7 Přednáška z 26. 11. 2003

V minulé přednášce jsme použili Cauchy-Schwarzovu nerovnost, tak si jí i dokážeme.

Cauchy-Scharzova nerovnost:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

Důkaz:

Vyjděme z něčeho, co zcela jistě platí:

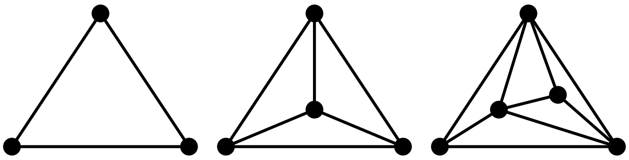
$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 &\geq 0 \\
\sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j)^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j)(x_j y_i) + \sum_{i,j=1}^{n} (x_j y_i)^2 &\geq 0 \\
2 \sum_{i,j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 &\geq 2 \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j)(x_j y_j) \\
\sum_{i,j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 &\geq \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_i)(x_j y_j) \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 &\geq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \right)^2 \\
\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} &\geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i
\end{aligned}$$

Princip sudosti(opakování z 5. přednášky):

Každý graf má sudý počet lichých stupňů.

Definice triangulace:

Triangulace je nakreslení grafu v rovině tak, že hrany jsou neprotínající se úsečky a všechny oblasti(stěny) jsou trojúhelníky(mají 3 hrany).



Lemma o duhovém trojúhelníku:

Nechť (V, E) je graf nějaké triangulace. Nechť $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ je libovolný rozklad množiny vrcholů. Potom počet duhových trojúhelníků je sudý.

Definice:

Duhový trojúhelník je trojúhelník, jehož vrcholy mají všechny 3 barvy.

Důkaz:

Nechť V a E jsou vrcholy a hrany triangulace a nechť $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ je rozklad. Dále nechť $T_1, \cdots, T_r$ jsou všechny oblasti nakreslení (včetně vnější oblasti)

Definujme graf $G = (\{1, \cdots, r\}, F)$ předpisem:
$\{i, j\} \in F$ jestliže T_i a T_j mají společné dva vrcholy v, v' takové, že $v \in V_1$ a $v' \in V_2$.

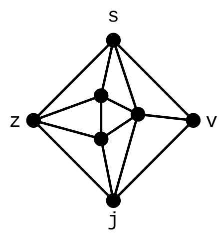
$d_g(i) = 0 \quad \vee \quad 1 \quad \vee \quad 2$ (3 nepřichází v úvahu, protože jde o $\triangle$)

$d_g(i) = 1 \iff T_i$ je duhový

Počet lichých stupňů je sudý (podle principu sudosti) $\Longrightarrow$ počet duhových trojúhelníků je sudý

Hra:

Máme čtyřúhelník $G = (W, E)$ a uvnitř jsou samé trojúhelníky. Dva hráči se střídají v označování vrcholů. Hráči I patří body z a v a hráči II body s a j. Cílem obou hráčů je spojit tyto body cestou.



Věta:

Hra nemůže skončit remízou. Pro libovolný rozklad $W = W_1 \cup W_2$, kde $z, v \in W_1$ a $s, j \in W_2$ existuje cesta P tak, že buď vrcholy cesty náleží do W_1 a je to cesta ze z do v, nebo vrcholy cesty náleží do W_2 a je to cesta ze s do j.

Důkaz (sporem):

Nechť existuje remíza. $W = W_I \cup W_{II}$ je výsledek sehrávky takové, že ani W_I ani W_{II} neobsahuje příslušnou cestu.

Definujme rozklad $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ následujícím předpisem:

$z \in V_1, s \in V_2$

$x \in V_1 \Leftrightarrow$ existuje cesta hráče I ze z do x

$x \in V_2 \Leftrightarrow$ existuje cesta hráče II ze s do x

$V_3 = W \setminus (V_1 \cup V_2)$, $v, j \in V_3$ (dle předpokladu)

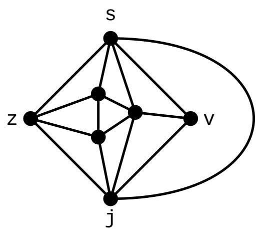
Pozorování:

Trojúhelníky uvnitř nejsou duhové.

Důkaz:

Nechť existuje duhový trojúhelník. Potom hráč, který je na tahu může označit vrchol $v_3 \in V_3$ a tudíž hra neskončila. <u>- SPOR!</u>

Uvažme graf G spolu s hranou $\{s, j\}$. Označme jej G'.



Potom G' je triangulace a má jen jeden duhový trojúhelník.

- SPOR! (s lemmatem o duhovém trojúhelníku)

Věta:

Nechť $G = (V, E)$ je souvislý. Potom G má kostru.

Definice:

Kostra G je graf (V, E') takový, že $E' \subseteq E$ a zároveň (V, E') je strom.

Důkaz:

Nechť (V, E'), $E' \subseteq E$ je minimální (vzhledem k $\subseteq$) podmnožina taková, že (V, E') je souvislý. Taková podmnožina existuje, protože (V, E) je souvislý.

Potom je (V, E') strom. (podle hlavní věty o stromech(viz. 6. přednáška))

Definice:

Graf $G = (V, E), w : E \to \mathbb{R}^+$ nazýváme vážený graf a $w(e)$ naývame váhou hrany e.

Problém minimální kostry:

Pro daný vážený graf $G = (V, E), w : E \to \mathbb{R}^+$ nalezněte kostru (V, E') grafu G tak, aby výraz $\sum_{e \in E'} w(e)$ nabyl minimální hodnoty.
Tento problém vyřešil roku 1926 O. Borůvka.