8 Přednáška z 3. 12. 2003

Problém minimální kostry:

Dostaneme souvislý graf $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}^+$. Našim úkolem je nalézt strom (V, E') tak, aby výraz $\sum_{e \in E} w(e)$ nabýval minimální hodnoty.

Řešení - Hladový (greedy) algoritmus:

1. uspořádejme hrany $e_1, \cdots, e_n$ tak aby tvořili neklesající posloupnost $(w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_n))$
2. definujme množiny $E_1, \cdots, E_n$ předpisem:
   - $E_1 = \{e_1\}$
   - $E_{i+1} = \begin{cases} E_i \cup \{e_{i+1}\} \text{ - pokud } (V, E_i \cup \{e_{i+1}\}) \text{ neobsahuje kružnici} \\ E_i \text{ - pokud } (V, E_i \cup \{e_{i+1}\}) \text{ obsahuje kružnici} \end{cases}$
3. (V, E_n) je hledaná kostra.

Věta:

Pro každý souvislý graf $G = (V, E)$ a ohodnocení $w : E \to \mathbb{R}^+$ nalezne hladový algoritmus nějakou minimální kostru.

Důkaz:

1. výsledek je kostra
   - (V, E_n) neobsahuje kružnici $\Rightarrow$ stačí dokázat souvislost
   - Důkaz souvislosti:
     - Předpokládejme pro spor, že $V = V_1 \cup V_2$ je rozklad takový, že $V_1, V_2 \neq \emptyset$ a zároveň $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a že neexistuje hrana $e = \{v_1, v_2\}; v_i \in V_i$
     - Zvol $a \in V_1$ a $b \in V_2$. Ze souvislosti grafu G plyne, že existuje cesta $a, e_1, v_1, \cdots, e_t, b$. Nechť v_i je poslední prvek cesty, který ještě náleží do V_1 a nechť v_{i+1} je následující prvek, který náleží do V_2. Potom existuje hrana $e = \{v_1, v_2\}$ taková, že $E_n \cup e$ netvoří kružnici $\Rightarrow$ **SPOR!**

2. Výsledek je minimální kostra

   Nechť $E_n = E'$ a nechť $(V, E\check{})$ je minimální kostrou. Našim cílem je dokázat, že $\sum_{e \in E'} w(e) \leq \sum_{e \in E\check{}} w(e)$

$$
\begin{aligned}
E' &= \{e'_1, \cdots, e'_m\} \qquad & w(e'_1) \leq \cdots \leq w(e'_m) \\
E\check{} &= \{e_1\check{}, \cdots, e_m\check{}\} \qquad & w(e_1\check{}) \leq \cdots \leq w(e_m\check{})
\end{aligned}
$$

   Dokážeme dokonce, že:

$$
\begin{array}{ccc}
w(e'_1) & \leq & w(e_1\check{}) \\
w(e'_2) & \leq & w(e_2\check{}) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

   Pro $i =$ platí

   Nechť i je nejmenší hodnota pro kterou platí $w(e'_i) > w(e_i\check{})$

   Definujme dále tyto množiny:

$$E'_{i-1} = \{e'_1, \cdots, e'_{i-1}\}$$

$$E_i\check{} = \{e_1\check{}, \cdots, e_i\check{}\}$$

   Stačí nalézt $e \in E_i\check{} \setminus E'_{i-1}$ tak, aby $E'_{i-1} \cup \{e\}$ netvořilo kružnici.

   Poznámka:

   Potom $w(e) \leq w(e_i\check{}) < w(e'_i)$, tedy hrana byla podle postupu algoritmu uvažována před e'_i, ale byla zamítnuta přesto, že dokonce $E'_{i-1} \cup \{e\}$ neobsahuje kružnici(množina hran v momentě rozhodování o dalším osudu hrany e byla podmnožinou množiny E'_{i-1}), což by vedlo k požadovanému sporu.

   Nechť $V_1, \cdots, V_k$ jsou komponenty grafu (V, E'_{i-1}) a nechť $E^1, \cdots, E^k$ jsou množiny hran jednotlivých komponent $E^j = \{e \in E'_{i-1}; e \subseteq V_j\}$

   Dále nechť $\check{E}^1, \cdots, \check{E}^k$ jsou množiny hran jednotlivých komponent, které zároveň patří do minimální kostry $\check{E}^{\,j} = \{e \in E_i\check{}; e \subseteq V_j\}$

   Potom $|E^j| = |V_j| - 1$ neboť (V_j, E^j) je strom(viz. hlavní věta o stromech) a $|\check{E}^j| \leq |V_j| - 1$, protože graf $(V_j, \check{E}_j)$ nemá kružnice.

Z předpokladu ale víme, že

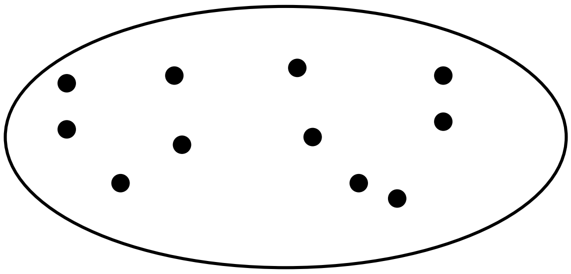
$$\sum |\check{E}^{\,j}| = |E_i\check{}\,| \quad > \quad |E'_{i-1}| = \sum |E^j| = i - 1$$

Tedy existuje hrana $e \in E_i\check{}\,\setminus E'_{i-1}$ taková, že $e \not\subseteq V_j$. Graf $(V, E_{i-1} \cup \{e\})$ tedy nemůže obsahovat kružnici.

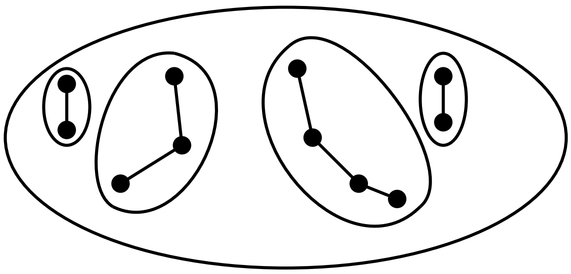
Poznámka(bez důkazu) - Borůvkův algoritmus:

Požaduje oproti hladovému algoritmu aby relace $w : E \to \mathbb{R}^+$ byla prostá. Jinými slovy žádné dva vrcholy nesmějí mít stejnou vzdálenost. Což není velký problém zařídit. Stačí, aby se lišili o něco hodně malého.

1. Každý bod je komponenta



2. Každou komponentu spojíjeme s nejbližším sousedem



3. Ze spojených komponent utvoříme jednu komponentu a pokračujeme předchozím krokem dokud nezbyde pouze jedna jediná komponenta, která už je minimální kostrou.

Počet koster:

Nechť $G = (V, E)$ je graf na množině V. Označme $t(G)$ počet koster grafu G. Potom $t(n)$ dostaneme hodnoty:

$$\begin{array}{rcll} t(G) & = & 0 & G \text{ je nesouvislý} \\ t(G) & = & 1 & G \text{ je strom} \\ t(n) & = & t(K_n) & \end{array}$$

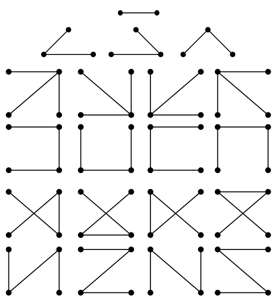
Věta:

$t(n) = n^{n-2} \qquad \forall n \geq 2$

Důkaz použitý při prvním zveřejnění:

$t(2) = 1$ $\surd$

$t(3) = 3$ $\surd$



$t(4) = 16$ $\surd$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Věta:

Posloupnost $d_1, \cdots, d_n$ je posloupnost všech stupňů vrcholů nějakého stromu s n vrcholy($n \geq 2$) právě když $d_i \geq 1 \quad \forall i = 1, \cdots, n$ a zároveň $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2 = 2|E|$.

Definice:

Skóre grafu je posloupnost všech stupňů jeho vrcholů.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Víme.

$\Leftarrow$ Pro dané skóre splňující předchozí podmínku nalezneme strom $T = (\{1, \cdots, n\}, E)$ takový, že $d_t(i) = d_i$

Postupujme indukcí dle n - $n = 2$ $\surd$

Předpokládejme, že platí pro n a dokazujme pro $n + 1$:

$d_1, \cdots, d_{n+1}$ splňují podmínku. Tudíž existuje $d_i = 1$ a protože $n > 2$ tak existuje i $d_j \geq 2$.

Předpokládejme, že $i = n$.

Definujme $d'_1, \cdots, d'_n$ předpisem $d'_l = d_l \wedge d'_j = d_j - 1$. Takováto posloupnost splňuje podmínky a podle předpokladu je strom. Podle Lemmatu o postupné výstavbě stromu je původní posloupnost také strom.