Kapitola 2

Hyperharmonické funkce

2.1 Polospojité funkce

V tomto paragrafu bude X Hausdorffův topologický prostor. Pro $x \in X$ označme $\mathcal{V}(x)$ systém všech otevřených okolí bodu x. Nechť $D \subset X$ a $u : D \to \mathbb{R}^*$. Pro $M \subset D$ a $x \in \overline{M}$ definujeme

$$\liminf_{y \to x,\, y \in M} u(y) = \sup\{\inf u(M \cap V); V \in \mathcal{V}(x)\},$$

$$\limsup_{y \to x,\, y \in M} u(y) = \inf\{\sup u(M \cap V); V \in \mathcal{V}(x)\}.$$

V případě $M = D$ píšeme pouze $\liminf_{y \to x} u(y)$, $\limsup_{y \to x} u(y)$.

Říkáme, že funkce $u : D \to \mathbb{R}^*$ je *zdola polospojitá v bodě* $x \in D$, jestliže $u(x) > -\infty$ a $u(x) = \liminf_{y \to x} u(y)$. Říkáme, že funkce $u : D \to \mathbb{R}^*$ je *shora polospojitá v bodě* $x \in D$, jestliže $u(x) < \infty$ a $u(x) = \limsup_{y \to x} u(y)$. Zřejmě tedy funkce u je zdola polospojitá v bodě $x \in D$, právě když je funkce $-u$ shora polospojitá v bodě x. Z definic okamžitě vyplývá, že funkce $u : D \to \mathbb{R}^*$ je spojitá v bodě x, právě když je v bodě x zdola polospojitá i shora polospojitá.

Funkce u se nazývá *zdola* (resp. *shora*) *polospojitá* na D, je-li zdola (resp. shora) polospojitá v každém bodě $x \in D$. Snadno se ověří, že funkce $u : D \to \mathbb{R}^*$ je zdola polospojitá na D, právě když $u > -\infty$ na D a pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D; u(x) > c\}$ otevřená v D.

Množina všech zdola polospojitých funkcí na D tvoří zřejmě min-stabilní konvexní kužel.

2.1.1. Věta. *Nechť $X \neq \emptyset$ je kompaktní topologický prostor a $u : X \to \mathbb{R}^*$ je zdola polospojitá funkce. Potom existuje $x \in X$ tak, že $u(x) = \inf u(X)$. Speciálně je tedy funkce u zdola omezená na X.*

Důkaz. Pro každé $y \in X$ zvolme $c(y) \in \mathbb{R}$ a $V(y) \in \mathcal{V}(y)$ tak, aby $\inf u(V(y)) > c(y)$. Protože prostor X je kompaktní, existuje konečná množina $F \subset X$ tak, že $X = \cup\{V(y); y \in F\}$. Označme $c = \min\{c(y); y \in F\}$. Potom $\inf u(X) > c$.

Označme $d = \inf u(X)$. Potom je pro každé $\varepsilon > 0$ množina

$$C_\varepsilon = \{y \in X; u(y) \leq d + \varepsilon\}$$

uzavřená a tudíž kompaktní. Je-li $E \subset \,]0, \infty[$ konečná množina, pak zřejmě

$$\bigcap\{C_\varepsilon; \varepsilon \in E\} \neq \emptyset.$$

Protože prostor X je kompaktní, existuje $x \in \cap\{C_\varepsilon; \varepsilon \in \,]0, \infty[\}$. Zřejmě je $u(x) = d$. $\square$

Z definice snadno vyplývá toto tvrzení: Je-li $\mathcal{F} \neq \emptyset$ množina zdola polospojitých funkcí, pak $\sup \mathcal{F}$ je zdola polospojitá funkce.

Označme $\mathcal{C}(X)$ prostor všech spojitých funkcí na X, $\mathcal{C}^+(X)$ množinu nezáporných funkcí z $\mathcal{C}(X)$.

2.1.2. Věta. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *prostor X je úplně regulární,*

(ii) *pro každou zdola polospojitou nezápornou funkci u platí*

$$u = \sup \{f; f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\}.$$

Důkaz. Nechť platí (i), u je zdola polospojitá nezáporná funkce a nechť $x \in X$. Je-li $u(x) = 0$, je rovnost

$$u = \sup \{f; f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\}$$

zřejmá. Nechť $u(x) > 0$, $c \in \,]0, u(x)[$ a $V \in \mathcal{V}(x)$ je okolí zvolené tak, že $u > c$ na V. Protože prostor X je úplně regulární, existuje $g \in \mathcal{C}(X)$ tak, že $0 \leq g \leq c$, $g = 0$ na $X \setminus V$ a $g(x) = c$. Platí tedy

$$\sup \{f(x); f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\} \geq c.$$

Odtud plyne rovnost

$$u(x) = \sup \{f(x); f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\}.$$

Nechť platí (ii), $x \in X$ a $F \subset X$ je uzavřená množina, $x \notin F$. Nechť u je charakteristická funkce množiny $X \setminus F$. Protože F je uzavřená, je u zdola polospojitá a podle (ii) existuje $g \in \mathcal{C}(X)$ tak, že $g \leq u$ a $g(x) > 1/2$. Položme

$$f = \max \Big(0, \min \Big(\frac{g}{g(x)}, 1\Big)\Big).$$

Potom $f \in \mathcal{C}(X)$, $f(X) \subset [0,1]$, $f(F) = \{0\}$, $f(x) = 1$. Odtud plyne (i). □

2.1.3. Korolár. *Nechť X je kompaktní topologický prostor a u je zdola polospojitá funkce na X. Potom*

$$u = \sup \{f; f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\}.$$

Důkaz. Plyne z (2.1.1) a (2.1.2). □

2.1.4. Tvrzení. *Nechť X je kompaktní topologický prostor se spočetnou bází a u je zdola polospojitá funkce na X. Potom existují funkce $f_n \in \mathcal{C}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že $f_n \nearrow u$.*

Důkaz. Nechť u je zdola polospojitá funkce na X. Lze předpokládat, že $u \geq 0$. Protože X je metrizovatelný prostor, je prostor $\mathcal{C}(X)$ (se supremovou metrikou) separabilní a tedy také podprostor

$$\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{C}(X); f \leq u\}$$

je separabilní. Nechť $\mathcal{G}$ je hustá spočetná podmnožina v $\mathcal{K}$. Tvrdíme, že $u = \sup \mathcal{G}$. Nechť $x \in X$ a $c < u(x)$. Podle (2.1.3) existuje $f \in \mathcal{K}$, $f(x) > c$, a protože $\mathcal{G}$ je hustá podmnožina v $\mathcal{K}$, existuje $g \in \mathcal{G}$ tak, že

$$|f(x) - g(x)| < f(x) - c,$$

takže $g(x) > c$, Odtud plyne $u(x) = (\sup \mathcal{G})(x)$. Nechť $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, ...\}$ a

$$f_n = \max\{g_j; 1 \leq j \leq n\}.$$

Potom $f_n \in \mathcal{K}$ a $f_n \nearrow u$. □

2.1.5. Korolár. *Nechť X je kompaktní prostor se spočetnou bází, μ Radonova míra na X a u je zdola polospojitá funkce na X. Potom*

$$\int u\,d\mu = \sup\Big\{\int f\,d\mu; f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\Big\}.$$

Důkaz. Plyne ihned z (2.1.4) a z Leviho věty. □

2.1.6. Věta. *Nechť X je kompaktní prostor, $f \in \mathcal{C}(X)$ a nechť $\mathcal{F}$ je nahoru filtrující množina zdola polospojitých funkcí na X, pro něž $f = \sup \mathcal{F}$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $u \in \mathcal{F}$ tak, že $u > f - \varepsilon$.*

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$ a $\mathcal{G} = \{f - u; u \in \mathcal{F}\}$. Potom je $\mathcal{G}$ dolů filtrující množina shora polospojitých funkcí na X, pro niž $\inf \mathcal{G} = 0$. Je-li $x \in X$, existuje $g_x \in \mathcal{G}$ tak, že $g_x(x) < \varepsilon$ a tudíž existuje $V(x) \in \mathcal{V}(x)$ tak, že $g_x < \varepsilon$ na $V(x)$. Protože prostor X je kompaktní, existuje konečná množina F tak, že $X = \cup\{V(x); x \in F\}$. Protože $\mathcal{G}$ je dolů filtrující, existuje $g \in \mathcal{G}$ tak, že $g \leq \min\{g_x; x \in F\}$. Zřejmě $g < \varepsilon$ na X. Nyní stačí položit $u = f - g$. □

2.1.7. Věta. *Nechť X je kompaktní prostor se spočetnou bází, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ je nahoru filtrující množina zdola polospojitých funkcí na X a μ je Radonova míra na X. Potom*

$$\int (\sup \mathcal{F})\,d\mu = \sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\sup \mathcal{F} = 0$ na X. Nechť $\varepsilon > 0$ a $u \in \mathcal{F}$ taková funkce, že $u > -\varepsilon$ na X; taková funkce existuje podle (2.1.6). Potom

$$\int u\,d\mu \geq -\varepsilon\mu(X),$$

tudíž

$$\sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\} \geq -\varepsilon\mu(X).$$

Odtud plyne, že

$$\sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\} = 0.$$

V obecném případě položme $f = \sup \mathcal{F}$. Potom f je zdola polospojitá (a tudíž zdola omezená) funkce na X a zřejmě

$$\int f\,d\mu \geq \sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Nechť $c < \int f\,d\mu$. Podle (2.1.5) existuje $g \in \mathcal{C}(X)$, $g \leq f$ taková, že $\int g\,d\mu > c$. Potom

$$\mathcal{G} = \{(u-g)^-; u \in \mathcal{F}\}$$

je nahoru filtrující množina zdola polospojitých funkcí a $\sup \mathcal{G} = 0$. Podle první části důkazu je

$$\sup\Big\{\int (u-g)^-\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\} = 0.$$

Protože $(u-g)^- \leq (u-g)$, je

$$\sup\Big\{\int (u-g)\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\} \geq 0,$$

tudíž
$$c < \int g \, d\mu \le \sup \Big\{ \int u \, d\mu ; u \in \mathcal{F} \Big\}.$$
Odtud plyne nerovnost
$$\int f \, d\mu \le \sup \Big\{ \int u \, d\mu ; u \in \mathcal{F} \Big\}.$$
Platí tedy rovnost
$$\int (\sup \mathcal{F}) \, d\mu = \sup \Big\{ \int u \, d\mu ; u \in \mathcal{F} \Big\}.$$
□

2.1.8. Lemma. *Nechť* $a \in \mathbb{R}^m$, $t > 0$ *a nechť* u *je zdola polospojitá funkce na* $\overline{B_t(a)}$. *Potom*
$$\int u \, d\lambda_{a,t} = m \int_0^1 \Big(\int u \, d\sigma_{a,\alpha t} \Big) \alpha^{m-1} \, d\alpha.$$

Důkaz. Nechť nejprve $f \in \mathcal{C}(\overline{B_t(a)})$. Podle (1.5.1) je funkce $\varrho \mapsto \int f \, d\sigma_{a,\varrho}$ spojitá na $]0, t[$ a
$$\int f \, d\lambda_{a,t} = \frac{m}{t^m} \int_0^t \Big(\int f \, d\sigma_{a,\varrho} \Big) \varrho^{m-1} \, d\varrho.$$
Poslední integrál je roven
$$\frac{m}{t^m} \int_0^t \frac{1}{\omega} \Big(\int_{S_1(0)} f(a + \varrho s) \, d\sigma(s) \Big) \varrho^{m-1} \, d\varrho =$$
$$= \frac{m}{t^m} \int_0^1 \frac{1}{\omega} \Big(\int_{S_1(0)} f(a + \alpha t s) \, d\sigma(s) \Big) (\alpha t)^{m-1} t \, d\alpha = m \int_0^1 \Big(\int f \, d\sigma_{a,\alpha t} \Big) \alpha^{m-1} \, d\alpha.$$

Je-li u zdola polospojitá na $\overline{B_t(a)}$, je podle (2.1.3) a (2.1.7)
$$\int u \, d\lambda_{a,t} = m \sup \Big\{ \int_0^1 \Big(\int f \, d\sigma_{a,\alpha t} \Big) \alpha^{m-1} \, d\alpha ; f \in \mathcal{C}(\overline{B_t(a)}), f \le u \Big\} =$$
$$= m \int_0^1 \sup \Big\{ \Big(\int f \, d\sigma_{a,\alpha t} \Big) \alpha^{m-1} ; f \in \mathcal{C}(\overline{B_t(a)}), f \le u \Big\} \, d\alpha = m \int_0^1 \Big(\int u \, d\sigma_{a,\alpha t} \Big) \alpha^{m-1} \, d\alpha.$$
□

Zavedeme následující definici. Nechť $f : X \to \mathbb{R}^*$ a $M \subset X$. Řekneme, že f splňuje na M *ostrý princip minima*, jestliže platí tato podmínka: je-li $x \in M$ a $f(x) = \inf f(M)$, pak f je na M konstantní. (Jinak řečeno: f nenabývá na M minima, pokud není na M konstantní.)

Řekneme, že f splňuje na X *lokálně ostrý princip minima*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $V \in \mathcal{V}(x)$ tak, že f splňuje na V ostrý princip minima.

(Příklad: Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $h \in \mathcal{H}(U)$, pak h splňuje podle (1.5.3) na U lokálně ostrý princip minima.)

2.1.9. Věta. *Nechť* X *je souvislý prostor,* u *je zdola polospojitá funkce na* X *a nechť* u *splňuje na* X *lokálně ostrý princip minima. Potom* u *splňuje na* X *ostrý princip minima.*

Důkaz. Označme $c = \inf u(X)$. Je-li $c = -\infty$, tvrzení platí, neboť $u > -\infty$ na X. Nechť $c > -\infty$,

$$U = \{x \in X; u(x) > c\}, \qquad V = \{x \in X; u(x) = c\}.$$

Potom U je otevřená, neboť u je zdola polospojitá. Je-li $x \in V$, je podle předpokladu $u = c$ na jistém okolí bodu x, tudíž V je otevřená. Protože $X = U \cup V$ a prostor X je souvislý, je buďto $U = X$ nebo $V = X$. □

2.1.10. Věta. *Nechť X je kompaktní prostor, $U \subset X$ je oblast, $\partial U \neq \emptyset$, $u : U \to \mathbb{R}^*$ je zdola polospojitá funkce a nechť u splňuje na U lokálně ostrý princip minima. Potom*

$$\inf u(U) = \inf\{\liminf_{x\to z} u(x); z \in \partial U\}.$$

Přitom existuje $y \in \partial U$ tak, že

$$\inf u(U) = \liminf_{x\to y} u(x).$$

Důkaz. Označme $b = \inf u(U)$, $c = \inf\{\liminf_{x\to z} u(x); z \in \partial U\}$. Zřejmě platí $b \leq c$. Předpokládejme, že $b < c$; odvodíme spor. Definujme

$$v = \begin{cases} u & \text{na } U, \\ c & \text{na } X \setminus U. \end{cases}$$

Zřejmě je funkce v zdola polospojitá v každém bodě množiny $U \cup (X \setminus \overline{U})$. Nechť $z \in \partial U$, $d < v(z)$. Protože

$$v(z) = c \leq \liminf_{x\to z} u(x),$$

existuje $V \in \mathcal{V}(z)$ tak, že $d < \inf u(U \cap V)$. Na $V \setminus U$ je $v = c = v(z) > d$, na $U \cap V$ je $v = u \geq \inf u(U \cap V) > d$, tudíž funkce v je zdola polospojitá v bodě z. Protože v je zdola polospojitá na X, existuje $x \in X$ tak, že $v(x) = \inf v(X)$. Protože $c > b = \inf u(U)$, je $x \in U$. Podle (2.1.9) je u na U konstantní, tedy $c = b$, neboť $\partial U \neq \emptyset$. Odvodili jsme spor. Platí proto $c \leq b$ a tedy $c = b$.

Jestliže existuje $y \in \partial U$ tak, že $\liminf_{x\to y} u(x) = -\infty$, pak zřejmě $\inf u(U) = -\infty$. Jestliže $\liminf_{x\to z} u(x) > -\infty$ pro každé $z \in \partial U$, je funkce

$$z \mapsto \liminf_{x\to z} u(x), \qquad z \in \overline{U},$$

na $\overline{U}$ zdola polospojitá. Protože ∂U je kompaktní, existuje podle (2.1.1) $y \in \partial U$ tak, že

$$\liminf_{x\to y} u(x) = \inf\{\liminf_{x\to z} u(x); z \in \partial U\} = \inf v(U).$$

□

Zavedeme ještě jednu definici. Pro funkci $u : X \to \mathbb{R}^*$ definujeme *dolní regularizaci*

$$\hat{u} : x \mapsto \liminf_{y\to x} u(y).$$

Snadno se nahlédne, že pokud $\hat{u} > -\infty$, je funkce $\hat{u}$ zdola polospojitá, $\hat{u} \leq u$ a $v \leq \hat{u}$, kdykoli v je zdola polospojitá minoranta funkce u.

2.2 Vlastnosti hyperharmonických funkcí

Stejně jako v kapitole 1 budeme předpokládat, že pro dimenzi prostoru $\mathbb{R}^m$ platí $m > 1$.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $u : U \to \mathbb{R}^*$. Budeme říkat, že funkce u je *hyperharmonická* (na U), jestliže je na U zdola polospojitá a

$$u(a) \geq \int u \, d\sigma_{a,r},$$

kdykoli $\overline{B_r(a)} \subset U$. Funkce $u : U \to \mathbb{R}^*$ se nazývá *hypoharmonická* (na U), jestliže funkce $-u$ je hyperharmonická.

Množinu všech funkcí, které jsou hyperharmonické na U, budeme značit $\mathcal{H}^*(U)$.

2.2.1. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Potom $\mathcal{H}^*(U)$ je* min*-stabilní konvexní kužel,*

$$\mathcal{H}^*(U) \cap (-\mathcal{H}^*(U)) = \mathcal{H}(U).$$

Je-li $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$ nahoru filtrující, potom $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{H}^*(U)$.

Důkaz. První dvě tvrzení vyplývají ihned z definice.

Je-li $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$, je $\sup \mathcal{F}$ zdola polospojitá. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Podle (2.1.7) je

$$\int (\sup \mathcal{F}) \, d\sigma_{a,r} = \sup \left\{ \int u \, d\sigma_{a,r}; u \in \mathcal{F} \right\} \leq \sup \{u(a); u \in \mathcal{F}\} = (\sup \mathcal{F})(a).$$

□

2.2.2. Lemma. *Nechť $a \in \mathbb{R}^m$, $R > 0$ a nechť funkce $u : B_R(a) \to \mathbb{R}^*$ má jednu z následujících vlastností:*

(∗) *u je zdola polospojitá na $B_R(a)$ a pro každé $x \in B_R(a)$ existuje posloupnost $(r(n))$ kladných čísel taková, že $r(n) + |x - a| < R$, $r(n) \to 0$ pro $n \to \infty$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je*

$$u(x) \geq \int u \, d\sigma_{x,r(n)};$$

(∗∗) *u je zdola polospojitá na $B_R(a)$ a pro každé $x \in B_R(a)$ existuje posloupnost $(r(n))$ kladných čísel taková, že $r(n) + |x - a| < R$, $r(n) \to 0$ pro $n \to \infty$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je*

$$u(x) \geq \int u \, d\lambda_{x,r(n)}.$$

Potom u splňuje na $B_R(a)$ ostrý princip minima.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $b \in B_R(a)$ tak, že $u(b) = \inf u(B_R(a))$. Označme

$$M = \{x \in B_R(a); u(x) = u(b)\}.$$

Dokážeme, že $M = B_R(a)$.

Protože $M = \{x \in B_R(a); u(x) \leq u(b)\}$, je $M \neq \emptyset$ uzavřená podmnožina v $B_R(a)$. Ukážeme, že předpoklad $M \neq B_R(a)$ vede ke sporu. Důležité povšimnutí přitom bude, že pak existuje $x \in \partial M \cap B_R(a)$ takový, že $\sigma_{x,r}(S_r(x) \setminus M) > 0$ (resp. $\lambda_{x,r}(B_r(x) \setminus M) > 0$) pro všechna dostatečně malá kladná r.

Je-li $M \neq B_R(a)$, existuje $z \in \partial M \cap B_R(a)$. Zvolme $\varrho > 0$ tak, aby $B_{3\varrho}(z) \subset B_R(a)$ a dále zvolme $y \in B_\varrho(z) \setminus M$. Protože $\overline{M}$ je uzavřená neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^m$, existuje $x \in \overline{M}$ tak, že

$$B_{|x-y|}(y) \cap M = \emptyset.$$

Platí $|y-x| \leq |y-z| < \varrho$, takže $|x-z| \leq |x-y| + |y-z| < 2\varrho$. Vidíme, že

$$x \in \overline{M} \cap B_{2\varrho}(z) \subset \overline{M} \cap B_R(a) = M.$$

Je-li $s \in B_{|x-y|}(x)$, platí

$$|s-z| \leq |s-x| + |x-z| < |x-y| + |x-z| < 3\varrho,$$

tedy $B_{|x-y|}(x) \subset B_{3\varrho}(z) \subset B_R(a)$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $r(n)$ z podmínky $(*)$ (resp. $(**)$) splňovalo $r(n) < |x-y|$. Platí tedy na jedné straně $u(x) = u(b)$, neboť $x \in M$, na druhé straně

$$u(x) \geq \int u \, d\sigma_{x,r(n)} > u(b) \text{ (resp. } u(x) \geq \int u \, d\lambda_{x,r(n)} > u(b)),$$

neboť $u > u(b)$ na $S_{r(n)}(x) \cap B_{|x-y|}(y)$, což je neprázdná otevřená množina v $S_{r(n)}(x)$ (resp. na $B_{r(n)}(x) \cap B_{|x-y|}(y)$, což je neprázdná otevřená množina). Odvodili jsme spor, tudíž $M = B_R(a)$. ☐

2.2.3. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Potom je buďto $u = \inf u(U)$ na U, nebo $u > \inf u(U)$ na U.*

Důkaz. Podle (2.2.2) splňuje u na U lokálně ostrý princip minima. Tvrzení vyplývá z (2.1.9). ☐

2.2.4. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a nechť $\partial^* U$ značí hranici množiny U jako podmnožiny jednobodové kompaktifikace prostoru $\mathbb{R}^m$. Potom*

$$\inf u(U) = \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial^* U\}.$$

Důkaz. Budeme aplikovat (2.1.10), X bude jednobodová kompaktifikace prostoru $\mathbb{R}^m$.

Označme

$$c = \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial^* U\}.$$

Zřejmě $\inf u(U) \leq c$. Předpokládejme, že existuje $y \in U$ tak, že $u(y) < c$. Nechť V je komponenta množiny U obsahující bod y. Poznamenejme, že $\partial^* V \neq \emptyset$. Potom

$$u(y) < c \leq \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial^* V\},$$

takže

$$\inf u(V) < \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial^* V\},$$

což je ve sporu s (2.1.10). Platí tedy $\inf u(U) \geq c$. ☐

2.2.5. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $u : U \to \mathbb{R}^*$. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *$u \in \mathcal{H}^*(U)$;*

(ii) *u je zdola polospojitá na U a $u(a) \geq \int u \, d\lambda_{a,r}$, kdykoli $\overline{B_r(a)} \subset U$;*

(iii) *u je zdola polospojitá na* U *a pro každé* $x \in U$ *existuje posloupnost* $(r(n))$ *kladných čísel taková, že* $\overline{B_{r(n)}(x)} \subset U$, $r(n) \to 0$ *pro* $n \to \infty$ *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$u(x) \geq \int u\, d\sigma_{x,r(n)};$$

(iv) *u je zdola polospojitá na* U *a pro každé* $x \in U$ *existuje posloupnost* $(r(n))$ *kladných čísel taková, že* $\overline{B_{r(n)}(x)} \subset U$, $r(n) \to 0$ *pro* $n \to \infty$ *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$u(x) \geq \int u\, d\lambda_{x,r(n)};$$

(v) *u je zdola polospojitá na* U *a pro každou omezenou otevřenou množinu* $V \subset \overline{V} \subset U$ *a každou funkci* $f \in \mathcal{C}(\overline{V})$, *pro niž* $f|_V \in \mathcal{H}(V)$ *a* $f \leq u$ *na* ∂V, *platí* $f \leq u$ *na* V;

(vi) *u je zdola polospojitá na* U *a pro každou kouli* $B_r(a)$, *pro niž* $\overline{B_r(a)} \subset U$, *platí* $H_{a,r}(u|_{S_r(a)}) \leq u$.

Důkaz. Nechť platí (i). Potom u je zdola polospojitá na U. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Pro každé $\alpha \in \,]0,1[$ platí

$$\int u\, d\sigma_{a,\alpha r} \leq u(a).$$

Podle (2.1.8) dostáváme

$$\int u\, d\lambda_{a,r} = m \int_0^1 \Big(\int u\, d\sigma_{a,\alpha r}\Big) \alpha^{m-1}\, d\alpha \leq u(a) \cdot m \int_0^1 \alpha^{m-1}\, d\alpha = u(a).$$

Platí tedy (ii).

Zřejmě (ii)⇒(iv). Předpokládejme (iv) a nechť u, V a f jsou jako v (v). Můžeme předpokládat, že V je neprázdná a souvislá. Funkce $v = u - f$ splňuje podle (1.5.3) a (2.2.2) na V lokálně ostrý princip minima a pro každé $z \in \partial V$ je

$$\liminf_{x \to z,\, x \in V} v(x) \geq 0.$$

Podle (2.1.10) (za X volíme $\overline{V}$) je $v \geq 0$ na V a platí tudíž (v).

Nechť platí (v) a u a $B_r(a)$ jsou jako v (vi). Je-li $f \in \mathcal{C}(S_r(a))$, $f \leq u|_{S_r(a)}$, pak podle (v) je $H_{a,r} f \leq u$ na $B_r(a)$. Odtud snadno plyne podle (2.1.5) nerovnost $H_{a,r}(u|_{S_r(a)}) \leq u$ na $B_r(a)$.

Zřejmá je implikace (vi)⇒(i). Zatím jsme vynechali (iii).

Zřejmě (i)⇒(iii) a implikace (iii)⇒(v) se dokáže na základě (2.2.2) podobně, jako (iv)⇒(v). □

2.2.6. Příklady. Předpokládejme, že $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina.

(a) Nechť $h \in \mathcal{H}(U)$. Potom $-|h| \in \mathcal{H}^*(U)$, neboť $-|h| = \min(h, -h)$.

(b) Případ $m = 2$. Nechť f je holomorfní funkce na oblasti U. Označme

$$M = \{z \in U; f(z) = 0\}$$

a předpokládejme, že $M \neq U$. (Pak M je izolovaná podmnožina U.) Definujme

$$u = \begin{cases} \log(1/|f|) & \text{na } U \setminus M, \\ \infty & \text{na } M. \end{cases}$$

Potom $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Snadno nahlédneme, že u je zdola polospojitá na U, dále pro $a \in M$ je nerovnost

$$u(a) \geq \int u \, d\sigma_{a,r}$$

zřejmá pro všechna r, pro něž $\overline{B_r(a)} \subset U$. Je-li $a \in U \setminus M$, existuje $R > 0$ tak, že platí $M \cap B_R(a) = \emptyset$. Na $B_R(a)$ je $f \neq 0$, takže existuje holomorfní funkce g na $B_R(a)$, pro niž $f = \exp g$. Potom $|f| = \exp(\operatorname{Re} g)$ a

$$u = \log \frac{1}{|f|} = -\operatorname{Re} g \in \mathcal{H}(B_R(a))$$

podle (1.1.1 (c)). Pro každé $\varrho \in]0, R[$ platí proto

$$u(a) = \int u \, d\sigma_{a,\varrho}.$$

Podle (2.2.5) je $u \in \mathcal{H}^*(U)$.

(c) Připomeňme, že jsme v (1.9) definovali pro $t > 0$

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} \log \dfrac{1}{t} & \text{v případě } m = 2, \\ \dfrac{1}{\omega(m-2)} \dfrac{1}{t^{m-2}} & \text{v případě } m > 2 \end{cases}$$

a $p(0) = \infty$. Tvrdíme, že funkce $u : x \mapsto p(|x|)$ je na $\mathbb{R}^m$ hyperharmonická. Pro $m = 2$ to plyne z (b). Nechť $m > 2$. Víme z (1.1.1 (d)), že u je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Nerovnost

$$u(0) \geq \int u \, d\sigma_{0,r}$$

pro každé $r > 0$ je zřejmá. Je-li $a \neq 0$ a $r \in]\,0, |a|\,[$, pak

$$u(a) = \int u \, d\sigma_{a,r}$$

podle (1.5.2). Protože u je zdola polospojitá, je u hyperharmonická podle (2.2.5).

(d) Připomeňme ještě, že v (1.9) jsme definovali

$$N(x, y) = p(|x - y|), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m.$$

Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$, tj. nezáporná borelovská míra taková, že $\mu(K) < \infty$ pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \mathbb{R}^m$. V případě $m = 2$ navíc předpokládejme, že nosič spt (μ) míry μ je kompaktní. Definujme

$$N\mu : x \mapsto \int N(x, y) \, d\mu(y), \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

(Funkce $N\mu$ se v případě $m = 2$ nazývá *logaritmický potenciál míry* μ a v případě $m > 2$ *Newtonův potenciál míry* μ.)

Tvrdíme: $N\mu \in \mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m)$. To lze dokázat např. takto: nejprve předpokládejme, že μ má kompaktní nosič. Pro $c \in \mathbb{R}$ definujme na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ funkci $N^{(c)} = \min(N, c)$, takže $N^{(c)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ Potom je ovšem funkce

$$F^{(c)} : x \mapsto \int N^{(c)}(x, y) \, d\mu(y), \qquad x \in \mathbb{R}^m,$$

spojitá na $\mathbb{R}^m$ a
$$N\mu = \sup\{F^{(c)}; c \in \mathbb{R}\}.$$
Tudíž $N\mu$ je zdola polospojitá na $\mathbb{R}^m$. Nechť $a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$. Jelikož je pro každé $y \in \mathbb{R}^m$ funkce $x \mapsto N^{(c)}(x,y)$ hyperharmonická na $\mathbb{R}^m$, je podle (2.2.5)
$$\int F^{(c)}\, d\lambda_{a,r} = \int \Big(\int_{S(\mu)} N^{(c)}(x,y)\, d\mu(y) \Big)\, d\lambda_{a,r}(x) =$$
$$= \int_{S(\mu)} \Big(\int N^{(c)}(x,y)\, d\lambda_{a,r}(x) \Big)\, d\mu(y) \le \int_{S(\mu)} N^{(c)}(a,y)\, d\mu(y) = F^{(c)}(a) \le N\mu(a).$$
Odtud podle (2.1.7) plyne, že
$$\int N\mu\, d\lambda_{a,r} \le N\mu(a),$$
takže podle (2.2.5) je $N\mu \in \mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m)$.

Je-li $m > 2$ a μ je Radonova míra (ne nutně s kompaktním nosičem), definujeme pro $R > 0$ míru $\mu_R = \mu|_{B_R(0)}$. Protože
$$N\mu_R \in \mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m) \qquad \text{a} \qquad N\mu = \sup\{N\mu_R; R > 0\},$$
je podle (2.2.1) také $N\mu \in \mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m)$.

(e) Nechť $u \in \mathcal{C}^2(U)$. Potom $u \in \mathcal{H}^*(U)$, právě když $\Delta u \le 0$ na U. Důkaz není obtížný: Nechť nejprve $\Delta u \le 0$ a $\overline{B_r(a)} \subset U$. Definujme na $B_r(a)$ funkci
$$v = u - H_{a,r}(u|_{S_r(a)}).$$
Pak $v \in \mathcal{C}^2(B_r(a))$, $\Delta v = \Delta u \le 0$ na $B_r(a)$ a
$$\lim_{x \to z} v(x) = u(z) - u(z) = 0$$
pro všechna $z \in S_r(a)$. Podle (1.2.1) je $v \ge 0$ na $B_r(a)$, takže $v \in \mathcal{H}^*(U)$ podle (2.2.5).

Je-li $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a $V = \{x \in U; \Delta u > 0\}$, je V otevřená množina. Protože $\Delta(-u) < 0$ na V, je podle první části důkazu $-u \in \mathcal{H}^*(V)$, tudíž platí $u \in \mathcal{H}(V)$, neboli $\Delta u = 0$ na V. Odtud plyne, že $V = \emptyset$ a tudíž $\Delta u \le 0$ na U.

(f) Nechť $V \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina, $M \subset V$ spočetná a nechť $x \in V \setminus M$. Pak existuje $v \in \mathcal{H}^*(V)$ tak, že $v(x) < \infty$ a $v = \infty$ na M. Skutečně, pro $y \in M$ zvolíme $d_y \in \mathbb{R}$ tak, aby $N_y + d_y \ge 0$ na V a dále zvolíme $c_y > 0$ tak, aby
$$\sum_{y \in M} c_y(N_y(x) + d_y) < \infty.$$
Potom funkce
$$v = \sum_{y \in M} c_y(N_y + d_y)$$
má požadované vlastnosti. Je-li $x \in \overline{M}$ a $c > v(x)$, pak $u = \min(v, c)$ je omezená hyperharmonická funkce, která není v bodě x spojitá.

(g) Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina, $\mu = \lambda|_K$. Potom je $N\mu$ spojitá superharmonická funkce. Skutečně, pro $x \in \mathbb{R}^m$ je $N\mu(x) = \int N_x d\mu = \int p(|y - x|)\, 1_K(y) d\lambda(y) = \int p(|w|)\, 1_K(x + w) d\lambda(w) = \int N_0 \cdot 1_{K-x} d\lambda$. Nyní je spojitost zřejmá s odvoláním na Lebesgueovu větu, neboť $N_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$.

(h) Nechť $v : x \mapsto |x|$, $x \in \mathbb{R}^m$. Potom $v \in -\mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m)$. Pro $a \in \mathbb{R}^m$ a $r > 0$ dokážeme nerovnost $\int v d\sigma_{a,r} \ge v(a)$ takto: pro $x \in \mathbb{R}^m$ označme $\varphi(x) = 2a - x$. Platí

$$\begin{aligned} 2\int v d\sigma_{a,r} = & 2\int |x| d\sigma_{a,r}(x) = \int |x| d\sigma_{a,r}(x) + \int |x| d\sigma_{a,r}(x) = \\ & = \int |x| d\sigma_{a,r}(x) + \int |\varphi(x)| d\sigma_{a,r}(x) = \int \big(|x| + |\varphi(x)|\big) d\sigma_{a,r}(x) \ge \\ & \ge \int |x + \varphi(x)| d\sigma_{a,r}(x) = \int 2|a| d\sigma_{a,r} = 2|a| = 2v(a). \end{aligned}$$

Je možné také uvažovat např. takto: $\Delta v \ge 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ a nerovnost $\int v d\sigma_{0,r} \ge v(0) = 0$ je zřejmá pro každé $r > 0$.

(i) Nechť $m > 2$ a $u_n = (1/n)N_0$, $n \in \mathbb{N}$. Potom (u_n) je klesající posloupnost hyperharmonických funkcí a $\inf\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ není zdola polospojitá (a tudíž není hyperharmonická). (Srv. s (2.2.8).)

2.2.7. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ je zdola omezená. Nechť $M \subset \partial U$ je spočetná množina a nechť*

$$\liminf_{y \to z} u(y) \ge 0$$

pro všechna $z \in \partial U \setminus M$. Potom $u \ge 0$ na U.

Důkaz. Zvolme otevřenou omezenou množinu $V \subset \mathbb{R}^m$, $\overline{U} \subset V$, dále zvolme $x \in U$, $\varepsilon > 0$ a $v \in \mathcal{H}^*(V)$ tak, aby $v = \infty$ na M a $v(x) < \varepsilon$; viz (2.2.6 (f)). Definujme na U funkci $w = u + v$. Pak

$$\liminf_{y \to z} w(y) \ge 0$$

pro každé $z \in \partial U$, tedy podle (2.2.4) platí $w \ge 0$ na U. Odtud $u(x) > -\varepsilon$. □

2.2.8. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a nechť $\mathcal{F}$ je lokálně zdola omezená množina hyperharmonických funkcí na U, $u = \inf \mathcal{F}$. Potom je $\hat{u} \in \mathcal{H}^*(U)$.*

Důkaz. Zřejmě je $\hat{u} > -\infty$ a víme, že $\hat{u}$ je zdola polospojitá. Nechť V je omezená otevřená množina, $\overline{V} \subset U$, $f \in \mathcal{C}(\overline{V})$, $f|_V \in \mathcal{H}(V)$ a $f \le \hat{u}$ na ∂V. Protože $\hat{u} \le u$, je podle (2.2.5) $v \ge f$ na V pro každou funkci $v \in \mathcal{F}$, takže $u \ge f$ na V. Protože f je na V spojitá, je $\hat{f} = f$ na V, tudíž $\hat{u} \ge \hat{f} = f$ na V. Nyní opět aplikujeme (2.2.5). □

2.2.9. Věta. *Nechť $u \in \mathcal{H}^*(B_r(a))$. Potom jsou funkce*

$$\varrho \mapsto \int u \, d\sigma_{a,\varrho}, \qquad \varrho \mapsto \int u \, d\lambda_{a,\varrho}$$

nerostoucí na $]0, r[$ a

$$\int u \, d\sigma_{a,\varrho} \to u(a), \qquad \int u \, d\lambda_{a,\varrho} \to u(a)$$

pro $\varrho \to 0+$.

Důkaz. Zvolme $0 < s < t < r$ a funkci $f \in \mathcal{C}(S_t(a))$, $f \leq u$ na $S_t(a)$. Podle (2.2.5) je $H_{a,t} f \leq u$ na $B_t(a)$ a tudíž

$$\int f \, d\sigma_{a,t} = H_{a,t} f(a) = \int H_{a,t} f \, d\sigma_{a,s} \leq \int u \, d\sigma_{a,s}.$$

Odtud podle (2.1.5) dostáváme

$$\int u \, d\sigma_{a,t} \leq \int u \, d\sigma_{a,s}.$$

Pro každé $\alpha \in]0,1[$ je tedy

$$\int u \, d\sigma_{a,\alpha t} \leq \int u \, d\sigma_{a,\alpha s},$$

tedy podle (2.1.8) je

$$\int u \, d\lambda_{a,t} = m \int_0^1 \Big(\int u \, d\sigma_{a,\alpha t} \Big) \alpha^{m-1} \, d\alpha \leq m \int_0^1 \Big(\int u \, d\sigma_{a,\alpha s} \Big) \alpha^{m-1} \, d\alpha = \int u \, d\lambda_{a,s}.$$

Nechť $c < u(a)$. Protože u je zdola polospojitá v bodě a, existuje $\tau \in]0, r[$ tak, že $u > c$ na $B_\tau(a)$. Pro každé $\varrho \in]0, \tau[$ je pak

$$c \leq \int u \, d\sigma_{a,\varrho}, \qquad c \leq \int u \, d\lambda_{a,\varrho}.$$

Dostáváme

$$c \leq \sup \{ \int u \, d\sigma_{a,\varrho}; \varrho \in]0, r[\} = \lim_{\varrho \to 0+} \int u \, d\sigma_{a,\varrho} \leq u(a),$$

takže

$$\lim_{\varrho \to 0+} \int u \, d\sigma_{a,\varrho} = u(a).$$

Podobně

$$\lim_{\varrho \to 0+} \int u \, d\lambda_{a,\varrho} = u(a).$$

$\square$

2.2.10. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a $a \in U$. Potom*

$$u(a) = \liminf_{x \to a, x \neq a} u(x).$$

2.2.11. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u, v \in \mathcal{H}^*(U)$. Jestliže $u \leq v$ λ–skoro všude na U, pak $u \leq v$ všude na U.*

Důkaz. Zřejmě

$$\int u \, d\lambda_{a,\varrho} \leq \int v \, d\lambda_{a,\varrho},$$

kdykoli $\overline{B_\varrho(a)} \subset U$. Tvrzení plyne z (2.2.9). $\square$

2.3 Superharmonické funkce

2.3.1. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Potom buďto $u = \infty$ na U, nebo $u \in L^1_{loc}(U)$ (tj. u je na U lokálně lebesgueovsky integrovatelná).*

Důkaz. Označme M množinu všech bodů z U, pro něž existuje okolí, na němž je u integrovatelná. Zřejmě je M otevřená množina. Nechť $a \in U \setminus M$, $r > 0$ a nechť $\overline{B_{2r}(a)} \subset U$. Pak

$$\infty = \int u \, d\lambda_{a,2r} \leq u(a).$$

Je tedy $u = \infty$ na $U \setminus M$.

Zvolme $x \in B_r(a)$ a $\varrho > 0$ tak, aby $B_\varrho(a) \subset B_r(x)$. Jelikož $a \notin M$, je

$$\int_{B_\varrho(a)} u \, d\lambda = \infty.$$

Protože u je na $\overline{B_{2r}(a)}$ zdola omezená, je

$$\int_{B_r(x)} u \, d\lambda = \infty,$$

takže

$$\infty = \int u \, d\lambda_{x,r} \leq u(x),$$

neboť $u = \infty$ na $B_r(a)$. Vidíme, že $B_r(a) \subset U \setminus M$ a tedy také $U \setminus M$ je otevřená množina. Odtud plyne, že buďto $M = U$ (pak $u \in L^1_{loc}(U)$ nebo $M = \emptyset$ (pak $u = \infty$ na U). $\square$

2.3.2. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *$u \in L^1_{loc}(U)$;*

(ii) *$u < \infty$ na U λ–skoro všude;*

(iii) *$u < \infty$ na husté podmnožině množiny U;*

(iv) *v každé komponentě množiny U existuje bod, v němž u má konečnou hodnotu.*

Důkaz. Implikace (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv) jsou zřejmé. Pro důkaz (iv)$\Rightarrow$(i) se užije (2.3.1). $\square$

Zavedeme následující definici. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Říkáme, že funkce $u : U \to \mathbb{R}^*$ je *superharmonická* (na U), jestliže $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a platí některá z podmínek uvedených v (2.3.2).

Množina všech superharmonických funkcí na U označíme $\mathcal{S}(U)$, $\mathcal{S}^+(U)$ značí množinu nezáporných funkcí z $\mathcal{S}(U)$. Prvkům množiny $-\mathcal{S}(U)$ se říká *subharmonické* funkce na U.

2.3.3. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{S}(U)$. Jestliže $\overline{B_r(a)} \subset U$, pak $H_{a,r}(u|_{S_r(a)}) \in \mathcal{H}(B_r(a))$. Speciálně funkce u je $\sigma_{a,r}$–integrovatelná.*

Důkaz. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Podle (2.2.5) je $H_{a,r}(u|_{S_r(a)}) \leq u$ na $B_r(a)$, tedy podle (2.3.2) je funkce $H_{a,r}(u|_{S_r(a)})$ konečná na husté podmnožině $B_r(a)$. Podle (2.1.5) je $H_{a,r}(u|_{S_r(a)})$ supremem nahoru filtrující množiny

$$\{H_{a,r}f; f \in \mathcal{C}(S_r(a)), f \leq u|_{S_r(a)}\}$$

harmonických funkcí. Podle (1.8.2) je tudíž $H_{a,r}(u|_{S_r(a)})$ harmonická na $B_r(a)$. Speciálně

$$\int u\, d\sigma_{a,r} = H_{a,r}(u|_{S_r(a)})(a) < \infty.$$

$\square$

2.3.4. Tvrzení. *Nechť μ je Radonova míra s kompaktním nosičem v $\mathbb{R}^m$. Potom funkce $N\mu$ leží v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ a je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$.*

Důkaz. Funkce $N\mu$ je zřejmě spojitá na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset \mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$. Potom

$$\int N\mu\, d\sigma_{a,r} = \int \Big(\int_{\operatorname{spt}(\mu)} N(x,y)\, d\mu(y) \Big)\, d\sigma_{a,r}(x) = \int_{\operatorname{spt}(\mu)} \Big(\int N(x,y)\, d\sigma_{a,r}(x) \Big)\, d\mu(y).$$

Pro každé $y \in \operatorname{spt}(\mu)$ je funkce $x \mapsto N(x,y)$ harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$, tedy poslední integrál je roven

$$\int N(a,y)\, d\mu(y) = N\mu(a).$$

Podle (1.6.1) je funkce $N\mu$ harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$.

Protože $N\mu$ je podle (2.2.6 (d)) hyperharmonická funkce na $\mathbb{R}^m$ a je konečná všude na množině $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu) \neq \emptyset$, je $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ podle (2.3.2). $\square$

2.3.5. Lemma. *Nechť $m > 2$ a $R > 0$. Potom*

$$N\sigma_{0,R} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega(m-2)} R^{2-m} & \text{na } \overline{B_R(0)} \\ N_0 & \text{na } \mathbb{R}^m \setminus \overline{B_R(0)}. \end{cases}$$

Důkaz. Nechť $x \notin \overline{B_R(0)}$. Protože funkce $y \mapsto N(x,y)$ je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$, je podle (1.6.1)

$$N\sigma_{0,R}(x) = \int N(x,y)\, d\sigma_{0,R}(y) = N(0,x) = N_0(x).$$

Je-li $z \in S_R(0)$, je podle (2.3.3) funkce N_z $\sigma_{0,R}$–integrovatelná. Je-li $t \geq 1$ a $y \in S_R(0)$, pak $N(tz,y) \leq N(z,y)$ a z Lebesgueovy věty dostáváme

$$N\sigma_{0,R}(z) = \lim_{t \to 1+} N_0(tz) = \frac{1}{\omega(m-2)} R^{2-m}.$$

Protože je funkce $N\sigma_{0,R}$ zdola polospojitá, platí

$$\liminf_{x \to z, x \in B_R(0)} N\sigma_{0,R}(x) \geq \frac{1}{\omega(m-2)} R^{2-m}.$$

Podle (2.3.4) je funkce $N\sigma_{0,R}$ harmonická na $B_R(0)$ a tudíž podle (1.2.1) je na $B_r(0)$

$$N\sigma_{0,R} \geq \frac{1}{\omega(m-2)} R^{m-2},$$

což je hodnota funkce $N\sigma_{0,R}$ v bodě 0. Z (1.5.3) plyne, že $N\sigma_{0,R}$ je na $B_R(0)$ konstantní. $\square$

2.3.6. Věta. *Nechť $m > 2$ a nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$. Potom $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, právě když*

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)} |x|^{2-m}\, d\mu(x) < \infty.$$

Podmínka $(*)$ *je ekvivalentní s podmínkou*

$$(**) \qquad \int_1^\infty \mu(B_r(0)) r^{1-m}\, dr < \infty.$$

Důkaz. Podle (2.3.5)

$$\int N\mu\, d\sigma_{0,1} = \int N\sigma_{0,1}\, d\mu = \int_{B_1(0)} N\sigma_{0,1}\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)} N\sigma_{0,1}\, d\mu =$$
$$= \frac{1}{\omega(m-2)} \left(\mu(B_1(0)) + \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)} |x|^{2-m}\, d\mu \right).$$

Protože $\mu(B_1(0)) < \infty$, je $(*)$ ekvivalentní s integrovatelností $N\mu$ vzhledem k $\sigma_{0,1}$. Je-li $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, platí $(*)$ podle (2.3.3). Jestliže $N\mu \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, je podle (2.2.6 (d)) a (2.3.2) $N\mu = \infty$ na $\mathbb{R}^m$ a tudíž $(*)$ neplatí.

Označme

$$A = \{(x,t) \in (\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)) \times [0,\infty[\ ;\ 0 \le t \le |x|^{2-m}\}$$

a nechť λ^1 značí Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}$. Protože A je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, je $(\mu \times \lambda^1)$–měřitelná a tedy podle Fubiniovy věty

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)} |x|^{2-m}\, d\mu(x) = (\mu \times \lambda^1)(A) = \int \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^m \setminus B_1(0); |x|^{2-m} > t\}\right)\, d\lambda^1(t) =$$
$$= \int_0^1 \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^m \setminus B_1(0); |x|^{2-m} > t\}\right)\, dt.$$

Zřejmě pro $t \in\ ]0,1[$ platí

$$\{x \in \mathbb{R}^m \setminus B_1(0); |x|^{2-m} > t\} = B_{t^{1/(2-m)}}(0) \setminus B_1(0)$$

a po substituci $r = t^{1/(2-m)}$ se poslední integrál rovná

$$(m-2) \int_1^\infty \mu(B_r(0) \setminus B_1(0)) r^{1-m}\, dr.$$

Protože $m > 2$, je

$$\int_1^\infty \mu(B_1(0)) r^{1-m}\, dr < \infty,$$

tudíž $(*)$ platí, právě když platí $(**)$. □

2.4 Nasycené množiny hyperharmonických funkcí

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a nechť pro $V = B_r(a)$ platí $\overline{V} \subset U$. Definujme

$$u_V = \begin{cases} u & \text{na } U \setminus V, \\ H_{a,r}(u|_{\partial V}) & \text{na } V. \end{cases}$$

Funkce u_V se nazývá *Poissonova modifikace* funkce u vzhledem k V. Z (2.3.1), (2.3.2) a (2.3.3) plyne, že buďto $u_V = \infty$ na V, nebo u_V je na V harmonická.

2.4.1. Věta. *Platí $u_V \in \mathcal{H}^*(U)$ a $u_V \le u$.*

Důkaz. Podle (2.2.5) je $u_V \le u$. Pro $f \in \mathcal{C}(\partial V)$ definujme $h_f = f$ na ∂V a $h_f = H_{a,r} f$ na V. Pak $h_f \in \mathcal{C}(\overline{V})$ a podle (2.1.5) platí na $\overline{V}$ rovnost

$$u_V = \sup\{h_f; f \in \mathcal{C}(\partial V), f \le u|_{\partial V}\}.$$

Funkce $(u_V)|_{\overline{V}}$ je tudíž zdola polospojitá. Funkce u_V je zřejmě zdola polospojitá v každém bodě z $U \setminus \overline{V}$. Nechť $z \in \partial V$. Pak

$$u_V(z) = \liminf_{x \to z, x \in \overline{V}} u_V(x),$$

neboť funkce $(u_V)|_{\overline{V}}$ je zdola polospojitá v bodě z. Protože funkce u je zdola polospojitá v bodě z, platí

$$u_V(z) = u(z) = \liminf_{x \to z} u(x) \le \liminf_{x \to z, x \in U \setminus \overline{V}} u(x) = \liminf_{x \to z, x \in U \setminus \overline{V}} u_V(x).$$

Odtud snadno plyne, že $u_V(z) = \liminf_{x \to z} u_V(x)$. Dokázali jsme, že funkce u_V je zdola polospojitá.

Nerovnost

$$\int u_V \, d\sigma_{b,\varrho} \le u(b)$$

je zřejmá, pokud buďto $\overline{B_\varrho(b)} \subset V$ nebo $\overline{B_\varrho(b)} \subset U \setminus \overline{V}$. Nechť $b \in \partial V$ a $\overline{B_\varrho(b)} \subset U$. Potom

$$\int u_V \, d\sigma_{b,\varrho} \le \int u \, d\sigma_{b,\varrho} \le u(b) = u_V(b).$$

Podle (2.2.5) je $u_V \in \mathcal{H}^*(U)$. □

2.4.2. Korolár. *Je-li $u \in \mathcal{S}(U)$, je $u_V \in \mathcal{S}(U)$.*

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$. Říkáme, že $\mathcal{F}$ je *nasycená*, jestliže $\mathcal{F}$ je min-stabilní a $u_V \in \mathcal{F}$, kdykoli $u \in \mathcal{F}$ a $V = B_r(a) \subset \overline{B_r(a)} \subset U$.

2.4.3. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$ je nasycená, $u = \inf \mathcal{F}$ a W je komponenta množiny U. Potom buďto $u = \infty$ na W, nebo $u = -\infty$ na W, nebo $u|_W \in \mathcal{H}(W)$.*

Důkaz. Volme $V = B_r(a) \subset \overline{B_r(a)} \subset U$. Platí

$$u = \inf\{v_V; v \in \mathcal{F}\},$$

neboť $v_V \in \mathcal{F}$, kdykoli $v \in \mathcal{F}$. Zřejmě je množina $\{v_V; v \in \mathcal{F}\}$ dolů filtrující, neboť $\mathcal{F}$ je min-stabilní. Z (2.3.3) a (1.8.2) snadno plyne, že u je na V buďto rovna ∞, nebo je na V rovna $-\infty$, nebo je na V harmonická.

Označme

$$W_1 = \{x \in W; u(x) = \infty\}, \quad W_2 = \{x \in W; u(x) = -\infty\}, \quad W_3 = \{x \in W; u(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Potom jsou množiny W_1, W_2, W_3 otevřené, $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ a funkce u je na W_3 harmonická. Tvrzení věty je nyní důsledkem souvislosti množiny W. □

2.4.4. Korolár. *Nechť $v \in \mathcal{S}(U)$, $w \in -\mathcal{S}(U)$ a nechť $\emptyset \ne \mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$ je nasycená množina taková, že $w \le u \le v$ pro každou funkci $u \in \mathcal{F}$. Potom* $\inf \mathcal{F} \in \mathcal{H}(U)$.

Důkaz. Na husté podmnožině U platí podle (2.3.2)

$$-\infty < \inf \mathcal{F} < \infty.$$

Tvrzení plyne z (2.4.3). $\square$

2.4.5. Korolár. *Nechť* $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{S}(U)$ *a nechť*

$$\mathcal{T} = \{t; t \in -\mathcal{S}(U), t \leq s \text{ kdykoli } s \in \mathcal{S}\} \neq \emptyset.$$

Potom $\sup \mathcal{T} \in \mathcal{H}(U)$. *Jinak řečeno: existuje největší subharmonická minoranta množiny* $\mathcal{S}$ *a je harmonická.*

Důkaz. Je-li $t \in \mathcal{T}$, $s \in \mathcal{S}$ a $\overline{B_r(a)} \subset U$, pak z (2.2.5) plyne

$$H_{a,r}(t|_{S_r(a)}) \leq H_{a,r}(s|_{S_r(a)}) \leq s$$

na V, tedy $-\mathcal{T} \subset \mathcal{S}(U)$ je zřejmě nasycená množina. Tvrzení plyne z (2.4.4). $\square$

2.4.6. Věta. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^m$ *je otevřená množina,*

$$\mathcal{R}(U) = \{h - k; h, k \in \mathcal{H}^+(U)\}.$$

Potom je $\mathcal{R}(U)$ *vzhledem k přirozenému uspořádání dedekindovsky úplný vektorový svaz.*

Důkaz. Nechť $h_j, k_j \in \mathcal{H}^+(U)$, $d_j = h_j - k_j$, $j \in \{1, 2\}$. Je-li

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{S}(U); s \geq d_1, s \geq d_2\},$$

je $\mathcal{F}$ min-stabilní, $h_1 + h_2 \in \mathcal{F}$ a pro $V = B_r(a) \subset \overline{B_r(a)} \subset U$ a $s \in \mathcal{F}$ je

$$s_V \geq (d_j)_V = d_j, \qquad j \in \{1, 2\}.$$

Je tedy $\mathcal{F}$ nasycená množina a podle (2.4.4) je $d_0 = \inf \mathcal{F} \in \mathcal{H}(U)$, neboť $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}(U)$ a $d_0 \geq -(k_1 + k_2)$. Zřejmě je d_0 nejmenší harmonická funkce, pro niž $d_0 \geq d_1$, $d_0 \geq d_2$. Protože

$$d_0 = d_0 - d_1 + d_1 = d_0 - d_1 + h_1 - k_1$$

je rozdílem nezáporných harmonických funkcí $d_0 - d_1 + h_1$ a k_1, je $d_0 \in \mathcal{R}(U)$. Tudíž je $\mathcal{R}(U)$ vektorový svaz.

Nechť $\emptyset \neq \mathcal{G} \subset \mathcal{R}(U)$ a nechť pro $d \in \mathcal{R}(U)$, $d = h - k$, $h, k \in \mathcal{H}^+(U)$, platí $d \leq g$, kdykoli $g \in \mathcal{G}$. Podle (2.4.5) existuje největší harmonická minoranta množiny $\mathcal{G}$; označme ji d_0. Zřejmě $d_0 \geq d$, tudíž

$$d_0 = d_0 - d + d = (d_0 - d + h) - k \in \mathcal{R}(U).$$

Je tedy d_0 infimem $\mathcal{G}$ v $\mathcal{R}(U)$. $\square$

2.5 Shlazování superharmonických funkcí

Nechť $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nekonečně diferencovatelná sudá nezáporná funkce s nosičem v $[-1, 1]$ a nechť

$$\omega \int_0^1 \psi(\varrho)\varrho^{m-1}\, d\varrho = 1.$$

(Připomínáme, že $\omega = \sigma(S_1(0))$; viz (1.5.1).) Potom podle (1.5.1)

$$\int \psi(|x|)\, d\lambda(x) = \lambda(B_1(0)) \int \psi(|x|)\, d\lambda_{0,1} =$$
$$= m\lambda(B_1(0)) \int_0^1 \psi(\varrho)\varrho^{m-1}\, d\varrho = \omega \int_0^1 \psi(\varrho)\varrho^{m-1}\, d\varrho = 1.$$

Pro $r > 0$ definujme

$$\beta_r(x) = r^{-m}\psi\left(\frac{|x|}{r}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Zřejmě $\beta_r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, nosič funkce β_r je obsažený v $\overline{B_r(0)}$ a $\int \beta_r\, d\lambda = 1$.

Je-li $U \subset \mathbb{R}^m$ otevřená množina, označíme

$$U_r = \{x \in U; \overline{B_r(x)} \subset U\}.$$

Množina U_r je zřejmě otevřená.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $r > 0$, $f \in L^1_{loc}(U)$ a $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$, jejíž nosič je obsažený v $\overline{B_r(0)}$. Konvoluci $\gamma * f$ definujeme rovností

$$(\gamma * f)(x) = \int f(y)\gamma(x-y)\, d\lambda(y), \qquad x \in U_r.$$

Zřejmě

$$(\gamma * f)(x) = \int_{B_r(x)} f(y)\gamma(x-y)\, d\lambda(y) = \int_{B_r(0)} f(x-y)\gamma(y)\, d\lambda(y).$$

Podle věty o derivování za integračním znamením je $\gamma * f \in \mathcal{C}^\infty(U_r)$, pokud $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Nechť $x \in U$ je Lebesgueovým bodem funkce $f \in L^1_{loc}(U)$, tj.

$$\lim_{s\to 0+} \int |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda_{0,s}(y) = 0.$$

Tvrdíme, že

$$\lim_{s\to 0+} (\beta_s * f)(x) = f(x).$$

Je-li totiž $M = \sup \psi(\mathbb{R})$ a $s > 0$ takové, že $x \in U_s$, pak

$$|(\beta_s * f)(x) - f(x)| = \left| \int_{B_s(0)} (f(x-y) - f(x))\beta_s(y)\, d\lambda(y) \right| \le$$
$$\le M s^{-m} \int_{B_s(0)} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) = M\lambda(B_1(0)) \int |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda_{0,s}(y).$$

2.5.1. Tvrzení. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{S}(U)$ a $r > 0$. Potom je*

$$\beta_r * u \in \mathcal{S}(U_r) \cap \mathcal{C}^\infty(U_r)$$

a $\beta_r * u \nearrow u$ na U pro $r \to 0+$.

Důkaz. Nechť $r > 0$, $x \in U_r$. Připomeňme, že $\lambda(B_r(x)) = (\omega/m)\, r^m$ a povšimněme si, že funkce

$$y \mapsto u(y)\beta_r(x-y)$$

je na $\overline{B_r(x)}$ zdola polospojitá (to např. snadno plyne z (2.1.4)). Podle (2.1.8) dostáváme

$$(\beta_r * u)(x) = \frac{\omega}{m} r^m \int u(y)\beta_r(x-y)\, d\lambda_{x,r}(y) =$$

$$= \omega r^m \int_0^1 \Big(\int u(y)\beta_r(x-y)\, d\sigma_{x,\alpha r}(y) \Big) \alpha^{m-1}\, d\alpha = \omega \int_0^1 \alpha^{m-1}\psi(\alpha) \Big(\int u\, d\sigma_{x,\alpha r} \Big)\, d\alpha.$$

Podle (2.2.9) je pro každé $\alpha \in \left]0,1\right[$ funkce

$$\varrho \mapsto \int u\, d\sigma_{x,\alpha\varrho}$$

nerostoucí na intervalu $\left]0,r\right[$ s limitou $u(x)$ pro $\varrho \to 0+$. Proto je funkce

$$\varrho \mapsto (\beta_\varrho * u)(x)$$

nerostoucí a

$$\lim_{\varrho \to 0+} (\beta_\varrho * u)(x) = \omega \int_0^1 \alpha^{m-1}\psi(\alpha) u(x)\, d\alpha = u(x).$$

Víme, že $\beta_r * u \in \mathcal{C}^\infty(U_r)$ a zbývá tedy ověřit, že $\beta_r * u \in \mathcal{S}(U_r)$.
Nechť $x \in U_r$, $\varrho > 0$, $\overline{B_\varrho(x)} \subset U_r$. Potom

$$\int (\beta_r * u)\, d\lambda_{x,\varrho} = \int \Big(\int_{B_r(0)} u(z-y)\beta_r(y)\, d\lambda(y) \Big)\, d\lambda_{x,\varrho}(z) =$$

$$\int_{B_r(0)} \Big(\int u(z-y)\, d\lambda_{x,\varrho}(z) \Big) \beta_r(y)\, d\lambda(y).$$

Pro každé $y \in B_r(0)$ je funkce $z \mapsto u(z-y)$ superharmonická na okolí koule $\overline{B_\varrho(x)}$, takže podle (2.2.5) je

$$\int u(z-y)\, d\lambda_{x,\varrho}(z) \le u(x-y),$$

tudíž

$$\int (\beta_r * u)\, d\lambda_{x,\varrho} \le \int_{B_r(0)} u(x-y)\beta_r(y)\, d\lambda(y) = (\beta_r * u)(x).$$

Podle (2.2.5) je $\beta_r * u \in \mathcal{S}(U_r)$, neboť $\beta_r * u \le u$. □

2.5.2. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a V je omezená otevřená množina, $\overline{V} \subset U$ a $u \in \mathcal{S}(U)$. Pak existuje zdola omezená posloupnost (u_n) superharmonických funkcí na V taková, že $u_n \in \mathcal{C}^\infty(V)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $u_n \nearrow u$ na V pro $n \to \infty$.*

Důkaz. Stačí volit $r > 0$ tak, aby $\overline{V} \subset U_r$ a položit $u_n = \beta_{r/n} * u$ na V. □

2.6 Rieszova věta o rozkladu superharmonické funkce

Pro otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^m$ označme $\mathcal{C}_C(U)$ množinu všech $f \in \mathcal{C}(U)$, pro něž je nosič $\operatorname{spt} f$ kompaktní podmnožina U. Pro $f \in \mathcal{C}_C(U)$ definujme

$$||f|| = \sup |f|(U).$$

Dále označíme $\mathcal{D}(U)$ množinu všech nekonečně diferencovatelných reálných funkcí na U s kompaktním nosičem obsaženým v U.

Nechť $f \in L^1_{loc}(U)$. V teorii distribucí se f ztotožňuje s lineárním funkcionálem

$$\varphi \mapsto \int f\varphi \, d\lambda, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

(Takový funkcionál skutečně určuje f λ–s.v.; viz např. úvodní text v (2.5).)

Podobně se Radonova míra μ na U přirozeným způsobem ztotožňuje s lineárním funkcionálem

$$\varphi \mapsto \int \varphi \, d\mu, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

(Takový funkcionál určuje míru μ jednoznačně; viz např. (2.6.2) níže a Rieszova věta o reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na prostoru spojitých funkcí s kompaktním nosičem v U.)

Následující lemma je motivací pro definici distributivního laplasiánu.

2.6.1. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u, v \in \mathcal{C}^2(U)$ a nechť v má kompaktní nosič v U. Potom platí*

$$\int_U u\Delta v \, d\lambda = \int_U v\Delta u \, d\lambda.$$

Důkaz. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ taková, že $\varphi = 1$ na okolí nosiče funkce v. (Takovou φ lze definovat např. takto: zvolme V otevřenou omezenou obsahující nosič v a $\overline{V} \subset U$. Pak za φ lze vzít konvoluci β_r a charakteristické funkce množiny V pro dostatečně malé r.)

Definujme

$$u_0 = \begin{cases} u\varphi & \text{na } U, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^m \setminus U, \end{cases} \qquad\qquad v_0 = \begin{cases} v & \text{na } U, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^m \setminus U. \end{cases}$$

Potom $u_0, v_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$ a

$$\int_U u\Delta v \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} u_0 \Delta v_0 \, d\lambda, \qquad \int_U v\Delta u \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} v_0 \Delta u_0 \, d\lambda.$$

Zvolme $R > 0$ tak, aby nosiče funkcí v a φ byly obsaženy v $B_R(0)$. Potom se u_0, v_0 anulují na okolí množiny $S_R(0)$ a podle Greenovy identity (viz (1.9)) je

$$\int_{\mathbb{R}^m} u_0 \Delta v_0 \, d\lambda = \int_{B_R(0)} u_0 \Delta v_0 \, d\lambda = \int_{B_R(0)} v_0 \Delta u_0 \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} v_0 \Delta u_0 \, d\lambda.$$

□

Podle (2.6.1) pro funkci $u \in \mathcal{C}^2(U)$ jsou na $\mathcal{D}(U)$ funkcionály

$$\varphi \mapsto \int \varphi \Delta u \, d\lambda \qquad \text{a} \qquad \varphi \mapsto \int u \Delta \varphi \, d\lambda$$

totožné. Ovšem funkcionál

$$\varphi \mapsto \int u \Delta \varphi \, d\lambda$$

je definován dokonce pro každou funkci $u \in L^1_{loc}(U)$.

Distributivním laplasiánem funkce $u \in L^1_{loc}(U)$ na U rozumíme lineární funkcionál

$$\mathbb{\Delta} u : \varphi \mapsto \int_U u \Delta \varphi \, d\lambda, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

2.6.2. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $f \in L^1_{loc}(U)$ a $\mathbb{\Delta} f = 0$ na U. Potom existuje $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $f = h$ λ–s.v. na U.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $U = B_R(0)$ a $f \in L^1(B_R(0))$. Položme $f = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus B_R(0)$, zvolme $r \in]0, R[$, $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ takovou, že $\operatorname{spt} \gamma \subset B_r(0)$ a definujme

$$g = \gamma * f : x \mapsto \int \gamma(x-y) f(y) \, d\lambda(y), \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Potom $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$. Nechť $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ a $\operatorname{spt} \eta \subset B_{R-r}(0)$. Podle (2.6.1) je

$$\int \Delta g \eta \, d\lambda = \int g \Delta \eta \, d\lambda = \int \Big(\int \gamma(x-y) f(y) \, d\lambda(y) \Big) \Delta \eta(x) \, d\lambda(x) =$$
$$= \int \Big(\int \gamma(z) f(x-z) \, d\lambda(z) \Big) \Delta \eta(x) \, d\lambda(x) = \int \gamma(z) \Big(\int f(x-z) \Delta \eta(x) \, d\lambda(x) \Big) \, d\lambda(z) =$$
$$= \int_{B_r(0)} \gamma(z) \Big(\int f(y) \Delta \eta(z+y) \, d\lambda(y) \Big) \, d\lambda(z).$$

Pro každé $z \in B_r(0)$ má funkce $y \mapsto \eta(z+y)$ nosič v $B_R(0)$, takže z předpokladu $\mathbb{\Delta} f = 0$ plyne, že vnitřní integrál je roven 0. Dokázali jsme, že

$$\int \Delta g \eta \, d\lambda = 0,$$

kdykoli $\eta \in \mathcal{D}(B_{R-r}(0))$, tudíž $\Delta g = 0$ v $B_{R-r}(0)$.

Nechť $\varrho \in]0, R-r[$. Z (2.5.1) pro $u = g$, $u = -g$ vyplývá, že $\beta_\varrho * g = g$ na $B_{R-r-\varrho}(0)$. Není těžké ověřit, že platí

$$\gamma * (\beta_\varrho * f) = \beta_\varrho * (\gamma * f),$$

takže $\gamma * (f - \beta_\varrho * f) = 0$ na $B_{R-r-\varrho}(0)$, kdykoli $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(B_r(0))$.

Nechť $x \in B_R(0)$ je Lebesgueův bod funkce f. Volme $r \in]0, R[$ tak, aby $|x| < R - r$. Dále volme $\varrho > 0$ tak, aby $|x| < R - r - \varrho$. Funkce $\beta_\varrho * f$ je zřejmě v bodě x spojitá, takže x je Lebesgueovým bodem funkce $f - \beta_\varrho * f$. Protože pro každé $s \in]0, r[$ platí

$$(\beta_s * (f - \beta_\varrho * f))(x) = 0,$$

je $(f - \beta_\varrho * f)(x) = 0$ (viz začátek (2.5)). Odtud plyne, že existuje funkce $h \in \mathcal{C}^\infty(B_R(0))$ taková, že $h = f$ λ–s.v. Podle předpokladu a (2.6.1) je

$$0 = \int h \Delta \varphi \, d\lambda = \int \varphi \Delta h \, d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(B_R(0))$, takže $\Delta h = 0$ na $B_R(0)$. □

2.6.3. Věta. *Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$, mající v případě $m = 2$ kompaktní nosič a pro niž je $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ v případě $m > 2$. Potom*

$$\mathbb{\Delta}(-N\mu) = \mu.$$

Množina $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$ je maximální otevřená množina, na níž je funkce $N\mu$ harmonická.

Důkaz. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Užitím Fubiniovy věty a (1.9.2) dostaneme

$$\int (-N\mu)\Delta\varphi \, d\lambda = \int \Big(- \int N(x,y)\, d\mu(y)\Big) \Delta\varphi(x)\, d\lambda(x) =$$
$$= \int \Big(\int -N(x,y)\Delta\varphi(x)\, d\lambda(x)\Big)\, d\mu(y) =$$
$$= \int \Big(\int -N_0(z)\Delta\varphi(z+y)\, d\lambda(z)\Big)\, d\mu(y) = \int \varphi(y)\, d\mu(y).$$

Protože funkce $N\mu$ je spojitá na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$, plyne podle (2.6.2) z $\mathbb{\Delta}(-N\mu) = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$, že $N\mu$ je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$. Je-li $N\mu$ harmonická na otevřené množině $V \subset \mathbb{R}^m$, $\Delta(-N\mu) = 0$ na V, tudíž $\mathbb{\Delta}(-N\mu) = 0$ na V, tudíž $\mu|_V = 0$. Proto je $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$ maximální otevřená množina, na níž je funkce $N\mu$ harmonická. $\square$

2.6.4. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $f \in \mathcal{C}_C(U)$ a nechť $V \subset U$ je otevřená množina, $\operatorname{spt} f \subset V$. Potom existují $\varphi_n \in \mathcal{D}(U)$, $\operatorname{spt} \varphi_n \subset V$ a $||f - \varphi_n|| \to 0$ pro $n \to \infty$. Jestliže $f \geq 0$, pak existují $\varphi_n \geq 0$ s uvedenými vlastnostmi.*

Důkaz. Položme $f = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus U$ a zvolme $r > 0$ tak, aby $\overline{B_r(a)} \subset V$ pro každé $a \in \operatorname{spt} f$. Potom $\beta_r * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{spt}(\beta_r * f) \subset V$ a

$$||f - \beta_r * f|| = \sup \Big\{ \Big| \int_{B_r(0)} \Big(f(x-y) - f(x) \Big) \beta_r(y)\, d\lambda(y) \Big| ; x \in \mathbb{R}^m \Big\} \leq$$
$$\leq \sup \{ |f(x-y) - f(x)|; x \in \mathbb{R}^m, y \in B_r(0)\}.$$

Protože f je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^m$, je

$$\sup \{ |f(x-y) - f(x)|; x \in \mathbb{R}^m, y \in B_\varrho(0)\} \to 0$$

pro $\varrho \to 0+$. Definujme $\varphi_n = \beta_{r/n} * f$ na U. Potom $\varphi_n \geq 0$, pokud $f \geq 0$, $\varphi_n \in \mathcal{D}(U)$, $\operatorname{spt} \varphi_n \subset V$ a $||f - \varphi_n|| \to 0$ pro $n \to \infty$. $\square$

2.6.5. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $u \in \mathcal{S}(U)$. Potom existuje právě jedna Radonova míra μ na U tak, že*

$$\mathbb{\Delta}(-u) = \mu.$$

Důkaz. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\varphi \geq 0$ a V je omezená otevřená množina taková, že

$$\operatorname{spt} \varphi \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Podle (2.5.2) existuje zdola omezená posloupnost (u_n) superharmonických funkcí třídy $\mathcal{C}^\infty$ na V taková, že $u_n \nearrow u$ na V pro $n \to \infty$. Z (2.6.1) a (2.2.6 (e)) dostáváme

$$\int_V u_n \Delta\varphi \, d\lambda = \int \varphi \Delta u_n \, d\lambda \leq 0.$$

Z Lebesgueovy věty plyne

$$\int_U u\Delta\varphi\, d\lambda \le 0.$$

Definujme nyní

$$A(\varphi) = -\int_U u\Delta\varphi\, d\lambda, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Nechť W je omezená otevřená množina, $\overline{W} \subset U$. Tvrdíme, že existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $|A(\varphi)| \le c||\varphi||$, kdykoli $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\operatorname{spt}\varphi \subset W$. Zvolíme funkci $\gamma \in \mathcal{D}(U)$, $0 \le \gamma \le 1$, $\gamma = 1$ na W. Pak na U platí

$$-||\varphi||\gamma \le \varphi \le ||\varphi||\gamma$$

pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\operatorname{spt}\varphi \subset W$. Protože funkcionál A je nezáporný, platí

$$-||\varphi||A(\gamma) \le A(\varphi) \le ||\varphi||A(\gamma)$$

a stačí tedy položit $c = A(\gamma)$.

Lze tedy na základě (2.6.4) rozšířit A z $\mathcal{D}(U)$ na nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}_C(U)$, který opět označíme A. Podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje Radonova míra μ na U taková, že

$$A(\varphi) = \int \varphi\, d\mu, \qquad \varphi \in \mathcal{C}_C(U).$$

Odtud

$$\int_U (-u)\Delta\varphi\, d\lambda = \int \varphi\, d\mu, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U),$$

neboli $\mathbb{\Delta}(-u) = \mu$. Víme již, že míra μ je určena jednoznačně. $\square$

2.6.6. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{S}(U)$, μ je Radonova míra na U a $\mathbb{\Delta}(-u) = \mu$. Potom ke každé omezené otevřené množině V, pro niž $\overline{V} \subset U$, existuje harmonická funkce h^V na V taková, že na V platí*

$$u = N(\mu|_V) + h^V.$$

Důkaz. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(V)$. Potom

$$\int u\Delta\varphi\, d\lambda = -\int \varphi\, d\mu = -\int \varphi\, d(\mu|_V).$$

Podle (2.6.3) je

$$\int N(\mu|_V)\Delta\varphi\, d\lambda = -\int \varphi\, d(\mu|_V).$$

Pro funkci $v = u - N(\mu|_V) \in L^1(V)$ platí tudíž

$$\int v\Delta\varphi\, d\lambda = 0,$$

kdykoli $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, neboli $\mathbb{\Delta}v = 0$ na V. Nyní tvrzení plyne z (2.6.2) a (2.2.11) $\square$

2.6.7. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $a \in U$ a $u \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$. Jestliže*

$$\liminf_{x\to a,\, x\ne a} \frac{u(x)}{N_a(x)} > -\infty,$$

potom existuje $c \in \mathbb{R}$ a funkce $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $u = cN_a + h$ na $U \setminus \{a\}$. Jestliže

$$\liminf_{x \to a,\, x \neq a} \frac{u(x)}{N_a(x)} \geq 0$$

(speciálně, když $u \geq 0$ na $U \setminus \{a\}$), pak $c \geq 0$.

Důkaz. Zvolme $d < 0$, pro něž

$$d < \liminf_{x \to a,\, x \neq a} \frac{u(x)}{N_a(x)}$$

a definujme

$$v = \begin{cases} -dN_a + u & \text{na } U \setminus \{a\}, \\ \infty & \text{na } \{a\}. \end{cases}$$

Protože

$$\liminf_{x \to a,\, x \neq a} v(x) = \liminf_{x \to a,\, x \neq a} N_a(x) \Big(\frac{u(x)}{N_a(x)} - d \Big) = \infty,$$

je v zdola polospojitá na U a pomocí (2.2.5) se snadno ověří, že $v \in \mathcal{S}(U)$. Podle (2.6.5) existuje Radonova míra μ na U tak, že $\Delta(-v) = \mu$ a přitom $\mu = 0$ na $U \setminus \{a\}$, neboť v je na $U \setminus \{a\}$ harmonická. Existuje tudíž $k \geq 0$ tak, že $\mu = k\varepsilon_a$ (ε_a značí Diracovu míru soustředěnou v bodě a). Pro funkci $v - kN_a \in L^1_{loc}(U)$ je $\Delta(v - kN_a) = 0$ na U a z (2.6.2) a z definice funkce v plyne, že existuje $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $v = kN_a + h$ všude na U. Pro $c = d + k$ platí $u = cN_a + h$ na $U \setminus \{a\}$. Z podmínky

$$\liminf_{x \to a, x \neq a} \frac{u(x)}{N_a(x)} \geq 0$$

plyne ovšem $c \geq 0$. □

2.6.8. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $a \in U$ a $u \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$ je omezená. Potom existuje $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $u = h$ na $U \setminus \{a\}$.*

2.7 Superharmonické funkce na $\mathbb{R}^m$

2.7.1. Věta. *Nechť $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ je zdola omezená. Potom je u konstantní.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $u \geq 0$. Podle (2.1.1) existuje $z \in \overline{B_1(0)}$, pro něž $u(z) = \inf u(\overline{B_1(0)})$. Pro $R > 1$ definujme

$$h_R : x \mapsto u(z) \frac{\log R - \log |x|}{\log R}, \qquad x \in \overline{B_R(0)} \setminus B_1(0).$$

Protože $h_R \leq u$ na $S_R(0) \cup S_1(0)$ a h_R je harmonická na $B_R(0) \setminus \overline{B_1(0)}$, je podle (2.1.10) $u \geq h_R$ na $B_R(0) \setminus \overline{B_1(0)}$. Pro $R \to \infty$ dostáváme $u \geq u(z)$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1(0)}$. Funkce u nabývá tedy na $\mathbb{R}^2$ svého minima, podle (2.2.3) je tedy konstantní. □

2.7.2. Tvrzení. *Nechť $m > 2$ a nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$ taková, že $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Potom*

$$\lim_{R \to \infty} \int N\mu \, d\sigma_{0,R} = 0.$$

Důkaz. Podle (2.3.5) je $N\sigma_{0,R} \searrow 0$ pro $R \to \infty$. Podle (2.3.5) a (2.3.6) platí

$$\int N\sigma_{0,1}\,d\mu = \frac{1}{\omega(m-2)}\Big(\mu(B_1(0)) + \int_{\mathbb{R}^m\setminus B_1(0)} |x|^{2-m}\,d\mu(x)\Big) < \infty$$

a

$$\int N\mu\,d\sigma_{0,R} = \int N\sigma_{0,R}\,d\mu.$$

Nyní plyne tvrzení z Lebesgueovy věty. $\square$

2.7.3. Lemma. *Nechť $m > 2$ a $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$. Potom existuje*

$$\lim_{R\to\infty} \int u\,d\sigma_{0,R} =: c$$

a platí $u \ge c$.

Důkaz. Existence limity plyne z (2.2.9). Zvolme $x \in \mathbb{R}^m$ a $\alpha \in\,]0,1[$. Je-li $R > |x|/\alpha$, platí na $B_R(0)$ podle (2.2.5) $u \ge H_{0,R}(u|_{S_R(0)})$. Protože pro $y \in S_R(0)$ je

$$R^{m-2}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^m} \ge \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^{m-1}}$$

a $u \ge 0$, dostáváme

$$u(x) \ge H_{0,R}(u|_{S_R(0)})(x) \ge \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^{m-1}} \int u\,d\sigma_{0,R}.$$

Odtud pro $R \to \infty$ plyne

$$u(x) \ge c\,\frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^{m-1}}$$

a konečně pro $\alpha \to 0+$ dostaneme $u(x) \ge c$. $\square$

2.7.4. Věta. *Nechť $m > 2$ a $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$. Potom pro každé $a \in \mathbb{R}^m$ platí*

$$\lim_{R\to\infty} \int u\,d\sigma_{a,R} = \inf u(\mathbb{R}^m), \qquad \lim_{R\to\infty} \int u\,d\lambda_{a,R} = \inf u(\mathbb{R}^m).$$

Důkaz. Označme $c = \inf u(\mathbb{R}^m)$. Nechť nejprve $a = 0$. Zřejmě

$$\lim_{R\to\infty} \int u\,d\sigma_{0,R} \ge c$$

a z (2.7.3) plyne, že neplatí ostrá nerovnost. Nechť $\varepsilon > 0$ a $\varrho > 0$ takové, že

$$\int u\,d\sigma_{0,R} \le c + \varepsilon,$$

kdykoli $R > \varrho$. Pro $R > \varrho$ dostáváme podle (2.1.8)

$$\int u\,d\lambda_{0,R} = m\int_0^1 \Big(\int u\,d\sigma_{0,\alpha R}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha =$$

$$= m\int_0^{\varrho/R} \Big(\int u\,d\sigma_{0,\alpha R}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha + m\int_{\varrho/R}^1 \Big(\int u\,d\sigma_{0,\alpha R}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha \le$$

$$\le m\int_0^1 \Big(\int u\,d\sigma_{0,t\varrho}\Big)\Big(\frac{\varrho t}{R}\Big)^{m-1}\frac{\varrho}{R}\,dt + (c+\varepsilon)\Big(1-\Big(\frac{\varrho}{R}\Big)^m\Big) =$$

$$= \Big(\frac{\varrho}{R}\Big)^m \int u\,d\lambda_{0,\varrho} + (c+\varepsilon)\Big(1-\Big(\frac{\varrho}{R}\Big)^m\Big).$$

Odtud plyne z (2.2.9) nerovnost

$$\lim_{R\to\infty} \int u\, d\lambda_{0,R} \le c.$$

Z (2.1.8) a (2.2.9) plyne nerovnost

$$\int u\, d\lambda_{0,R} \ge m\Big(\int u\, d\sigma_{0,R}\Big) \int_0^1 \alpha^{m-1}\, d\alpha = \int u\, d\sigma_{0,R},$$

tudíž

$$\lim_{R\to\infty} \int u\, d\lambda_{0,R} \ge c.$$

Pro $a \in \mathbb{R}^m$ uvažujme místo u funkci $x \mapsto u(x-a)$, $x \in \mathbb{R}^m$. □

2.7.5. Lemma. *Nechť $m > 2$, $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$, $\inf u(\mathbb{R}^m) = 0$, $a \in \mathbb{R}^m$ a $\mu = \Delta(-u)$. Potom*

$$\lim_{R\to\infty} R^{2-m} \mu(\overline{B_R(a)}) = 0.$$

Důkaz. Zvolme funkci $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, pro niž $\eta \ge 0$, $\eta(B_1(0)) = \{1\}$, $\operatorname{spt}\eta \subset B_2(0)$ a položme $c = \sup|\Delta\eta|(\mathbb{R}^m)$. Pro $R > 0$ definujme

$$\varphi_R(x) = \eta(a + \frac{x}{R}), \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Potom

$$\begin{aligned}\mu(\overline{B_R(a)}) &\le \int \varphi_R\, d\mu = -\int u\Delta\varphi_R\, d\lambda \le \int_{B_{2R}(a)} u|\Delta\varphi_R|\, d\lambda \le \\ &\le cR^{-2} \int_{B_{2R}(a)} u\, d\lambda = cR^{-2}(2R)^m \lambda(B_1(0)) \cdot \int u\, d\lambda_{a,2R}.\end{aligned}$$

Podle (2.2.9) a (2.7.4) je tudíž

$$R^{2-m}\mu(\overline{B_R(a)}) \le c\, 2^m \lambda(B_1(0)) \int u\, d\lambda_{a,R} \to 0$$

pro $R \to \infty$. □

2.7.6. Lemma. *Nechť $m > 2$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $a \in \mathbb{R}^m$. Potom je funkce*

$$\varrho \mapsto \int u\, d\sigma_{a,\varrho}$$

spojitá na $]0,\infty[$.

Důkaz. Zvolme $R > 0$. Podle (2.6.6) existuje funkce $h \in \mathcal{H}(B_R(a))$ a Radonova míra μ v $\mathbb{R}^m$ tak, že pro $\nu = \mu|_{B_R(a)}$ a $v = N\nu$ platí $u = v + h$ na $B_R(a)$. Protože

$$\int h\, d\sigma_{a,\varrho} = h(a)$$

pro všechna $\varrho \in\,]0,R[$, stačí ověřit spojitost funkce

$$\varrho \mapsto \int v\, d\sigma_{a,\varrho}$$

na $]0,R[$. Tato funkce je zdola polospojitá (viz (1.5.1) a (2.1.5)) a tudíž zprava spojitá na $]0,R[$, neboť je podle (2.2.9) nerostoucí. Nechť $0<r<R$. Pak z (2.3.5) plyne

$$N\sigma_{a,\varrho} \nearrow N\sigma_{a,r} \quad \text{pro} \quad \varrho \to r-,$$

tudíž

$$\int N\sigma_{a,\varrho}\,d\nu \nearrow \int N\sigma_{a,r}\,d\nu.$$

Ovšem

$$\int N\sigma_{a,\varrho}\,d\nu = \int N\nu\,d\sigma_{a,\varrho}, \qquad \varrho \in\,]0,R[,$$

tedy

$$\int v\,d\sigma_{a,\varrho} \to \int v\,d\sigma_{a,r} \quad \text{pro} \quad \varrho \to r-.$$

□

2.7.7. Lemma. *Nechť $m>2$, $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$, $a \in \mathbb{R}^m$,*

$$\lim_{R\to\infty} \int u\,d\sigma_{a,R} = 0 \qquad \text{a} \qquad \mu = \Delta(-u).$$

Potom $u(a) = N\mu(a)$.

Důkaz. Pro každé $R>0$ existuje podle (2.6.6) funkce $h_R \in \mathcal{H}(B_R(a))$ tak, že

$$u = N(\mu|_{B_R(a)}) + h_R.$$

Nechť $R>0$ a $r \in\,]0,R[$. Potom

$$\int u\,d\sigma_{a,r} = \int N(\mu|_{B_R(a)})\,d\sigma_{a,r} + \int h_R\,d\sigma_{a,r} = \int_{B_R(a)} N\sigma_{a,r}\,d\mu + h_R(a),$$

neboť $h_R \in \mathcal{H}(B_R(a))$. Podle (2.3.5) je

$$N\sigma_{a,r}(x) = \begin{cases} p(r), & x \in \overline{B_r(a)}, \\ p(|x-a|), & x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{B_r(a)}; \end{cases}$$

připomeňme, že $p(t) = \frac{1}{\omega(m-2)} t^{2-m}$, $t>0$. Platí tedy

$$\int u\,d\sigma_{a,r} - h_R(a) = p(r)\mu(\overline{B_r(a)}) + \int_{B_R(a)\setminus\overline{B_r(a)}} p(|x-a|)\,d\mu(x).$$

Protože je funkce

$$\varrho \mapsto \int u\,d\sigma_{a,\varrho}, \qquad \varrho \in\,]0,\infty[$$

spojitá, platí

$$\int u\,d\sigma_{a,R} - h_R(a) = p(R)\mu(B_R(a)).$$

Podle předpokladu je

$$\int u\,d\sigma_{a,R} \to 0 \quad \text{pro} \quad R \to \infty,$$

podle (2.7.5) je $p(R)\mu(B_R(a)) \to 0$ pro $R\to\infty$, tudíž $h_R(a) \to 0$ pro $R \to \infty$. Z rovnosti $u(a) = N(\mu|_{B_R(a)}) + h_R(a)$ nyní vyplývá $u(a) = N\mu(a)$. □

2.7.8. Věta. *Nechť $m > 2$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní*

(i) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a* $\lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{0,R} = 0$;

(ii) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a pro každé* $a \in \mathbb{R}^m$ *platí* $\lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{a,R} = 0$;

(iii) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a* $\lim_{R\to\infty} \int u\, d\lambda_{0,R} = 0$;

(iv) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a pro každé* $a \in \mathbb{R}^m$ *platí* $\lim_{R\to\infty} \int u\, d\lambda_{a,R} = 0$;

(v) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a* $\inf u(\mathbb{R}^m) = 0$;

(vi) *existuje Radonova míra* μ *v* $\mathbb{R}^m$ *taková, že*

$$\int_1^\infty \mu(B_r(0)) r^{1-m}\, dr < \infty \qquad \text{a} \qquad u = N\mu.$$

Důkaz. Podle (2.7.4) jsou podmínky (i) – (v) ekvivalentní. Platí-li (vi), je podle (2.3.6) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ a podle (2.7.2) platí

$$\lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{0,R} = 0,$$

takže (vi)$\Rightarrow$(i).

Nechť platí (i) a nechť $\mu = \mathbb{\Delta}(-u)$. Protože platí (ii), je podle (2.7.7) $u(a) = N\mu(a)$ pro každé $a \in \mathbb{R}^m$. Speciálně je $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ a tudíž

$$\int_1^\infty \mu(B_r(0)) r^{1-m}\, dr < \infty$$

podle (2.3.6). Platí tedy (vi). □

2.7.9. Korolár. *Nechť $m > 2$, $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$. Potom existuje právě jedno $c \geq 0$ a právě jedna Radonova míra μ v $\mathbb{R}^m$ tak, že $u = N\mu + c$. Platí*

$$c = \lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{0,R} \qquad \text{a} \qquad \mu = \mathbb{\Delta}(-u).$$

Důkaz. Plyne ihned z (2.7.8), (2.7.4) a (2.7.2). □

2.7.10. Tvrzení. *Nechť $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Potom existuje $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, pro niž $h \leq u$, právě když*

$$\lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{0,R} > -\infty.$$

Důkaz. Pro $r > 0$ položme $h_r = H_{0,r}(u|_{S_r(0)})$. Podle (2.3.3) je $h_r \in \mathcal{H}(B_r(0))$, podle (2.2.5) platí $h_r \leq u|_{B_r(0)}$ a

$$h_r(0) = \int u\, d\sigma_{0,r}.$$

Z (2.4.1) snadno plyne, že $h_\varrho \leq h_r$ na $B_r(0)$, kdykoli $0 < r < \varrho$. Pro $x \in \mathbb{R}^m$ definujme

$$h(x) = \inf\{h_r(x); r > |x|\}.$$

Potom $h \leq u$.

Je-li $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, $h \leq u$, je

$$\int u\, d\sigma_{0,R} \geq \int h\, d\sigma_{0,R} = h(0)$$

pro každé $R > 0$. □

2.7.11. Korolár. *Nechť $m > 2$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ a nechť existuje $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, $h \le u$. Potom existuje právě jedna Radonova míra μ a právě jedno $c \ge 0$ tak, že $u = N\mu + h + c$. Přitom $h + c$ je největší harmonická minoranta funkce u.*

Důkaz. Protože $u - h \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$, existuje podle (2.7.9) právě jedna Radonova míra μ v $\mathbb{R}^m$ a právě jedno $c \ge 0$ tak, že $u - h = N\mu + c$. Je-li $k \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, $k \le u$, existuje (opět podle (2.7.9)) Radonova míra ν v $\mathbb{R}^m$ a $d \ge 0$ tak, že $u - k = N\nu + d$. Potom $N\mu, N\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $k + N\nu + d = h + N\mu + c$. Protože $\Delta f = 0$ pro každou $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, je $\Delta(N\nu) = \Delta(N\mu)$, tedy podle (2.6.3) je $\nu = \mu$, tudíž $k + d = h + c$. Jelikož $d \ge 0$, je $k \le k + d = h + c$. □

2.8 Princip spojitosti

2.8.1. Lemma. *Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$ taková, že $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ (v případě $m = 2$ navíc předpokládáme, že $\operatorname{spt}(\mu)$ je kompaktní). Nechť $F \subset \mathbb{R}^m$ a $z \in \overline{F}$. Pro každé $r > 0$ označme $\mu_r = \mu_{\overline{B_r(z)}}$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $N\mu(z) < \infty$ *a* $\lim_{x \to z, x \in F} N\mu(x) = N\mu(z)$;

(ii) $\lim_{r \to 0+}(\limsup_{x \to z, x \in F} |N\mu_r(x)|) = 0$.

Důkaz. Všimněme si, že $N\mu(z) < \infty$, právě když existuje $r > 0$, pro něž $N\mu_r(z) < \infty$. Nechť $N\mu(z) < \infty$. Potom $\lim_{r \to 0+} N\mu_r(z) = 0$ a $\lim_{x \to z} N(\mu - \mu_r)(x) = N(\mu - \mu_r)(z)$. Důkaz nyní snadno plyne z rovnosti

$$N\mu(x) - N\mu(z) = N\mu_r(x) - N(\mu - \mu_r)(x) - N(\mu - \mu_r)(z) - N\mu_r(z)\,.$$

□

2.8.2. Věta. *Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$, jejíž nosič K je v případě $m = 2$ kompaktní, a nechť $z \in K$. Jestliže*

$$\lim_{x \to z, x \in K} N\mu(x) = N\mu(z),$$

potom

$$\lim_{x \to z} N\mu(x) = N\mu(z).$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $N\mu(z) < \infty$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ zvolme $\pi(x) \in K$ tak, aby $|x - \pi(x)| \le |x - y|$, kdykoli $y \in K$. Potom pro $y \in K$ platí $|y - \pi(x)| \le |y - x| + |x - \pi(x)| \le 2|y - x|$, tudíž

$$\begin{aligned} &N(\pi(x), y) \ge N(x, y) - (1/2\pi)\log 2 && \text{v případě } m = 2,\\ &N(\pi(x), y) \ge 2^{2-m} N(x, y) && \text{v případě } m > 2. \end{aligned}$$

Zřejmě $|\pi(x) - z| \le |\pi(x) - x| + |x - z| \le 2|x - z|$. Odtud dostáváme, s využitím dokázaných nerovností, pro $r, \varrho > 0$

$$\begin{aligned} &\sup N\mu_r(B_\varrho(z)) \le \sup N\mu_r(K \cap B_{2\varrho}(z)) + (1/2\pi)\log 2 \cdot \mu(K \cap \overline{B\varrho(z)}) && \text{pokud } m = 2,\\ &\sup N\mu_r(B_\varrho(z)) \le 2^{m-2} \sup N\mu_r(K \cap B_{2\varrho}(z)) && \text{pokud } m > 2. \end{aligned}$$

(Stejně jako v důkazu (2.8.1) je $\mu_r = \mu|_{\overline{B_r(z)}}$.) Tvrzení věty plyne nyní okamžitě z (2.8.1). □

2.8.3. Věta. *Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$ (v případě $m = 2$ s kompaktním nosičem) a nechť $N\mu < \infty$ μ-skoro všude. Potom existují Radonovy míry μ_n, $n \in \mathbb{N}$, jejichž nosiče jsou po dvou disjunktní kompaktní podmnožiny nosiče míry μ, potenciály $N\mu_n$ jsou spojité v $\mathbb{R}^m$ a $N\mu = \sum_{n=1}^{\infty} N\mu_n$.*

Důkaz. Pišme $u = N\mu$ a $K = \operatorname{spt}(\mu)$. Protože $u|_K$ je μ-skoro všude konečná zdola polospojitá funkce na K, podle Luzinovy věty existují po dvou disjunktní kompaktní množiny $K_n \subset K$ takové, že $\mu(K \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = 0$ a $u|_{K_n}$ je spojitá funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $\mu_n = \mu|_{K_n}$, $u_n = N\mu_n$. Zřejmě $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Zvolme $j \in \mathbb{N}$. Funkce $(u_j)|_{K_j}$ a $(\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{j\}} u_n)|_{K_j}$ jsou zdola polospojité a jejich součet, tedy funkce $u|_{K_j}$, je v každém bodě z K_j spojitá. Proto je funkce $(u_j)|_{K_j}$ spojitá v každém bodě z K_j. Podle (2.8.2) je funkce u_j spojitá v $\mathbb{R}^m$. $\square$