625-1683)
Croft, H.P.	(?)
Čebyšev, P.L.	(1821-1894)
Čech, E.	(1893-1960)
Daniell, P.J.	(1889-1945)
Darboux, G.J.	(1842-1917)
Deák, E.	(?)
Dedekind, J.W.R.	(1831-1916)
Denjoy, A.	(1884-)
Descartes, R.	(1596-1650)
Dini, U.	(1845-1918)
Diofantos	(kolem 250)
Dirichlet, P.G.L.	(1805-1859)
Erdős, P.	(1912-)
Euklides	(asi 350 - asi 300 p.n.l.)
Euler, L.	(1707-1783)
Faber, G.	(? - ?)
Fast, H.	(?)
Fatou, P.	(1878-1929)
Fejér, L.	(1880-1959)
Fermat, P. de	(1601-1665)
Fisher, E.	(1875-1959)
Fourier, J.B.J.	(1768-1830)
Frobenius, G.	(1849-1917)
Fubini, G.	(1879-1943)
Garg, K.M.	(?)
Gauss, K.F.	(1777-1855)
Gelbaum, B.R.	(?)
Gelfand, I.M.	(?)
Gelfond, A.O.	(1906)
Ger, R.	(?)
Gillespie, D.C.	(? - ?)
Gregorius, a St.V.	(1584-1667)
Hadamard, J.	(1865-1963)
Hamel, G.	(1877-1954)
Hardy, G.H.	(1877-1947)
Harnack, A.	(? - ?)
Hartman, P.(S.?)	(?)

1014-7781

Heine, E.H. (1821-1881)
Helly, E. (1884-1943)
Hermite, Ch. (1822-1901)
Herzog, F. (?)
Hewitt, E. (?)
Hilbert, D. (1862-1943)
Hopf, H. (1894-1971)
Hölder, O.L. (1859-1937)
l´Hospital, G.F. (1661-1704)
Hurwitz, A. (1859-1919)
Huygens, Ch. (1629-1695)

Chinčin, A.J. (1894-1959)

Jacobi, K.G.J. (1804-1851)
Jarník, V. (1897-1970)
Jegorov, D.F. (1869-1931)
Jensen, J.L.V. (? - ?)
Jung , ? ?
Jurkat, W.B. (?)

Kantorovič, L.V. (1912)
Kestelman, L. (?)
Knaster, B. (?)
Kořínek, V. (1899)
Kronecker, L. (1823-1891)
Kuczma, M. (?)
Kummer, E.E. (1810-1893)
Kuratowski, K. (1896)

Lagrange, J.L. (1736-1813)
Laplace, P.S. (1749-1827)
Lebesgue, H. (1875-1941)
Legendre, M. (1752-1833)
Leibniz, G.W. (1646-1716)
Lerch, M. (1860-1922)
Levi, B. (1875- ?)
Lindelöf, E.L. (1870-1946)
Lindemann, F.K.L. (1852-1939)
Lindenbaum, A. (1905-1942)
Linnik, J.V. (1915)
Liouville, J. (1809-1882)
Lipschitz, R. (1832-1903)
Lukeš, J. (1940)
Ludolph, v.C. (1540-1610)
Luzin, N.N. (1883-1950)

Maclaurin, C. (1698-1746)
Malgrange, B. (?)
Marcus, S. (?)
Markuševič, A.I. (?)
Mařík, J. (1920)
Menšov, D.E. (?)
Mersenne, M. (1588-1648)
Mertens, R. (?)
Minkowski, H. (1864-1909)
Moivre, A. (1667-1754)
Moore, E.H. (1862-1932)
de Morgan, A. (1806-1871)
Morse, A.P. (?)
Murkhopadhyay, S.N. (?)

Natanson, I.P. (? - ?)
Newton, I. (1642-1727)
Novák, B. (1938)
Nöbeling, G. (?)

Olmstead, J.M.H. (?)
Osgood, W.F. (1864-1943)

Parseval-Deschênes,M.A. (1836- ?)
Pascal, B. (1623-1662)
Peano, G. (1858-1932)
Perron, O. (?)
Petr, K. (1868-1950)
Piranian, G. (?)
Poisson, S.D. (1781-1840)
Pompeiu, D. (1873-1954)
Ponomarev, S.P. (?)
Poussin, Ch. de la V. (1866-1962)
Preiss, D. (1947)
Pringsheim, A. (1850-1941)

Raabe, J.L. (1801-1859)
Radon, J. (1887-1956)
Riemann, B. (1826-1866)

Riesz, F.	(1880- ?)
Rjazanov, ?	(?)
Rogers, C.A.	(?)
Rolle, M.	(1652-1719)
Roth, K.F.	(?)
Řezníček, M.	(?)
Saks, S.	(1897-1942)
Schwarz, G.A.	(? - ?)
Selberg, A.	(?)
Servít, F.	(1848-1923)
Sierpiński, W.	(1882-1969)
Sikorski, R.	(?)
Sonin, N.J.	(1849-1915)
Specht, W.	(?)
Steinhaus, H.	(1887-1972)
Stieltjes, T.J.	(1856-1894)
Stirling, J.	(asi 1696-1770)
Stokes, G.	(1819-1903)
Stolz, ?	(? - ?)
Stone, M.H.	(?)
Stromberg, K.R.	(?)
Švarc, R.	(?)
Tarski, A.	(1901)
Tauber, A.	(1866-)
Taylor, B.	(1685-1731)
Tietze, H.	(? - ?)
Thompson, W.A.	(?)
Tucker, C.T.	(? - ?)
Tsodiks, ?	?
Viete, F.	(1540-1603)
Vijayaraghavan, T.	(? - ?)
Vinogradov, I.M.	(1891)
Vitali, G.	(1875-1932)
Volterra, V.	(1860-1940)
v.der Waerden, B.L.	(1903)
Wallis, J.	(1616-1703)
Weierstrass, K.	(1815-1897)
Weyr, Ed.	(1852-1903)
Weyr, Emil	(1848-1894)
Whitney, H.	(?)
Young, ?	?
Zahorski, Z.	(?)
Zygmund, A.	(?)

R E J S T Ř Í K

1014-7781

1014-7781

27566r

L i t e r a t u r a

[Alex] : P.S. Alexandrov, Úvod do obecné theorie množin a funkcí, Praha, 1954

[AMM] : The American Mathematical Monthly (americký časopis)

[Čech] : E. Čech, Bodové množiny, Praha, 1966

[G - O] : B. Gelbaum - J. Olmsted, Kontrpriměry v analize, Moskva,1967

[D I] : Vojtěch Jarník, Diferenciální počet I, Praha 1955

[D II] : Vojtěch Jarník, Diferenciální počet II, Praha 1956

[J I] : Vojtěch Jarník, Integrální počet I, Praha 1956

[J II] : Vojtěch Jarník, Integrální počet II, Praha 1955

[π] : Jaroslav Lukeš, Příklady k teorii Lebesgueova integrálu, Praha 1968 (skripta)

[Nat] : I.P. Natanson, Těorija funkcij veščestvěnnoj pěremenoj, Moskva 1957

1014-7781

O B S A H

27566r

Str.

1014-7781 ST 17-1576/72