5 Přednáška z 12. 11. 2003

Grafy

úplný graf:

K_3 - trojúhelník 
K_4 - 
K_8 - 
K_n - Každý si jistě dokáže představit, jak to bude dále pokračovat

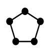
Problém:

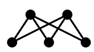
Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy, který neobsahuje $\triangle$?

- nejvýše $\binom{n}{2}$.

Označme tento počet $t(n)$ a podívejme se na několik příkladů:

$$\begin{array}{rcl} t(n) \leq & \binom{n}{2} & \\ t(2) = & 1 & = \binom{2}{2} \\ t(3) = & \binom{3}{2} - 1 & = 2 \\ t(4) \geq & 4 & \end{array}$$
podíváme-li se na cyklus délky 4 

$$t(5) \geq 5$$
podíváme-li se na cyklus délky 5  ,ale

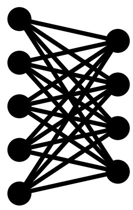
$$t(5) \geq 6$$
podíváme-li se na graf 

Věta:

$t(n) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \qquad \forall n \geq 2$

Důkaz:

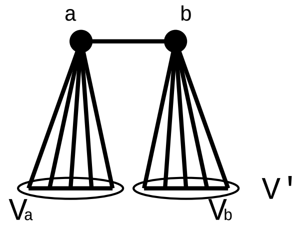
- $t(n) \geq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$
  Podíváme se, jak může vypadat graf, pro který $t(n) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$



  Takovýto graf se nazývá *úplný bipartitní* $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. V levé části je $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vrcholů a každý z nich je spojen hranů s každým z pravé části, kde je $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vrcholů.

- $t(n) \geq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$
  Důkaz indukcí dle n
  $t(2)$ $\surd$ $t(3)$ $\surd$
  Předpokládejme, že tvrzení platí pro n . Dokážeme tedy, že platí i pro $n + 2$.
  V indukčním kroku: nechť $G = (V, E)$, $|V| = n + 2$ je graf neobsahující trojúhelník . Nechť $\{a, b\} \in E$

$$
\begin{aligned}
V' &= V - \{a, b\} \\
E' &= E \cap \binom{V'}{2} \\
G' &= (V', E') \\
|E'| &\leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \\
E'' &= \{e \in E; |e \cap \{a, b\}| = 1\} \\
V_a &= \{x \in V'; \{x, a\}\ inE''\} \\
V_b &= \{x \in V'; \{x, b\}\ inE''\}
\end{aligned}
$$



– **Pozorování:**

$V_a \cap V_b = \emptyset$
Kdyby $x \in V_a \cap V_b \Rightarrow abx$ tvoří $\triangle$

$$
\begin{aligned}
|E''| = \quad & |V_a| + |V_b| && \leq n \\
|E| = \quad & 1 + |E'| + |E''| && \leq 1 + t(n) + n \\
|E| = \quad & 1 + |E'| + |E''| && \leq 1 + \frac{n^2}{4} + n \\
|E| = \quad & 1 + |E'| + |E''| && \leq \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\
|E| = \quad & 1 + |E'| + |E''| && \leq \frac{(n+2)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Čímž je důkaz hotov.

Dodatek věty:

Nechť $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy bez $\triangle$, $|E| = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Potom G je izomorfní úplnému bipartitnímu grafu $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}$

Důkaz:

Stejný jako ten předchozí, jen se všude místo $\leq$ použije $=$

$$|E''| = n \qquad \wedge \qquad |E'| = t(n)$$

$$G' \simeq K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

$$t(n) \sim \frac{1}{2}\binom{n}{2}$$

Problém:

Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy, který neobsahuje K_4?

$$\geq \frac{2}{3}\binom{n}{2} \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2}$$

Problém:

Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy, který neobsahuje C_4?

$$\leq n^{\frac{3}{2}} + n$$

Princip sudosti:

$$G = (V, E) \qquad \overbrace{d_G(v) = \underbrace{|\{e, e \in E \wedge v \in e\}|}_{\text{počet hran vedoucích z } v}}^{\text{stupeň vrcholu } v \text{ v grafu } G}$$

$$d_G(v) \geq 0 \qquad \wedge \qquad d_G(v) \leq n - 1$$

Věta:

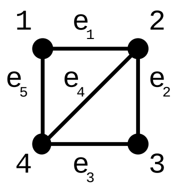
$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

Jinými slovy, sečteme-li stupně všech vrcholů v daném grafy, výsledek bude 2× větší, než počet hran v grafu.

Důkaz:

Definujme matici I_G s $|E|$ řádky a $|V|$ sloupci předpisem:

$$a_{ev} = 1 \Leftrightarrow v \in e \qquad \wedge \qquad a_{ev} = 0 \Leftrightarrow v \notin e$$



$$I_{\square} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_G \begin{cases} \text{v každém řádku je právě } 2 \times \text{ hodnota } 1 \\ \text{v každém sloupci je právě } d_g(v) \times \text{ hodnota } 1 \end{cases}$$

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{e \in E} 2 \times 1 = 2|E|$$

Důsledek principu sudosti:

Každý graf obsahuje sudý počet lichých stupňů.

Definice:

$G = (V, E)$ je souvislý , jestliže pro každé jeho dva vrcholy existuje cesta(v grafu G), která je spojuje.

cesta: posloupnost $x_0, e_1, x_1, cdots, e_t, x_t$, kde $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$ a $e_1 = \{x_{i-1}, x_i\}$ (nesmí se opakovat ani hrany ani vrcholy). Délka cesty z x do y je počet hran obsažených v dané posloupnosti.

tah: posloupnost $x_0, e_1, x_1, cdots, e_t, x_t$, kde $e_i \neq e_j \quad \forall i \neq j$ a $e_1 = \{x_{i-1}, x_i\}$ (nesmí se opakovat hrany, ale vrcholy se mohou opakovat).

sled: posloupnost $x_0, e_1, x_1, cdots, e_t, x_t$, kde $e_1 = \{x_{i-1}, x_i\}$ (mohou se opakovat hrany i vrcholy).

Definice:

Definujme relaci $\sim$ na V předpisem:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \text{ cesta z } x \text{ do } y \text{ v grafu } G$$

Tvrzení

$\sim$ je ekvivalence

Důkaz

- $x \sim x \qquad \surd$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x \qquad \surd$
- $x \sim y, y \sim z \Rightarrow \exists$ sled z x do z

  Pozorování: Nechť x, y jsou vrcholy, pro něž existuje sled z x do y. Potom každý nejkratší sled je cesta.

Důkaz: Nechť $x_0, e_1, x_1, \cdots, e_t, x_t$ je nejkratší sled
Nechť existují $i < j$ takové, že platí $x_i = x_j$
Potom $x_0, e_1, \cdots, e_i, x_i = x_j, e_{j+1}, \cdots, e_t, x_t$ je sled, ale kratší $\Rightarrow$ SPOR!

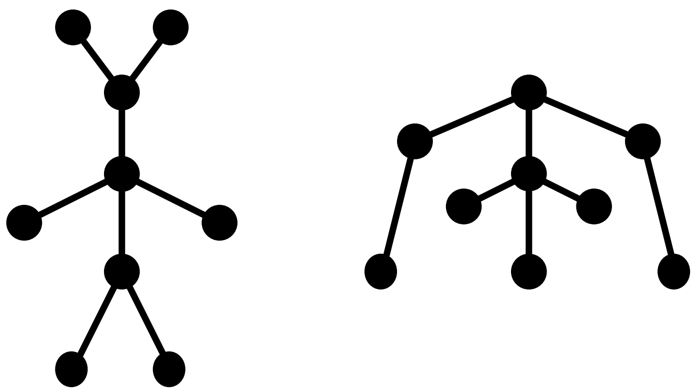
$\sim$ dělí množinu V na třídy ekvivalence.

Podgrafy indukované třídami ekvivalence $\sim$ nazýváme komponentami $G = (V, E)$.

Souvislý graf je graf, který obsahuje jen jedinou komponentu.
Cyklus je uzavřená cesta délky k.

Definice stromu:

Strom je graf, který je souvislý a neobsahuje kružnice.



Lemma (o listech):

List je vrchol stupně 1 ve stromu.
Každý alespoň dvouvrcholový strom má alespoň 2 listy.