Kapitola 1

Harmonické funkce

1.1 Příklady harmonických funkcí

Klasická teorie potenciálu v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^m$ je těsně spjata s *Laplaceovým operátorem*

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m} D_j^2$$

definovaným jako součet nesmíšených druhých parciálních derivací.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $h : U \to \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce h je *harmonická* na U, jestliže $h \in \mathcal{C}^2(U)$ a splňuje na U *Laplaceovu rovnici* $\Delta h = 0$.

Vektorový prostor všech harmonických funkcí na U budeme značit $\mathcal{H}(U)$ a konvexní kužel všech nezáporných harmonických funkcí na U označíme $\mathcal{H}^+(U)$.

1.1.1. Příklady.

(a) Afinní funkce v $\mathbb{R}^m$ jsou harmonické.

(b) Je-li $U \subset \mathbb{R}$ interval, pak $h \in \mathcal{H}(U)$, právě když je h afinní na U.

(c) Komplexní rovinu $\mathbb{C}$ budeme obvyklým způsobem ztotožňovat s $\mathbb{R}^2$. Uvažujme holomorfní funkci f na otevřené množině $U \subset \mathbb{C}$. Označme $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Potom $u, v \in \mathcal{C}^2(U)$ a z Cauchy-Riemannových podmínek $D_1 u - D_2 v = 0$, $D_2 u + D_1 v = 0$ derivováním dostáváme $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. Tedy reálná a imaginární část holomorfní funkce jsou harmonické funkce.

(d) Nechť $H \in \mathcal{C}^2(\,]0,\infty[\,)$, $R(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^m$ (norma v $\mathbb{R}^m$) a pro $x = (x_1, ..., x_m)$, $j \in \{1, ..., m\}$ nechť je $\pi_j(x) = x_j$. Pro j-tou parciální derivaci funkce $h = H \circ R$ platí na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ rovnosti

$$D_j h = (H' \circ R) \cdot D_j R = (H' \circ R) \cdot \pi_j / R,$$

$$D_j(\pi_j/R) = 1/R + (-\pi_j/R^2) \cdot D_j R = 1/R - \pi_j^2/R^3,$$

takže

$$D_j^2 h = (H'' \circ R) \cdot \pi_j^2/R^2 + (H' \circ R)(1/R - \pi_j^2/R^3).$$

Odtud

$$\Delta h = \sum_{j=1}^{m} D_j^2 h = (H'' \circ R) + (H' \circ R)(m/R - 1/R) = (H'' \circ R) + ((m-1)/R)(H' \circ R).$$

Vidíme, že funkce h je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, právě když

$$H''(t) + ((m-1)/t)H'(t) = 0, \qquad t \in]0, \infty[.$$

Tedy $h = H \circ R$ je pro $m > 1$ harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, právě když existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že

$$H(t) = \begin{cases} \alpha t^{2-m} + \beta & \text{v případě } m > 2, \\ \\ \alpha \log t + \beta & \text{v případě } m = 2. \end{cases}$$

(e) Nechť $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $r = |y|$ a nechť

$$h : x \longmapsto \frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^m}, \qquad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{y\}.$$

Potom $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m \setminus \{y\})$. Tvrzení lze ověřit přímým výpočtem, lze však postupovat i např. takto:

Případ $m > 2$: Pro $x \in \mathbb{R}^m$ platí

$$Q(x) = r^2 - |x|^2 + |x-y|^2 = 2y \cdot (y - x),$$

takže $Q(x)/|x-y|^m$ je (až na násobek) derivace ve směru y harmonické funkce

$$x \mapsto \frac{1}{|x-y|^{m-2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{y\},$$

a proto je harmonická. Protože

$$h(x) = \frac{Q(x)}{|x-y|^m} - \frac{1}{|x-y|^{m-2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{y\},$$

je h rozdílem dvou harmonických funkcí, takže $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m \setminus \{y\})$.

Případ $m = 2$: Lze využít např. identitu (x, y považujeme za komplexní čísla)

$$\frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^2} = \operatorname{Re} \frac{x+y}{y-x}, \qquad x \neq y.$$

1.1.2. Úmluva. S ohledem na (1.1.1 (b)) se v dalším výkladu omezíme na případ $m > 1$.

1.2 Princip minima

1.2.1. Tvrzení. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina, $h \in \mathcal{C}^2(U)$, $\Delta h \leq 0$ na U a nechť pro každé $z \in \partial U$ je*

$$\liminf_{x \to z} h(x) \geq 0.$$

Potom $h \geq 0$ na U.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $\Delta h < 0$ na U. Nechť $\inf h(U) < 0$. Potom existuje $a \in U$ tak, že $h(a) = \inf h(U)$. Pro $j \in \{1, ..., m\}$ je funkce

$$\varphi_j : t \longmapsto h(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_m)$$

definovaná v okolí bodu a_j a nabývá v a_j svého minima. Je tedy $\varphi_j''(a_j) \geq 0$, neboli $D_j^2 h(a) \geq 0$. Sečtením dostáváme $\Delta h(a) \geq 0$, což je ve sporu s předpokladem $\Delta h < 0$ na U. Tedy $h \geq 0$ na U, pokud $\Delta h < 0$ na U.

Nechť nyní $\Delta h \le 0$ a $\inf h(U) < 0$. Zvolme $R > 0$, $\delta > 0$ tak, aby $|x| \le R$ pro všechna $x \in U$ a $\inf h(U) + \delta R^2 < 0$. Definujme

$$g(x) = h(x) + \delta(R^2 - |x|^2), \qquad x \in U.$$

Potom $g \in \mathcal{C}^2(U)$, $\Delta g = \Delta h - 2\delta m < 0$ a $g \ge h$ na U, takže

$$\liminf_{x \to z} g(x) \ge \liminf_{x \to z} h(x) \ge 0,$$

kdykoli $z \in \partial U$. Podle první části důkazu je $g \ge 0$, zatímco z volby δ plyne, že $\inf g(U) < 0$. Tento spor ukazuje, že $h \ge 0$. □

1.3 Poissonův integrál

Pro $a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ označme

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m;\ |x - a| < r\}, \qquad S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m;\ |x - a| = r\}$$

a $\sigma_{a,r}$ *normalizovanou povrchovou míru* na $S_r(a)$ (takže $\sigma_{a,r}(S_r(a)) = 1$).
Pro $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $x \ne y$, položme

$$P(x, y) = r^{m-2} \frac{r^2 - |x - a|^2}{|x - y|^m}.$$

Dále definujme

$$P_x :\ y \longmapsto P(x, y), \qquad P^y :\ x \longmapsto P(x, y), \qquad x \ne y.$$

Restrikce funkce P na $B_r(a) \times S_r(a)$ se zpravidla nazývá *Poissonovo jádro*.

Pro $\sigma_{a,r}$–integrovatelnou funkci $f : S_r(a) \to \mathbb{R}^*$ definujeme *Poissonův integrál*

$$Hf : B_r(a) \to \mathbb{R}$$

rovností

$$Hf(x) = \int f \cdot P_x \, d\sigma_{a,r}\,, \qquad x \in B_r(a).$$

V případě, že kouli $B_r(a)$ bude vhodné specifikovat, budeme psát $H_{a,r}f$.

1.3.1. Lemma. *Poissonovo jádro má tyto vlastnosti:*

(i) $P > 0$ *na* $B_r(a) \times S_r(a)$,

(ii) $\int P_x \, d\sigma_{a,r} = 1$ *pro všechna* $x \in B_r(a)$,

(iii) *je-li* $y \in S_r(a)$, $\varrho > 0$ *a* $g \in L^1(\sigma_{a,r})$, *potom*

$$\int_{S_r(a) \setminus B_\varrho(y)} g \cdot P_x \, d\sigma_{a,r} \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to y,$$

(iv) *pro každé* $y \in S_r(a)$ *je* $P^y \in \mathcal{C}^\infty(B_r(a))$ *a* $\Delta P^y = 0$ *na* $B_r(a)$.

Důkaz. Tvrzení (i) je zřejmé, (iv) plyne z (1.1.1 (e)). Dokažme nyní (ii). Připomeňme, že

$$H1(x) = \int P_x \, d\sigma_{a,r}, \qquad x \in B_r(a).$$

Zvolme $0 < \varrho < r$ a uvažujme $x', x'' \in S_\varrho(a)$. Existuje izometrické zobrazení $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ takové, že $T(a) = a$ a $x'' = T(x')$. Zřejmě

$$|T(x') - a| = |x' - a|, \qquad |T(x') - T(y)| = |x' - y|,$$

kdykoliv $y \in \mathbb{R}^m$. Protože je míra $\sigma_{a,r}$ invariantní vzhledem k T, dostáváme

$$\begin{aligned} H1(x'') = H1(T(x')) &= r^{m-2} \int \frac{r^2 - |T(x') - a|^2}{|T(x') - y|^m} \, d\sigma_{a,r}(y) = \\ &= r^{m-2} \int \frac{r^2 - |x' - a|^2}{|T(x') - T(y)|^m} \, d\sigma_{a,r}(y) = H1(x'). \end{aligned}$$

Vidíme, že funkce $H1$ má konstantní hodnotu c_ϱ na $S_\varrho(a)$. Podle (iv) je $H1$ harmonická funkce na $B_\varrho(a)$ (derivování za integračním znamením), takže podle (1.2.1) je $H1 - c_\varrho = 0$ na $B_\varrho(a)$. Speciálně

$$c_\varrho = H1(a) = r^{m-2} \int \frac{r^2}{r^m} \, d\sigma_{a,r} = 1.$$

Pro důkaz (iii) označme

$$c = \sup\{P(x,z);\ x \in B_{\frac{1}{2}\varrho}(y),\ z \in S_r(a) \setminus B_\varrho(y)\}.$$

Zřejmě $c < \infty$ a pro každé $z \in S_r(a) \setminus \{y\}$ je $\lim_{x \to y} P(x,z) = 0$. Nyní (iii) plyne z Lebesgueovy věty. □

1.3.2. Věta. *Nechť $f : S_r(a) \to \mathbb{R}^*$ je $\sigma_{a,r}$–integrovatelná funkce. Potom*

$$Hf \in \mathcal{C}^\infty(B_r(a)) \cap \mathcal{H}(B_r(a))$$

a pro každé $z \in S_r(a)$ platí

$$\liminf_{y \to z} f(y) \le \liminf_{x \to z} Hf(x) \le \limsup_{x \to z} Hf(x) \le \limsup_{y \to z} f(y).$$

Důkaz. Z (1.3.1 (iv)) plyne, že $Hf \in \mathcal{C}^\infty(B_r(a)) \cap \mathcal{H}(B_r(a))$ (derivování za integračním znamením). Zvolme $z \in S_r(a)$ a dokažme, že

$$\limsup_{x \to z} Hf(x) \le \limsup_{y \to z} f(y)$$

(nerovnost pro $\liminf$ se pak dokáže přechodem k funkci $-f$).

Označme $\gamma = \limsup_{y \to z} f(y)$. Můžeme předpokládat, že $\gamma < \infty$. Zvolme $\lambda \in]\gamma, \infty[$ a $\varrho > 0$ takové, že

$$\sup f(S_r(a) \cap B_\varrho(z)) < \lambda.$$

Definujme $g = f - \lambda$. Protože $g < 0$ na $S_r(a) \cap B_\varrho(z)$, platí

$$Hg(x) \le \int_{S_r(a) \setminus B_\varrho(z)} g \cdot P_x d\,\sigma_{a,r}, \qquad x \in B_r(a).$$

Pravá strana má pro $x \to z$ podle (1.3.1 (iii)) limitu nula. Protože $Hg = Hf - \lambda$, je

$$\limsup_{x\to z} Hf(x) \le \lambda.$$

Odtud plyne nerovnost

$$\limsup_{x\to z} Hf(x) \le \limsup_{y\to z} f(y).$$

$\square$

1.3.3. Korolár. *Nechť $f \in \mathcal{C}(S_r(a))$. Potom existuje právě jedna funkce $h \in \mathcal{H}(B_r(a))$ taková, že pro každé $z \in S_r(a)$ platí*

$$(*) \qquad \lim_{x\to z} h(x) = f(z).$$

Platí rovnost $h = Hf$.

Důkaz. Definujeme-li $h = Hf$, platí $(*)$ podle (1.3.2). Jednoznačnost plyne z (1.2.1). $\square$

1.3.4. Poznámka. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina a $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ (tzv. okrajová podmínka). *Klasická Dirichletova úloha* spočívá v nalezení harmonické funkce h na U, pro níž platí $(*)$. Podle (1.2.1) takové harmonické rozšíření funkce f existuje nejvýše jedno. V teorii potenciálu se U nazývá *regulární množina*, pokud klasická Dirichletova úloha má řešení pro každou spojitou okrajovou podmínku. Z (1.3.3) víme, že každá koule je regulární množina a řešení Dirichletovy úlohy je vyjádřeno Poissonovým integrálem. Hodnoty řešení tedy dostaneme jako „vážený průměr“ hodnot okrajové podmínky — hustota je dána Poissonovým jádrem. V našem výkladu Poissonovo jádro „spadlo z nebe“, v (1.9) ukážeme, jak je lze přirozeným způsobem odvodit.

1.3.5. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $h \in \mathcal{H}(U)$. Potom $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$.*

Důkaz. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$, $f = h|_{S_r(a)}$. Pak $h = Hf$ na $B_r(a)$ podle (1.3.3) a $h \in \mathcal{C}^\infty(B_r(a))$ podle (1.3.2). $\square$

1.3.6. Tvrzení. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $h \in \mathcal{H}^+(U)$ a nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Potom pro každé $x \in B_r(a)$ platí*

$$h(a)\, r^{m-2} \frac{r - |x-a|}{(r+|x-a|)^{m-1}} \le h(x) \le h(a)\, r^{m-2} \frac{r+|x-a|}{(r-|x-a|)^{m-1}}.$$

Důkaz. Položme $f = h|_{S_r(a)}$. Potom $h = Hf$ na $B_r(a)$. Pro $x \in B_r(a)$ a $y \in S_r(a)$ zřejmě platí

$$r - |x-a| = |y-a| - |x-a| \le |x-y| \le |y-a| + |x-a| = r + |x-a|,$$

takže na $S_r(a)$ jsou splněny nerovnosti (f je nezáporná)

$$f \cdot r^{m-2} \frac{r-|x-a|}{(r+|x-a|)^{m-1}} \le f \cdot P_x \le f \cdot r^{m-2} \frac{r+|x-a|}{(r-|x-a|)^{m-1}}.$$

Protože

$$h(a) = Hf(a) = \int f \cdot P_a \, d\sigma_{a,r} = \int f \, d\sigma_{a,r},$$

dostáváme integrací požadovanou nerovnost. $\square$

1.3.7. Tvrzení. *Nechť $h \in \mathcal{H}(B_r(a))$, $M = \sup |h|(B_r(a))$ a $j \in \{1, ..., m\}$. Potom platí*

$$|D_j h(a)| \leq \frac{mM}{r}.$$

Důkaz. Zvolme $0 < \varrho < r$. Stačí dokázat, že $|D_j h(a)| \leq mM/\varrho$. Pro Poissonovo jádro P na kouli $B_\varrho(a)$ snadno spočteme, že $|(D_j P^y)(a)| \leq m/\varrho$. Derivováním za integračním znamením dostáváme

$$D_j h(a) = \int h(y)(D_j P^y)(a)\, d\sigma_{a,\varrho}.$$

Odtud plyne $|D_j h(a)| \leq mM/\varrho$. □

1.4 Nezáporné harmonické funkce na kouli

Označme $M(S_r(a))$ systém všech konečných (nezáporných) borelovských měr na $S_r(a)$. Pro $\mu \in M(S_r(a))$ definujme *Poissonův integrál míry* μ rovností

$$P\mu(x) = \int P_x\, d\mu, \qquad x \in B_r(a).$$

Zřejmě $P\mu \in \mathcal{H}^+(B_r(a))$ (derivování za integračním znamením).

1.4.1. Lemma. *Nechť $\nu \in M(S_r(a))$ a $h = P\nu$. Pro $\eta \in\ ]0,1[$ a $z \in S_r(a)$ položme*

$$h_\eta(z) = h(a + \eta(z - a)).$$

Potom

$$\lim_{\eta \to 1-} \int g \cdot h_\eta\, d\sigma_{a,r} = \int g\, d\nu,$$

kdykoliv $g \in \mathcal{C}(S_r(a))$. Jinak řečeno: míry $h_\eta \sigma_{a,r}$ konvergují slabě k míře ν pro $\eta \to 1-$.

Důkaz. Lze předpokládat, že $a = 0$. Jestliže y, $z \in S_r(0)$ a $\eta \in\ ]0,1[$, je zřejmě

$$|y - \eta z| = |\eta y - z|,$$

takže z definice funkce P (viz (1.3)) vyplývá, že

$$P(\eta z, y) = P(\eta y, z).$$

Nechť $g \in \mathcal{C}(S_r(0))$. Potom

$$\int g \cdot h_\eta\, d\sigma_{0,r} = \int g(z)\Big(\int P(\eta z, y)\, d\nu(y)\Big)\, d\sigma_{0,r}(z) =$$
$$= \int \Big(\int P(\eta y, z) g(z)\, d\sigma_{0,r}(z)\Big)\, d\nu(y) = \int Hg(\eta y)\, d\nu(y).$$

Protože je $g \in \mathcal{C}(S_r(0))$, je podle (1.3.3) $Hg(\eta y) \to g(y)$ stejnoměrně na $S_r(0)$ pro $\eta \to 1-$. Odtud vyplývá tvrzení lemmatu. □

1.4.2. Věta. *Nechť $h \in \mathcal{H}^+(B_r(a))$. Potom existuje právě jedna míra $\mu \in M(S_r(a))$ tak, že $h = P\mu$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $a = 0$. Pro $\eta \in]0,1[$ a $z \in S_r(0)$ položme $f_\eta(z) = h(\eta z)$. Potom

$$\int_{S_r(0)} f_\eta \, d\sigma_{0,r} = \int_{S_{\eta r}(0)} h \, d\sigma_{0,\eta r} = h(0).$$

Vidíme, že pro míry $\mu_\eta = f_\eta \, d\sigma_{0,r}$ platí $\mu_\eta(S_r(0)) = h(0)$ pro každé $\eta \in]0,1[$. Existují tedy $\eta(n) \in]0,1[$ tak, že $\eta(n) \to 1$ a míra $\mu \in M(S_r(0))$ tak, že $\mu_{\eta(n)} \to \mu$ slabě pro $n \to \infty$. Zvolme $x \in B_r(0)$ a $n \in \mathbb{N}$. Funkce $h_n : t \mapsto h(\eta(n)t)$ je harmonická na $B_{r/\eta(n)}(0) \supset \overline{B_r(0)}$. Podle (1.3.3) je

$$h_n(x) = \int h_n P_x \, d\sigma_{0,r} = \int h(\eta(n)z) P_x(z) \, d\sigma_{0,r}(z) = \int P_x f_{\eta(n)} \, d\sigma_{0,r} = \int P_x \, d\mu_{\eta(n)}.$$

Protože $\eta(n) \to 1$ pro $n \to \infty$, dostáváme $h_n(x) \to h(x)$, neboli

$$\int P_x \, d\mu_{\eta(n)} \to h(x) \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Protože $P_x \in \mathcal{C}(S_r(0))$, ze slabé konvergence dostáváme

$$\int P_x \, d\mu_{\eta(n)} \to \int P_x \, d\mu \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Dokázali jsme, že $h = P\mu$. Jednoznačnost plyne z (1.4.1). $\square$

1.5 Věty o průměru

Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^m$ budeme značit λ, dále označíme $\lambda_{a,r}$ *normalizovanou Lebesgueovu míru* na $B_r(a)$ (takže $\lambda_{a,r}(B_r(a)) = 1$).

1.5.1. Lemma. *Nechť $f \in \mathcal{C}(\overline{B_r(a)})$. Potom je funkce $\varrho \mapsto \int f \, d\sigma_{a,\varrho}$ spojitá na $]0,r[$ a*

$$\int f \, d\lambda_{a,r} = \frac{m}{r^m} \int_0^r \Big(\int f \, d\sigma_{a,\varrho} \Big) \varrho^{m-1} \, d\varrho.$$

Důkaz. Označme $\tau = \lambda(B_1(0))$, σ povrchovou míru na $S_1(0)$ a $\omega = \sigma(S_1(0))$. Je známo, že $\omega = m\tau$. Pro $\varrho \in]0,r[$ platí

$$\int f \, d\sigma_{a,\varrho} = \frac{1}{\omega \varrho^{m-1}} \int_{S_1(0)} f(a + \varrho s) \varrho^{m-1} \, d\sigma(s),$$

takže pro α, $\beta \in]0,r[$ je

$$\left| \int f \, d\sigma_{a,\alpha} - \int f \, d\sigma_{a,\beta} \right| \le \frac{1}{\omega} \int_{S_1(0)} |f(a+\alpha s) - f(a + \beta s)| \, d\sigma(s).$$

Funkce $(\varrho, s) \mapsto f(a + \varrho s)$ je stejnoměrně spojitá na $[0,r] \times S_1(0)$. Odtud snadno plyne spojitost na $]0,r[$ funkce

$$\varrho \mapsto \int f \, d\sigma_{a,\varrho}.$$

Platí

$$\int f \, d\lambda_{a,r} = \frac{1}{\tau r^m} \int_0^r \Big(\int_{S_1(0)} f(a + \varrho s) \, d\sigma(s) \Big) \varrho^{m-1} \, d\varrho = \frac{m}{r^m} \int_0^r \Big(\int_{S_\varrho(a)} f \, d\sigma_{a,\varrho} \Big) \varrho^{m-1} \, d\varrho.$$

$\square$

1.5.2. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $h \in \mathcal{H}(U)$ a $\overline{B_r(a)} \subset U$. Potom*

$$h(a) = \int h\,d\sigma_{a,r} \qquad \text{a} \qquad h(a) = \int h\,d\lambda_{a,r}.$$

Důkaz. Jak už jsme dříve viděli, je podle (1.3.3)

$$h(a) = \int h \cdot P_a\,d\sigma_{a,r} = \int h\,d\sigma_{a,r}.$$

Protože pro každé $\varrho \in \,]0, r[$ platí $\int h\,d\sigma_{a,\varrho} = h(a)$, vyplývá rovnost $h(a) = \int h\,d\lambda_{a,r}$ ihned z (1.5.1). □

1.5.3. Věta. *Nechť U je oblast v $\mathbb{R}^m$, $h \in \mathcal{H}(U)$. Potom je buďto $h = \inf h(U)$ na U, nebo $h > \inf h(U)$ na U.*

Důkaz. Označme $M = \{x \in U; h(x) = \inf h(U)\}$. Pak M je uzavřená v U. Jestliže $a \in M$ a $\overline{B_r(a)} \subset U$, pak

$$h(a) = \inf h(U) = \int h\,d\lambda_{a,r},$$

takže $B_r(a) \subset M$. Je tedy M obojetná množina v U. Ze souvislosti U plyne, že buďto $M = U$, nebo $M = \emptyset$. □

1.5.4. Věta. *Nechť $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ je shora omezená nebo zdola omezená. Potom h je konstantní.*

Důkaz. Lze předpokládat, že $h \geq 0$ všude na $\mathbb{R}^m$. Zvolme $x, y \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ a položme $R = r + |x - y|$. Potom $B_r(x) \subset B_R(y)$, takže

$$\int_{B_r(x)} h\,d\lambda \leq \int_{B_R(y)} h\,d\lambda.$$

Odtud

$$\lambda(B_r(x)) \int_{B_r(x)} h\,d\lambda_{x,r} = \lambda(B_r(x))\,h(x) \leq \lambda(B_R(y)) \int_{B_R(y)} h\,d\lambda_{y,R} = \lambda(B_R(y))\,h(y).$$

Pro každé $r > 0$ tedy platí

$$h(x) \leq \left(\frac{r + |x - y|}{r}\right)^m h(y),$$

což dává $h(x) \leq h(y)$. Protože $x, y \in \mathbb{R}^m$ byly libovolné body, platí také $h(y) \leq h(x)$, takže h je konstantní funkce. □

1.5.5. Věta. *Nechť p je nekonstantní polynom s komplexními koeficienty. Potom existuje $z_0 \in \mathbb{C}$ takové, že $p(z_0) = 0$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Nechť $p(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Víme, že existuje holomorfní funkce F taková, že $p = \exp F$. Protože $|p| = \exp(\operatorname{Re} F)$, pro funkci $h = \log|p|$ platí $h = \operatorname{Re} F \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ podle (1.1.1 (c)). (Zde obvyklým způsobem ztotožňujeme $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$.) Jelikož $|p(z)| \to \infty$ pro $z \to \infty$, platí $h(z) \to \infty$ pro $z \to \infty$, a tudíž je h zdola omezená nekonstantní funkce. To je ovšem ve sporu s (1.5.4). □

1.5.6. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená, $0 \in U$ a nechť $\lambda(U) < \infty$. Jestliže pro každou λ–integrovatelnou funkci $h \in \mathcal{H}(U)$ platí*

$$h(0) = \frac{1}{\lambda(U)} \int_U h \, d\lambda,$$

potom je U koule o středu v počátku.

Důkaz. Nechť $y \in \mathbb{R}^m \setminus U$ je nejbližší bod k počátku, $r = |y|$ a $B = B_r(0)$. Všimněme si, že

$$\int_{U \setminus \overline{B}} h \, d\lambda = 0,$$

kdykoli h je integrovatelná harmonická funkce na U, pro niž $h(0) = 0$. Skutečně, s využitím (1.5.2),

$$0 = h(0)\lambda(U) = \int_U h \, d\lambda = \int_{U \setminus \overline{B}} h \, d\lambda + \int_B h \, d\lambda = \int_{U \setminus \overline{B}} h \, d\lambda + h(0) \cdot \lambda(B) = \int_{U \setminus \overline{B}} h \, d\lambda.$$

Definujme

$$K(x) = \frac{|x|^2 - r^2}{|x - y|^m} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{y\},$$

takže K je násobkem funkce P^y definované v (1.3). Funkce $h = K - K(0)$ je tedy harmonická a integrovatelná na U (srv. (1.1.1 (e))), $h(0) = 0$ a $h > 0$ na $U \setminus \overline{B}$. Platí tedy $\lambda(U \setminus \overline{B}) = 0$, tudíž $U \subset \overline{B}$. Jelikož $B \subset U$, platí $U = B$. □

1.6 Obrácení vět o průměru

1.6.1. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $h : U \to \mathbb{R}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $h \in \mathcal{H}(U)$;

(ii) $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$ *a* $\Delta h = 0$ *na* U;

(iii) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a* $h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r}$, *kdykoli* $\overline{B_r(a)} \subset U$;

(iv) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a* $h(a) = \int h \, d\lambda_{a,r}$, *kdykoli* $\overline{B_r(a)} \subset U$;

(v) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a pro každé* $a \in U$ *existují* $r(n) > 0$ *tak, že* $r(n) \to 0$ *pro* $n \to \infty$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r(n)};$$

(vi) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a pro každé* $a \in U$ *existují* $r(n) > 0$ *tak, že* $r(n) \to 0$ *pro* $n \to \infty$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$h(a) = \int h \, d\lambda_{a,r(n)}.$$

Důkaz. Podle (1.3.5) platí (i)$\Rightarrow$(ii), (ii)$\Rightarrow$(iii) plyne z (1.5.2), (iii)$\Rightarrow$(iv) z (1.5.1). Protože implikace (iii)$\Rightarrow$(v) a (iv)$\Rightarrow$(vi) jsou zřejmé, zbývá dokázat, že (v)$\Rightarrow$(i) a (vi)$\Rightarrow$(i).

Nechť platí (v) a $\overline{B_r(c)} \subset U$. Označme $f = h|_{S_r(c)}$ a položme $g = Hf$. Podmínka (i) bude dokázána, jakmile ukážeme, že funkce $u = h - g$ je identicky rovna nule na $B_r(c)$.

Nechť u je kladná v některém bodě z $B_r(c)$. Označíme-li M množinu bodů z $B_r(c)$, v nichž u nabývá maxima, je M neprázdná kompaktní množina obsažená v $B_r(c)$ (spojité rozšíření funkce u na $\overline{B_r(c)}$ je rovno nule na $S_r(c)$). Zvolme bod $a \in M$, který má největší vzdálenost od bodu c. Zřejmě $a \in B_r(c)$ a podle předpokladu z (v) existuje $\varrho > 0$ tak, že $B_\varrho(a) \subset B_r(c)$ a $h(a) = \int h \, d\sigma_{a,\varrho}$. Podle (1.5.2) je $g(a) = \int g \, d\sigma_{a,\varrho}$, takže také $u(a) = \int u \, d\sigma_{a,\varrho}$. Přitom $u \leq u(a)$ na $S_\varrho(a)$ a ostrá nerovnost platí na neprázdné otevřené části $S_\varrho(a)$, takže $u(a) > \int u \, d\sigma_{a,\varrho}$. Tento spor ukazuje, že $u \leq 0$, záměnou h a g dokážeme $u \geq 0$. Skutečně platí $g = Hf$ na $B_r(c)$.

Důkaz implikace (vi)$\Rightarrow$(i) je zcela analogický. □

1.6.2. Věta. *Pro $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ označme $x' = (-x_1, x_2, ..., x_m)$. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina taková, že $x' \in U$ kdykoli $x \in U$. Označme*

$$U^+ = \{x \in U; x_1 > 0\}, \qquad U^- = \{x \in U; x_1 < 0\}, \qquad L = \{x \in U; x_1 = 0\}.$$

Nechť $g \in \mathcal{H}(U^+)$ a nechť

$$\lim_{x \to z} g(x) = 0, \qquad z \in L.$$

Definujme

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & na \quad U^+, \\ -g(x') & na \quad U^-, \\ 0 & na \quad L. \end{cases}$$

Potom $h \in \mathcal{H}(U)$.

Důkaz. Stačí ověřit podmínku (v) z (1.6.1). Zřejmě je $h \in \mathcal{C}(U)$ a pokud je $a \in U^+ \cup U^-$, platí $h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r}$ pro všechna $r > 0$, která jsou menší než vzdálenost bodu a od L. Je-li $a \in L$ a $\overline{B_r(a)} \subset U$, pak $h(a) = 0$ a z definice h plyne, že

$$h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r} = 0.$$

Tím je podmínka (v) z (1.6.1) ověřena. □

1.7 Harnackova nerovnost

1.7.1. Tvrzení. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{H}^+(U)$, $f_1 = \sup \mathcal{F}$, $f_2 = \inf \mathcal{F}$. Potom $f_1 = \infty$ na U nebo $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(U)$, $f_2 = 0$ na U nebo $f_2 \in \mathcal{C}(U)$.*

Důkaz. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Označme pro $x \in B_r(a)$

$$c_1(x) = r^{m-2} \frac{r - |x-a|}{(r + |x-a|)^{m-1}}, \qquad c_2(x) = r^{m-2} \frac{r + |x-a|}{(r - |x-a|)^{m-1}}.$$

Podle (1.3.6) je pro každé každé $x \in B_r(a)$

$$f_1(a)\, c_1(x) \leq f_1(x) \leq f_1(a)\, c_2(x).$$

Odtud plyne, že U je sjednocením dvou otevřených disjunktních množin

$$\{x \in U; f_1(x) < \infty\} \qquad \text{a} \qquad \{x \in U; f_1(x) = \infty\}.$$

Platí tedy buďto $f_1 = \infty$ na U, nebo $f_1 < \infty$ na U. V druhém případě je

$$f_1(a)(c_1(x) - 1) \leq f_1(x) - f_1(a) \leq f_1(a)(c_2(x) - 1).$$

Zřejmě

$$\lim_{x \to a} c_j(x) = 1, \quad j \in \{1, 2\},$$

tedy f_1 je spojitá v bodě a. □

1.7.2. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $K \subset U$ je kompaktní množina. Potom existuje $c_K > 0$ tak, že pro každou $h \in \mathcal{H}^+(U) \setminus \{0\}$ a každé dva body $x, y \in K$ platí*

$$c_K^{-1} \leq \frac{h(x)}{h(y)} \leq c_K.$$

Jinak řečeno: Pro každou $h \in \mathcal{H}^+(U)$ platí

$$\sup h(K) \leq c_K \inf h(K).$$

Důkaz. Pro každou $h \in \mathcal{H}^+(U) \setminus \{0\}$ je $h > 0$ podle (1.5.3). Zvolme $a \in K$ a označme

$$\mathcal{F} = \{h \in \mathcal{H}^+(U); h(a) = 1\}, \qquad f_1 = \sup \mathcal{F}, \qquad f_2 = \inf \mathcal{F}.$$

Podle (1.7.1) je f_1 spojitá (reálná) funkce a f_2 je spojitá kladná funkce. Označme

$$\alpha = \inf f_2(K), \qquad \beta = \sup f_1(K).$$

Zřejmě $0 < \alpha \leq \beta < \infty$. Je-li $h \in \mathcal{F}$, $x, y \in K$, potom

$$\alpha \leq h(x) \leq \beta, \qquad \alpha \leq h(y) \leq \beta,$$

takže

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{h(x)}{h(y)} \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Nyní stačí volit $c_K = \beta/\alpha$ a uvědomit si, že pro $h \in \mathcal{H}^+(U) \setminus \{0\}$ je $h/h(a) \in \mathcal{F}$. □

1.8 Harnackovy věty

1.8.1. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $h_n \in \mathcal{H}(U)$ a nechť (h_n) konverguje lokálně stejnoměrně k funkci h. Potom $h \in \mathcal{H}(U)$.*

Důkaz. Zřejmě $h \in \mathcal{C}(U)$. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Potom pro každé n platí podle (1.5.2) rovnost $\int h_n \, d\sigma_{a,r} = h_n(a)$. Odtud $h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r}$. Podle (1.6.1) je $h \in \mathcal{H}(U)$. □

Nechť $\mathcal{F}$ je systém funkcí (s hodnotami v $\mathbb{R}^*$) definovaných na množině X. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je *nahoru filtrující*, jestliže pro každé dvě funkce $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ existuje $f \in \mathcal{F}$ tak, že $f \geq \max(f_1, f_2)$.

1.8.2. Věta. *Nechť $\mathcal{F} \neq \emptyset$ je nahoru filtrující systém harmonických funkcí na oblasti $U \subset \mathbb{R}^m$, $h = \sup \mathcal{F}$. Potom buďto $h = \infty$ na U, nebo $h \in \mathcal{H}(U)$.*

Důkaz. Zvolme $h_0 \in \mathcal{F}$. Potom

$$\sup \mathcal{F} = \sup\{f \in \mathcal{F}; f \geq h_0\}.$$

Je-li totiž $h_1 \in \mathcal{F}$, existuje $h_2 \in \mathcal{F}$ tak, že $h_2 \geq \max(h_0, h_1)$. Definujme

$$\mathcal{F}_0 = \{f - h_0; f \in \mathcal{F}, f \geq h_0\}.$$

Potom $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{H}^+(U)$ a $\sup \mathcal{F}_0 = h - h_0$.

Podle (1.7.1) je buďto $h - h_0 = \infty$ na U (pak ovšem $h = \infty$ na U), nebo $h - h_0 \in \mathcal{C}(U)$, tedy $h \in \mathcal{C}(U)$.

Je-li $K \subset U$ kompaktní množina, je $h|_K$ spojitá funkce, která je supremem nahoru filtrujícího systému spojitých funkcí $f|_K$, $f \in \mathcal{F}$. Z Diniho věty (srv. např. s (2.1.6)) vyplývá existence funkcí $f_n \in \mathcal{F}$ takových, že $f_n \to h$ na K stejnoměrně.

Podle (1.8.1) je na vnitřku K funkce h harmonická. Odtud plyne, že $h \in \mathcal{H}(U)$. □

1.8.3. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $a \in U$ a nechť (h_n) je neklesající posloupnost harmonických funkcí na U, $h = \lim_{n\to\infty} h_n$. Je-li $h(a) < \infty$, pak $h \in \mathcal{H}(U)$.*

1.8.4. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a nechť $\mathcal{F}$ je lokálně stejně omezená množina harmonických funkcí na U. Potom $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v topologii lokálně stejnoměrné konvergence.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Arzèla-Ascoliho věty, pokud dokážeme, že funkce z $\mathcal{F}$ jsou stejně spojité v každém bodě každé kompaktní množiny obsažené v U.

Nechť tedy $K \subset U$ je kompaktní. Zvolme $r > 0$ tak, aby pro každé $a \in K$ platilo $B_{3r}(a) \subset U$. Označme L množinu všech bodů z $\mathbb{R}^m$, jejichž vzdálenost od K je menší nebo rovna $2r$. Potom L je kompaktní podmnožina U a existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|h| \leq M$ na L, kdykoli $h \in \mathcal{F}$. Nechť $a \in K$. Je-li $x \in B_r(a)$, je $B_r(x) \subset B_{2r}(a) \subset L$, takže podle (1.3.7) je

$$|D_j h(x)| \leq mM/r, \text{ kdykoli } h \in \mathcal{F} \text{ a } j \in \{1, ..., m\}.$$

Pro $h \in \mathcal{F}$ tedy platí

$$|h(x) - h(a)| \leq \sup |\operatorname{grad} h|(B_r(a))\, |x - a| \leq$$
$$\leq \sqrt{m} \max\{\sup |D_j h|(B_r(a)); j \in \{1, ..., m\}\}\, |x - a| \leq \sqrt{m}\, mM/r\, |x - a|.$$

Dokázali jsme, že funkce z $\mathcal{F}$ jsou stejně spojité v každém bodě množiny K. □

1.9 Greenova funkce pro kouli

V (1.3) jsme definovali Poissonovo jádro a ukázali, že Poissonův integrál poskytuje řešení Dirichletovy úlohy na kouli. Poissonovo jádro vstoupilo do hry poněkud mysticky, vzorec jako by „spadl z nebe“. Nyní jej přirozeným způsobem odvodíme.

Budeme užívat Gauss-Greenovu větu pro omezené otevřené množiny s hladkou hranicí. Jediné, co ve skutečnosti budeme potřebovat, je verze této věty pro případ množiny

$$V = B_R(a) \setminus \overline{B_r(b)}, \qquad 0 \leq r < R - |b - a|.$$

Uvažujme omezenou otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^m$ s hladkou hranicí, symbolem n_V označme vnější normálu k V a σ povrchovou míru na ∂V. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $U \supset \overline{V}$. Je-li $v = (v_1, ..., v_m)$ vektorová funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na U, pak

$$\int_V \operatorname{div} v \, d\lambda = \int_{\partial V} v \, n_V \, d\sigma.$$

Připomínáme, že $\operatorname{div} v = \sum_{j=1}^m D_j v_j$. Pro funkci $v \in \mathcal{C}^1(U)$ jako obvykle značíme

$$\operatorname{grad} v = (D_1 v, ..., D_m v),$$

takže pro $v \in \mathcal{C}^2(U)$ je $\operatorname{div} \operatorname{grad} v = \Delta v$. Pro $v \in \mathcal{C}^1(U)$ se funkce

$$y \mapsto \operatorname{grad} v(y)\, n_V(y), \qquad y \in \partial V,$$

značí $D_n v$ (*normální derivace funkce* v).

Jestliže $u \in \mathcal{C}^1(U)$, $v \in \mathcal{C}^2(U)$, pak

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u\Delta v + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v,$$

takže z Gauss-Greenovy věty plyne

$$\int_V (u\Delta v + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v)\, d\lambda = \int_{\partial V} u\, D_n v\, d\sigma.$$

Odtud pro $u, v \in \mathcal{C}^2(U)$ dostáváme tzv. Greenovu identitu

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u)\, d\lambda = \int_{\partial V} (uD_n v - vD_n u)\, d\sigma.$$

1.9.1. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $h \in \mathcal{H}(U)$. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Potom*

$$\int_{S_r(a)} D_n h\, d\sigma = 0.$$

Důkaz. V Greenově identitě stačí volit $u = 1$, $v = h$. □

Označme opět $\omega = \sigma(S_1(0))$ povrch jednotkové sféry v $\mathbb{R}^m$ a definujme pro $t > 0$

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} \log \dfrac{1}{t} & \text{v případě } m = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{\omega(m-2)} \dfrac{1}{t^{m-2}} & \text{v případě } m > 2. \end{cases}$$

Dále klademe $p(0) = \infty$.

Pro $x, y \in \mathbb{R}^m$ definujeme $N(x, y) = p(|x - y|)$; symbol N_x má obvyklý význam, (srv. např. (1.3)). Funkce N se v případě $m = 2$ nazývá *logaritmické jádro* a v případě $m > 2$ *Newtonovo jádro*. Všimněme si, že pro $N_0 : y \mapsto p(|y|)$ platí

$$\operatorname{grad} N_0(y) = -\frac{1}{\omega} \frac{y}{|y|^m}, \qquad y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Zvolená normalizace má toto ospravedlnění:

1.9.2. Věta. *Pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$ mající kompaktní nosič platí*

$$\int_{\mathbb{R}^m} (-N_0)\Delta\varphi\, d\lambda = \varphi(0).$$

Důkaz. Nechť $r > 0$ a $R > r$ takové, že $\varphi = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus B_R(0)$. Označme

$$M = \sup |\operatorname{grad} \varphi|(\mathbb{R}^m) \text{ a } V = B_R(0) \setminus B_r(0).$$

Z Greenovy identity dostáváme

$$\int_V N_0 \Delta\varphi \, d\lambda = \int_V \Delta N_0 \, \varphi + \int_{\partial V} (N_0 D_n \varphi - \varphi D_n \, N_0) \, d\sigma.$$

Označme n vnější normálu k $B_r(0)$, takže na $S_r(0)$ platí $n_V = -n$. Z (1.1.1(d)) víme, že $\Delta N_0 = 0$ na V, dále $\varphi = 0$ na okolí $S_R(0)$, takže $D_n \varphi = 0$ na $S_R(0)$. Platí tedy

$$\int_V N_0 \, \Delta\varphi \, d\lambda = -\int_{S_r(0)} N_0 \, D_n \varphi \, d\sigma + \int_{S_r(0)} \varphi \, D_n N_0 \, d\sigma.$$

Zřejmě

$$\left| \int_{S_r(0)} N_0 \, D_n \varphi \, d\sigma \right| \le p(r) M \omega r^{m-1} \to 0 \quad \text{pro} \quad r \to 0+ .$$

Dále

$$D_n N_0(y) = -\frac{1}{\omega} \frac{y}{|y|^m} \frac{y}{|y|}, \qquad y \in S_r(0)$$

(zde uvažujeme normální derivaci vzhledem k $B_r(0)$), takže

$$\int_{S_r(0)} \varphi \, D_n N_0 \, d\sigma = -\frac{1}{\omega r^{m-1}} \int_{S_r(0)} \varphi \, d\sigma \to -\varphi(0)$$

pro $r \to 0+$. Protože $N_0 \in L^1(B_R(0))$, dostáváme okamžitě rovnost z věty pro $r \to 0+$. □

1.9.3. Poznámka. Pro $a \in \mathbb{R}^m$ označme ε_a Diracovu míru soustředěnou v bodě a. Věta (1.9.2) říká, že *distributivní laplasián* funkce $-N_0$ je roven ε_0, neboli $-N_0$ je *fundamentální řešení Laplaceovy rovnice.*

Z (1.9.2) plyne, že pro každou $\varphi \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^m)$, tj. funkci z $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$ s kompaktním nosičem, platí

$$\varphi(x) = -\int_{\mathbb{R}^m} N(x,y) \, \Delta\varphi(y) \, d\lambda(y), \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Pro $f \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^m)$ a $x \in \mathbb{R}^m$ položme

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} N(x,y) \, f(y) \, d\lambda(y).$$

Protože

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} N_0(y) \, f(x-y) \, d\lambda(y),$$

je podle věty o derivování za integračním znamením $\Delta(Tf) = T(\Delta f) = -f$, kdykoli $f \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^m)$. Na prostoru $\mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^m)$ je tedy $T \circ \Delta = \Delta \circ T = -I$, takže integrální operátor $-T$ je na $\mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^m)$ inverzním operátorem k diferenciálnímu operátoru Δ.

Pro $g \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^m)$ je tudíž snadné najít řešení u tzv. Poissonovy rovnice $\Delta u = g$. Stačí položit $u = -Tg$.

1.9.4. Lemma. *Nechť $\varphi \in \mathcal{C}(S_r(0))$. Potom*

$$\int_{S_r(0)} \varphi \, D_n N_0 \, d\sigma = -\int_{S_r(0)} \varphi \, d\sigma_{0,r}$$

(*normální derivace vzhledem k $B_r(0)$*).

Důkaz. Zřejmě
$$D_n N_0 = -\frac{1}{\omega r^{m-1}}$$
na $S_r(0)$. □

Následující úvahu budeme ve skutečnosti užívat pro velmi speciální případ, že U je koule. Nicméně vyšetření obecného případu přináší lepší pochopení integrální reprezentace řešení Dirichletovy úlohy.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina s hladkou hranicí, h je harmonická funkce definovaná na okolí $\overline{U}$ a $x \in U$. Hodnota $h(x)$ je podle (1.2.1) jednoznačně určena hodnotami funkce $h|_{\partial U}$ a naší snahou je najít vyjádření $h(x)$ pomocí těchto hodnot. Zvolme $r > 0$ tak, aby pro $B = B_r(x)$ platilo $\overline{B} \subset U$ a označme $V(r) = U \setminus B$. Je-li g harmonická funkce na okolí $\overline{V(r)}$, pak podle Greenovy identity
$$0 = \int_{V(r)} (h\Delta g - g\Delta h)\, d\lambda = \int_{\partial V(r)} (hD_n g - gD_n h)\, d\sigma.$$
Uvážíme-li, že $n_{V(r)} = -n_B$ na $S_r(x)$ a $\partial V = \partial U \cup S_r(x)$, dostáváme
$$\int_{S_r(x)} h(\operatorname{grad} g\, n_B)\, d\sigma - \int_{S_r(x)} g(\operatorname{grad} h\, n_B)\, d\sigma =$$
$$= \int_{\partial U} h(\operatorname{grad} g\, n_U)\, d\sigma - \int_{\partial U} g(\operatorname{grad} h\, n_U)\, d\sigma.$$
Poslední integrál zahrnuje hodnoty normální derivace funkce h, které neznáme. Bylo by tudíž účelné volit funkci g tak, že $g|_{\partial U} = 0$. Jestliže má g být harmonická na V pro každé dostatečně malé r, pak se přirozenou volbou jeví hledat g ve tvaru $N_x + L_x$ s funkcí L_x harmonickou na okolí $\overline{U}$.

Předpokládejme tedy:

($*$) Existuje funkce L_x harmonická na okolí množiny $\overline{U}$ tak, že $G_x := N_x + L_x = 0$ na ∂U. (Z principu minima plyne, že L_x je na $\overline{U}$ jednoznačně určena.)

Zřejmě pro $r \to 0+$
$$\int_{S_r(x)} h(grad\, L_x\, n_B)\, d\sigma \to 0, \qquad \int_{S_r(x)} L_x(\operatorname{grad} h\, n_B)\, d\sigma \to 0.$$
Z (1.9.4) a (1.5.2) plyne (pro $r \to 0+$)
$$\int_{S_r(x)} h(\operatorname{grad} N_x\, n_B)\, d\sigma \to -h(x).$$
Protože
$$\int_{S_r(x)} N_x(\operatorname{grad} h\, n_B)\, d\sigma = p(r) \int_{S_r(x)} \operatorname{grad} h\, n_B\, d\sigma,$$
je podle (1.9.1)
$$\int_{S_r(x)} N_x(\operatorname{grad} h\, n_B)\, d\sigma = 0.$$
Pro $g = G_x$ tedy pro $r \to 0+$ dostáváme
$$h(x) = -\int_{\partial U} h\, D_n G_x\, d\sigma.$$

Nyní nás zajímá případ $U = B_r(a)$ a pro jednoduchost předpokládejme, že $a = 0$. Zabývejme se podmínkou $(*)$ a zkusme najít L_x ve tvaru $\alpha N_{\beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta x \notin \overline{B_r(0)}$. Pokud to je možné, funkce

$$y \mapsto \frac{|y - x|}{|y - \beta x|}$$

je konstantní na $S_r(0)$, má tedy stejnou hodnotu v bodech $rx/|x|$ a $-rx/|x|$. Jednoduchými úpravami rovnosti

$$\frac{\big|rx/|x| - x\big|^2}{\big|rx/|x| - \beta x\big|^2} = \frac{\big|rx/|x| + x\big|^2}{\big|rx/|x| + \beta x\big|^2}$$

dospějeme k

$$\beta r^2 + \beta |x|^2 = r^2 + \beta^2 |x|^2,$$

a protože $\beta \neq 1$, dostaneme $\beta = r^2/|x|^2$.

Tato předběžná úvaha nás vede k domněnce, že bod $x^* = (r^2/|x|^2)\, x$ bude významný v souvislosti s podmínkou $(*)$.

1.9.5. Lemma. *Položme $s(y) = |x - y|$, $t(y) = |x^* - y|$, $y \in \mathbb{R}^m$. Potom*

$$\frac{s(y)}{t(y)} = \frac{|x|}{r}, \qquad y \in S_r(0)$$

a pro derivaci podle vnější normály k $B_r(0)$ platí

$$D_n s(y) - \frac{|x|}{r} D_n t(y) = \frac{r^2 - |x|^2}{r s(y)}, \qquad y \in S_r(0).$$

Důkaz. Pro $y \in S_r(0)$ platí

$$t^2(y) = \Big|\frac{r^2}{|x|^2} x - y\Big|^2 = \frac{r^4}{|x|^2} - 2xy\frac{r^2}{|x|^2} + |y|^2 = \frac{r^2}{|x|^2}(r^2 - 2xy + |y|^2 \frac{|x|^2}{r^2}) = \frac{r^2}{|x|^2}|x - y|^2,$$

neboť $|y| = r$. Odtud plyne první část tvrzení.

Pro $y \in S_r(0)$ je $D_n s(y) = y(y - x)/r s(y)$,

$$D_n t(y) = \frac{y(y - x^*)}{r t(y)} = \frac{y(y - x^*)}{r^2 s(y)/|x|} = \frac{y(y - x^*)}{r s(y)} \frac{|x|}{r},$$

takže

$$\begin{aligned} D_n s(y) - \frac{|x|}{r} D_n t(y) &= \frac{r^2 - xy}{r s(y)} - \frac{|x|^2}{r^2} \frac{r^2 - x^* y}{r s(y)} = \\ &= \frac{1}{r s(y)}(r^2 - xy - |x|^2 + \frac{|x|^2}{r^2}\frac{r^2}{|x|^2} xy) = \frac{r^2 - |x|^2}{r s(y)}. \end{aligned}$$

$\square$

1.9.6. Věta. *Nechť $x \in B_r(0)$, $x^* = (r^2/|x|^2)x$ pro $x \neq 0$. Pro $x \neq 0$ definujme pro $y \neq x^*$*

$$L_x(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log(r|y - x^*|/|x|) & \textit{pro případ } m = 2, \\[2ex] -\dfrac{1}{(m-2)\,\omega}(r/|x||y - x^*|)^{m-2} & \textit{pro případ } m > 2. \end{cases}$$

Dále definujme pro $y \in \mathbb{R}^m$

$$L_0(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{r} & \text{pro případ } m = 2, \\ -\dfrac{1}{(m-2)\,\omega} \dfrac{1}{r^{m-2}} & \text{pro případ } m > 2. \end{cases}$$

Potom je funkce L_x harmonická na okolí $\overline{B_r(0)}$ a pro $G_x := N_x + L_x$ platí $G_x|_{S_r(0)} = 0$. Je-li h harmonická funkce na okolí $\overline{B_r(0)}$, potom

$$h(x) = -\int_{S_r(0)} h\, D_n G_x \, d\sigma.$$

Důkaz. Funkce L_x je zřejmě harmonická na okolí $\overline{B_r(0)}$ a zřejmě $N_0 + L_0 = 0$ na $S_r(0)$. Nechť $x \neq 0$. V případě $m = 2$ je pro $y \in S_r(0)$ podle lemmatu (1.9.5)

$$N_x(y) + L_x(y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} \frac{|x|}{r} |y - x^*| = \frac{1}{2\pi} \log \frac{|x| t(y)}{r s(y)} = \frac{1}{2\pi} \log 1 = 0,$$

v případě $m > 2$ je pro $y \in S_r(0)$

$$N_x(y) + L_x(y) = \frac{1}{(m-2)\,\omega} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \left(\frac{r}{|x||y-x^*|} \right)^{m-2} \right) = 0,$$

neboť

$$\frac{r}{|x||y-x^*|} = \frac{1}{|x-y|}$$

podle lemmatu (1.9.5).

Vzorec pro $h(x)$ jsme již dokázali. □

1.9.7. Lemma. *Pro $y \in S_r(0)$ platí*

$$D_n G_x(y) = -\frac{1}{\omega r} \frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^m}.$$

Důkaz. Při označení z (1.9.5) a za (1.9.1) platí v případě $x \neq 0$ na okolí $\overline{B_r(0)}$ rovnost

$$G_x = p \circ s - p \circ \frac{|x| t}{r}.$$

To ihned plyne z (1.9.6). Proto

$$D_n G_x = (p' \circ s)\, D_n s - p' \circ \frac{|x| t}{r}\, D_n t\, \frac{|x|}{r}.$$

Podle (1.9.5) na $S_r(0)$ platí

$$\frac{|x| t}{r} = s, \qquad D_n s - \frac{|x|}{r} D_n t = \frac{r^2 - |x|^2}{r s},$$

tudíž na $S_r(0)$ je

$$D_n G_x = (p' \circ s) \frac{r^2 - |x|^2}{r s}.$$

Zřejmě

$$p'(\tau) = -\frac{1}{\omega}\frac{1}{\tau^{m-1}}, \qquad \tau > 0,$$

takže

$$D_n G_x = -\frac{1}{\omega}\frac{r^2 - |x|^2}{r s^m}.$$

Pro $x = 0$ je tvrzení zřejmé. □

1.9.8. Věta. *Nechť h je funkce harmonická na okolí $B_r(a)$. Potom pro každé $x \in B_r(a)$ je*

$$h(x) = \int h(y)\, r^{m-2}\, \frac{r^2 - |x-a|^2}{|x-y|^m}\, d\sigma_{a,r}(y).$$

Důkaz. Protože $\sigma_{a,r} = \sigma/\omega r^{m-1}$ na $S_r(a)$, plyne pro $a = 0$ tvrzení ihned z (1.9.6) a (1.9.7). Pro obecné a se výsledek dostane posunutím. □

1.9.9. Poznámka. Při označení z (1.3) lze poslední vzorec přepsat do tvaru

$$h(x) = \int_{S_r(a)} h\, P_x\, d\sigma_{a,r}.$$

Funkce $G_x = N_x + L_x$ z (1.9.6) se nazývá *Greenova funkce* koule $B_r(0)$ s pólem v bodě x. Protože $L_x = -N_x$ na $S_r(0)$, platí zřejmě (při označení z (1.3))

$$G_x = N_x - H(N_x|_{S_r(0)}).$$

Ukázali jsme, že $P_x = -D_n G_x$, tedy Poissonovo jádro je (až na znaménko) normální derivací Greenovy funkce.