Poznámky z přednášek z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Přednášel: Prof. RNDr. Jaroslav Nešetřil, DrSc.
Zapsal: Michal Hrušecký

zimní semestr 2003/2004

Obsah

1 Přednáška z 1. 10. 2003 1

2 Přednáška z 22. 10. 2003 4

3 Přednáška z 29. 10. 2003 8

4 Přednáška z 5. 11. 2003 15

5 Přednáška z 12. 11. 2003 20

6 Přednáška z 19. 11. 2003 26

7 Přednáška z 26. 11. 2003 31

8 Přednáška z 3. 12. 2003 35

9 Přednáška z 10. 12. 2003 40

10 Přednáška ze 17. 12. 2003 46

1 Přednáška z 1. 10. 2003

Problém šatnářky:

Šatnářka má velké problémy. Tak velké, že nám vystačí na několik hodin.

K šatnářce přicházejí hosté (jejich počet je **n**) a odkládají si klobouky (každý host jeden klobouk). Šatnářka je nedbale ukládá. A když hosté odcházejí, dá každému ten klobouk, který jí přijde jako první pod ruku. Klobouky jsou ovšem rozlišitelné a každý host si dokáže poznat svůj klobouk. Pro šatnářku jsou ovšem nerozlišitelné. Jaká je pravděpodobnost, že žádný host nedostane svůj klobouk?

<u>Máme tedy:</u>

množinu hostů $H = \{H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n\}$
množinu klobouků $K = \{K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n\}$

a šatnářku, která vyrábí zobrazení $H \to K$

<u>zobrazení</u> $f : X \to Y$ - speciální relace - $\forall\ x \in X\ \exists$ právě jedno $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f\ \wedge\ y = f(x)$
<u>relace</u> na množině X je podmnožina $X \times X = \{(x, y); x, y \in X\}$

Druhy zobrazení

<u>$f : X \to Y$</u>	zobrazení množiny X do množiny Y
<u>prosté</u>	$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
<u>na</u>	$\forall y \in Y \exists x \in X$ tak, že $f(x) = y$
<u>bijekce</u>	*prosté* a *na* zároveň - vzájemně jednoznačné zobrazení

Množina X je konečná, jestliže existuje bijekce X a množiny $1, 2, 3, \cdots, n$ pro nějaké n jednoznačně určené, $|X| = n$ - počet prvků (velikost(mohutnost)) množiny X.

Kolik je zobrazení X do Y, jestliže $|X| = m$ a $|Y| = n$
- $\underline{\underline{n^m}}$

Kolik je zobrazení X na Y, jestliže $|X| = m$ a $|Y| = n$
- dozvíme se příště...

Kolik je prostých zobrazení X do Y, jestliže $|X| = m$ a $|Y| = n$
- $\underline{\underline{(n)(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}}$

Kolik je bijekcí $X \to Y$, jestliže $|X| = m$ a $|Y| = n$
- $\underline{\underline{m!}}$ pro $m = n$
- $\underline{\underline{0}}$ pro $m \neq n$

Věta 1 $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Důkaz 1 *Místo* $n!$ *použijeme* $(n!)^2$

$$(n!)^2 = ((n)(n-1)\dots(2)(1))^2 = \begin{array}{c} n(n-1)\dots(2)(1). \\ .(1)(2)\dots(n-1)n \end{array} = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$$

Pozorování 1 $k(n-k+1) \leq (\frac{n+1}{2})^2$

Pozorování 2 $k(n-k+1) \geq n$

Důkaz pozorování 1 Výrazy na obou stranách jsou kladné, můžeme je tedy odmocnit a vyjde nám, že geometrický průměr je menší než aritmetický, což můžeme dokázat:

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{k(n-k+1)} & \leq & \dfrac{n+1}{2} & \qquad k = a;\ n-k+1 = b \\ \sqrt{ab} & \leq & \dfrac{a+b}{2} & \\ 2\sqrt{ab} & \leq & a+b & \\ 0 & \leq & a - 2\sqrt{ab} + b & \\ 0 & \leq & (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 & \end{array}$$

Dosadíme-li meze, které nám vyšli do $\prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$, vyjde nám:

$$\begin{array}{rcccl} n^n & \leq & \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) & \leq & (\frac{n+1}{2})^2 \\ n^n & \leq & (n!)^2 & \leq & (\frac{n+1}{2})^2 \\ n^{\frac{n}{2}} & \leq & n! & \leq & \frac{n+1}{2} \end{array}$$

Pro přesnější odhad $n!$ lze použít *Stirlingovu formuli*:

$$\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{-1}{12n-1}} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{-1}{12n+1}}$$

Zpět k šatnářce!

Urči počet $s(n)$ $\overbrace{\text{bijekcí } f : H \to K}^{\text{permutací } \pi}$ takových, že $f(i) \neq i \ \forall \ i = 1, 2, 3, \ldots, n$

2 Přednáška z 22. 10. 2003

Princip inkluze a exkluze

Pozorování:

A, B jsou konečné množiny:
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A, B, C jsou konečné množiny:
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Zobecněním dostaneme

Princip inkluze a exkluze

Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom platí:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$

$$\text{obecný } k\text{-tý člen } (-1)^{|I|-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Důkaz: indukcí dle n

$n = 1$ $|A| = |A|$

$n = 2$ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$n \to n+1$

$$|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| = |\underbrace{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)}_{A} \cup \underbrace{A_{n+1}}_{B}| \overset{n=2}{=} |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}| =$$

$$= |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})| =$$

použijeme indukční předpoklad

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i| +$$

$$+ |A_{n+1}| - \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| + \cdots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n} |\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i|$$

sečtením obecných k-tých členů dostaneme

$$\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\cdots,n\}\\ |I|=k}} |\bigcap_{i\in I} A_i| + \\ \displaystyle\sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\cdots,n\}\\ |I|=k-1}} |\bigcap_{i\in I} A_i \cap A_{n+1}| \\ \hline \displaystyle\sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\cdots,n+1\}\\ |I|=k}} |\bigcap_{i\in I} A_i| \end{array}$$

Šatnářka

množina $M = \{1, 2, \dots, n\}$

Počítáme počet permutací π množiny M bez pevného bodu (bez pevného bodu = $\pi(i) \neq i, \forall i \in M$)
$X = \{\pi; \pi \text{permutace} M\}$
$A_i = \{\pi; \pi \in X \wedge \pi(i) = i\}$

$$s(n) = |X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = n! - \sum \underbrace{|A_i|}_{(n-1)!} + \sum \underbrace{|A_i \cap A_j|}_{(n-2)!} \dots =$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^k \underbrace{\binom{n}{k}}_{\frac{n!}{(n-k)!k!}} (n-k)! + \dots + \underbrace{(-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!}_{1} =$$

$$= \underbrace{n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big)}_{\text{konverguje k } \frac{n!}{e}}$$

Interpretace Principu inkluze a exkluze

množina X, vlastnosti(predikáty) $V_1, V_2, \dots, V_n$

počet prvků bez vlastností = počet prvků - $\sum$ prvků majících alespoň 1 vlastnost + $\sum$ prvků majících alespoň 2 vlastnosti - ...

$$\underbrace{|X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i|}_{\text{počet prvků bez vlastností}} = \underbrace{|X| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \dots}_{\text{počet prvků bez vlastností(podle PIE)}}$$

Aplikace

Matice $k \times n$ se nazývá *latinský obdélník (pro* $k = n$ latinský čtverec), jestliže
$a_{ij} \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ a
$\forall i : a_{ij} \neq a_{ij'} \iff j \neq j'$
$\forall j : a_{ij} \neq a_{i'j} \iff i \neq i'$

Kolik je latinských obdélníků $k \times n$?

$$\begin{array}{ccl} 1 \times n & \text{-} & n! \\ 2 \times n & \text{-} & n!s(n) \doteq \frac{(n!)^2}{e} \\ 3 \times n & \leq & \frac{(n!)^3}{e^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k \times n & \leq & \frac{(n!)^k}{e^{k-1}} \end{array}$$

3 Přednáška z 29. 10. 2003

Vlastnosti relací:

X je množina $\qquad R(R \subseteq X \times X)$ je *relace* na X

1. Relace R je *reflexivní* jestliže $(x,x) \in R, \forall x \in X$
2. Relace R je *symetrická* jestliže $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$
3. Relace R je *antisymetrická* jestliže $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \notin R$
4. Relace R je *slabě antisymetrická* jestliže $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow x = y$
5. Relace R je *tranzitivní* jestliže $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$
6. Relace R je *úplná* jestliže $\forall x,y \in X$ platí $(y,x) \in R \vee (x,y) \in R$

Relace R je *ekvivalence* na X, pokud splňuje body 1, 2 a 5

Relace R je *částečné uspořádání* (množina (X,R) je *částečně uspořádaná*), pokud splňuje body 1, 4 a 5

Relace R je *lineární uspořádání* (množina (X,R) je *lineárně uspořádaná*), pokud splňuje body 1, 4, 5 a 6

Inverzní relace	- $R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$
Diagonála	- $\Delta_x = \{(x,x) : x \in X\}$
Složení	- $R \circ S = \{(x,z) : \exists y \in X : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

Vlastnosti relací můžeme zapsat tedy i jinak:

1. $\Delta_x \subseteq R$	3. $R \cap R^{-1} = \emptyset$	5. $R \circ R \subseteq R$
2. $R^{-1} = R$	4. $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_x$	6. $R \cup R^{-1} = X \times X$

Příklady:

ekvivalence	- shodnost, podobnost, ...
částečné uspořádání	- lineární uspořádání
	- $\mathbb{N} \qquad R = \{(m,n); m\|n\}$

Věta:

Pro každou konečnou částečně uspořádanou množinu (X, R) existuje lineární uspořádání L množiny X tak, že $R \subseteq L$

Definice:

(X, R) je částečně uspořádaná množina. $x \in X$ nazvu *minimální prvek* (X, R), jestliže neexistuje $y \in X$ tak, že $(y, x) \in R \wedge (y \neq x)$.

Důkaz:

Indukcí dle $|X|$

$|X| = 1 \qquad \surd$

$n \to n + 1$

Nechť $x \in X$ je *minimální prvek* $X(v(X, R))$. Definujeme částečně uspořádanou množinu (X', R') předpisem $X' = X - \{x\}$ a $R' = R \cap (X' \times X')$

$|X'| = n \qquad$ dle indukce $R' \subseteq L' \qquad L'-$lineární uspořádání

definujme relaci L předpisem:

$$(y, z) \in L \Leftrightarrow (y, z) \in L' \qquad x \neq y, x \neq z$$
$$(x, x) \in L$$
$$(x, y) \in L \qquad \forall y \in X'$$

Je zřejmé, že L je lineární uspořádání a že $L \supseteq R$ (protože x je minimální prvek.

Definice:

(X, R) je částečně uspořádaná množina. $x \in X$ nazvu *nejmenší prvek* (X, R), jestliže $(x, y) \in R \forall y \neq x, y \in X$.

Definice:

(X, R) je částečně uspořádaná množina. $x \in X$ nazvu *maximální prvek* (X, R), jestliže x je minimální prvek v (X, R^{-1}).

Definice:

(X, R) je částečně uspořádaná množina. $x \in X$ nazvu *největší prvek* (X, R), jestliže x je nejmenší prvek v (X, R^{-1}).

Věta:

Každá konečná neprázdná částečně uspořádaná množina má minimální prvek.

Důkaz:

intuitivní: Zvol $x \in X$
Pokud je x minimální, konec.
Jinak existuje $x' \neq x, (x', x) \in R$. Opakuj tedy pro x'.

sporem: Zvol $x \in X$ tak, aby $\{y; (x, y) \in R\}$ měla maximální počet prvků $\leq |X|$. Pak tvrdím, že x je minimální.

spor: Kdyby existovalo $z \neq x, (z, x) \in R$, pak

$$|\{y; (z, y) \in R\}| \geq |\{y; (x, y) \in R\}| + 1$$

Množinové znázornění ekvivalencí a částečně uspořádaných množin

Definice:

Množina $\mathcal{P}(X) = \{Y; Y \subseteq X\}$ se nazývá *potenční množina.* Značí se $\mathcal{P}(X), {}^X2, 2^X, exp(X)$. $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

Existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathcal{P}(X)$ a $\{f : X \to \{0,1\}\}$

$A \subseteq X$ $\quad f : X \to \{0,1\}$ $\quad$ charakteristická funkce množiny - ${}^\chi A$

$f(x) = 1 \quad x \in A$

$f(x) = 0 \quad x \notin A$

$\{x \in X, f(x) \neq 0\}$ - nosič f

Částečně uspořádaná množina

$B_X = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$

Věta:

Každá částečně uspořádaná množina (X, R) je izomorfní indukovanému poduspořádánému $B_X = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$

Relace (X, R) a (X', R') jsou *izomorfní*, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : X \to X'$ tak, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in R'$

(X, R) je indukované poduspořádání (X', R') pokud

$$X \subseteq X' \qquad \wedge \qquad R \subseteq R' \qquad \wedge \qquad R = R' \cap (X \times X)$$

Důkaz:

(X, R) $\qquad (\mathcal{P}(X), \subseteq)$

Definujme zobrazení $f : X \to \mathcal{P}(X)$ předpisem $f(x) = \{y; (y, x) \in R\}$

f je prosté — viz. slabá antisymetrie

$(x, y) \in R \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$ — f je tranzitivní

$f(x) \subseteq f(y) \Rightarrow (x, y) \in R$ — f je reflexivní

O ekvivalencích

(X, R) je ekvivalence

$R(x) = \{y, (x, y) \in R\}$ - třída ekvivalence obsahující x

Věta: $x, y \in X \Rightarrow \Big(R(x) = R(y)\Big) \vee \Big(R(x) \cap R(y) = \emptyset\Big)$

Důkaz: Nechť $R(x) \cap R(y) \neq \emptyset$ a $z \in R(x) \cap R(y)$

$$(x, z) \in R \qquad (y, z) \in R \Leftrightarrow (x, z) \in R \qquad (z, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R$$
$$\text{tedy}(z, x) \in R \Leftrightarrow (z, y) \in R$$
$$\text{tedy} R(x) = R(y)$$

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_t$ jsou všechny různé množiny tvaru $R(x), x \in X$

$$X_i \cap X_j = \emptyset \qquad \forall \qquad 1 \leq i, j \leq t, i \neq j \qquad \bigcup_{i=1}^{t} X_i = X$$

Nazvěme je *rozklad* X na části $X_1, \ldots, X_t$

Je-li $X_1, \ldots, X_t$ rozklad množiny X, definujme relaci R na X předpisem:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow \exists i \text{ tak, že } x, y \subseteq X_i$$
$$R \text{ je ekvivalence}$$

Nechť je (X, R) částečně uspořádaná množina

$A \subseteq X$ je *nezávislá*, jestliže $x \neq y \in A \Rightarrow (x, y) \notin R \wedge (y, x) \notin R$

$A \subseteq X$ je *řetězec* v (X, R), jestliže $\Big(A, R \cap (A \times A)\Big)$ je lineárně uspořádaná množina.

Označme $\alpha(X, R)$ maximální počet prvků nezávislé podmnožiny a $\omega(X, R)$ maximální počet prvků řetězce.

Věta: $\alpha(X,R).\omega(X,R) \geq |X|$ pro každou částečně uspořádanou množinu (X,R).

Důkaz: Definujme podmnožiny $X_1, X_2, \ldots, X_t$ množiny X předpisem

$$\begin{array}{lcr} X_1 = & \{x, x \text{ je minimální prvek } (X,R) & \neq \emptyset \\ X_2 = & \{x, x \text{ je minimální prvek } \Big(X \setminus X_1, R \cap ((X \setminus X_1) \times (X \setminus X_1))\Big) & \neq \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Jestliže $X_1, \ldots, X_l$ jsou dány

$$X_{l+1} = \{x, x \text{ je minimální prvek } \Big(X \setminus \bigcup_{i=1}^{l} X_i, R \cap ((X \setminus \bigcup_{i=1}^{l} X_i) \times (X \setminus \bigcup_{i=1}^{l} X_i))\Big)$$

$X_1, X_2, \ldots, X_t$ tvoří rozklad X
X_i jsou nezávislé množiny v (X,R) $\quad |X_i| \leq \alpha(X,R)$

Pozorování: $t = \omega(X,R)$

$\omega(X,R) \leq t$ - Je-li $A \subseteq X$ řetězec $\Rightarrow |A \cap X_i| \leq 1$
- různé prvky A jsou v relaci
- různé prvky X_i nejsou v relaci

$t \leq \omega(X,R)$ - stačí dokázat, že (X,R) obsahuje řetězec délky t
$x_{i-1} \in X_{i-1} \qquad x_i \in X_i$
- pokud $(x_{i-1}, x_i) \notin R$, x_i nebyl minimální prvek $\Rightarrow$ SPOR

Aplikace - Erdös-Szekeres

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je posloupnost reálných čísel. Potom posloupnost obsahuje monotónní (neklesající nebo nerostoucí) podposloupnost s $\lceil \sqrt{n} \rceil$ prvky.

Důkaz:

Definujeme částečně uspořádanou množinu (X, R) předpisem:

$$(i,j) \in R \Leftrightarrow i \leq j \wedge x_i \leq x_j$$

A je řetězec v (X, R):	$(i,j) \in R$	$\forall i,j \in A$		
	$i_1 < \ldots < i_t$	$\wedge$	$x_1 \leq \ldots \leq x_t$ - neklesající	
A je nezávislá množina v (X, R):	$(i,j) \notin R$			
	$i_1 < \ldots < i_t$	$\wedge$	$x_1 > \ldots > x_t$ - nerostoucí	

$$\alpha.\omega \geq |X| \Rightarrow \alpha \geq \sqrt{|X|} \vee \omega \geq \sqrt{|X|}$$

Příklad:

Množina X a podmnožina $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ spolků

Kolik je nezávislých spolků?
To záleží na zadání, ale...
Kolik jich je maximálně? $\alpha(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

Množiny M a M' ($M \neq M'$ jsou závislé, jestliže $M \subseteq M' \quad \vee \quad M' \subseteq M$).

Věta Spernerova

$$\alpha(B_n) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

4 Přednáška z 5. 11. 2003

Spernerův problém - pokračování

Důkaz

1. $\alpha(B_n) \geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

   $\binom{X}{k}$ je nezávislé v $\mathcal{P}(X)$

   $\alpha(B_n) \geq \binom{n}{k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$

   $\binom{n}{k}$ je největší pro $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

2. $\alpha(B_n) \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

   $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) \qquad \mathcal{M}$ je nezávislá v B_n

   $\mathcal{M} \not\subseteq M \qquad \forall M \in \mathcal{M}$

   Počítání dvěma způsoby $A = (a_{ij})$ řádu $m \times n, a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\sum_{j=1}^{m} a_{ij})}_{\text{řádkové součty}} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} a_{ij})}_{\text{sloupcové součty}}$$

   $|\{(M, R); M \in \mathcal{M} \quad \wedge \quad R \text{ je maximální řetězec v } B_n \quad \wedge \quad M \in R\}|$

   (a)

$$= \sum_{R' \in R} |\{M \in \mathcal{M} \wedge M \in R'\}| \leq |R| = n!$$

(b) Počet maximálních řetězců obsahujících M

$$= \sum_{M \in \mathcal{M}} \overbrace{|M|!}^{\text{cesty do } M} \quad \underbrace{(n-|M|)!}_{\text{cesty z } M}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{M \in \mathcal{M}} |M|!(n-|M|)! &\leq n! \\
\sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{|M|!(n-|M|)!}{n!} &\leq 1 \\
\sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{1}{\frac{n!}{|M|!(n-|M|)!}} &\leq 1 \\
\sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{1}{\binom{n}{|M|}} &\leq 1 \\
\sum \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} &\leq \sum \frac{1}{\binom{n}{|M|}} \\
|\mathcal{M}| \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} &\leq 1 \\
|\mathcal{M}| &\leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
\alpha(B_n) &\leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}
\end{aligned}$$

Littlewood-Offordův problém

Výsledek nějakého děje, jehož průběh je ovlivňován různými vlivy lze vyjádřit:

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{vlivy} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ a_i > 0 \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = a \qquad \text{počet možných výrazů je } 2^n$$

Kolik bude výrazů takových, že $a \in (x-1, x+1)$?

- méně než $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
- Tento výsledek je nejlepší možný v následujícím smyslu:

  $\exists a_1, \ldots, a_n \wedge \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ a_i > 0 \wedge x \in \mathbb{R}$ tak, že počet výrazů v intervalu $(x-1, x+1)$ je $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Důkaz(Erdös-Szekeres):

Definujme $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ předpisem

$$M \subseteq \mathcal{M} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\sum_{i \in M} a_i - \sum_{i \notin M} a_i}_{\sum \varepsilon_i a_i} \in < x-1, x+1 >$$

Pozorování:

$\mathcal{M}$ je nezávislá množina.

Důkaz pozorování:

sporem: předpokládejme, že $M, M' \in \mathcal{M}, M \subsetneq M' \Rightarrow \exists i_0 \in (M' \setminus M)$

$$M \subsetneq \qquad M \cup \{i_0\} \qquad \subseteq M'$$

$$\sum_{i \in M} a_i - \sum_{i \notin M} a_i < \sum_{i \in M \cup \{i_0\}} a_i - \sum_{\substack{i \notin M \\ i \neq i_0}} a_i \leq \sum_{i \in M'} a_i - \sum_{i \notin M'} a_i$$

$$\sum_{i\in M} a_i - \sum_{i\notin M} a_i - \sum_{i\in M\cup\{i_0\}} a_i - \sum_{\substack{i\notin M\\ i\neq i_0}} a_i = 2a_{i_0} > 2$$

SPOR!

Grafy

Graf $G(V,E)$ se skládá z konečné množiny vrcholů V a z množiny hran E
$E \subseteq \binom{V}{2}$; $E = \{e, e \subseteq V \wedge |e| = 2\}$

Typy grafů:

- K_n - úplný graf na n vrcholech $|V| = n$ $\quad |E| = \binom{|V|}{2}$
- C_n - kružnice (cyklus) na n vrcholech $\quad n \geq 3$

  $V = \{v_1, \dots v_n\}, E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$

- P_n - cesta na n vrcholech

  $$V = \{v_1, \dots v_n\}, E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$$

  – délka cesty P_n je počet jejích hran, tedy $n - 1$

- $G_1(V_1, E_1)$ je podgraf grafu $G_2(V_2, E_2)$, jestliže $V_1 \subset V_2 \wedge E_1 \subset E_2$
- $G_1(V_1, E_1)$ je indukovaný podgraf grafu $G_2(V_2, E_2)$, jestliže
  $V_1 \subset V_2 \wedge E_1 = E_2 \cap V_1 \times V_1$
- $G_1(V_1, E_1)$ a $G_2(V_2, E_2)$ jsou izomorfní, jestliže existuje bijekce
  $f : V_1 \to V_2 : \forall x, y \in V_1 : \{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$

Kolik je grafů na množině $\{1, 2, \dots, n\}$?

$$- \quad 2^{\binom{n}{2}}$$

$$\text{pozorování: } 2^{\binom{n}{2}} \gg 2^{n \log_2 n} = n^n > n!$$

Izomorfizmus na $G(V,E)$ je ekvivalence $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ rozklad $G(V,E)$ na třídy ekvivalence
Kolik je $\underbrace{\text{tříd ekvivalence izomorfismu}}_{\text{neizomorfních grafů}}$?

- Každá je menší než $n!$
-

$$Iso_n \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$$

5 Přednáška z 12. 11. 2003

Grafy

úplný graf:

K_3 - trojúhelník 
K_4 - 
K_8 - 
K_n - Každý si jistě dokáže představit, jak to bude dále pokračovat

Problém:

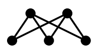
Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy, který neobsahuje $\triangle$?

- nejvýše $\binom{n}{2}$.

Označme tento počet $t(n)$ a podívejme se na několik příkladů:

$$\begin{array}{rcl}
t(n) \leq & \binom{n}{2} & \\
t(2) = & 1 & = \binom{2}{2} \\
t(3) = & \binom{3}{2} - 1 & = 2 \\
t(4) \geq & 4 & \text{podíváme-li se na cyklus délky 4} \\
t(5) \geq & 5 & \text{podíváme-li se na cyklus délky 5} \text{ ,ale} \\
t(5) \geq & 6 & \text{podíváme-li se na graf}
\end{array}$$



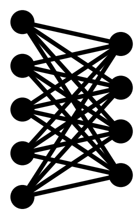


Věta:

$t(n) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \qquad \forall n \geq 2$

Důkaz:

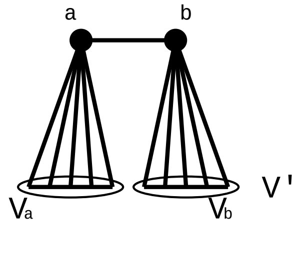
- $t(n) \geq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$
  Podíváme se, jak může vypadat graf, pro který $t(n) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$



  Takovýto graf se nazývá *úplný bipartitní* $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. V levé části je $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vrcholů a každý z nich je spojen hranů s každým z pravé části, kde je $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vrcholů.

- $t(n) \geq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$
  Důkaz indukcí dle n
  $t(2)$ $\surd$ $t(3)$ $\surd$
  Předpokládejme, že tvrzení platí pro n . Dokážeme tedy, že platí i pro $n+2$.
  V indukčním kroku: nechť $G = (V, E)$, $|V| = n+2$ je graf neobsahující trojúhelník . Nechť $\{a, b\} \in E$

$$
\begin{aligned}
V' &= V - \{a, b\} \\
E' &= E \cap \binom{V'}{2} \\
G' &= (V', E') \\
|E'| &\leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \\
E'' &= \{e \in E; |e \cap \{a, b\}| = 1\} \\
V_a &= \{x \in V'; \{x, a\}\ inE''\} \\
V_b &= \{x \in V'; \{x, b\}\ inE''\}
\end{aligned}
$$



– **Pozorování:**

$V_a \cap V_b = \emptyset$
Kdyby $x \in V_a \cap V_b \Rightarrow abx$ tvoří $\triangle$

$$\begin{aligned}
|E''| &= \quad |V_a| + |V_b| && \leq n \\
|E| &= 1 + |E'| + |E''| && \leq 1 + t(n) + n \\
|E| &= 1 + |E'| + |E''| && \leq 1 + \frac{n^2}{4} + n \\
|E| &= 1 + |E'| + |E''| && \leq \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\
|E| &= 1 + |E'| + |E''| && \leq \frac{(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Čímž je důkaz hotov.

Dodatek věty:

Nechť $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy bez $\triangle$, $|E| = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Potom G je izomorfní úplnému bipartitnímu grafu $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}$

Důkaz:

Stejný jako ten předchozí, jen se všude místo $\leq$ použije $=$

$$|E''| = n \qquad \wedge \qquad |E'| = t(n)$$

$$G' \simeq K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

$$t(n) \sim \frac{1}{2}\binom{n}{2}$$

Problém:

Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy, který neobsahuje K_4?

$$\geq \frac{2}{3}\binom{n}{2} \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2}$$

Problém:

Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy, který neobsahuje C_4?

$$\leq n^{\frac{3}{2}} + n$$

Princip sudosti:

$$G = (V, E) \qquad \overbrace{d_G(v) = \underbrace{|\{e, e \in E \wedge v \in e\}|}_{\text{počet hran vedoucích z } v}}^{\text{stupeň vrcholu } v \text{ v grafu } G}$$

$$d_G(v) \geq 0 \qquad \wedge \qquad d_G(v) \leq n - 1$$

Věta:

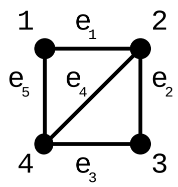
$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

Jinými slovy, sečteme-li stupně všech vrcholů v daném grafy, výsledek bude 2× větší, než počet hran v grafu.

Důkaz:

Definujme matici I_G s $|E|$ řádky a $|V|$ sloupci předpisem:

$$a_{ev} = 1 \Leftrightarrow v \in e \qquad \wedge \qquad a_{ev} = 0 \Leftrightarrow v \notin e$$



$$I_{\boxslash} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_G \begin{cases} \text{v každém řádku je právě } 2 \times \text{ hodnota } 1 \\ \text{v každém sloupci je právě } d_g(v) \times \text{ hodnota } 1 \end{cases}$$

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{e \in E} 2 \times 1 = 2|E|$$

Důsledek principu sudosti:

Každý graf obsahuje sudý počet lichých stupňů.

Definice:

$G = (V, E)$ je souvislý , jestliže pro každé jeho dva vrcholy existuje cesta(v grafu G), která je spojuje.

cesta: posloupnost $x_0, e_1, x_1, cdots, e_t, x_t$, kde $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$ a $e_1 = \{x_{i-1}, x_i\}$ (nesmí se opakovat ani hrany ani vrcholy). Délka cesty z x do y je počet hran obsažených v dané posloupnosti.

tah: posloupnost $x_0, e_1, x_1, cdots, e_t, x_t$, kde $e_i \neq e_j \quad \forall i \neq j$ a $e_1 = \{x_{i-1}, x_i\}$ (nesmí se opakovat hrany, ale vrcholy se mohou opakovat).

sled: posloupnost $x_0, e_1, x_1, cdots, e_t, x_t$, kde $e_1 = \{x_{i-1}, x_i\}$ (mohou se opakovat hrany i vrcholy).

Definice:

Definujme relaci $\sim$ na V předpisem:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \text{ cesta z } x \text{ do } y \text{ v grafu } G$$

Tvrzení

$\sim$ je ekvivalence

Důkaz

- $x \sim x \qquad \surd$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x \qquad \surd$
- $x \sim y, y \sim z \Rightarrow \exists$ sled z x do z

  Pozorování: Nechť x, y jsou vrcholy, pro něž existuje sled z x do y. Potom každý nejkratší sled je cesta.

Důkaz: Nechť $x_0, e_1, x_1, \cdots, e_t, x_t$ je nejkratší sled
Nechť existují $i < j$ takové, že platí $x_i = x_j$
Potom $x_0, e_1, \cdots, e_i, x_i = x_j, e_{j+1}, \cdots, e_t, x_t$ je sled, ale kratší $\Rightarrow$ SPOR!

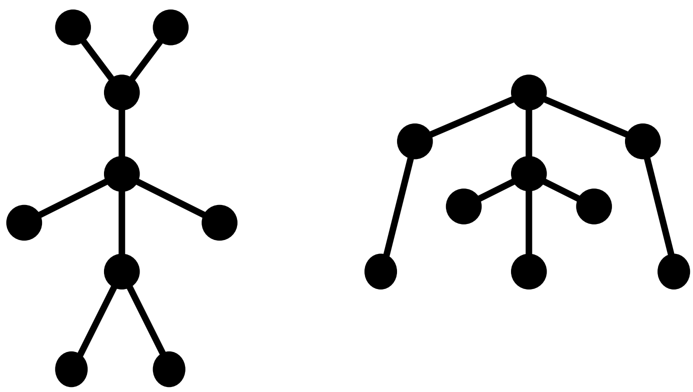
$\sim$ dělí množinu V na třídy ekvivalence.

Podgrafy indukované třídami ekvivalence $\sim$ nazýváme komponentami $G = (V, E)$.

Souvislý graf je graf, který obsahuje jen jedinou komponentu.
Cyklus je uzavřená cesta délky k.

Definice stromu:

Strom je graf, který je souvislý a neobsahuje kružnice.



Lemma (o listech):

List je vrchol stupně 1 ve stromu.
Každý alespoň dvouvrcholový strom má alespoň 2 listy.

6 Přednáška z 19. 11. 2003

Důkaz Lemmatu z předchozí přednášky

Nechť $x_0, e_1, x_1, \cdots, e_t, x_t$ je cesta maximání délky délky. $t \geq 1 \wedge t \leq |V| - 1$ (Tyto omezující podmínky plynou z předpokladu a souvislostí).

Potom x_0 a x_t jsou listy.

Dokažme sporem. Předpokládejme, že $d_t(x_0) > 1 \Rightarrow \exists y \neq x_1$ tak, že $\{x_0, y\} \in E$. Potom musí nastat jeden z následujících případů:

- $y \in \{x_2, x_3, \cdots, x_t\} : y = x_i$ Vyjdeme-li z tohoto předpokladu, tak dostáváme kružnici

$\Rightarrow$ **SPOR!**

- $y \notin \{x_2, x_3, \cdots, x_t\}$ Potom můžeme cestu rozšířit o hranu $\{x_0, y\}$ a o vrchol y. Z toho ovšem plyne, že cesta neměla maximální délku

$\Rightarrow$ **SPOR!**

Lemma (Postupná výstavba stromu):

Nechť G je graf, pro který platí, že $d_g(x) = 1$
Potom G je strom $\Longleftrightarrow G - x$ je strom

Definice:

$$\begin{aligned} G &= (V, E) \\ G - x &= (V', E') \\ V' &= V \setminus \{x\} \\ E' &= \{e; e \in E \wedge x \notin e\} \end{aligned}$$

Důkaz:

$\Rightarrow$ Nechť G je strom

- $G-x$ neobsahuje kružnice, protože už G (od kterého jsme odebrali jeden vrchol a jednu hranu) neobsahoval kružnice
- $G-x$ je souvislý:
  Nechť $y, z \in V \setminus \{x\}$. Protože G je souvislý, existuje cesta $y = x_0, e_1, x_1, \cdots, e_t, x_t = z$. Žádná taková cesta nemůže obsahovat x, protože do x vede jen jedna hrana. Takto tedy dostáváme cestu v $G-x$.

$\Leftarrow$ Nechť $G-x$ je strom

- G je souvislý, protože existuje hrana vedoucí z x do $y; y \in G-x$. Podle předpokladu existuje cesta ze všech vrcholů grafu $G-x$ do y. Nyní tedy musí existovat cesta i do x, protože existuje cesta mezi x a y
- G neobsahuje kružnice:
  * kružnice nemůže být $G-x$ (podle předpokladu).
  * kružnice nemůže obsahovat x, protože x je stupně 1.

Věta (hlavní věta o stromech):

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. G je strom.
2. G je *minimální* souvislý graf. (Minimálním souvislým grafem je míněn graf, který je souvislý a libovolný graf $(V, E - e \in E)$ je nesouvislý)
3. G je *maximální* graf bez kružnice. (Maximálním grafem bez kružnice je míněn graf, který neobsahuje kružnici a libovolný graf $(V, E \cup \{e\}); e \in \binom{V}{2} \setminus E)$ obsahuje kružnici)
4. G je *jednoznačně souvislý*. (Pro každé $x, y \in V$ existuje právě jedna cesta z x do y)
5. G je souvislý a $|E| = |V| - 1$.

Důkaz:

$1 \Rightarrow 3$ Uvaž graf $(V, E \cup \{e\}); e = \{x, y\}$. Potom existuje cesta z x do y v G (protože je souvislý) a spolu s e tvoří kružnici.

$3 \Rightarrow 1$ G je maximální graf bez kružnic. Stačí tedy dokázat, že je souvislý. Předpokládejme, že není. V_1, V_2 jsou komponenty grafu G. Zvolme $x_1 \in V_1$ a $x_2 \in V_2$. Uvažme graf $G \cup \{\{x_1, x_2\}\}$. Tento graf je souvislý, neobsahuje kružnice a je větší.

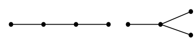
$1 \Rightarrow 5$ $G = (V, E)$ je strom. Postupujme indukcí dle $|V|$.

$\lvert V\rvert = 1$		$0 = 1 - 1$	$\surd$
$\lvert V\rvert = 2$		$1 = 2 - 1$	$\surd$
$\lvert V\rvert = 3$		$2 = 3 - 1$	$\surd$

V indukčním kroku $|V| = n + 1 \geq 2$. Nechť $x \in V$ je list. Potom $G' = G - x$ je strom (podle Lemmatu o listech). Podívejme se tedy, co víme:

$$\left.\begin{array}{l} \text{dle předpokladu } |E'| = |V'| - 1 \\ |E| = |E'| + 1, |V| = |V'| + 1 \end{array}\right\} |E| = |V| - 1$$

$5 \Rightarrow 1$ Nechť $G = (V, E)$ je graf splňující 5. Indukcí dle $|V|$ ukážeme, že G je strom

$\lvert V\rvert = 1$		$\surd$
$\lvert V\rvert = 2$		$\surd$
$\lvert V\rvert = 3$		$\surd$
$\lvert V\rvert = 4$		$\surd$

Nechť $|V| = n + 1$

Pozorování:

G obsahuje list

Důkaz pozorování:

Uvažme stupně vrcholů:

$$0 \leq d_g(x) \leq n \qquad \text{ze souvislosti dostaneme:}$$
$$1 \leq d_g(x) \leq n \qquad \text{dále víme, že:}$$
$$\sum_{x \in V} d_g(x) = 2|E| \qquad \text{z druhého předpokladu dostáváme, že:}$$
$$\sum_{x \in V} d_g(x) = 2|E| = 2|V| - 2$$

Z obou předpokladů dohromady plyne, že existuje vrchol se stupněm 1.

Nechť x je list G. Uvažme graf $G' = G - x = (V', E')$

G' je souvislý a $|E'| = |V'| - 1$ $\Rightarrow$ dle předpokladu je G' strom $\Rightarrow$ G je strom. (Podle Lemmatu o postupné výstavbě)

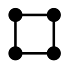
Důsledek:

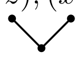
Maximáloní počet hran grafů s množinou vrcholů V bez kružnic je $|V| - 1$.

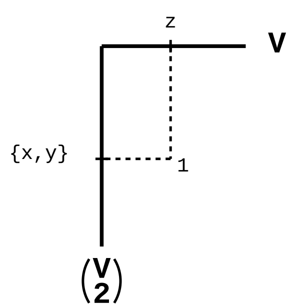
Věta:

Maximální počet hran grafu bez C_4 je $\leq \frac{1}{2}(n^{\frac{3}{2}} + n)$

Důkaz (pomocí počítání dvěma způsoby) :

$G = (V, E)$, $|V| = n$, G neobsahuje $C_4 =$ 

Uvažme množinu $\mathcal{M} = \{(\{x, y\}, z); (x, z) \in E \wedge (y, z) \in E \wedge x \neq y\}$. Jinými slovy, uvažme množinu všech 



$$|\mathcal{M}| \leq \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{počet } \{x,y\}} . \overbrace{1}^{z} \qquad \text{nevíme, kolik je } z \text{, ale v řádku je nejvýše } 1 \times 1$$

$$|\mathcal{M}| = \sum_{z \in V} \binom{d_g(z)}{2} \qquad \text{počet možných "vidliček" s daným } z$$

$$\sum_{z \in V} \binom{d_g(z)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

My chceme ale zjistit něco o $|E|\ldots$

Zbavíme se kobinačních čísel:

$$\sum_{z \in V} \frac{(d_g(z)-1)^2}{2} \leq \sum_{z \in V} \binom{d_g(z)}{2} \leq \binom{n}{2} \leq \frac{n^2}{2}$$

$$\sum_{z \in V} (d_g(z)-1)^2 \leq n^2$$

Použijeme *Cauchy-Schwarzovu nerovnost*, která zní:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

$V = \{1, \cdots, n\} \qquad x_i = d_g(i) - 1 \qquad y_i = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (d_g(i)-1).1 &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_g(i)-1)^2}.\sqrt{n} \leq n.\sqrt{n} \\ 2|E| - n &\leq n.\sqrt{n} \\ |E| &\leq \frac{n^{\frac{3}{2}} + n}{2} \end{aligned}$$

7 Přednáška z 26. 11. 2003

V minulé přednášce jsme použili Cauchy-Schwarzovu nerovnost, tak si jí i dokážeme.

Cauchy-Scharzova nerovnost:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

Důkaz:

Vyjděme z něčeho, co zcela jistě platí:

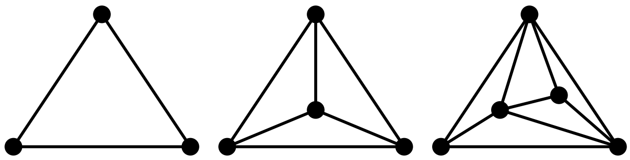
$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 &\geq 0 \\
\sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j)^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j)(x_j y_i) + \sum_{i,j=1}^{n} (x_j y_i)^2 &\geq 0 \\
2 \sum_{i,j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 &\geq 2 \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j)(x_j y_j) \\
\sum_{i,j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 &\geq \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_i)(x_j y_j) \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 &\geq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \right)^2 \\
\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} &\geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i
\end{aligned}$$

Princip sudosti(opakování z 5. přednášky):

Každý graf má sudý počet lichých stupňů.

Definice triangulace:

Triangulace je nakreslení grafu v rovině tak, že hrany jsou neprotínající se úsečky a všechny oblasti(stěny) jsou trojúhelníky(mají 3 hrany).



Lemma o duhovém trojúhelníku:

Nechť (V, E) je graf nějaké triangulace. Nechť $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ je libovolný rozklad množiny vrcholů. Potom počet duhových trojúhelníků je sudý.

Definice:

Duhový trojúhelník je trojúhelník, jehož vrcholy mají všechny 3 barvy.

Důkaz:

Nechť V a E jsou vrcholy a hrany triangulace a nechť $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ je rozklad. Dále nechť $T_1, \cdots, T_r$ jsou všechny oblasti nakreslení (včetně vnější oblasti)

Definujme graf $G = (\{1, \cdots, r\}, F)$ předpisem:
$\{i, j\} \in F$ jestliže T_i a T_j mají společné dva vrcholy v, v' takové, že $v \in V_1$ a $v' \in V_2$.

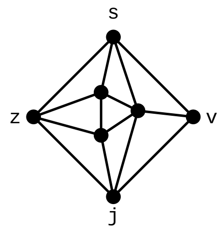
$d_g(i) = 0 \quad \vee \quad 1 \quad \vee \quad 2$ (3 nepřichází v úvahu, protože jde o $\triangle$)

$d_g(i) = 1 \Longleftrightarrow T_i$ je duhový

Počet lichých stupňů je sudý (podle principu sudosti) $\Longrightarrow$ počet duhových trojúhelníků je sudý

Hra:

Máme čtyřúhelník $G = (W, E)$ a uvnitř jsou samé trojúhelníky. Dva hráči se střídají v označování vrcholů. Hráči I patří body z a v a hráči II body s a j. Cílem obou hráčů je spojit tyto body cestou.



Věta:

Hra nemůže skončit remízou. Pro libovolný rozklad $W = W_1 \cup W_2$, kde $z, v \in W_1$ a $s, j \in W_2$ existuje cesta P tak, že buď vrcholy cesty náleží do W_1 a je to cesta ze z do v, nebo vrcholy cesty náleží do W_2 a je to cesta ze s do j.

Důkaz (sporem):

Nechť existuje remíza. $W = W_I \cup W_{II}$ je výsledek sehrávky takové, že ani W_I ani W_{II} neobsahuje příslušnou cestu.

Definujme rozklad $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ následujícím předpisem:
$z \in V_1, s \in V_2$
$x \in V_1 \Leftrightarrow$ existuje cesta hráče I ze z do x
$x \in V_2 \Leftrightarrow$ existuje cesta hráče II ze s do x
$V_3 = W \setminus (V_1 \cup V_2)$, $v, j \in V_3$ (dle předpokladu)

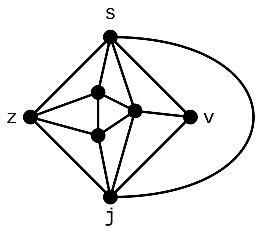
Pozorování:

Trojúhelníky uvnitř nejsou duhové.

Důkaz:

Nechť existuje duhový trojúhelník. Potom hráč, který je na tahu může označit vrchol $v_3 \in V_3$ a tudíž hra neskončila. - SPOR!

Uvažme graf G spolu s hranou $\{s, j\}$. Označme jej G'.



Potom G' je triangulace a má jen jeden duhový trojúhelník.

- SPOR! (s lemmatem o duhovém trojúhelníku)

Věta:

Nechť $G = (V, E)$ je souvislý. Potom G má kostru.

Definice:

Kostra G je graf (V, E') takový, že $E' \subseteq E$ a zároveň (V, E') je strom.

Důkaz:

Nechť (V, E'), $E' \subseteq E$ je minimální (vzhledem k $\subseteq$) podmnožina taková, že (V, E') je souvislý. Taková podmnožina existuje, protože (V, E) je souvislý.

Potom je (V, E') strom. (podle hlavní věty o stromech(viz. 6. přednáška))

Definice:

Graf $G = (V, E), w : E \to \mathbb{R}^+$ nazýváme vážený graf a $w(e)$ naýváme váhou hrany e.

Problém minimální kostry:

Pro daný vážený graf $G = (V, E), w : E \to \mathbb{R}^+$ nalezněte kostru (V, E') grafu G tak, aby výraz $\sum_{e \in E'} w(e)$ nabyl minimální hodnoty.
Tento problém vyřešil roku 1926 O. Borůvka.

8 Přednáška z 3. 12. 2003

Problém minimální kostry:

Dostaneme souvislý graf $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}^+$. Našim úkolem je nalézt strom (V, E') tak, aby výraz $\sum_{e \in E} w(e)$ nabýval minimální hodnoty.

Řešení - Hladový (greedy) algoritmus:

1. uspořádejme hrany $e_1, \cdots, e_n$ tak aby tvořili neklesající posloupnost $(w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_n))$
2. definujme množiny $E_1, \cdots, E_n$ předpisem:
   - $E_1 = \{e_1\}$
   - $E_{i+1} = \begin{cases} E_i \cup \{e_{i+1}\} \text{ - pokud } (V, E_i \cup \{e_{i+1}\}) \text{ neobsahuje kružnici} \\ E_i \text{ - pokud } (V, E_i \cup \{e_{i+1}\}) \text{ obsahuje kružnici} \end{cases}$
3. (V, E_n) je hledaná kostra.

Věta:

Pro každý souvislý graf $G = (V, E)$ a ohodnocení $w : E \to \mathbb{R}^+$ nalezne hladový algoritmus nějakou minimální kostru.

Důkaz:

1. výsledek je kostra
   - (V, E_n) neobsahuje kružnici $\Rightarrow$ stačí dokázat souvislost
   - Důkaz souvislosti:
     - Předpokládejme pro spor, že $V = V_1 \cup V_2$ je rozklad takový, že $V_1, V_2 \neq \emptyset$ a zároveň $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a že neexistuje hrana $e = \{v_1, v_2\}; v_i \in V_i$
     - Zvol $a \in V_1$ a $b \in V_2$. Ze souvislosti grafu G plyne, že existuje cesta $a, e_1, v_1, \cdots, e_t, b$. Nechť v_i je poslední prvek cesty, který ještě náleží do V_1 a nechť v_{i+1} je následující prvek, který náleží do V_2. Potom existuje hrana $e = \{v_1, v_2\}$ taková, že $E_n \cup e$ netvoří kružnici $\Rightarrow$ **SPOR!**

2. Výsledek je minimální kostra

   Nechť $E_n = E'$ a nechť $(V, E\check{})$ je minimální kostrou. Našim cílem je dokázat, že $\sum_{e\in E'} w(e) \leq \sum_{e\in E\check{}} w(e)$

$$E' = \{e'_1, \cdots, e'_m\} \qquad w(e'_1) \leq \cdots \leq w(e'_m)$$
$$E\check{} = \{e_1\check{}, \cdots, e_m\check{}\} \qquad w(e_1\check{}) \leq \cdots \leq w(e_m\check{})$$

   Dokážeme dokonce, že:

$$\begin{array}{ccc} w(e'_1) & \leq & w(e_1\check{}) \\ w(e'_2) & \leq & w(e_2\check{}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

   Pro $i =$ platí

   Nechť i je nejmenší hodnota pro kterou platí $w(e'_i) > w(e_i\check{})$

   Definujme dále tyto množiny:

$$E'_{i-1} = \{e'_1, \cdots, e'_{i-1}\}$$
$$E_i\check{} = \{e_1\check{}, \cdots, e_i\check{}\}$$

   Stačí nalézt $e \in E_i\check{} \setminus E'_{i-1}$ tak, aby $E'_{i-1} \cup \{e\}$ netvořilo kružnici.

Poznámka:

Potom $w(e) \leq w(e_i\check{}) < w(e'_i)$, tedy hrana byla podle postupu algoritmu uvažována před e'_i, ale byla zamítnuta přesto, že dokonce $E'_{i-1} \cup \{e\}$ neobsahuje kružnici(množina hran v momentě rozhodování o dalším osudu hrany e byla podmnožinou množiny E'_{i-1}), což by vedlo k požadovanému sporu.

Nechť $V_1, \cdots, V_k$ jsou komponenty grafu (V, E'_{i-1}) a nechť $E^1, \cdots, E^k$ jsou množiny hran jednotlivých komponent $E^j = \{e \in E'_{i-1}; e \subseteq V_j\}$

Dále nechť $\check{E}^1, \cdots, \check{E}^k$ jsou množiny hran jednotlivých komponent, které zároveň patří do minimální kostry $\check{E}^{\,j} = \{e \in E_i\check{}; e \subseteq V_j\}$

Potom $|E^j| = |V_j| - 1$ neboť (V_j, E^j) je strom(viz. hlavní věta o stromech) a $|\check{E}^j| \leq |V_j| - 1$, protože graf $(V_j, \check{E}_j)$ nemá kružnice.

Z předpokladu ale víme, že

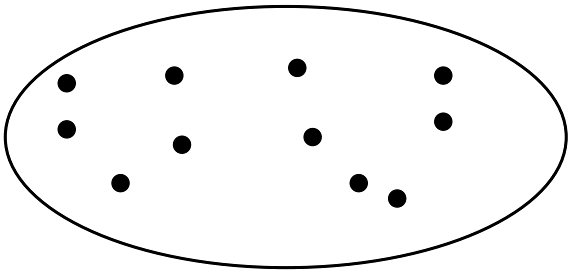
$$\sum |\check{E}^{\,j}| = |E_i\check{\ }| \quad > \quad |E'_{i-1}| = \sum |E^j| = i-1$$

Tedy existuje hrana $e \in E_i\check{\ } \setminus E'_{i-1}$ taková, že $e \not\subseteq V_j$. Graf $(V, E_{i-1} \cup \{e\})$ tedy nemůže obsahovat kružnici.

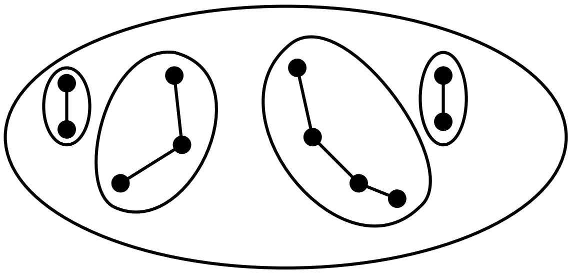
Poznámka(bez důkazu) - Borůvkův algoritmus:

Požaduje oproti hladovému algoritmu aby relace $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ byla prostá. Jinými slovy žádné dva vrcholy nesmějí mít stejnou vzdálenost. Což není velký problém zařídit. Stačí, aby se lišili o něco hodně malého.

1. Každý bod je komponenta



2. Každou komponentu spojíjeme s nejbližším sousedem



3. Ze spojených komponent utvoříme jednu komponentu a pokračujeme předchozím krokem dokud nezbyde pouze jedna jediná komponenta, která už je minimální kostrou.

Počet koster:

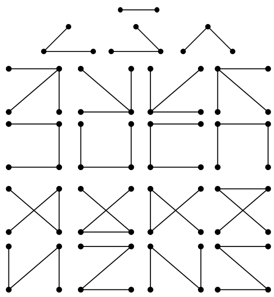
Nechť $G = (V, E)$ je graf na množině V. Označme $t(G)$ počet koster grafu G. Potom $t(n)$ dostaneme hodnoty:

$$\begin{aligned} t(G) &= 0 && G \text{ je nesouvislý} \\ t(G) &= 1 && G \text{ je strom} \\ t(n) &= t(K_n) \end{aligned}$$

Věta:

$t(n) = n^{n-2} \qquad \forall n \geq 2$

Důkaz použitý při prvním zveřejnění:



$t(2) = 1$ $\surd$

$t(3) = 3$ $\surd$

$t(4) = 16$ $\surd$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Věta:

Posloupnost $d_1, \cdots, d_n$ je posloupnost všech stupňů vrcholů nějakého stromu s n vrcholy($n \geq 2$) právě když $d_i \geq 1 \quad \forall i = 1, \cdots, n$ a zároveň $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2 = 2|E|$.

Definice:

Skóre grafu je posloupnost všech stupňů jeho vrcholů.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Víme.

$\Leftarrow$ Pro dané skóre splňující předchozí podmínku nalezneme strom $T = (\{1, \cdots, n\}, E)$ takový, že $d_t(i) = d_i$

Postupujme indukcí dle n - $n = 2$ $\surd$

Předpokládejme, že platí pro n a dokazujme pro $n + 1$:

$d_1, \cdots, d_{n+1}$ splňují podmínku. Tudíž existuje $d_i = 1$ a protože $n > 2$ tak existuje i $d_j \geq 2$.

Předpokládejme, že $i = n$.

Definujme $d'_1, \cdots, d'_n$ předpisem $d'_l = d_l \wedge d'_j = d_j - 1$. Takováto posloupnost splňuje podmínky a podle předpokladu je strom. Podle Lemmatu o postupné výstavbě stromu je původní posloupnost také strom.

9 Přednáška z 10. 12. 2003

Věta (Cayleyova):

$$t(n) = n^{n-2}$$

Tato věta byla zmíněna již v minulé přednášce, ale nebyla dokázána. Nyní si jí i dokážeme. Důkaz této věty ovšem spočívá v důkazu věty následující.

Věta:

$$t(d_1, \cdots, d_n) = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

$$\forall \quad d_1, \cdots, d_n \geq 1 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n2$$

Kde d_i je skóre grafu a $t(d_1, \cdots, d_n)$ je počet stromů na množině $\{1, \cdots, n\}$ splňující podmínku, že stupeň i-tého vrcholu je d_i.

Důkaz dostatečnosti důkazu druhé věty:

Stačí dokázat, že

$$\sum_{\substack{d_i \geq 1 \\ \sum d_i = 2n-2}} t(d_1, \cdots, d_n) = n^{n-2}$$

$$\sum_{\substack{d_i \geq 1 \\ \sum d_i = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!} = \sum_{\substack{k_i \geq 0 \\ \sum k_i = n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1!\cdots k_n!} =$$

Použijeme-li multinomickou větu, dostaneme:

$$= \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n} = n^{n-2}$$

Multinomická věta:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_i \geq 0 \\ \sum k_i = n}} \binom{n}{k_1, \cdots, k_m} x_1^{k_1} . x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$$

Kde $\displaystyle\binom{n}{k_1, \cdots, k_m} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$

Kombinační číslo

$\binom{n}{k}$ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny

Důkaz:

Použijeme počítání dvěma způsoby. Označíme X n-prvkovou množinku.

$$\binom{|X|}{k} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{\text{počet uspořádaných } k\text{-tic}}}{\underbrace{k!}_{\text{počet uspořádání}}}$$

Uvažme matici, ve která budou zapsány jedničky a nuly následujícím předpisem. označme sloupce uspořádanými k-ticemi a řadky $\binom{X}{k}$. A pokud si sloupec a řádek odpovídají, umístíme na tuto pozici jedničku, jinak nulu.

Tímto způsobem dostaneme v každém řádku $k!$ jedniček a v každém sloupci právě jednu jedničku.
Čili počet uspořádaných k-tic je $|\binom{X}{k}|k!$

návrat zpět:

Vraťme se nyní zpět k důkazu věty, kteroužto jsme použili k důkazu Caleyovi věty.
Pro upřesnění:

$$t(d_1, \cdots, d_n) = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

Důkaz:

Označme $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d_1, \cdots, d_n) = \{T; d_T(i) = d_i\}$
$\exists j : \quad d_j = 1 \quad n \geq 3$
předpokládejme, že $d_n = 1$

Označme $\mathcal{T}_i$ množinu všech stromů T', mající tyto vlastnosti:

$$d_i \geq 2 \quad \mathcal{T}_i = \{T'; T' \text{ je strom na } \{1, \cdots, n\}, \{i, n\} \in E'\}$$

$$\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_{i'} = \emptyset \qquad \forall i \neq i'$$

$|\mathcal{T}_i| = t(d_1, \cdots, d_i - 1, \cdots, d_{n-1})$ podle Lematu o postupné výstavbě stromu

Postupujme indukcí dle n:
Pro $n = 2$ a $n = 3$ jsme ověřili již minule

$$|\mathcal{T}_i| = t(d_1, \cdots, d_i - 1, \cdots, d_{n-1}) =$$

$$= \frac{(n-3)!}{(d_1 - 1)! \cdots (d_i - 2)! \cdots (d_{n-1} - 1)!} =$$

rozšíříme celý zlomek zlomkem $\dfrac{d_i - 1}{d_i - 1}$

$$= \frac{(n-3)!(d_i - 1)}{(d_1 - 1)! \cdots (d_{n-1} - 1)!} =$$

a jmenovatel vynásobíme $(d_n - 1)! = 1 \quad (d_n = 1)$

$$= \underline{\underline{\frac{(n-3)!(d_i - 1)}{(d_1 - 1)! \cdots (d_n - 1)!}}}$$

$$|\mathcal{T}| = \sum |\mathcal{T}_i| = \sum_{i, d_i \geq 1} \frac{(n-3)!(d_i - 1)}{(d_1 - 1)! \cdots (d_n - 1)!} =$$

$$\underbrace{\sum_{i, d_i \geq 1} (d_i - 1)}_{n-2} \left(\frac{(n-3)!}{(d_1 - 1)! \cdots (d_n - 1)!} \right) = \underline{\underline{\frac{(n-2)!}{(d_1 - 1)!(d_2 - 1)! \cdots (d_n - 1)!}}}$$

Jiný důkaz:

Dokážeme, že existuje jednoznačné zobrazení mezi daným grafem a posloupností $a_1, \cdots, a_{n-2}$

Definice posloupnosti:

Mějme vrcholy očíslované popořadě přirozenými čísly. Nechť a_1 je číslo souseda minimálního listu(listu s nejnižším stupňem a číslem). Umažme nyní tento list a pokračujme stejně až do a_n.

Postup zpětné výstavby:

Vezmeme minimální list, který se nevyskytuje v posloupnosti a spojíme ho s a_1. Jeho číslo umístíme místo a_1 a pokračujeme, dokud není strom opět vystavěn.

Ještě jiný důkaz:

Počítejme počet stromů s nejvýše dvěma význačnými vrcholy.

Definice obratlovce:

Obratlovec je strom T se dvěma význačnými vrcholy x_1, x_2. Jeho *páteř* je cesta z x_1 do x_2

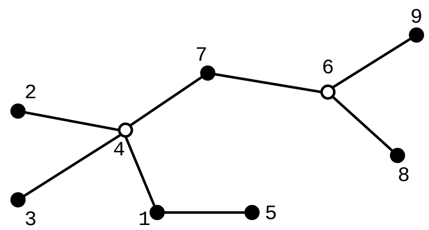
Z každé kostry můžeme stvořit právě n^2 obratlovců.

Pozorování

Počet obratlovců je n^n

Pozorování dokážeme tím, že najdeme vzájemně jednoznačné zobrazení mezi obratlovci a zobrazením

$$f : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$$



Napišme čísla vrcholů páteře seřazená podle velikosti a pod ně pořadí v němž jsou v páteři:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Dále napišme ostatní vrcholy podle pořadí, jak vedou do páteře.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dostáváme takto několik nezávislých cyklů. Složíme-li je dohromady, je výsledná permutace hledaným zobrazením.

Definice:

Eulerovský graf je graf $G = (V, E)$ pro který existuje nakreslení, v němž existuje tah $\{x_0, e_1, \cdots, e_m, x_m = x_0\}$ takový, že $\{e_1, \cdots, e_m\} = E$. (Z toho, že se jedná o tah vyplývá, že se hrany nesmějí opakovat, ale mohou se opakovat vrcholy)

Věta:

$G = (V, E)$ lze nakreslit jedním uzavřeným tahem $\Longleftrightarrow$ G je souvislý a má všechny stupně sudé.

10 Přednáška ze 17. 12. 2003

Věta:

$G = (V, E)$ lze nakreslit jedním uzavřeným tahem $\iff$ G je souvislý a má všechny stupně sudé.

Důkaz

$\Rightarrow$ G je souvislý. Nechť v je libovolný vrchol v G. A mějme uzavřený eurelovský tah $v_0, e_1, v_1, \cdots, e_t, v_t = v_0$

Definice:

Eulerovský tah je sled, v němž je každá hrana grafu obsažena právě jednou a každý vrchel alespoň jednou.

Zjišťujme tedy stupeň vrcholu v:

$$\underbrace{d = |\{i, v = v_i\}|}_{\text{počet } v \text{ v eulerovském tahu}} \qquad \underbrace{v_i \in e_i \quad \wedge \quad v_i \in e_{i+1} \quad \wedge \quad v_{i+1} \notin e_i}_{\text{každý vrchol } v_i \text{ je součástí dvou hran}}$$

Tedy $d_G(v) = 2d$

$\Leftarrow$ Nechť $v_0, e_1, v_1, \cdots, e_t, v_t$ je tah v G, který je nejdelší. Potom:

– $v_0 = v_t$

Kdyby $v_0 \neq v_t$ potom by $|\{i, v_t \in e_i\}|$ bylo liché číslo, což je ve sporu s předpokladem že stupeň v_t je sudý.

– $\{e_1, \cdots, e_t\} = E$

Dokážeme sporem. Nechť existuje $e = \{v, v'\}, e \in E \setminus \{e_1, \cdots, e_t\}$. Ze souvislosti ale plyne, že existuje hrana $e' = \{v_i, v''\}$ pro nějaké i taková, že $v'' = v'$ nebo $v'' = v$. Potom můžeme tah prodloužit o hrany e a e' $\Rightarrow$**SPOR!**

Důsledky:

Věta:

Nechť G je eulerovský graf. Potom G nemá most.

Definice:

Most je hrana po jejímž odstranění má vzniklý graf více komponent.

Důkaz:

Předpokládejme, že graf je eulerovský a je tam most. Uvažme tedy graf bez mostu. Obě jeho komponenty jsou souvislé a mají právě jeden stupeň lichý. Tímto se dostáváme do sporu s principem sudosti.

Věta:

Graf $G = (V, E)$ má všechny stupně sudé $\Leftrightarrow$ E je hranově disjunktním sjednocením kružnic.

Definice:

E je hranově disjunktní sjednocení kružnic pokud

$$E = \bigcup E_i \quad \wedge \quad E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neg j$$

kde E_i jsou množiny hran kružnic.

Důkaz:

$\Leftarrow$ Každá kružnice přidá ke každému vrcholu buď žádnou nebo dvě hrany. Z toho plyne, že všechny stupně jsou sudé

Pozorování: $E \neq \emptyset \Rightarrow (V, E)$ obsahuje kružnici. Každá komponenta obsahuje strom a navíc hranu $e = \{v_1, v_t\}$ spojující listy(z předpokladu, že všechny stupně jsou sudé)

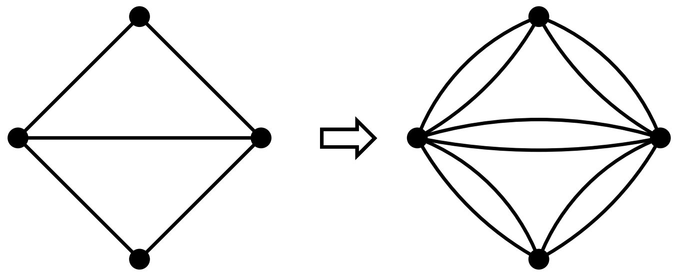
$\Rightarrow$ Nechť K je kružnice v G. Uvažme tedy graf $G' = (V, E \setminus K)$. G' má všechny stupně sudé a tudíž na něj můžeme použít indukční předpoklad.

Poznámka:

Pro hledání eulerovského tahu nelze použít hladový algoritmus!

Problém CDC:

Mějme graf $G = (V, E)$. Uvažme zdvojený graf G'. Takovýto graf má všechny stupně sudé a je tedy hranově disjunktním sjednocením kružnic.



Otázka zní, jestli existují vždy takové kružnice, které mají délku ≥ 3.

Jiný problém:

Kolik je kružnic v grafu G? Označme počet kružnic v grafu G jako $K(G)$. Potom:

- počet kružnic v úplném grafu je:

$$K(K_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!$$

- a $K(G) = 0 \Longleftrightarrow G$ je les

Definice:

G je les $\Leftrightarrow$ každá komponenta G je strom.

Definice(Eulerovská množina hran):

Mějme graf $G = (V, E)$. $A \subseteq E$ se nazývá eulerovská právě když má graf (V, A) všechny stupně sudé.

Definice:

Definujme dále charakteristický vektor v_a množiny A a to takto:

$$E = \{e_1, \cdots, e_n\} \quad v_a = (v_1, \cdots, v_n) \quad \begin{array}{lcl} v_i = 1 & \Leftrightarrow & e_i \in A \\ v_i = 0 & \Leftrightarrow & e_i \notin A \end{array}$$

Všechny podmnožiny $A \subseteq E$ tvoří vektorový prostor V^n dimenze n nad tělesem $\{0, 1\}$.

Označme ξ množinu všech eulerovských podmnožin grafu G. Označme ξ rovněž množinu vektorů odpovídajících množinám z ξ.

Věta(o prostoru kružnic(Kirhof)):

Mějme $G = (V, E), \xi$. Potom platí:

1. ξ je vektorový prostor V^n
2. $\dim \xi = |E| - |V| + k$, kde k je počet komponent G
3. báze ξ je tvořena elementárními kružnicemi vzhledem ke kostře G

Definice:

Rozšiřme nyní definici kostry. Nechť kostra je:

- sjednocením koster všech komponent
- maximální podgraf bez kružnic
- minimální podgraf se stejným počtem komponent
- les koster komponent

Definice:

Nechť (V, E') je kostra $G = (V, E)$. A nechť dále

$$e \in E \setminus E' \qquad T + e = (V, E' \cup \{e\})$$

Potom $T + e$ obsahuje právě jednu kružnici a tato kružnice se nazývá elementární vzhledem k T.

Důkaz 1:

ξ je podprostor

- $1.v_A = v_A$
  $0.v_A = v_\emptyset \qquad \emptyset$ je eulerovská
- $v_A + v_B = v_C \qquad C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ - symetrický rozdíl - $A\Delta B$

Pozorování:

A, B jsou eulerovské $\Rightarrow A\Delta B$ je eulerovský.

Důkaz:

Zvolme $v \in V$ libovolné. Potom

$$|\{e, v \in e \wedge e \in A\Delta B\}| =$$

$$= \underbrace{\underbrace{|\{e, v \in e \wedge e \in A\}|}_{\text{sudé}} + \underbrace{|\{e, v \in e \wedge e \in B\}|}_{\text{sudé}} - \underbrace{2|\{e, v \in e \wedge e \in A \cap B\}|}_{\text{sudé}}}_{\text{sudé}}$$

Důkaz 2:

Nechť (V, E') je kostra G, dále nechť k je počet komponent. Z vlastností stromu plyne, že $|E'| = |V| - k$. Počet elementárních kružnic je tedy roven $|E| - |E'| = |E| - |V| + k$. Z čehož plyne, že nám již stačí dokázat pouze třetí bod.

Důkaz 3:

Nechť $E = \{e_1, \cdots, e_m\}$

- Dokažme nejdříve lineární nezávislost.

  Nechť tedy (V, E') je kostra a předpokládejme, že $E' = \{e_1, \cdots, e_t\}$, kde $t = |V| - k$

  Vezměme $e_i, i > t$ a označme K_{e_i} elementární kružnici obsahující e_i. Dále označme vektor $v_{K_{e_i}}$ jako v_i. Potom každý v_i má na i-tém míště jedničku a žádný jiný vektor(odpovídající elementární kružnici) jí tam nemá. Z toho tedy plyne, že vektory $v_i, \cdots, v_m$ jsou lineárně nezávislé.

- Nyní dokažme, že generují celý prostor.

  Nechť $A \subseteq E$ je eulerovská a má charakteristický vektor $v_a \in \xi$. Potom $v_A = \sum_{i \in I} v_i$.

  Definujme A' předpisem $v_{A'} = \sum_{e_i \in A \setminus E'} v_i$, kde hrana která neleží v E' leží právě v jedné elementární kružnici. Potom $A' \setminus E' = A \setminus E'$.

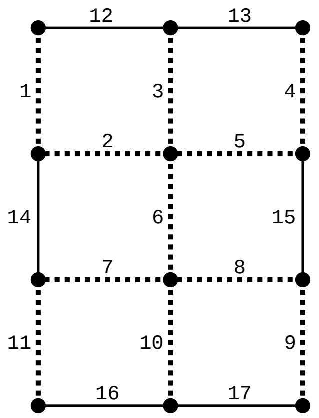
  Uvažme $C = A \Delta A'$.

  $$\left.\begin{array}{l} C \text{ je eulerovská} \\ C \subseteq E' \end{array}\right\} C = \emptyset \quad \Rightarrow \quad (A \setminus A') \cup (A' \setminus A) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = A'$$

  Tudíž $v_A = \sum_{i \leq t} v_i$ pro libovolné A a $\{v_1, \cdots, v_t\}$ generují celý prostor.

Příklad:

Máme takovýto graf s tečkovaně vyznačenou kostrou. Tudíž vektory elementárních kružnic vypadají následovně(pomocí | oddělíme(pro názornost) čát značící hrany náležící do kostry a hrany, které v kostře neleží):



$$
\begin{aligned}
v_{12} &= (1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0 \mid 1,0,0,0,0,0) \\
v_{13} &= (0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0 \mid 0,1,0,0,0,0) \\
v_{14} &= (0,1,0,0,0,1,1,0,0,0,0 \mid 0,0,1,0,0,0) \\
v_{15} &= (0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,0 \mid 0,0,0,1,0,0) \\
v_{16} &= (0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,1 \mid 0,0,0,0,1,0) \\
v_{17} &= (0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0 \mid 0,0,0,0,0,1)
\end{aligned}
$$

Nyní se pokusíme nalézt takovou lineární kombinaci těchto vektorů, abychom dostali vektor v kružnice s hranami $e_{14}, e_2, e_5, e_{15}, e_8, e_7$. Sčítáme nad tělesem s prvky {0,1}.

$$v = v_{14} + v_{15} = (0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,0 \mid 0,0,1,1,0,0)$$

Pokud bychom chtěli zjistit vektor v_A kružnice vedoucí kolem celého grafu, sečteme vektory všech elementárních kružnic.

$$
\begin{aligned}
v_A &= v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} + v_{17} \\
v_A &= (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1 \mid 1,1,1,1,1,1)
\end{aligned}
$$

Důsledek:

Počet eulerovských množin hran je $2^{|E|-|V|+k}$ pro každý graf $G = (V, E)$ s k komponentami.

Rovina

Nechť X je množina bodů a nechť $\mathcal{P}$ jsou podmnožiny X - přímky. Potom se rovina, která splňuje následující axiomy, názývá *projektivní rovina*

- Axiom 1: Každé dva body určují právě jednu přímku.

$$\forall x, y \in X, x \neq y \quad \exists! P \in \mathcal{P} \quad x, y \in P$$

- Axiom 2: Každé dvě přímky se protínají právě v jednom bodě.

$$P, P' \in \mathcal{P} \quad P \neq P' \quad |P \cap P'| = 1$$

- Axiom 0: existují 4 body, které každá přímka protne v nejvýše 2 z nich.

$$P \in \mathcal{P} \quad Q \subseteq X \quad |Q| = 4 \quad |P \cap Q| \leq 2$$

Je-li navíc X konečná, nazýváme takovou rovinu konečná projektivní rovina.

Tvrzení:

Nechť $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina. Potom $|P| = |P'|$ pro libovolné dvě přímky $P, P' \in \mathcal{P}$.

Důkaz:

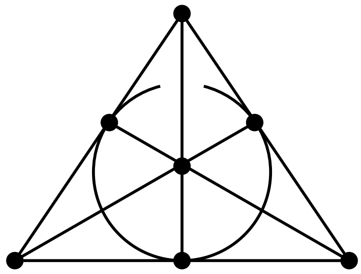
Zvolme $P, P' \in \mathcal{P}$ libovolné. Nejprve nalezneme $x \notin P \cup P'$. Vezměme $Q = (a_1, \cdots, a_4)$ a vyberme odtud x. Pokud $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \in P \cup P'$ potom uvažme $P_1 = \overline{a_1 a_3}$[1] a $P_2 = \overline{a_2 a_4}$. Potom $x \in P_1 \cap P_2$ a $x \notin P \cup P'$ jinak bychom měli dvě přímky protínající se ve dvou bodech.

Nyní pro každé $a \in P$ definujme zobrazení $f(a) \in P'$ jako průsečík $\overline{ax} \cap P'$. Toto námi definované zobrazení f je prosté a zároveň na a tudíž $|P| = |P'|$.

[1] $\overline{xy}$ značíme přímku procházející body x a y

Definice:

Řád konečné projektivní roviny je $|P| - 1$ pro libovolné $P \in \mathcal{P}$.

řád	
$n = 1$	neexistuje
$n = 2$	 Fanova rovina
$n = 3 - 5$	existuje
$n = 6$	neexistuje
$n = 7 - 9$	existuje
$n = 10$	neexistuje

Věta:

Nechť $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina řádu n. Potom platí:

1. Pro každý bod $x \in X$ existuje $n + 1$ přímek jím procházejících.
2. $|X| = n^2 + n + 1$
3. $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$

Důkaz:

1. Zvolme $x \in X$ libovolné. Najděme $P \in \mathcal{P}, x \notin P$. Zároveň existuje $n+1$ bodů na přímce P. Vezmeme-li libovolný z nich, tak existuje právě jedna přímka procházející x a protínající P v tomto bodě.

2. Zvolme $x \in X$ libovolné a uvažme všechny přímky. Existuje $n + 1$ přímek procházejících x a každá z nich obsahuje kromě x ještě dalších n bodů. Celkem tedy obsahují $n(n + 1) + 1$ bodů. Z čehož plyne, že $|X| = n^2 + n + 1$.

3. Počítejme dvěma způsoby:

$$|X|(n + 1) = |\{(x, P), x \in X, P \in \mathcal{P}\} = |\mathcal{P}(n + 1)$$

Aplikace:

Počet grafů na m vrcholech neobsahujících C_4 je $\leq \frac{1}{2}(m^{\frac{3}{2}}+m)$. Ukážeme, že řád tohoto odhadu je nejlepší možný.

Nechť $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina řádu n. Uvažme graf $G = (V, E)$ definovaný předpisem:

$$V = X \cup \mathcal{P} \qquad E = \{\{x, P\}, x \in P \in \mathcal{P}\}$$

$$|V| = 2(n^2 + n + 1) = m$$

$$|E| = (n^2 + n + 1)(n + 1) = \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}$$

Jediný způsob, jak by mohla vzniknout C_4 je, že by se dvě přímky protínaly alespoň ve dvou bodech, což by byl spor.

Index

řád roviny, 54
řetězec, 12

Borůvka, O., 34

Caley, 40
Cauchy-Schwarzova nerovnost, 30, **31**
cesta, 24
  délka, 24
charakteristická funkce, 11
charakteristický vektor, 49

diagonála, 8
duhový trojúhelník, 32

elementární kružnice, 50
Erdös-Szekeres, 17
Erdös-Szekeres, 14
eulerovská množina hran, 49
Eulerovský graf, 45

graf
  úplný, 19, 20
  úplný bipartitní, 21
  cesta, 19
  cyklus, **19**, 25
  indukovaný podgraf, 19
  izomorfizmus, 19
  jednoznačně souvislý, 27
  komponenty, 25
  kružnice, 19
  podgraf, 19
  souvislý, 24, 25
  strom, 25
    hlavní věta o stromech, **27**
    list, 25
    postupná výstavba, 26
grafy, 19

hranově disjunktní sjednocení kružnic, 47

indukované poduspořádání, 11

Kirhof, 49
kombinační číslo, 41
kostra, 34, 49

latinský čtverec, 7
latinský obdélník, 7
lemma o duhovém trojúhelníku, 32
les, 48
Littlewood-Offordův problém, 17

maximální prvek, 10
minimální prvek, 9
most, 47
multinomická věta, 40

nejmenší prvek, 9
největší prvek, 10
nezávislá podmnožina, 12
nosič, 11

obratlovec, 44
  páteř, 44
odhad faktoriálu, 2
  Stirlingova formule, 2

permutace bez pevného bodu, 6
počítání dvěma způsoby, 15, 29
počet koster grafu, 38
počet kružnic, 48
potenční množina, 11
princip inkluze a exkluze, 4
  aplikace, 7
  interpretace, 6
princip sudosti, 23, 31
problém šatnářky, 1, 6

aplikace, 7
problém CDC, 48
problém minimální kostry, 34, **35**
Borůvkův algoritmus, 38
greedy algoritmus, 35
hladový algoritmus, 35
prostor kružnic, 49

relace, 1, **8**
úplná, 8
částečné uspořádání, 8, 11
antisymetrická, 8
ekvivalence, 8, 12, **12**, 19, 24
třída ekvivalence, 12
inverzní, 8
izomorfismus, 11
lineární uspořádání, 8, 9
reflexivní, 8
slabě antisymetrická, 8
symetrická, 8
tranzitivní, 8
rovina, 53
projektivní, 53
konečná, 53
rozklad, 12

skóre grafu, 39
sled, 24
složení, 8
Sperner, 14
Spernerův problém, 15
stupeň vrcholu, 23
symetrický rozdíl, 50

tah, 24
eulerovský, 46
triangulace, 32

vážený graf, 34
váha, 34

zdvojený graf, 48
zobrazení, 1
bijekce, 1
na, 1
prosté, 1