Kapitola 3

Klasická a zobecněná Dirichletova úloha

3.1 Příklady iregulárních množin

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina a $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Připomeňme (viz (1.3.4)), že klasická Dirichletova úloha pro okrajovou podmínku f spočívá v nalezení harmonické funkce h na U, pro niž platí rovnost

$$(*) \qquad \lim_{x \to z} h(x) = f(z), \qquad z \in \partial U.$$

(Podle (1.2.1) takové harmonické rozšíření funkce f existuje nejvýše jedno.) Říkáme, že množina U je *regulární*, pokud klasická Dirichletova úloha má řešení pro každou spojitou okrajovou podmínku. Omezená otevřená množina, která není regulární, se nazývá *iregulární*. Podle (1.3.3) je každá koule regulární množina.

3.1.1. Příklad. Nechť $U = B_1(0) \setminus \{0\}$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom je U iregulární oblast. Položme $f = 0$ na $S_1(0)$, $f(0) = c$. Potom je $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Předpokládejme, že existuje $h \in \mathcal{H}(U)$, pro niž platí $(*)$. Potom je $|h| \leq |c|$ podle (1.2.1) a podle (2.2.7) (aplikuje se na $u = h$, $u = -h$ a $M = \{0\}$) je $h = 0$. Pro $c \neq 0$ tedy $(*)$ neplatí pro $z = 0$.

3.1.2. Příklad. Nechť $z_n \in B_1(0) \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ a nechť $z_n \to 0$. Sestrojme takovou funkci $v \in \mathcal{S}^+(B_2(0))$, která je harmonická na $B_2(0) \setminus (\{0\} \cup \{z_n; n \in \mathbb{N}\})$ a pro niž $v = \infty$ na $\{z_n; n \in \mathbb{N}\}$ a $v(0) < \infty$; srv. (2.2.6 (f)). Zvolme $c > v(0)$ a definujme

$$U = (B_1(0) \setminus \{0\}) \cap \{x \in B_2(0); v < c\}.$$

Potom je U omezená otevřená množina a 0 je hraniční bod U, který není izolovaným bodem ∂U. Položme $f = v$ na $\partial U \setminus \{0\}$, $f(0) = c$. Potom je $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Předpokládejme, že existuje $h \in \mathcal{H}(U)$, pro niž platí $(*)$. Opět podle (2.2.7) platí $h = v$ na U. Protože $v \geq c$ na $B_1(0) \setminus U$, je podle (2.2.10)

$$c > v(0) = \liminf_{x \to 0,\, x \neq 0} v(x) = \liminf_{x \to 0,\, x \in U} v(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = c.$$

Tento spor ukazuje, že U je iregulární množina.

3.1.3. Příklad. Označme

$$I = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = x_3 = 0\}.$$

Pro borelovskou množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ označme $M^* = \{s \in [0,1]; (s,0,0) \in M\}$ a definujme

$$\mu(M) = \omega \cdot \int_{M^*} t\,dt$$

(takže μ má lineární hustotu vzhledem k lineární míře na I). Položme $u = N\mu$. Potom $u(0) = 1$ a $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^3 \setminus I)$. Pro $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus I$ položme

$$\begin{aligned} v(x) = &\sqrt{(1-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \\ &+ x_1 \log \left|1 - x_1 + \sqrt{(1-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}\right| + x_1 \log \left|x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right|, \end{aligned}$$

$$w(x) = x_1 \log(x_2^2 + x_3^2).$$

Snadný výpočet ukazuje, že $u = v - w$ na $\mathbb{R}^3 \setminus I$, a dále je $\lim_{x \to z} u(x) = \infty$ pro každé $z \in I$, $z_1 \notin \{0,1\}$. Pro $b > 0$ označme

$$E(b) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 > 0,\ \exp\left(\frac{-b}{x_1}\right) = x_2^2 + x_3^2\right\}.$$

Protože $\lim_{x \to 0} v(x) = 1$, je

$$(**) \qquad \lim_{x \to 0,\, x \in E(b)} u(x) = 1 + b.$$

Zvolme $c > 0$ a označme

$$U = B_1(0) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 > 0, u < 1 + c\}.$$

Potom je U otevřená omezená množina a 0 je hraniční bod, který není izolovaný. Na $\partial U \cap B_1(0)$ je $u = 1 + c$. Definujme $f = u$ na $\partial U \setminus \{0\}$ a $f(0) = 1 + c$. Potom je $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Předpokládejme, že existuje $h \in \mathcal{H}(U)$, pro niž platí $(*)$. Pak $h = u$ na U (opět podle (2.2.7)). Zvolme $b \in\,]0, c[$. Podle $(**)$ existuje $r > 0$ tak, že $E(b) \cap B_r(0) \subset U$ a tedy z $(**)$ plyne, že

$$1 + b = \lim_{x \to 0,\, x \in E(b)} u(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 1 + c,$$

což není možné. Množina U je tudíž iregulární. Povšimněme si, že množina U je homeomorfní s $B_1(0)$.

3.2 PWB řešení zobecněné Dirichletovy úlohy

Jak jsme viděli v (3.1), klasická Dirichletova úloha nemusí mít řešení pro každou spojitou okrajovou podmínku. Zobecněnou Dirichletovou úlohou budeme rozumět zobrazení, které každé spojité okrajové podmínce přiřazuje harmonickou funkci a má rozumné vlastnosti vyjádřené v následující definici.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina. Říkáme, že zobrazení $A : \mathcal{C}(\partial U) \to \mathcal{H}(U)$ je *Keldyšův operátor*, jestliže

(i) A je lineární;

(ii) A je nezáporný (tj. $Af \geq 0$, kdykoli $f \geq 0$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$);

(iii) jestliže pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ existuje řešení h_f klasické Dirichletovy úlohy, potom $Af = h_f$.

Nyní popíšeme metodu (pojmenovanou po O. Perronovi, N. Wienerovi a M. Brelotovi), která vede k důkazu existence Keldyšova operátoru. Otázkou jednoznačnosti Keldyšova operátoru se budeme zabývat v odstavci (3.7).

V celé této kapitole budeme nadále předpokládat, že $U \subset \mathbb{R}^m$ je neprázdná omezená oblast.

Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ je libovolná funkce. Říkáme, že funkce $u : U \to \mathbb{R}^*$ je *horní funkce* k funkci f, jestliže $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a pro každé $z \in \partial U$ platí

$$\liminf_{x \to z} u(x) \geq f(z) \qquad \text{a} \qquad \liminf_{x \to z} u(x) > -\infty.$$

Množinu všech horních funkcí k funkci f označíme $\mathcal{U}(f)$. Řekneme, že funkce $v : U \to \mathbb{R}^*$ je *dolní funkce* k funkci f, jestliže $-v \in \mathcal{U}(-f)$. Množinu všech dolních funkcí k funkci f označíme $\mathcal{L}(f)$. Funkce

$$\overline{H} f = \inf \mathcal{U}(f) \qquad \text{resp.} \qquad \underline{H} f = \sup \mathcal{L}(f)$$

nazýváme *horní* (resp. *dolní*) *řešení* zobecněné Dirichletovy úlohy. Podrobněji mluvíme o *Perron-Wiener-Brelotově řešení* zobecněné Dirichletovy úlohy.

3.2.1. Tvrzení. *Je-li $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, je $\underline{H} f \leq \overline{H} f$ a každá z funkcí $\underline{H} f$, $\overline{H} f$ je buďto identicky rovna ∞, nebo identicky rovna $-\infty$, nebo je harmonická.*

Důkaz. Nechť $u \in \mathcal{U}(f)$, $v \in \mathcal{L}(f)$ a $w = u - v$. Potom je $w \in \mathcal{H}^*(U)$ a pro každé $z \in \partial U$, jak se snadno zjistí, platí

$$\liminf_{x \to z} w(x) \geq 0.$$

Podle (2.2.4) je $w \geq 0$, takže $u \geq v$. Odtud ihned plyne nerovnost $\underline{H} f \leq \overline{H} f$. Protože $\mathcal{U}(f)$ a $-\mathcal{L}(f)$ jsou nasycené množiny, plyne zbytek tvrzení z (2.4.3). $\square$

Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$. Budeme říkat, že funkce f je *resolutivní*, jestliže $\underline{H} f$, $\overline{H} f$ jsou harmonické funkce a $\underline{H} f = \overline{H} f$. Množinu resolutivních funkcí označíme $\mathcal{R}(\partial U)$ a pro $f \in \mathcal{R}(\partial U)$ definujme $Hf = \overline{H} f$. Pokud bude třeba množinu U vyznačit, budeme psát $H_U f$.

Jestliže pro funkci $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ existuje řešení klasické Dirichletovy úlohy, je nutně $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ a platí zřejmě $f \in \mathcal{R}(\partial U)$. Označení Hf pro případ $U = B_r(a)$ nekoliduje s označením zavedeným v (1.3). Přirozeně vzniká otázka, zda $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{R}(\partial U)$. Obecněji se můžeme ptát po charakterizaci množiny $\mathcal{R}(\partial U)$.

3.2.2. Lemma. *Nechť $v \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $v|_U \in \mathcal{S}(U)$. Potom je funkce $f = v|_{\partial U}$ resolutivní.*

Důkaz. Z definice horního řešení plyne $\overline{H} f \leq v$ na U. Odtud plyne, že $\overline{H} f$ je dolní funkcí k okrajové podmínce f, takže $\overline{H} f \leq \underline{H} f$. Protože $\underline{H} f \leq \overline{H} f$, platí rovnost a f je zřejmě resolutivní. $\square$

3.2.3. Lemma. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, $g : \partial U \to \mathbb{R}^*$. Potom platí*

(a) *je-li $f \leq g$, pak $\overline{H} f \leq \overline{H} g$;*

(b) *je-li $\lambda > 0$, pak $\overline{H}(\lambda f) = \lambda \overline{H} f$;*

(c) *jestliže součty $f + g$, $\overline{H} f + \overline{H} g$ mají smysl, potom*

$$\overline{H}(f + g) \leq \overline{H} f + \overline{H} g.$$

Důkaz. Tvrzení jsou bezprostředním důsledkem definic. $\square$

3.2.4. Lemma. *Množina reálných resolutivních funkcí tvoří vektorový prostor uzavřený vzhledem ke stejnoměrné konvergenci.*

Důkaz. Nechť f, g jsou reálné resolutivní funkce. Potom podle (3.2.3 (c)) je

$$Hf + Hg = \underline{H}f + \underline{H}g \le \underline{H}(f+g) \le \overline{H}(f+g) \le \overline{H}f + \overline{H}g = Hf + Hg.$$

Odtud plyne, že $f+g$ je resolutivní.

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Je-li $\lambda = 0$, je zřejmě λf resolutivní. Pro $\lambda > 0$ to platí podle (3.2.3 (b)). Je-li $\lambda < 0$, platí

$$\overline{H}(\lambda f) = \overline{H}(-|\lambda| f) = |\lambda| \overline{H}(-f) = -|\lambda| \underline{H}f = \lambda Hf,$$

dále

$$\underline{H}(\lambda f) = \underline{H}(-|\lambda| f) = -\overline{H}(|\lambda| f) = -(|\lambda| \overline{H}f) = \lambda Hf.$$

Vidíme, že funkce λf je resolutivní.

Nechť $k : \partial U \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a $|k - g| \le \varepsilon$. Je-li u horní funkce k funkci g, je $u + \varepsilon$ horní funkce k funkci k, platí

$$\overline{H}k \le \overline{H}g + \varepsilon = Hg + \varepsilon.$$

Podobně se dokáže, že

$$Hg - \varepsilon = \underline{H}g - \varepsilon \le \underline{H}k.$$

Platí tudíž $\overline{H}k - \underline{H}k \le 2\varepsilon$, takže k je resolutivní funkce. □

3.2.5. Věta. *Každá spojitá funkce je resolutivní.*

Důkaz. Označme

$$\mathcal{L} = \{(v_1 - v_2)|_{\partial U}; v_j \in \mathcal{C}(\overline{U}), (v_j)|_U \in \mathcal{S}(U), j \in \{1,2\}\}.$$

Potom $\mathcal{L}$ je lineární prostor obsahující konstantní funkce a oddělující body množiny ∂U. Nechť $f \in \mathcal{L}$, $v_j \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $(v_j)|_U \in \mathcal{S}(U)$, $j \in \{1,2\}$ a $f = v_1 - v_2$ na ∂U. Na $\overline{U}$ platí

$$\begin{aligned}|v_1 - v_2| &= \sup(v_1 - v_2, v_2 - v_1) = \sup(v_1 + v_2 - 2v_2, v_1 + v_2 - 2v_1) = \\ &= v_1 + v_2 + \sup(-2v_2, -2v_1) = v_1 + v_2 - \inf(2v_1, 2v_2).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $|f| \in \mathcal{L}$. Podle svazové verze Stone-Weierstrassovy věty je $\mathcal{L}$ stejnoměrně hustý podprostor prostoru $\mathcal{C}(\partial U)$. Z (3.2.2) a (3.2.4) plyne, že každá funkce z $\mathcal{C}(\partial U)$ je resolutivní. □

3.2.6. Korolár. *Zobrazení $f \mapsto Hf$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, je Keldyšův operátor.*

Důkaz. Plyne snadno z (3.2.5) a (3.2.3). □

3.2.7. Věta. *Nechť U_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou oblasti takové, že $U_n \subset \overline{U_n} \subset U_{n+1} \subset U$, $n \in \mathbb{N}$, a $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$. Nechť $F \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $f = F|_{\partial U}$ a $f_n = F|_{\partial U_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $y \in U$ platí $\lim_{n\to\infty} H_{U_n} f_n(y) = Hf(y)$. Je-li navíc $F|_U \in \mathcal{S}(U)$, potom pro každé $y \in U$ platí $H_{U_n} f_n(y) \searrow Hf(y)$ pro $n \to \infty$.*

Důkaz. Pro přesnost poznamenejme, že poslední rovnost ovšem znamená toto: je-li $y \in U$, pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $y \in U_k$ a $\lim_{n\to\infty} H_{U_{k+n}} f_{k+n}(y) = Hf(y)$.

Nejprve předpokládejme, že navíc platí $F|_U \in \mathcal{S}(U)$ a nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak $F|_{U_n}$ je horní funkce k funkci f_n, tudíž $H_{U_n} f_n \le F$ na U_n. Zvolme horní funkci u k funkci f_n. Potom je funkce

$$v_n = \begin{cases} \min(u, F) & \text{na } U_n, \\ F & \text{na } U \setminus U_n. \end{cases}$$

hyperharmonická a v_n je zřejmě horní funkcí k funkci f, tudíž $H_U f \le v_n$. Protože $v_n \le u$ na U_n, dostáváme $H_U f \le H_{U_n} f_n \le v_n$ na U_n. Podobně se dokáže pro $k \ge n$ nerovnost $H_{U_k} f_k \le H_{U_n} f_n$. Definujme $h = \lim_{n\to\infty} H_{U_n} f_n$. Pak $h \in \mathcal{H}(U)$, $h \ge Hf$, $h \le v_n \le F$ na U_n, tudíž $h \le F$. Vidíme, že h je dolní funkce k funkci f, takže $h \le Hf$. Dokázali jsme rovnost $h = Hf$.

Nechť nyní $F \in \mathcal{C}(\overline{U})$ a $\varepsilon > 0$. Existují funkce $G, K \in \mathcal{C}(\overline{U})$ takové, že $G|_U \in \mathcal{S}(U)$, $K|_U \in \mathcal{S}(U)$ a

$$G - K - \varepsilon \le F \le G - K + \varepsilon.$$

Při zřejmém označení platí $Hg - Hk - \varepsilon \le Hf \le Hg - Hk + \varepsilon$ a

$$H_{U_n} g_n - H_{U_n} k_n - \varepsilon \le H_{U_n} f_n \le H_{U_n} g_n - H_{U_n} k_n + \varepsilon,$$

takže podle první části důkazu je

$$Hf - 2\varepsilon \le Hg - Hk - \varepsilon \le \liminf_{n\to\infty} H_{U_n} f_n \le Hg - Hk + \varepsilon \le Hf + 2\varepsilon,$$
$$Hf - 2\varepsilon \le \liminf_{n\to\infty} H_{U_n} f_n \le Hf + 2\varepsilon.$$

Odtud již tvrzení věty ihned plyne. □

3.3 Harmonická míra a resolutivní funkce

Jestliže μ je Radonova míra na lokálně kompaktním prostoru X, $f : X \to \mathbb{R}^*$, definujeme

$$\int^* f\, d\mu = \inf\Big\{ \int u\, d\mu ; u \text{ zdola polospojitá}, u \ge f \text{ na } X \text{ a } u \ge 0 \text{ vně jistého kompaktu} \Big\}.$$

Klademe

$$\int_* f\, d\mu = -\int^* -f\, d\mu.$$

V tomto odstavci bude opět $U \subset \mathbb{R}^m$ neprázdná omezená oblast.

Podle (3.2.6) je zobrazení $f \mapsto Hf$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, Keldyšův operátor. Zvolme $x \in U$. Pak je tudíž zobrazení $f \mapsto Hf(x)$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}(\partial U)$ a tedy podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje právě jedna Radonova míra μ_x na ∂U taková, že

$$Hf(x) = \int f\, d\mu_x, \qquad f \in \mathcal{C}(\partial U).$$

Míru μ_x (podrobněji μ_x^U) nazýváme *harmonická míra* (příslušná oblasti U a bodu x).

3.3.1. Příklad. Nechť $U = B_r(a)$. Připomeňme, že pro $x \in U$ a $y \in \partial U$ je

$$P_x : y \mapsto r^{m-2} \frac{r^2 - |x-a|^2}{|x-y|^m}$$

a pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ platí podle (1.3.3)

$$Hf(x) = \int f \cdot P_x \, d\sigma_{a,r}.$$

Proto $\mu_x = P_x \cdot \sigma_{a,r}$.

3.3.2. Lemma. *Nechť $\{f_n\}$ je neklesající posloupnost numerických funkcí na ∂U. Jestliže $\overline{H}f_1 > -\infty$, pak*

$$\overline{H}(\sup f_n) = \sup \overline{H}f_n.$$

Důkaz. Zřejmě $\overline{H}(\sup f_n) \geq \sup \overline{H}f_n$. Obrácená nerovnost platí, pokud pro některé $n \in \mathbb{N}$ je $\overline{H}f_n = \infty$. Lze tedy předpokládat, že $\overline{H}f_n \in \mathcal{H}(U)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Zvolme $x \in U$ a $\varepsilon > 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ existuje $u_n \in \mathcal{U}(f_n)$ taková, že

$$u_n(x) \leq \overline{H}f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Označme $f = \sup f_n$ a definujme

$$v = \sup \overline{H}f_n + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - \overline{H}f_n).$$

Potom $v \in \mathcal{H}^*(U)$ a $v \geq \overline{H}f_n + u_n - \overline{H}f_n = u_n$. Pro $z \in \partial U$ tedy platí

$$\liminf_{x \to z} v(x) \geq \liminf_{x \to z} u_n(x),$$

a poslední číslo je větší nebo rovno $f_n(z)$ a zároveň větší než $-\infty$, neboť $u_n \in \mathcal{U}(f_n)$. Odtud plyne, že $v \in \mathcal{U}(f)$, takže $\overline{H}f \leq v$. Dostáváme

$$\overline{H}f(x) \leq v(x) \leq \sup \overline{H}f_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Odtud plyne nerovnost $\overline{H}(\sup f_n) \leq \sup \overline{H}f_n$. □

3.3.3. Věta. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, $x \in U$. Potom*

$$\overline{H}f(x) = \int^* f \, d\mu_x, \qquad \underline{H}f(x) = \int_* f \, d\mu_x.$$

Důkaz. Nechť nejprve g je zdola polospojitá funkce na ∂U a pro $g_n \in \mathcal{C}(\partial U)$ platí $g_n \nearrow g$. Podle (3.2.5) a (3.3.2) je

$$\overline{H}g(x) = \sup \overline{H}g_n(x) = \sup \int g_n \, d\mu_x = \int g \, d\mu_x = \int^* g d\mu_x.$$

Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ a nechť $\mathcal{G}$ je množina všech zdola polospojitých funkcí g na ∂U, pro něž $g \geq f$. Potom

$$\int^* f \, d\mu_x = \inf \Big\{ \int g \, d\mu_x ; g \in \mathcal{G} \Big\} = \inf\{ \overline{H}g(x); g \in \mathcal{G}\} \geq \overline{H}f(x).$$

Obrácená nerovnost je zřejmá, pokud $\overline{H}f(x) = \infty$. Nechť $\overline{H}f(x) < \infty$, $c > \overline{H}f(x)$ a $u \in \mathcal{U}(f)$ takové, že $u(x) \leq c$. Pro $z \in \partial U$ definujme

$$g(z) = \liminf_{x \to z} u(x).$$

Potom $g : \partial U \to \,]-\infty, \infty]$ je zdola polospojitá a $g \geq f$, neboť $u \in \mathcal{U}(f)$. Protože $g \in \mathcal{G}$, platí

$$\int^* f\, d\mu_x \leq \int g\, d\mu_x = \overline{H}g(x) \leq u(x),$$

neboť $u \in \mathcal{U}(g)$. Dostáváme

$$\int^* f\, d\mu_x \leq c,$$

takže

$$\int^* f\, d\mu_x \leq \overline{H}f(x).$$

□

3.3.4. Věta. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, $x \in U$. Potom f je resolutivní, právě když $f \in L^1(\mu_x)$. Je-li f resolutivní, platí*

$$Hf(x) = \int f\, d\mu_x.$$

Důkaz. Je-li f resolutivní, je $\underline{H}f(x) = \overline{H}f(x) \in \mathbb{R}$. Podle (3.3.3) je f μ_x–integrovatelná a

$$Hf(x) = \int f\, d\mu_x.$$

Je-li $f \in L^1(\mu_x)$, platí podle (3.3.3) rovnost $\overline{H}f(x) = \underline{H}f(x) \in \mathbb{R}$. Nezáporná harmonická funkce $\overline{H}f - \underline{H}f$ se tedy anuluje v bodě x, a tudíž všude na U podle (1.5.3). □

3.3.5. Věta. *Nechť $x,y \in U$. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$c^{-1}\mu_y \leq \mu_x \leq c\mu_y.$$

Důkaz. Podle (1.7.2) (pro kompaktní množinu $\{x, y\}$) existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$c^{-1}h(y) \leq h(x) \leq c\, h(y), \qquad h \in \mathcal{H}^+(U).$$

Je-li $A \subset \partial U$ borelovská množina, je funkce $f = 1_A$ resolutivní a platí $Hf(x) = \mu_x(A)$, $Hf(y) = \mu_y(A)$. Nyní aplikujeme předchozí nerovnosti na funkci $h = Hf$. □

3.3.6. Korolár. *Nechť $A \subset \partial U$ je borelovská množina. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje $x \in U$ tak, že $\mu_x(A) = 0$;*

(ii) *pro každé $y \in U$ je $\mu_y(A) = 0$.*

Důkaz. Plyne okamžitě z (3.3.5). □

Budeme říkat, že borelovská množina $A \subset \partial U$ má *harmonickou míru nula*, platí-li některá z podmínek z (3.3.6).

3.3.7. Věta. *Nechť $A \subset \partial U$ je borelovská množina. Potom A má harmonickou míru nula, právě když existuje $u \in \mathcal{S}^+(U)$ tak, že*

$$\lim_{x \to z} u(x) = \infty$$

pro všechna $z \in A$.

Důkaz. Nechť A má harmonickou míru nula. Potom $H1_A = 0$. Volme $y \in U$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ volme $u_n \in \mathcal{U}(1_A)$ tak, aby $u_n(y) \leq 2^{-n}$. Potom je $u_n \geq 0$ a pro $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ platí $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Protože $u(y) \leq 1$, je $u \in \mathcal{S}^+(U)$. Nechť $z \in A$. Potom pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\liminf_{x \to z} u(x) \geq \liminf_{x \to z} \sum_{n=1}^{k} u_n(x) \geq \sum_{n=1}^{k} \liminf_{x \to z} u_n(x) \geq \sum_{n=1}^{k} 1_A(z) = k.$$

Odtud $\lim_{x \to z} u(x) = \infty$.

Nechť $u \in \mathcal{S}^+(U)$ a $\lim_{x \to z} u(x) = \infty$, kdykoli $z \in A$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\varepsilon \cdot u \in \mathcal{U}(1_A)$, takže $0 \leq H1_A \leq \varepsilon \cdot u$. Zvolme $y \in U$ tak, aby $u(y) < \infty$. Pak $H1_A(y) = 0$, neboli $\mu_y(A) = 0$. □

3.3.8. Korolár. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ a nechť borelovská množina $A \subset \partial U$ má harmonickou míru nula. Jestliže v je zdola omezená hyperharmonická funkce na U a*

$$\liminf_{x \to z} v(x) \geq f(z), \qquad z \in \partial U \setminus A,$$

potom $\overline{H}f \leq v$.

Speciálně: Je-li $h \in \mathcal{H}(U)$ omezená a

$$\lim_{x \to z} h(x) = 0, \qquad z \in \partial U \setminus A,$$

potom $h = 0$.

Důkaz. Nechť u je funkce s vlastnostmi z (3.3.7) a $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $z \in \partial U$ platí $\liminf_{x \to z}(v + \varepsilon u)(x) \geq f(z)$, tudíž $\overline{H}f \leq v + \varepsilon u$. Podle (2.3.2) je $u < \infty$ λ-skoro všude na U, tedy $\overline{H}f \leq v$ λ-skoro všude. Podle (2.2.11) platí tato nerovnost všude. □

3.4 Hraniční chování PWB-řešení

Nechť $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast, $z \in \partial U$. Říkáme, že z je *regulární bod*, jestliže pro každou $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ platí $Hf(x) \to f(z)$ pro $x \to z$. (Jinak řečeno: z je regulární, jestliže $\mu_x \to \varepsilon_z$ pro $x \to z$.) Množinu regulárních bodů označíme $\partial_r U$ a definujeme

$$\partial_{irr} U = \partial U \setminus \partial_r U.$$

Body z $\partial_{irr} U$ se nazývají *iregulární*. Zřejmě je U regulární, právě když $\partial U = \partial_r U$.

3.4.1. Věta. *Nechť $z \in \partial U$ a $d : x \to |x - z|$, $x \in \partial U$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *$z \in \partial_r U$;*

(ii) *je-li $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ shora omezená, potom*

$$\limsup_{x \to z} \overline{H}f(x) \leq \limsup_{y \to z} f(y);$$

(iii) *existuje $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $h(x) \to 0$ pro $x \to z$ a*

$$\liminf_{x \to z'} h(x) > 0 \qquad \text{pro každé } z' \in \partial U \setminus \{z\}.$$

(iv) $\lim_{x \to z} Hd(x) = 0$.

Důkaz. Implikace (i)⇒(iv) a (ii)⇒(i) jsou zřejmé. Definujme $v(x) = |x - z|$, $x \in \mathbb{R}^m$ a dokažme implikaci (iv)⇒(iii). Podle (2.2.6 (h)) je $v \in -\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Proto na množině U platí $v \leq \underline{H}d = Hd$. Položíme-li $h = Hd$, platí $h(x) \to 0$ pro $x \to z$ podle předpokladu. Jestliže $z' \in \partial U \setminus \{z\}$, pak

$$\liminf_{x \to z'} h(x) \geq \liminf_{x \to z'} v(x) = |z - z'| > 0.$$

Zbývá dokázat implikaci (iii)⇒(ii). Označme

$$m = \sup f(\partial U), \qquad c = \limsup_{y \to z} f(y)$$

a volme $\varepsilon > 0$. Existuje okolí V bodu z tak, že $\sup f(\partial U \cap V) < c + \varepsilon$. Protože je funkce

$$k : y \to \liminf_{x \to y} h(x), \qquad y \in \partial U,$$

zdola polospojitá na $\partial U \setminus V$, je číslo $q = \inf k(\partial U \setminus V)$ kladné. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platila nerovnost $c + \varepsilon + \delta q \geq m$ a definujme na U funkci $u = c + \varepsilon + \delta h$. Ukažme, že u je horní funkce k funkci f. Je-li totiž $y \in \partial U \cap V$, je

$$\liminf_{x \to y} u(x) = c + \varepsilon + \delta k(y) \geq c + \varepsilon > f(y),$$

zatímco pro $z \in \partial U \setminus V$ je

$$\liminf_{x \to y} u(x) = c + \varepsilon + \delta k(y) \geq c + \varepsilon + \delta q \geq m \geq f(y).$$

Zřejmě

$$\liminf_{x \to y} u(x) > -\infty$$

pro každé $y \in \partial U$. Protože u je horní funkce k funkci f, je $\overline{H}f \leq u$, takže

$$\limsup_{x \to z} \overline{H}f(x) \leq \limsup_{x \to z} u(x) = c + \varepsilon + \delta \limsup_{x \to z} h(x) = c + \varepsilon.$$

Odtud plyne, že

$$\limsup_{x \to z} \overline{H}f(x) \leq \limsup_{y \to z} f(y).$$

□

3.4.2. Korolár. *Nechť $z \in \partial_r U$ a $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ je omezená resolutivní funkce spojitá v bodě z. Potom*

$$\lim_{x \to z} Hf(x) = f(z).$$

Důkaz. Plyne ihned z (3.4.1 (ii)). □

3.4.3. Korolár. *Nechť $z \in \partial U$ a nechť existuje $a \in \mathbb{R}^m$ a $r > 0$ tak, že $\overline{U} \cap \overline{B_r(a)} = \{z\}$. Potom $z \in \partial_r U$.*

Důkaz. Pro $x \in U$ definujme $h(x) = N(a,z) - N(x,a)$. Potom $h \in \mathcal{H}(U)$, $h(x) \to 0$ pro $x \to z$, a pro $z' \in \partial U \setminus \{z\}$

$$\liminf_{x \to z'} h(x) = \lim_{x \to z'} h(x) = N(a,z) - N(z',a) > 0.$$

Podle (3.4.1 (iii)) je $z \in \partial_r U$. □

3.4.4. Věta. *Nechť $z \in \partial U$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $z \in \partial_r U$;

(ii) *existuje otevřená množina V obsahující bod z a kladná funkce $u \in \mathcal{S}(U \cap V)$ taková, že $u(x) \to 0$ pro $x \to z$.*

Důkaz. Implikace (i)⇒(ii) je důsledkem (3.4.1). Nechť platí (ii). Lze předpokládat, že $V = B_r(z)$, $U \setminus V \neq \emptyset$ a u je na $U \cap V$ omezená (jinak bychom vzali např. $\min(1, u)$). Jestliže d má stejný význam jako v (3.4.1), stačí podle (3.4.1) dokázat, že $Hd(x) \to 0$ pro $x \to z$.

Označme $m = \sup d(\partial U)$ a zvolme $0 < \varrho < r$. Kdyby $S_\varrho(z) \cap U = \emptyset$, pak by množina $B_\varrho(z) \cap U \neq \emptyset$ byla otevřená i uzavřená v U. Protože U je oblast, platilo by

$$U = B_\varrho(z) \cap U \subset B_r(z),$$

což není možné. Proto $S_\varrho(z) \cap U \neq \emptyset$, kdykoli $0 < \varrho < r$.

Uvažujme nyní $0 < \varrho < r$ a zvolme $C \subset S_\varrho(z) \cap U$ kompaktní tak, aby $\sigma_{z,\varrho}(C) > 0$ a pro $T = (S_\varrho(z) \cap U) \setminus C$ platilo $\sigma_{z,\varrho}(T) \leq \frac{\varrho}{m}$. Položme $q = \inf u(C)$, $g(y) = m 1_T(y)$ pro $y \in B_\varrho(z)$ a k nechť je Poissonův integrál funkce g na $B_\varrho(z)$. Potom $q > 0$ a

$$k(z) = \int g \, d\sigma_{z,\varrho} = m \, \sigma_{z,\varrho}(T) \leq \varrho.$$

Nechť s je dolní funkce k funkci d. Protože $d \leq m$, je $m \in \mathcal{U}(d)$, takže $s \leq m$ na U. Položme $W = B_\varrho(z) \cap U$ a pro $x \in W$ definujme

$$t(x) = s(x) - \varrho - \frac{m}{q} u(x) - k(x).$$

Potom leží t v $-\mathcal{S}(W)$; ukážeme dále, že $t \leq 0$. Pak se důkaz dokončí takto: jelikož $s \leq \varrho + (m/q)u + k$ na W, je $Hd \leq \varrho + (m/\varrho)u + k$ na W, tudíž

$$\limsup_{x \to z} Hd(x) \leq \varrho + k(z) \leq 2\varrho.$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna $\varrho \in]0, r[$, je $Hd(x) \to 0$ pro $x \to z$.

Zbývá dokázat, že $t \leq 0$. Podle principu maxima pro subharmonické funkce stačí ukázat, že

$$\limsup_{x \to y} t(y) \leq 0, \text{ kdykoli } y \in \partial W = (\partial U \cap B_\varrho(z)) \cup (S_\varrho(z) \cap U).$$

Jestliže $y \in \partial U \cap B_\varrho(z)$, platí

$$\limsup_{x \to y} s(x) \leq d(y) = |y - z| \leq \varrho,$$

takže

$$\limsup_{x \to y} t(x) \leq \limsup_{x \to y} s(x) - \varrho \leq 0,$$

neboť u, k jsou nezáporné funkce na W.

Nechť $y \in S_\varrho(z) \cap U$ a $c = \limsup_{x \to y} t(x)$. Podle (3.4.1) (kterou aplikujeme na $B_\varrho(z)$, jejíž všechny hraniční body jsou regulární) je

$$\liminf_{x \to y} k(x) \geq \liminf_{p \to y} g(p).$$

Proto

$$c \le \limsup_{x\to y, x\in W} s(x) - \varrho - \frac{m}{q} \liminf_{x\to y, y\in W} u(x) - \liminf_{x\to y} k(x) \le$$
$$\le s(y) - \varrho - \frac{m}{q} u(y) - \liminf_{p\to y} g(p).$$

Jestliže $y \in T$, je $\liminf_{p\to y} g(p) = m$, takže

$$c \le s(y) - m - \varrho - \frac{m}{q} u(y) \le 0\,,$$

neboť $s \le m$ a $u(y) > 0$. Jestliže $y \in C$, je $g(y) = 0$, takže $\liminf_{p\to y} g(p) = 0$. Platí tudíž

$$c \le s(y) - \varrho - \frac{m}{q} u(y) \le s(y) - \varrho - \frac{m}{q} \inf u(C) = s(y) - \varrho - m \le -\varrho \le 0\,,$$

neboť $s(y) \le m$. Tím je dokázáno, že $c \le 0$. □

3.4.5. Korolár. *Nechť U_1, U_2 jsou omezené oblasti, $z \in \partial U_1 \cap \partial U_2$ a nechť existuje V otevřená množina taková, že $z \in V$ a $U_1 \cap V \subset U_2 \cap V$. Je-li $z \in \partial_r U_2$, je $z \in \partial_r U_1$.*

Důkaz. Plyne z (3.4.4). □

Zavedeme toto označení. Pro $c > 0$ označíme

$$T(c) = \left\{ x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m;\, \Big(\sum_{j=1}^{m-1} x_j^2 \Big)^{1/2} \le c\, x_m \right\}.$$

(Geometricky $T(c)$ je kužel s vrcholem v počátku a osou rovnoběžnou s osou x_m.)

3.4.6. Lemma. *Nechť $c > 0$, $r > 0$ a $U = B_r(0) \setminus T(c)$. Nechť dále $d(z) = |z|$, $z \in \partial U$ a $h = Hd$. Potom $h > 0$ na U a $h(x) \to 0$ pro $x \to 0$.*

Důkaz. Položme $h = d$ na ∂U. Je-li $z \in \partial U$, $|z| = r$, potom $z \in \partial_r U$ podle (3.4.3). Odtud snadno plyne, že $h > 0$ na U podle (1.5.3).

Zvolme $\alpha \in (0,1)$. Položme

$$U_\alpha = \alpha U = \{\alpha x; x \in U\}.$$

Označme $m = \sup h(\partial U_\alpha \cap S_{\alpha r}(0))$. Podle (3.4.3) je $\partial U \cap S_{\alpha r}(0) \subset \partial_r U$, takže $m \ge \alpha r$. Kdyby $m = r$, podle (1.5.3) by h byla konstantní. Platí tedy $r > m \ge \alpha r$. Pro $x \in \overline{U_\alpha} \setminus \{0\}$ definujme

$$u(x) = r h(x) - m\, h(x/\alpha).$$

Potom $u|_{U_\alpha}$ je omezená harmonická funkce a u je spojitá v každém bodě $z \in \partial U_\alpha \setminus \{0\}$. Je-li $z \in \partial U_\alpha$, $|z| = \alpha r$, pak $h(z) \le m$, $h(z/\alpha) = r$, takže $u(z) \le rm - mr = 0$. Je-li $z \in \partial U_\alpha$, $0 < |z| < \alpha r$, pak $h(z) = |z|$, $h(z/\alpha) = |z|/\alpha$, takže

$$u(z) = r|z| - m\,\frac{|z|}{\alpha} = \frac{|z|}{\alpha}(\alpha r - m) \le 0.$$

Podle (2.2.7) je $u \le 0$ na $\overline{U_\alpha} \setminus \{0\}$. Odtud

$$r \limsup_{x\to 0,\, x\ne 0} h(x) \le m \limsup_{x\to 0,\, x\ne 0} h(x/\alpha) = m \limsup_{x\to 0,\, x\ne 0} h(x).$$

Odtud $\limsup_{x\to 0,\, x\in U} h(x) = 0$, neboť $r > m$. □

3.4.7. Věta. *Nechť $z \in \partial U$. Jestliže existuje $c > 0$, $r > 0$ a takové izometrické zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, že $\varphi(0) = z$ a*

$$\overline{\varphi(T(c) \cap B_r(0))} \cap \overline{U} = \{z\},$$

potom $z \in \partial_r U$.

Důkaz. Plyne z (3.4.6) a (3.4.4). □

3.4.8. Věta. *Nechť $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $z \in \partial U$, S nedegenerovaná úsečka s koncovým bodem z a nechť $U \cap S = \emptyset$. Potom $z \in \partial_r U$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$U = B_1(0) \setminus \{(x, 0); 0 \leq x \leq a\}, \qquad a > 0$$

a uvažovat množinu U jako podmnožinu $\mathbb{C}$. Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce, pro niž $\exp f(z) = z$, $z \in U$ (jednoznačná větev logaritmu). Protože $|z| < 1$ pro $z \in U$, je $f(z) \neq 0$, takže

$$h(z) = -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{f(z)}\right), \qquad z \in U,$$

je harmonická na U. Nechť u, v jsou reálné funkce na U, pro něž $f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$, $z \in U$. Potom pro $z \in U$ platí

$$1 > |z| = |\exp f(z)| = \exp u(z),$$

takže $u(z) < 0$ a $u(z) \to -\infty$ pro $z \to 0$. Protože

$$h(z) = -\frac{u(z)}{u^2(z) + v^2(z)}, \qquad z \in U,$$

je $h > 0$ na U, a protože $h(z) \leq -1/u(z)$, $z \in U$, je $h(z) \to 0$ pro $z \to 0$. Podle (3.4.4) je $0 \in \partial_r U$. □

3.5 Greenova funkce

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast. Pro $x \in U$ definujeme na U funkci

$$G_x = N_x - H(N_x)|_{\partial U}.$$

(Připomeňme, že funkce $N_x : y \mapsto N(x, y)$, $y \in \mathbb{R}^m$, byla zavedena za (1.9.1).) Funkce G_x se nazývá *Greenova funkce množiny U s pólem v bodě x.* Zřejmě $G_x \in \mathcal{S}(U)$, $G_x(x) = \infty$ a $G_x > 0$ na U. Dále pro $z \in \partial U$ platí $\lim_{y \to z} G_x(y) = 0$, právě když $z \in \partial_r U$.

3.5.1. Věta. *Funkce $H(N_x)|_{\partial U}$ je největší subharmonická minoranta funkce $(N_x)_{|U}$.*

Důkaz. Nechť $v \in -\mathcal{S}(U)$ a $v \leq (N_x)_{|U}$. Protože v je dolní funkce k $(N_x)_{|U}$, platí $H(N_x)|_{\partial U} \geq v$. □

3.5.2. Poznámka. Pro speciální případ $U = B_r(0)$ a pro $x \in U$ je v (1.9.6) uvedeno explicitní vyjádření funkce G_x; viz též (1.9.9).

3.5.3. Věta. *Pro $x, y \in U$ platí rovnost $G_x(y) = G_y(x)$.*

Důkaz. Vzhledem k symetrii bodů x a y stačí dokázat, že $H((N_y)_{|\partial U})(x) \le H((N_x)_{|\partial U}(y)$. Pro každé $w \in U$ je zřejmě $H((N_w)|_{\partial U})(x) \le N_w(x) = N_x(w)$, takže funkce

$$w \mapsto H((N_w)|_{\partial U})(x)$$

je harmonická minoranta funkce $(N_x)_{|U}$. Proto $H((N_y)_{|\partial U})(x) \le H((N_x)_{|\partial U}(y)$. □

Funkce $G : U \times U \to (0, \infty\rangle$ definovaná rovností $G(x, y) = G_x(y)$, $(x, y) \in U \times U$, se nazývá *Greenovo jádro* množiny U.

Víme, že pro každé $y \in U$ platí $H((N_x)_{|\partial U})(y) = H((N_y)_{|\partial U}(x) = \int N_y d\mu_x = N\mu_x(y)$. Pravá strana rovnosti $G_x = N_x - N\mu_x$ proto umožňuje funkci G_x přirozeným způsobem rozšířit na funkci definovanou na $\mathbb{R}^m$. Snadno je vidět, že potom je $G_x = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus \overline{U}$. Skutečně, je-li $y \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{U}$, je funkce N_y harmonická na okolí množiny $\overline{U}$, tudíž $N\mu_x(y) = \int N_y \, d\mu_x = N_y(x) = N_x(y)$, neboli $G_x(y) = 0$. Funkce G_x je ovšem subharmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$, tedy shora polospojitá. Platí proto $G_x(z) = \limsup_{y \to z} G_x(y)$ pro každé $z \in \partial U$. Následující věta je důležitým upřesněním této rovnosti.

3.5.4. Věta. *Nechť $z \in \partial U$. Potom $G_x(z) = \limsup_{y \to z, \, y \in U} G_x(y)$.*

Důkaz. Zřejmě $G_x(z) = \limsup_{y \to z} G_x(y) \ge \limsup_{y \to z, \, y \in U} G_x(y)$. Nechť g je funkce rovna G_x na U a rovna nule na $\mathbb{R}^m \setminus U$. Dokážeme, že pro $0 < r < |x - z|$ platí rovnost

$$(*) \qquad \int G_x \, d\lambda_{z,r} = \int g \, d\lambda_{z,r}.$$

Důkaz se pak dokončí takto: podle (2.2.9) platí

$$\begin{aligned} G_x(z) &= \lim_{r \to 0+} \int G_x \, d\lambda_{z,r} = \lim_{r \to 0+} \int g \, d\lambda_{z,r} \le \\ &\le \lim_{r \to 0+} \sup g \left(U \cap B_r(z)\right) = \limsup_{y \to z, \, y \in U} g(y) = \limsup_{y \to z, \, y \in U} G_x(y). \end{aligned}$$

Dokažme nyní rovnost $(*)$. Označme ν restrikci Lebesgueovy míry na ∂U. Stačí ukázat, že $G_x = 0$ ν-skoro všude. Podle (2.2.6(g)) je potenciál $N\nu$ spojitý v $\mathbb{R}^m$ a $(N\nu)_{|U} \in \mathcal{H}(U)$. Proto platí

$$\begin{aligned} \int G_x d\nu &= N\nu(x) - \int N\mu_x d\nu = N\nu(x) - \int N\nu d\mu_x = \\ &= N\nu(x) - H((N\nu)_{|\partial U})(x) = 0 \end{aligned}$$

Tudíž $\nu(\{z \in \partial U \, ; \, G_x(z) > 0\}) = 0$. □

3.5.5. Věta. *Nechť μ je Radonova míra, pro niž $\operatorname{spt}(\mu) \subset U$ a $z \in \partial_r U$. Potom platí $\lim_{x \to z} \int G_x \, d\mu = 0$.*

Důkaz. Označme $K = \operatorname{spt}(\mu)$, zvolme oblast V takovou, že $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ a zvolme $w \in K$. Zřejmě $\left\{(G_x)|_V ; \, x \in U \setminus \overline{V}\right\} \subset \mathcal{H}^+(V)$, takže podle (1.7.2) existuje $c > 0$ takové, že $G_x(y) \le c \cdot G_x(w)$, kdykoli $x \in U \setminus \overline{V}$ a $y \in K$. Jelikož $z \in \partial_r U$, platí $\lim_{x \to z} G_w(x) = 0$, tudíž $\lim_{x \to z} \sup\{G_x(y); \, y \in K\} = 0$. Odtud ihned vyplývá rovnost $\lim_{x \to z} \int G_x \, d\mu = 0$. □

3.6 Množina iregulárních bodů

V tomto odstavci je opět U omezená oblast v $\mathbb{R}^m$.

3.6.1. Věta. *Množina $\partial_{irr}U$ je typu K_σ, tj. existují kompaktní množiny K_n takové, že $\partial_{irr}U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

Důkaz. Zvolme $x \in U$. Z definice regulárního bodu, z (3.4.4) a (3.5.4) plyne, že

$$\partial_r U = \{z \in \partial U;\ G_x(z) = 0\}.$$

Položme $K_n = \{z \in \partial U;\ G_x(z) \geq 1/n\}$. Potom $\partial_{irr}U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ a K_n jsou kompaktní, neboť K_n je omezená a uzavřená. (Připomeňme, že G_x je subharmonická, tudíž shora polospojitá na $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$.) □

Ukážeme, že množina iregulárních bodů oblasti U je v jistém potenciálně-teoretickém smyslu zanedbatelná. Kvantitativní vyjádření tohoto faktu je založeno na pojmu kapacity.

Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina. Označme $\mathcal{M}(K)$ množinu všech Radonových měr μ v $\mathbb{R}^m$, pro něž $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$.

Definujme

$$\operatorname{cap}(K) = \sup\{\mu(K);\ \mu \in \mathcal{M}(K),\ N\mu \leq 1\}.$$

Číslo $\operatorname{cap}(K)$ se nazývá *kapacita* množiny K. Pro $M \subset \mathbb{R}^m$ položme

$$\operatorname{cap}(M) = \sup\{\operatorname{cap}(K);\ K \subset M \text{ kompaktní}\}.$$

Číslo $\operatorname{cap}(M)$ se pak nazývá *vnitřní kapacita* množiny M.

3.6.2. Věta. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina a $\operatorname{cap}(K) > 0$. Potom existuje nenulová míra $\nu \in \mathcal{M}(K)$ taková, že potenciál $N\nu$ je spojitý.*

Důkaz. Z definice kapacity vyplývá existence nenulové míry $\mu \in \mathcal{M}(K)$ takové, že potenciál $N\mu$ je shora omezený. Existence míry ν s požadovanými vlastnostmi nyní vyplývá ihned z (2.8.3). □

3.6.3. Věta. *Pro množinu iregulárních bodů oblasti U platí $\operatorname{cap}(\partial_{irr}U) = 0$.*

Důkaz. Zvolme $x \in U$ a označme opět $K_n = \{z \in \partial U;\ G_x(z) \geq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\partial_{irr}U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, stačí dokázat, že $\operatorname{cap}(K_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každou kompaktní množinu $K \subset \partial_{irr}U$ totiž existuje, jak se snadno nahlédne, $n \in \mathbb{N}$, pro které $K \subset K_n$.

Předpokládejme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{cap}(K_n) > 0$; odvodíme spor. Z (3.6.2) plyne existence míry $\nu \in \mathcal{M}(K_n)$ takové, že $\nu(\mathbb{R}^m) = 1$ a potenciál $N\nu$ je spojitý. Potom ovšem na U platí rovnost $H((N\nu)|_{\partial U}) = N\nu$, tudíž

$$\begin{aligned} 1/n &\leq \int G_x \, d\nu = \int (N_x - N\mu_x)\, d\nu = N\nu(x) - \int N\nu \, d\mu_x = \\ &= N\nu(x) - H\left((N\nu)|_{\partial U}\right)(x) = N\nu(x) - N\nu(x) = 0, \end{aligned}$$

což je spor. □

3.6.4. Lemma. *Nechť μ je Radonova míra s kompaktním nosičem K. Potom*

$$\begin{aligned} &\sup N\mu(\mathbb{R}^m) \leq \sup N\mu(K) + (1/2\pi)\log 2 \cdot \mu(K), && \textit{pokud } m = 2 \textit{ a} \\ &\sup N\mu(\mathbb{R}^m) \leq 2^{m-2} \sup N\mu(K), && \textit{pokud } m > 2. \end{aligned}$$

Důkaz. Zřejmě lze předpokládat, že $K \neq \emptyset$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ zvolme, podobně jako v (2.8.1), $\pi(x) \in K$ takové, že $|x - \pi(x)| \le |x - y|$, kdykoli $y \in K$. Potom pro každé $y \in K$ platí $|y - \pi(x)| \le 2|y - x|$, tudíž

$$\begin{array}{ll} N(\pi(x), y) \ge N(x,y) - (1/2\pi)\log\,2 & \text{v případě } m = 2, \\ N(\pi(x), y) \ge 2^{2-m} N(x,y) & \text{v případě } m > 2. \end{array}$$

Odtud již tvrzení snadno vyplývá. □

3.6.5. Lemma. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina taková, že $\operatorname{cap}(K) = 0$ a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje Radonova míra ν taková, že $\operatorname{spt}(\nu) \cap K = \emptyset$, $\nu(\mathbb{R}^m) < \varepsilon$ a $N\nu > 1$ na K.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $K \neq \emptyset$. Nechť V je otevřená koule se středem v počátku obsahující množinu K. Zvolme kompaktní množiny K_n, $n \in \mathbb{N}$, takové, že K_n je konečné sjednocení uzavřených koulí, K je částí vnitřku množiny K_n, K_{n+1} je obsažena ve vnitřku množiny K_n, $K_1 \subset V$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K$. Z vyjádření Greenovy funkce G_x množiny V s pólem x uvedeného v (1.9.6) plyne existence $a > 0$ takového, že pro každé $x \in K_1$ na K_1 platí nerovnosti

$$N_x - a \le G_x \le N_x + a.$$

Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je U_n komponenta množiny $V \setminus K_n$, pro kterou je $\partial V \subset \partial U_n$. Potom je U_n oblast, $\partial U_n \subset \partial V \cup \partial K_n$ a podle (3.4.3) je každý bod hranice oblasti U_n regulární.

Položme $f_n = 0$ na ∂V a $f_n = a+1$ na ∂U_n. Označme h_n řešení Dirichletovy úlohy na U_n příslušné okrajové podmínce f_n. Položíme-li $s_n = h_n$ na U_n a $s_n = a + 1$ na $V \setminus U_n$, dostáváme spojitou funkci na V, pro niž $0 \le s_n \le a+1$. Z (2.2.5) vyplývá, že $s_n \in \mathcal{S}(V)$. Položme $\nu_n = -\Delta s_n$. Z (2.6.5), (2.6.2) a (1.5.3) vyplývá, že ν_n je nenulová míra, pro niž $\operatorname{spt}\nu_n \subset \partial K_n \subset K_1$.

Nechť μ_x je harmonická míra příslušná oblasti V a bodu x, takže $G_x = N_x - N\mu_x$. Definujme funkce $u_n \colon x \mapsto \int G_x \, d\nu_n$, $g_n \colon x \mapsto \int N\mu_x \, d\nu_n$, $x \in V$. Protože

$$g_n(x) = \int N\nu_n \, d\mu_x \,, \quad x \in V \,,$$

je $g_n \in \mathcal{H}(V)$ a tudíž $\Delta g_n = 0$. Dále podle (2.6.3) platí $\Delta u_n = \Delta(N\nu_n) + \Delta g_n = -\nu_n$, neboli $\Delta(u_n - s_n) = 0$. Podle (2.6.2) existuje funkce $k_n \in \mathcal{H}(V)$ taková, že rovnost $u_n - s_n = k_n$ platí λ-skoro všude na V. Superharmonické funkce $s_n + k_n$ a $u_n = N\nu_n - g_n$ se tudíž podle (2.2.11) rovnají všude na V. Protože pro každé $z \in \partial V$ platí $\lim_{x\to z} s_n(x) = 0$ a podle (3.5.5) platí $\lim_{x\to z} u_n(x) = 0$, je $k_n = 0$ na V.

Jelikož $u_n = s_n$ a $N_x - a \le G_x \le N_x + a$ na K_1, kdykoli $x \in K_1$, platí na K_1 nerovnost $|s_n - N\nu_n| \le a \cdot \nu_n(K_n)$. Označme $a_n = \nu_n(K_n)$ a definujme $\mu_n = \nu_n / a_n$. Jelikož $s_n \le a+1$, platí na K_1 nerovnost

$$N\mu_n \le a + (a+1)/a_n.$$

Můžeme předpokládat, že posloupnost $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ pravděpodobnostních měr konverguje slabě k míře μ (jinak bychom přešli k vybrané posloupnosti). Potom $\mu \in \mathcal{M}(K)$ a $\mu(K) = 1$. Je-li $c > 0$ a $N_x^{(c)} = \min(N_x, c)$, $x \in \mathbb{R}^m$, potom pro každé $x \in K_1$ platí

$$\begin{aligned} \int N_x^{(c)} \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int N_x^{(c)} \, d\mu_n \le \liminf_{n\to\infty} \int N_x \, d\mu_n = \\ &= \liminf_{n\to\infty} N\mu_n(x) \le a + (a+1) \cdot \liminf_{n\to\infty} (1/a_n). \end{aligned}$$

Odtud dostáváme nerovnost $N\mu \le a + (a+1) \cdot \liminf_{n\to\infty}(1/a_n)$ na K_1.

Kdyby $\liminf_{n\to\infty}(1/a_n) < \infty$, byl by potenciál $N\mu$ omezený na K_1 a tedy podle (3.6.4) všude v $\mathbb{R}^m$ a dostali bychom $\operatorname{cap}(K) > 0$. Dokázali jsme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_n < \min(\varepsilon, 1)$ a položme $\nu = \nu_n$. Pak $\operatorname{spt}(\nu) \cap K = \emptyset$ a $\nu(\mathbb{R}^m) < \varepsilon$. Protože na K platí $s_n = a+1$ a $|s_n - N\nu_n| \le a \cdot \nu_n(K_n) < a$, je $N\nu = N\nu_n > 1$ na K. □

Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$. Budeme říkat, že μ je diskrétní, jestliže $\operatorname{spt}(\mu)$ je konečná množina. Připomínáme tento výsledek: Je-li μ Radonova míra s kompaktním nosičem, potom existují diskrétní míry μ_n takové, že $\operatorname{spt}(\mu_n) \subset \operatorname{spt}(\mu)$, $\mu_n(\mathbb{R}^m) = \mu(\mathbb{R}^m)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a míry μ_n konvergují slabě pro $n \to \infty$ k míře μ.

3.6.6. Lemma. *Nechť ν je Radonova míra s kompaktním nosičem, $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina taková, že $K \cap \operatorname{spt}(\nu) = \emptyset$ a nechť $\delta > 0$. Potom existuje diskrétní míra κ taková, že $\operatorname{spt}(\kappa) \subset \operatorname{spt}(\nu)$, $\kappa(\mathbb{R}^m) = \nu(\mathbb{R}^m)$ a na K je splněna nerovnost $N\kappa > N\nu - \delta$.*

Důkaz. Zvolme omezenou oblast V takovou, že $K \subset V \subset \overline{V} \subset \mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\nu)$. Zvolme diskrétní míry κ_n, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $\operatorname{spt}(\kappa_n) \subset \operatorname{spt}(\nu)$ a κ_n konvergují pro $n \to \infty$ slabě k míře ν. Protože $\overline{V} \cap \operatorname{spt}(\nu) = \emptyset$, je $\{(N_x)_{|V}\,;\, x \in \operatorname{spt}(\nu)\}$ stejně omezená množina harmonických funkcí a tudíž totéž platí pro množinu $\{(N\kappa_n)_{|V}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Pro každé $x \in X$ zřejmě platí $\lim_{n\to\infty} N\kappa_n(x) = N\nu(x)$. Z (1.8.4) vyplývá, že $N\kappa_n$ konvergují pro $n \to \infty$ k $N\nu$ stejnoměrně na K. Existuje tudíž $n \in \mathbb{N}$ takové, že $N\kappa_n > N\nu - \delta$ na K, takže stačí položit $\kappa = \kappa_n$. □

3.6.7. Lemma. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je neprázdná kompaktní množina a κ je diskrétní míra. Potom existuje diskrétní míra μ taková, že $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$, $\mu(\mathbb{R}^m) = \kappa(\mathbb{R}^m)$ a na K je splněna nerovnost $N\mu \ge 2^{2-m} N\kappa - (1/2\pi)\log 2 \cdot \mu(\mathbb{R}^m)$.*

Důkaz. Označme $L = \operatorname{spt}(\kappa)$ a uvažujme $x \in L$. Zvolme, podobně jako v (2.8.1), $\pi(x) \in K$ takové, že

$$|x - \pi(x)| \le |x - y|\,,$$

kdykoli $y \in K$. Potom pro každé $y \in K$ platí $|y - \pi(x)| \le 2|y - x|$. Odtud plyne, že pro všechna $y \in K$ je splněna nerovnost

$$N(\pi(x), y) \ge 2^{2-m} N(x,y) - (1/2\pi)\log 2.$$

Podle předpokladu existují čísla $a(x) > 0$, $x \in L$, taková že $\kappa = \sum_{x\in L} a(x) \cdot \varepsilon_x$ (připomeňme, že ε_x je Diracova míra soustředěná v bodě x). Definujme $\mu = \sum_{x\in L} a(x) \cdot \varepsilon_{\pi(x)}$. Potom $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$ a $\mu(\mathbb{R}^m) = \sum_{x\in L} a(x) = \kappa(\mathbb{R}^m)$. Tvrzení je nyní zřejmé. □

3.6.8. Věta. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina a $\operatorname{cap}(K) = 0$. Potom existuje Radonova míra μ tak, že $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$ a pro každé $z \in K$ platí $\lim_{x\to z} N\mu(x) = \infty = N\mu(z)$.*

Důkaz. Lze předpokládat, že $K \ne \emptyset$. Podle (3.6.5) pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje Radonova míra ν_n taková, že $\nu_n(\mathbb{R}^m) < 2^{-n}$, $\operatorname{spt}(\nu_n) \cap K = \emptyset$ a $N\nu_n > 1$ na K. Podle (3.6.6) existuje diskrétní míra κ_n taková, že $\kappa_n(\mathbb{R}^m) = \nu_n(\mathbb{R}^m)$ a na K je splněna nerovnost $N\kappa_n > 1$. Označme $V_n = \{x \in \mathbb{R}^m;\, N\kappa_n(x) > 1\}$. Potom V_n je otevřená množina obsahující K. Užitím (3.6.7) dostáváme diskrétní míru μ_n takovou, že $\operatorname{spt}(\mu_n) \subset K$, $\mu_n(\mathbb{R}^m) = \kappa_n(\mathbb{R}^m)$ a na K platí nerovnost

$$N\mu_n \ge 2^{2-m} N\kappa_n - (1/2\pi)\log 2 \cdot \mu_n(\mathbb{R}^m)\,.$$

Definujme $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$. Potom μ je Radonova míra, $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$. Pro každé $r \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \bigcap_{n=1}^{r} V_n$ dostáváme

$$\begin{aligned} N\mu(x) &\geq 2^{2-m} \sum_{n=1}^{r} N\kappa_n(x) - (1/2\pi)\log 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\mathbb{R}^m) \geq \\ &\geq 2^{2-m} r - (1/2\pi)\log 2. \end{aligned}$$

Pro každé $z \in K$ proto platí $\lim_{x\to z} N\mu(x) = \infty = N\mu(z)$. □

3.6.9. Věta. *Nechť $M \subset \partial U$ je borelovská množina a $\operatorname{cap}(M) = 0$. Potom má M harmonickou míru 0. Speciálně: $\partial_{irr} U$ má harmonickou míru 0.*

Důkaz. Nechť $K \subset M$ je kompaktní. Stačí dokázat, že K má harmonickou míru nula. Zvolme $x \in U$. Z (3.6.8) víme, že existuje míra $\mu \in \mathcal{M}(K)$ a číslo $b \geq 0$ takové, že $N\mu + b \geq 0$ na U a pro každé $z \in K$ platí $\lim_{x\to z} (N\mu(x) + b) = \infty$. Protože pro každé $\varepsilon > 0$ je $(\varepsilon(N\mu + b))\,|_U \in \mathcal{U}(1_K)$, je zřejmě $\mu_x(K) = H1_K(x) = 0$. □

3.6.10. Věta. *Existuje funkce $k \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že pro všechna $z \in \partial_{irr} U$ platí*

$$\lim_{x\to z} k(x) = \infty\,.$$

Důkaz. Zvolme $y \in U$ a pro $n \in \mathbb{N}$ definujme stejně jako v (3.6.1) množinu

$$K_n = \{z \in \partial U;\, G_y(z) \geq 1/n\}\,.$$

Víme (srv. s (3.6.3)), že K_n je kompaktní množina a $\operatorname{cap}(K_n) = 0$. Podle (3.6.8) tudíž existuje míra $\mu_n \in \mathcal{M}(K_n)$ taková, že $\lim_{x\to z} N\mu_n(x) = \infty$, kdykoli $z \in K_n$. Zvolme čísla $a_n > 0$ a $b_n > 0$ taková, že $N\mu_n + b_n \geq 0$ na U a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(N\mu_n(y) + b_n) < \infty$. Potom pro funkci $u = \sum a_n(N\mu_n + b_n)$ zřejmě platí $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ a $u|_U \in \mathcal{H}^+(U)$. Je-li $z \in \partial_{irr} U$, pak pro vhodné $n \in \mathbb{N}$ platí $z \in K_n$, a proto

$$\liminf_{x\to z,\, x\in U} u(x) \geq \liminf_{x\to z} a_n\,(N\mu_n(x) + b_n) = \infty.$$

Stačí položit $k = u|_U$. □

3.6.11. Věta. *Nechť M je borelovská podmnožina ∂U. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *M má harmonickou míru nula;*

(ii) *existuje funkce $k_0 \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že pro každé $z \in M$ platí $\lim_{x\to z} k_0(x) = \infty$.*

Důkaz. Zvolme $y \in U$. Z (3.3.7) dostáváme, že podmínka (ii) implikuje (i).

Nechť M má harmonickou míru 0. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje otevřená množina V_n tak, že $M \subset V_n \cap \partial U$ a $\mu_y(V_n \cap \partial U) \leq 2^{-n}$. Podle (1.8.3) pro funkci $g_0 = \sum_{n=1}^{\infty} H1_{V_n\cap\partial U}$ platí $g_0 \in \mathcal{H}^+(U)$. Je-li $z \in M \cap \partial_r U$, pak zřejmě z (3.4.1) plyne $\lim_{x\to z} H1_{V_n\cap\partial U}(x) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, tudíž $\lim_{x\to z} g_0(x) = \infty$. Nechť $k \in \mathcal{H}^+(U)$ má vlastnosti z (3.6.10). Potom má zřejmě funkce $k_0 = g_0 + k$ požadované vlastnosti. □

3.6.12. Věta. *Nechť funkce $u \in \mathcal{H}^*(U)$ je zdola omezená a nechť $\limsup_{x\to z} u(x) \geq 0$, kdykoli $z \in \partial_r U$. Potom $u \geq 0$. Speciálně: jestliže $h \in \mathcal{H}(U)$ je omezená a pro každý bod $z \in \partial_r U$ platí $\lim_{x\to z} h(x) = 0$, potom $h = 0$.*

Důkaz. Plyne z (3.3.8) a (3.6.9). □

3.6.13. Poznámka. Z (3.6.12) vyplývá, že pro $f \in C(\partial U)$ je Hf jediná omezená harmonická funkce, která nabývá „správné hraniční hodnoty“ v každém regulárním bodě. Přesněji: Je-li h omezená harmonická funkce na U a $\lim_{x \to z} h(x) = f(z)$ pro každý bod $z \in \partial_r U$, potom $h = Hf$.

3.7 Keldyšova věta

V tomto odstavci znamená U opět omezenou oblast v $\mathbb{R}^m$. Připomeňme, že podle (3.2.6) je zobrazení $f \mapsto Hf$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, Keldyšův operátor. Tím se rozumí, že je to lineární nezáporné zobrazení $A : \mathcal{C}(\partial U) \mapsto \mathcal{H}(U)$ takové, že Af je řešení klasické Dirichletovy úlohy v případě, že pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ takové řešení existuje.

Naším cílem je dokázat, že na U žádný jiný Keldyšův operátor neexistuje. Ve skutečnosti dokážeme dokonce jednoznačnost ve třídě obecnějších operátorů; viz (3.7.5).

Důkaz bude vyžadovat několik pomocných tvrzení. Dříve, než je uvedeme, bude pro výklad užitečné provést tuto motivační úvahu. Předpokládejme, že bychom pro daný regulární bod z množiny U uměli sestrojit funkci $h \in \mathcal{C}(\overline{U})$ takovou, že $h|_U \in \mathcal{H}(U)$, $h(z) = 0$ a $h > 0$ na $\overline{U} \setminus \{z\}$ (to by pak ovšem byla „velice kvalitní“ bariéra pro bod z; srv. se (3.4.1)). Pak by důkaz jednoznačnosti Keldyšova operátoru byl opravdu snadný. Skutečně, nechť A je Keldyšův operátor a $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Dokazujeme rovnost $Af = Hf$. Zvolíme $z \in \partial_r U$ a uvažujeme „velice kvalitní“ bariéru h pro bod z. Nechť $\varepsilon > 0$ a V je okolí bodu z takové, že $|f - f(z)| \le \varepsilon$ na $\partial U \cap V$. Zřejmě existuje $c > 0$ takové, že $ch_{|\partial U \setminus V} \ge \sup |f|(\partial U \setminus V)$. Definujeme-li na ∂U funkci $g = f(z) + \varepsilon + ch|_{\partial U}$, platí na ∂U nerovnost $f \le g$ a pro funkci g existuje řešení klasické Dirichletovy úlohy, totiž funkce $f(z) + \varepsilon + ch|_U$. Proto je $Af \le Ag = f(z) + \varepsilon + ch|_U$. Odtud dostáváme

$$\limsup_{x \to z} Af(x) \le f(z) + \varepsilon + 0,$$

takže

$$\limsup_{x \to z} Af(x) \le f(z).$$

Analogicky se odvodí nerovnost

$$f(z) \le \liminf_{x \to z} Af(x).$$

Vidíme, že Af je omezená harmonická funkce, pro niž $\lim_{x \to z} Af(x) = f(z)$, kdykoli $z \in \partial_r U$. Podle (3.6.13) dostáváme $Af = Hf$.

„Velmi kvalitní“ bariéra s uvedenými vlastnostmi existuje (viz. (3.7.8)), přímý důkaz existence je náročný. Ukážeme, že výše uvedenou úvahu lze modifikovat a spokojit se s „méně kvalitní“ funkcí h, která má v bodě $z \in \partial_r U$ pouze přibližně hodnotu 0 a je dostatečně velká v bodech množiny ∂U nepříliš vzdálených od bodu z.

3.7.1. Lemma. *Nechť V a W jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^m$, $W \subset V$, $v \in \mathcal{H}^*(V)$, $w \in \mathcal{H}^*(W)$ a nechť $\liminf_{x \to z} w(x) \ge v(z)$, kdykoli $z \in \partial W \cap V$. Definujme*

$$u = \begin{cases} \min(w, v) & \text{na } W\,, \\ v & \text{na } V \setminus W\,. \end{cases}$$

Potom je $u \in \mathcal{H}^*(V)$.

Důkaz. Je-li $z \in V \setminus \partial W$, je zřejmě funkce u zdola polospojitá v bodě z a pro $r > 0$ takové, že $\overline{B_r(z)} \subset V \setminus \partial W$, platí $\int u \, d\lambda_{z,r} \leq u(z)$.

Nechť $z \in \partial W \cap V$. Potom

$$\liminf_{x \to z,\, x \in W} u(x) = \min \Big(\liminf_{x \to z,\, x \in W} w(x), \liminf_{x \to z,\, x \in W} v(x) \Big) \geq v(z) = u(z),$$
$$\liminf_{x \to z,\, x \in V \setminus W} u(x) = \liminf_{x \to z,\, x \in V \setminus W} v(x) \geq v(z) = u(z).$$

Tudíž funkce u je zdola polospojitá v bodě z. Je-li $r > 0$ takové, že $\overline{B_r(z)} \subset V$, zřejmě platí

$$\int u \, d\lambda_{z,r} \leq \int v \, d\lambda_{z,r} \leq v(z) = u(z).$$

Z (2.2.5) vyplývá, že $u \in \mathcal{H}^*(V)$. □

3.7.2. Lemma. *Nechť $V \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina obsahující $\overline{U}$, $v \in \mathcal{S}(V)$. Potom je funkce $v|_{\partial U}$ resolutivní a*

$$H(v|_{\partial U}) = \inf\{s|_U;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \geq v \text{ na } V \setminus U\}.$$

Důkaz. Označme $f = v|_{\partial U}$. Podle (3.3.4) a (2.3.2) je funkce f resolutivní, neboť je zdola polospojitá a $\inf f(\partial U) \leq Hf \leq v|_U$. Nechť $w \in \mathcal{U}(f)$. Podle (3.7.1) je funkce

$$u = \begin{cases} \min(w, v) & \text{na } U\,, \\ v & \text{na } V \setminus U\,, \end{cases}$$

hyperharmonická, tudíž na U jsou splněny nerovnosti

$$\inf\{s;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \geq v \text{ na } V \setminus U\} \leq u \leq w.$$

Odtud dostaneme nerovnost

$$\inf\{s|_U;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \geq v \text{ na } V \setminus U\} \leq Hf.$$

Je-li $s \in \mathcal{H}^*(V)$, $s \geq v$ na $U \setminus V$, potom pro každý bod $z \in \partial U$ platí

$$\liminf_{x \to z,\, x \in U} s(x) \geq \liminf_{x \to z} s(x) = s(z) \geq v(z) = f(z) > -\infty.$$

Vidíme, že $s|_U \in \mathcal{U}(f)$, tudíž $s|_U \geq Hf$. Nyní je zřejmé, že platí nerovnost

$$Hf \leq \inf\{s|_U;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \geq v \text{ na } V \setminus U\}.$$

□

3.7.3. Lemma. *Nechť V a W jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^m$, V je omezená a*

$$\overline{U} \subset W \subset \overline{W} \subset V\,.$$

Nechť v je spojitá superharmonická funkce na V a nechť $v|_{V \setminus \overline{W}} \in \mathcal{H}(V \setminus \overline{W})$. Potom existuje neklesající posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých superharmonických funkcí na V taková, že $u_n \leq v$, $(u_n)|_U \in \mathcal{H}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, a pro každé $z \in (V \setminus \overline{U}) \cup \partial_r U$ platí $\lim_{n \to \infty} u_n(z) = v(z)$.

Důkaz. Položme $u = \inf\{s;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \geq v \text{ na } V \setminus U\}$. Nechť $z \in \partial_r U$ a $\varepsilon > 0$. Protože $u = v$ na $V \setminus U$, je $u|_{V\setminus U}$ spojitá funkce a podle (3.7.2) platí na U rovnost $u = H(u|_{\partial U})$. Jelikož $z \in \partial_r U$, vyplývá odtud existence $r > 0$ takového, že $B_r(z) \subset V$ a $u > u(z) - \varepsilon$ na $B_r(z)$. Proto $\widehat{u}(z) = \liminf_{x\to z} u(x) \geq u(z) - \varepsilon$. Dokázali jsme, že $u = \widehat{u}$ na $(V \setminus \overline{U}) \cup \partial_r U$. Podle (2.2.8) platí $\widehat{u} \in \mathcal{S}(V)$. Získali jsme tak funkci $\widehat{u} \in \mathcal{S}(V)$ takovou, že $\widehat{u}|_U \in \mathcal{H}(U)$, $\widehat{u} = v$ na $(V \setminus \overline{U}) \cup \partial_r U$ a $\widehat{u}|_{V\setminus\overline{W}} \in \mathcal{H}(V \setminus \overline{W})$. Z (2.6.6) a (2.6.2) snadno plyne, že existují Radonova míra μ s kompaktním nosičem obsaženým v množině V a funkce $h \in \mathcal{H}(V)$ tak, že $\widehat{u} = N\mu + h$ na V. Zřejmě $\operatorname{spt}(\mu) \subset V \setminus U$, neboť $(N\mu)|_U \in \mathcal{H}(U)$. Podle (2.8.3) existují Radonovy míry μ_n, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $\operatorname{spt}(\mu_n) \subset \operatorname{spt}(\mu)$, potenciály $N\mu_n$ jsou spojité a $N\mu = \sum_{n=1}^{\infty} N\mu_n$.Protože $(N\mu)|_U \in \mathcal{H}(U)$, je $(N\mu_r)|_U \in \mathcal{H}(U)$ pro každé $r \in \mathbb{N}$. Superharmonická funkce $N\mu_r$ je totiž na U zároveň subharmonická, neboť $N\mu_r = N\mu - \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{r\}} N\mu_n$. Položíme-li $u_n = \sum_{k=1}^{n} (N\mu_n)|_V + h$, $n \in \mathbb{N}$, dostáváme funkce s požadovanými vlastnostmi. □

3.7.4. Věta. *Nechť $z \in \partial_r U$, $0 < a < 1$, $b > 1$ a $K \subset \partial U \setminus \{z\}$ je kompaktní množina. Potom existuje nezáporná funkce $g \in \mathcal{C}(\overline{U})$ taková, že $g|_U \in \mathcal{H}(U)$, $g(z) = 1$, $g \leq b$ na $\overline{U}$ a $g \leq a$ na K.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $z = 0$. Zvolme čísla $0 < r < \varrho < R$ tak, aby $\overline{U} \subset B_\varrho(0)$ a $K \cap B_r(0) = \emptyset$. Připomeňme definici funkce p uvedenou za (1.9.1): $p(0) = \infty$ a pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} \log \dfrac{1}{t} & \text{v případě } m = 2\,, \\ \dfrac{1}{\omega(m-2)} \dfrac{1}{t^{m-2}} & \text{v případě } m > 2\,. \end{cases}$$

Pro $x \in B_R(0)$ položme

$$v(x) = \min\left(a(p(|x|) - p(R))/(p(r) - p(R)),\ b\right).$$

Potom je v kladná spojitá superharmonická funkce, která je harmonická na $B_R(0) \setminus B_r(0)$, $v \leq a$ na $B_R(0) \setminus B_r(0)$ a $v(0) = b$. Podle (3.7.3) existuje neklesající posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých superharmonických funkcí na $B_R(0)$ taková, že $u_n \leq v$, $(u_n)|_U \in \mathcal{H}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, a pro každé $y \in (B_R(0) \setminus \overline{U}) \cup \partial_r U$ platí $\lim_{n\to\infty} u_n(y) = v(y)$. Z Diniho věty vyplývá, že speciálně konvergují funkce u_n k funkci v stejnoměrně na množině $S_\varrho(0) \cup \{0\}$. Existuje tudíž $n \in \mathbb{N}$ tak, že $u_n \geq 0$ na $S_\varrho(0)$ a $u_n(0) \geq 1$. Podle (2.2.4) je $u_n \geq 0$ na $B_\varrho(0)$. Definujme $g = (1/u_n(0))(u_n)|_{\overline{U}}$. Potom $g \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $g|_U \in \mathcal{H}(U)$, $g \leq b$ na $\overline{U}$, $g \leq a$ na $\overline{U} \setminus B_r(0)$, což je množina obsahující K, a $g(0) = 1$. □

Zavedeme ještě pojem modifikující definici Keldyšova operátoru (nepožaduje se linearita). Budeme říkat, že zobrazení $B : \mathcal{C}(\partial U) \mapsto \mathcal{H}(U)$ je *K-operátor na U*, jestliže

(i) B je neklesající (tj. $Bf \leq Bg$, kdykoli $f, g \in \mathcal{C}(\partial U)$, $f \leq g$) a

(ii) jestliže pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ existuje řešení h_f klasické Dirichletovy úlohy, potom $Bf = h_f$.

Je zřejmé, že pro každé $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ je Bf omezená harmonická funkce a každý Keldyšův operátor je K-operátor.

3.7.5. Věta. *Na U existuje právě jeden K-operátor.*

Důkaz. Nechť B je K-operátor na U. Dokážeme, že $Bf = Hf$, kdykoli $f \in \mathcal{C}(\partial U)$.

Nechť tedy $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, $z \in \partial_r U$, $\varepsilon > 0$ a $c > \sup |f - f(z)|(\partial U)$. Položme $a = \varepsilon/c$, $b = 1+\varepsilon/c$, dále zvolme $r > 0$ tak, aby $|f - f(z)| < \varepsilon$ na $B_r(z)$ a označme $M = \partial U \setminus B_r(z)$. Nechť g je funkce s vlastnostmi z (3.7.4). Definujme $h = c((1+\varepsilon/c) - g)$. Potom $h \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $h|_U \in \mathcal{H}(U)$, $h \geq 0$, $h(z) = \varepsilon$ a na M platí $h \geq c > f - f(z)$. Protože $f \leq f(z) + \varepsilon + h|_{\partial U}$, platí podle vlastnosti (i) K-operátoru nerovnost $Bf \leq B(f(z) + \varepsilon + h|_{\partial U})$ na U. Podle vlastnosti (ii) je ovšem $B(f(z) + \varepsilon + h|_{\partial U}) = f(z) + \varepsilon + h_{|U}$. Odtud

$$\limsup_{x \to z} Bf(x) \leq f(z) + \varepsilon + \lim_{x \to z} h(x) = f(z) + 2\varepsilon.$$

Podobně se odvodí nerovnost

$$f(z) - 2\varepsilon \leq \liminf_{x \to z} Bf(x).$$

Proto pro každé $z \in \partial_r U$ platí $\lim_{x \to z} Bf(x) = f(z)$. Podle (3.6.13) je $Bf = Hf$. $\square$

Následující věta ukazuje, že řešení zobecněné Dirichletovy úlohy lze získat pomocí modifikovaných systémů horních funkcí. (Samozřejmě také modifikovaných systémů dolních funkcí.) Připomeňme ještě, že $\mathcal{R}(U) = \{h - k;\ h, k \in \mathcal{H}^+(U)\}$ je podle (2.4.6) dedekindovsky úplný vektorový svaz. Pro zdola omezenou neprázdnou množinu $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}(U)$ značíme $\bigwedge \mathcal{F}$ infimum $\mathcal{F}$ v tomto svazu. Je zřejmé, že každá omezená harmonická funkce na U je prvkem $\mathcal{R}(U)$.

Pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ definujme

$$\begin{aligned} Pf &= \inf\{s|_U;\ s \in \mathcal{C}(\overline{U}),\ s|_U \in \mathcal{S}(U),\ s|_{\partial U} \geq f\}, \\ Lf &= \bigwedge\{h|_U;\ h \in \mathcal{C}(\overline{U}),\ h|_U \in \mathcal{H}(U),\ h|_{\partial U} \geq f\}. \end{aligned}$$

3.7.6. Věta. *Pro každé $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ platí $Pf = Lf$.*

Důkaz. Zřejmě jsou zobrazení P a L neklesající. Nechť $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Zřejmě $Lf \in \mathcal{H}(U)$, z (2.4.3) plyne, že $Pf \in \mathcal{H}(U)$. Pomocí (2.2.4) se nyní snadno nahlédne, že P a L jsou K-operátory. Tvrzení plyne z (3.7.5). $\square$

3.7.7. Poznámka. Pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ definujme

$$Gf = \inf\left\{h;\ h \in \mathcal{H}(U),\ \liminf_{x \to z} h(x) \geq f(z) \text{ pro všechna } z \in \partial U\right\}.$$

Potom je G zřejmě neklesající zobrazení na $\mathcal{C}(\partial U)$, ovšem není zřejmé, že $Gf \in \mathcal{H}(U)$. Tudíž (3.7.5) nelze přímo aplikovat. V (3.8.9) dokážeme (dokonce pro všechny resolutivní funkce), že platí $Gf = Hf$.

S ohledem na definici operátoru L poznamenejme, že obecně neplatí pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ rovnost

$$Hf = \inf\{h|_U;\ h \in \mathcal{C}(\overline{U}),\ h|_U \in \mathcal{H}(U),\ h|_{\partial U} \geq f\}.$$

Volme $U = B_1(0) \setminus \{0\}$, $f = 0$ na $S_1(0)$ a $f(0) = 1$. Nechť $h \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $h|_U \in \mathcal{H}(U)$ a $h|_{\partial U} \geq f$. Podle (2.6.8) je $h|_{B_1(0)} \in \mathcal{H}(B_1(0))$ a z (1.7.2) snadno plyne, že pro každé $x \in U$ je

$$\inf\{h(x);\ h \in \mathcal{C}(\overline{U}),\ h|_U \in \mathcal{H}(U),\ h|_{\partial U} \geq f\} > 0.$$

Ovšem $Hf = 0$ na U.

3.7.8. Věta. *Nechť X je kompaktní Hausdorffův topologický prostor, $z \in X$ a nechť $\{z\}$ je množina typu G_δ. Nechť $\mathcal{F}$ je uzavřený podprostor prostoru spojitých funkcí na X obsahující konstanty a mající tuto vlastnost: existuje $a \in (0,1)$, takové, že pro každé $b > 1$ a pro každou kompaktní množinu $K \subset X \setminus \{z\}$ existuje $f \in \mathcal{F}$, $0 \le f \le b$, $f(z) = 1$ a $f|_K \le a$. Potom existuje funkce $g \in \mathcal{F}$ taková, že $g(z) = 0$ a $g > 0$ na $X \setminus \{z\}$.*

Důkaz. Nechť $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost otevřených množin v X taková, že $G_0 = X$ a $\bigcap_{k=0}^{\infty} G_k = \{z\}$. Zvolme libovolně posloupnost kladných reálných čísel $a_1, a_2, \dots,$ splňující podmínku $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, a označme $s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Položme $W_{-1} = X$ a zvolme $c > 1$.

Indukcí budeme definovat množiny $W_0, W_1, \dots,$ čísla $b_1, b_2, \dots$ a funkce $f_1, f_2, \dots$ tak, aby pro každé $j \in \mathbb{N}$ platilo

(1) W_{j-1} je otevřená množina, $W_{j-2} \supset W_{j-1}$, $z \in W_{j-1} \subset G_{j-1}$;

(2) $f_j \in \mathcal{F}$, $0 \le f_j \le b_j \le c$ a $f_j(z) = 1$;

(3) pro každé $x \notin W_{j-1}$ je $f_j(x) \le a$;

(4) pro každé $x \in W_{j-1}$ je $\sum_{k=1}^{j} a_k f_k(x) < 1 - s_j a$.

Definujme $W_0 = X$. Zvolme $b_1 \in (1, c]$ tak, aby $a_1 b_1 + s_1 a < 1$. Podle předpokladu existuje funkce $f_1 \in \mathcal{F}$ taková, že $0 \le f_1 \le b_1$ a $f_1(z) = 1$. Potom pro $j = 1$ platí (1), (2), (3) a (4).

Předpokládejme, že $n > 1$ a že jsou již definovány množiny W_{j-1}, čísla b_j a funkce f_j splňující pro $j = 1, \dots, n$ podmínky (1) – (4). Zvolme $b_{n+1} \in (1, c\,]$ tak, aby platilo $\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} b_{n+1} + s_{n+1} a < 1$. Definujme

$$W_n = G_n \cap W_{n-1} \cap \Big\{x \in X; \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) + a_{n+1} b_{n+1} < 1 - s_{n+1} a\Big\}.$$

Potom zřejmě pro $j = n + 1$ platí podmínka (1). Podle předpokladu existuje funkce $f_{n+1} \in \mathcal{F}$ taková, že $0 \le f_{n+1} \le b_{n+1}$, $f_{n+1}(z) = 1$ a $f_{n+1}|_{X \setminus W_n} \le a$. Potom pro $j = n + 1$ zřejmě platí i (2), (3) a (4).

Definujme $h = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. Protože $0 \le f_n \le c$, $n \in \mathbb{N}$, řada konverguje stejnoměrně na X. Jelikož $\mathcal{F}$ je uzavřený podprostor, je $h \in \mathcal{F}$. Zřejmě $h \ge 0$ a $h(z) = 1$. Protože $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{z\}$, podle (1) platí $\{z\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} W_k$. Uvažujeme $x \in X \setminus \{z\}$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in W_{n-1} \setminus W_n$. Podle (3) a (4) dostáváme

$$h(x) \le \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k f_k(x) < 1 - s_n a + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k a = 1.$$

Funkce $g = 1 - h$ má zřejmě požadované vlastnosti. □

3.7.9. Věta. *Nechť $z \in \partial_r U$. Potom existuje funkce $h \in \mathcal{C}(\overline{U})$ taková, že $h|_U \in \mathcal{H}(U)$, $h(z) = 0$ a $h > 0$ na $\overline{U} \setminus \{z\}$.*

Důkaz. Užijeme (3.7.8) pro $X = \partial U$ a $\mathcal{F} = \{u|_{\partial U};\ u \in \mathcal{C}(\overline{U}),\ u|_U \in \mathcal{H}(U)\}$. Z (1.8.1) plyne, že $\mathcal{F}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}(\partial U)$. Tvrzení vyplývá z (3.7.4). (Nerovnost $h > 0$ na U je důsledkem (1.5.3).) □

3.8 Corneův přístup k Dirichletově úloze

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast, $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, h a k jsou reálné funkce a $k \geq 0$.

Budeme říkat, že *funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k*, jestliže je splněna tato podmínka:

Pro každou množinu $M \subset U$ a každý bod $z \in \overline{M} \cap \partial U$ platí

(∗) Je-li $\limsup_{x\to z,\, x\in M} k(x) < \infty$, potom $f(z) \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to z,\, x\in M} h(x) = f(z)$.

(∗∗) Je-li $\lim_{x\to z,\, x\in M} k(x) = \infty$, potom $\lim_{x\to z,\, x\in M} h(x)/(1 + k(x)) = 0$.

3.8.1. Věta. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, h a k jsou reálné funkce, $k \geq 0$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní*

(i) *Funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k.*

(ii) *Pro každý bod $z \in \partial U$ platí*

(ii∗) *Je-li* $\liminf_{x\to z} k(x) < \infty$, *potom* $f(z) \in \mathbb{R}$ *a*

$$\lim_{x\to z} \frac{h(x) - f(z)}{1 + k(x)} = 0.$$

(ii∗∗) *Je-li* $\lim_{x\to z} k(x) = \infty$, *potom* $\lim_{x\to z} h(x)/(1 + k(x)) = 0$.

(iii) *Pro každý bod $z \in \partial U$ a každé $\varepsilon > 0$ jsou splněny nerovnosti:*

$$\infty \neq \limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon k(x)) \leq f(z) \leq \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x)) \neq -\infty\,.$$

Důkaz. Nechť platí podmínka (i). Potom (ii∗∗) je podmínka (∗∗) pro případ $M = U$. Nechť $z \in \partial U$ a nechť $\liminf_{x\to z} k(x) < \infty$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že z leží v uzávěru množiny $k^{-1}((-\infty, n\rangle)$. Podle (∗) je $f(z) \in \mathbb{R}$.

Zvolme $\delta > 0$ a označme

$$M = \{x \in U;\ |(h(x) - f(z))/(1 + k(x))| > \delta\}.$$

Dokážeme sporem, že $z \notin \overline{M}$. Předpokládejme, že $z \in \overline{M}$ a nechť $c = \liminf_{x\to z,\, x\in M} k(x)$. Jestliže $c = \infty$, pak z (∗∗) dostáváme

$$\lim_{x\to z,\, x\in M}(h(x) - f(z))/(1 + k(x)) = 0\,;$$

to ovšem podle definice množiny M není možné. Jestliže $c < \infty$, pak z leží v uzávěru množiny $N = M \cap k^{-1}((-\infty, c + 1\rangle)$. Podle (∗) je však $\lim_{x\to z,\, x\in N} h(x) = f(z)$, tudíž $\lim_{x\to z,\, x\in N}(h(x) - f(z))/(1 + k(x)) = 0$, což je opět v rozporu s definicí množiny M. Vidíme, že platí podmínka (ii∗) a tím je (ii) dokázáno.

Nechť platí podmínka (ii), nechť $z \in \partial U$ a $\varepsilon > 0$. Označme $c = \liminf_{x\to z} k(x)$. Je-li $c = \infty$, pak podle (ii∗∗) dostáváme

$$\liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x)) = \liminf_{x\to z}\,(1 + k(x)) \cdot \left(\frac{h(x)}{1 + k(x)} + \frac{\varepsilon k(x)}{1 + k(x)}\right) = \infty \geq f(z).$$

Předpokládejme, že $c < \infty$. Z (ii∗) vyplývá, že $f(z) \in \mathbb{R}$ a pro každé $a > 0$ existuje okolí $V(a)$ bodu z takové, že

$$|h - f(z)|/(1 + k) \leq a \text{ na } U \cap V(a)\,.$$

Speciálně na $U \cap V(a)$ platí $h + ak \geq f(z) - a$. Pro $a > 0$ definujme

$$I(a) = \liminf_{x \to z} (h(x) + ak(x)) \,.$$

Zřejmě je funkce I neklesající na $(0, \infty)$ a $I(a) \geq f(z) - a$ pro každé $a > 0$. Z toho vyplývá, že

$$\liminf_{x \to z} (h(x) + \varepsilon k(x)) = I(\varepsilon) \geq \lim_{a \to 0+} I(a) \geq \lim_{a \to 0+} (f(z) - a) = f(z) \neq \infty \,.$$

Nerovnost pro limes superior se dokáže analogicky a tím je platnost podmínky (iii) ověřena.

Nechť konečně platí podmínka (iii), nechť $M \subset U$ a $z \in \overline{M} \cap \partial U$. Označme dále $b = \liminf_{x \to z, x \in M} h(x)$ a $d = \limsup_{x \to z, x \in M} k(x)$. Jestliže $d < \infty$, pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \liminf_{x \to z} (h(x) + \varepsilon k(x)) \leq \liminf_{x \to z, \, x \in M} (h(x) + \varepsilon k(x)) \leq \\ &\leq \liminf_{x \to z, \, x \in M} h(x) + \varepsilon \limsup_{x \to z, \, x \in M} k(x) = b + \varepsilon d. \end{aligned}$$

Podle podmínky (iii) je $b + \varepsilon d \neq -\infty$, tedy $b \neq -\infty$. Dostáváme tak

$$f(z) \leq b = \liminf_{x \to z, \, x \in M} h(x) \neq -\infty \,.$$

Podobně se ukáže, že $f(z) \geq \limsup_{x \to z, x \in M} h(x) \neq \infty$. Odtud $\lim_{x \to z, x \in M} h(x) = f(z) \in \mathbb{R}$, což je podmínka $(*)$.

Zbývá dokázat podmínku $(**)$. Předpokládejme, že $\lim_{x \to z, x \in M} k(x) = \infty$ a $\varepsilon > 0$. Z podmínky (iii) plyne

$$\limsup_{x \to z, \, x \in M} (h(x) - \varepsilon k(x)) \neq \infty \quad \text{a} \quad \liminf_{x \to z, \, x \in M} (h(x) + \varepsilon k(x)) \neq -\infty.$$

Tudíž existuje kladné reálné číslo a a okolí V bodu z taková, že na množině $M \cap V$ jsou splněny nerovnosti

$$h - \varepsilon k \leq a, \quad h + \varepsilon k \geq -a.$$

Odtud dostáváme na $M \cap V$ nerovnost $|h|/(1 + k) \leq (a + \varepsilon k)/(1 + k)$. Protože platí $\lim_{x \to z, x \in M} k(x) = \infty$, je pro každé $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{x \to z, \, x \in M} |h(x)|/(1 + k(x)) \leq \varepsilon.$$

Odtud vyplývá, že je splněna podmínka $(**)$ a tím je platnost podmínky (i) ověřena. $\square$

3.8.2. Lemma. *Nechť $f_j : \partial U \to \mathbb{R}^*$, h_j a k_j jsou reálné funkce na U, $k_j \geq 0$, $j = 1, 2$. Nechť h_j konverguje k f_j s kontrolou k_j, $j = 1, 2$. Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ je funkce, pro niž $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, pokud je pro $z \in \partial U$ součet $f_1(z) + f_2(z)$ definován. Potom $h_1 + h_2$ konverguje k f s kontrolou $k_1 + k_2$. Dále pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funkce $a \cdot h_1$ konverguje k funkci $a \cdot f_1$ s kontrolou $|a| \cdot k_1$.*

Důkaz. Nechť $z \in \partial U$, $\varepsilon > 0$ a nechť součet $f_1(z) + f_2(z)$ je definován. Podle (3.8.1(iii)) je pro $j = 1, 2$

$$\infty \neq \limsup_{x \to z} (h_j(x) - \varepsilon k_j(x)) \leq f_j(z) \leq \liminf_{x \to z} (h_j(x) + \varepsilon k_j(x)) \neq -\infty.$$

Označme $h = h_1 + h_2$, $k = k_1 + k_2$. Potom

$$\begin{aligned} &\limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon k(x)) \le \limsup_{x\to z}(h_1(x) - \varepsilon k_1(x)) + \limsup_{x\to z}(h_2(x) - \varepsilon k_2(x)) \le \\ \le\ & f_1(z) + f_2(z) \le \\ \le\ & \liminf_{x\to z}(h_1(x) + \varepsilon k_1(x)) + \liminf_{x\to z}(h_2(x) + \varepsilon k_2(x)) \le \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x)) \end{aligned}$$

a zřejmě číslo na levé straně řetězce nerovností je různo od ∞ a číslo na pravé straně je různo od $-\infty$.

Nechť $f_1(z) = -\infty$ a $f_2(z) = \infty$. Potom

$$\begin{aligned} &\limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon k(x)) \le -\infty + \limsup_{x\to z}(h_2(x) - \varepsilon k_2(x)) = -\infty, \\ &\liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x)) \ge \liminf_{x\to z}(h_1(x) + \varepsilon k_1(x)) + \infty = \infty. \end{aligned}$$

Analogicky v případě $f_1(z) = \infty$ a $f_2(z) = -\infty$ platí

$$\limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon k(x)) = -\infty, \quad \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x)) = \infty\,.$$

Vidíme, že pro každé $z \in \partial U$ a každé $\varepsilon > 0$ je

$$\infty \ne \limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon k(x)) \le f(z) \le \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x)) \ne -\infty$$

a tedy podle (3.8.1(iii)) funkce $h_1 + h_2$ konverguje k funkci f s kontrolou $k_1 + k_2$.

Tvrzení o násobku plyne z (3.8.1(iii)) ihned pro $a > 0$ a také pro $a = -1$, tedy pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$. Budeme říkat, že *funkce f je resolutivní v Corneově smyslu* (krátce: *C-resolutivní*), jestliže existují funkce $h \in \mathcal{H}(U)$ a funkce $k \in \mathcal{H}^+(U)$ takové, že funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k.

Každou funkci $h \in \mathcal{H}(U)$, pro niž existuje $k \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k, nazveme *řešení Dirichletovy úlohy v Corneově smyslu* (krátce: *C-řešením*) příslušným funkci f.

3.8.3. Věta. *Nechť f je C-resolutivní funkce a nechť h je C-řešení příslušné funkci f. Potom f je resolutivní a $h = Hf$.*

Důkaz. Nechť $h \in \mathcal{H}(U)$, $k \in \mathcal{H}^+(U)$ a nechť funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k. Podle (3.8.1(iii)) je pro každé $\varepsilon > 0$ funkce $h - \varepsilon k$ dolní funkce k funkci f a $h + \varepsilon k$ horní funkce k funkci f. Proto platí $h - \varepsilon k \le \underline{H}f \le \overline{H}f \le h + \varepsilon k$. Odtud plyne, že funkce f je resolutivní a $Hf = h$. $\square$

3.8.4. Lemma. *Nechť f je spojitá funkce na ∂U. Potom f je C-resolutivní.*

Důkaz. Nechť $k \in \mathcal{H}^+(U)$ je funkce, pro niž $\lim_{x\to z} k(x) = \infty$ pro každé $z \in \partial_{irr} U$. (Taková funkce existuje podle (3.6.10).) Položme $h = Hf$. Pak funkce h je omezená a tudíž zřejmě $\lim_{x\to z} h(x)/(1 + k(x)) = 0$, kdykoli $z \in \partial U$ a $\lim_{x\to z} k(x) = \infty$. Je-li $z \in \partial U$ a $\liminf_{x\to z} k(x) < \infty$, potom $z \in \partial_r U$, tudíž platí $\lim_{x\to z} h(x) = f(z)$ a také $\lim_{x\to z}(h(x) - f(z))/(1 + k(x)) = 0$. Podle (3.8.1(ii)) je f C-resolutivní. $\square$

3.8.5. Lemma. *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost reálných C-resolutivních funkcí, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a nechť $\lim_{n\to\infty} Hf_n \in \mathcal{H}(U)$. Potom f je C-resolutivní.*

Důkaz. Zvolme $y \in U$ a označme $h_n = Hf_n$, $h = \lim_{n\to\infty} h_n$. Nechť $k_n \in \mathcal{H}^+(U)$ a nechť funkce h_n konverguje k f_n s kontrolou k_n. Zvolme čísla $a_n > 0$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n(y) < \infty$ a položme $k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n$. Podle (1.8.3) platí $k \in \mathcal{H}^+(U)$ a z (3.8.1(iii)) ihned vyplývá, že pro každé n konverguje funkce h_n k funkci f_n s kontrolou k.

Existuje posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(g_{n+1}(y) - g_n(y)) < \infty\,.$$

Definujme $g = \sum_{n=1}^{\infty} n(g_{n+1} - g_n)$, $g_0 = 0$ na U a všimněme si, že $g \in \mathcal{H}^+(U)$ podle (1.8.3) a

$$h = \lim_{n\to\infty} g_n = \sum_{n=0}^{\infty} (g_{n+1} - g_n)\,.$$

Dokážeme, že funkce h konverguje k funkci f s kontrolou $k+g$.

Nechť $z \in \partial U$ a $\varepsilon > 0$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$f_n(z) \le \liminf_{x\to z}(h_n(x) + \varepsilon k(x)) \ne -\infty$$

a zřejmě $h_n + \varepsilon k \le h + \varepsilon k \le h + \varepsilon(k+g)$, platí

$$f_n(z) \le \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon(k(x) + g(x)) \ne -\infty$$

a tudíž

$$f(z) \le \liminf_{x\to z}\,(h(x) + \varepsilon(k(x) + g(x))) \ne -\infty.$$

Nechť $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ splňuje nerovnost $1 \le \varepsilon r$. Potom

$$h - \varepsilon(k+g) = \sum_{n=0}^{r-1}(g_{n+1} - g_n) - \varepsilon k + \sum_{n=r}^{\infty}(g_{n+1} - g_n) - \varepsilon \sum_{n=1}^{r-1} n(g_{n+1} - g_n) - \sum_{n=r}^{\infty} \varepsilon n(g_{n+1} - g_n) \le$$

$$\le g_r - \varepsilon k + \sum_{n=r}^{\infty}(g_{n+1} - g_n) + 0 - \sum_{n=r}^{\infty}(g_{n+1} - g_n) = g_r - \varepsilon k$$

Proto platí

$$\limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon(k(x) + g(x)) \le \limsup_{x\to z}(g_r(x) - \varepsilon k\ (x))\,.$$

Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ platí $h_n = g_r$. Protože funkce h_n konverguje k f_n s kontrolou k, je

$$\infty \ne \liminf_{x\to z}(g_r(x) - \varepsilon k(x)) \le f_n(z) \le f(z)\,.$$

Odtud

$$\infty \ne \limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon(k(x) + g(x)) \le f(z).$$

Z (3.8.1(iii)) vyplývá, že h konverguje k f s kontrolou $k+g$, tudíž je funkce f C-resolutivní. □

3.8.6. Lemma. *Nechť Φ je systém všech množin omezených funkcí na ∂U takový, že pro každé $\mathcal{F} \in \Phi$ platí tyto podmínky:*

(1) $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{F}$;

(2) *je-li $f\colon \partial U \to \mathbb{R}$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, kde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$, pak je též $f \in \mathcal{F}$.*

Potom je $\bigcap \Phi$ množina všech omezených borelovských funkcí na ∂U.

Důkaz. Označíme-li $\mathcal{F} = \bigcap \Phi$, platí zřejmě (1) a (2). Dokážeme tuto implikaci:

(3) je-li $f : \partial U \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, pak $f \in \mathcal{F}$.

Je známo, že množina $\mathcal{B}$ omezených borelovských funkcí na ∂U splývá s nejmenší množinou $\mathcal{F}_0$ omezených funkcí na ∂U takovou, že $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{F}_0$ a platí (3), píšeme-li $\mathcal{F}_0$ místo $\mathcal{F}$. Protože $\mathcal{B} \in \Phi$, je $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Z (1) a (3) ovšem plyne $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ a tedy tvrzení lemmatu.

Pro důkaz (3) si nejprve rozmyslíme, že $\max(f, g) \in \mathcal{F}$, kdykoli $f, g \in \mathcal{F}$.

Pro $f \in \mathcal{F}$ definujme $\mathcal{F}(f) = \{h \in \mathcal{F};\ \max(f, h) \in \mathcal{F}\}$. Nechť nejprve $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Zřejmě platí $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{F}(f)$. Je-li $g : \partial U \to \mathbb{R}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}(f)$ a $g = \lim_{n\to\infty} g_n$, pak $\{\max(f, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $\max(f, g) = \lim_{n\to\infty} \max(f, g_n)$. Vidíme, že $\max(f, g) \in \mathcal{F}$. Dokázali jsme, že $\mathcal{F}(f) \in \Phi$, a proto $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}$.

Nechť nyní $f \in \mathcal{F}$. Z předchozího víme, že $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{F}(f)$. Nechť $g : \partial U \to \mathbb{R}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}(f)$ a $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Pak $\{\max(f, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $\max(f, g) = \lim_{n\to\infty} \max(f, g_n)$. Proto $\max(f, g) \in \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}$. Odtud snadno plyne, že maximum konečné množiny funkcí z $\mathcal{F}$ leží v $\mathcal{F}$.

Dokážeme, že platí (3). Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Pro $j, k \in \mathbb{N}$ definujme $g_{j,k} = \max\{f_j, \dots, f_{j+k}\}$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ je pak $\{g_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ omezená neklesající posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$. Položme $g_j = \lim_{k\to\infty} g_{j,k}$ Zřejmě je g_j omezená funkce a $g_j \in \mathcal{F}$ podle (2). Protože $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ je omezená nerostoucí posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{j\to\infty} g_j$, je $f \in \mathcal{F}$ opět podle (2). □

3.8.7. Lemma. *Nechť borelovská množina $N \subset \partial U$ má harmonickou míru nula a nechť pro funkci $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ platí $f = 0$ na $\partial U \setminus N$. Potom funkce f je C-resolutivní.*

Důkaz. Podle (3.6.11) existuje funkce $k_0 \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že $\lim_{x\to z} k_0(x) = \infty$, kdykoli $z \in N$. Potom funkce $h = 0$ na U konverguje k funkci f s kontrolou k_0. Pro každé $z \in \partial U$ a $\varepsilon > 0$ totiž zřejmě platí

$$\infty \neq \limsup_{x\to z}(-\varepsilon k_0(x)) \le f(z) \le \liminf_{x\to z}(\varepsilon k_0(x)) \neq -\infty.$$

□

3.8.8. Věta. *Každá resolutivní funkce je C-resolutivní.*

Důkaz. Podle (3.8.4), (3.8.5), (3.8.2) a (3.8.6) je každá omezená borelovská funkce C-resolutivní. Z (3.3.4) vyplývá, že omezená resolutivní funkce je součtem omezené borelovské funkce na ∂U a funkce, která je různá od nuly pouze na borelovské množině míry nula. Nyní z (3.8.7) a (3.8.2) vidíme, že každá omezená resolutivní funkce je C-resolutivní. Je-li

$f \geq 0$ resolutivní funkce, jsou podle (3.3.4) také funkce $f_n = \min(f, n)$, $n \in \mathbb{N}$, resolutivní. Z (3.8.5) plyne, že f je C-resolutivní. Je-li konečně f resolutivní funkce, pak podle (3.3.4) jsou f^+ a f^- resolutivní funkce, tudíž C-resolutivní, a proto podle (3.8.2) je funkce f také C-resolutivní. □

Následující věta ukazuje, že v definici PWB-řešení Dirichletovy úlohy lze za horní a dolní funkce uvažovat pouze harmonické funkce.

3.8.9. Věta. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ je resolutivní funkce. Potom*

$$Hf = \sup(\mathcal{L}(f) \cap \mathcal{H}(U)) = \inf(\mathcal{U}(f) \cap \mathcal{H}(U)).$$

Důkaz. Okamžitě vyplývá z (3.8.8) a (3.8.1(iii)). □

3.8.10. Věta. *Nechť f je resolutivní funkce a $k_n \in \mathcal{U}(f) \cap \mathcal{H}(U)$, $q_n \in \mathcal{L}(f) \cap \mathcal{H}(U)$ jsou takové funkce, že $k = \sum_{n=1}^{\infty}(k_n - Hf)$ a $q = \sum_{n=1}^{\infty}(Hf - q_n)$ jsou funkce konečné alespoň v jednom bodě z U. Potom funkce Hf konverguje k f s kontrolou $k + q$.*

Důkaz. Podle (1.8.3) je funkce $k + q$ harmonická a zřejmě $k + q \geq 0$. Položme $h = Hf$. Nechť $z \in \partial U$, $\varepsilon > 0$ a nechť $r \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, že $\varepsilon r \geq 1$. Potom

$$h + \varepsilon(k + q) \geq h + \varepsilon k \geq h + (1/r)\sum_{n=1}^{r}(k_n - h) = (1/r)\sum_{n=1}^{r} k_n.$$

Odtud dostáváme

$$\liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon(k(x) + q(x))) \geq (1/r) \cdot \liminf_{x\to z} \sum_{n=1}^{r} k_n(x) \geq (1/r)\sum_{n=1}^{r} \liminf_{x\to z} k_n(x)\,.$$

Protože $k_n \in \mathcal{U}(f)$, není poslední součet roven $-\infty$, a

$$\liminf_{x\to z} k_n(x) \geq f(z)\,, \quad n \in \{1, \ldots, r\}\,.$$

Vidíme, že

$$f(z) \leq \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon(k(x) + q(x)) \neq -\infty.$$

Důkaz pro limes superior je obdobný a tvrzení plyne z (3.8.1(iii)). □

3.8.11. Věta. *Nechť f je resolutivní funkce. Potom pro všechna $z \in \partial U$ s výjimkou množiny harmonické míry nula platí nerovnosti*

$$\liminf_{x\to z} Hf(x) \leq f(z) \leq \limsup_{x\to z} Hf(x).$$

Důkaz. Podle (3.8.8) existuje funkce $k \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že $Hf + \varepsilon k \in \mathcal{U}(f)$, kdykoli $\varepsilon > 0$. Definujme $N = \{z \in \partial U;\ \liminf_{x\to z} k(x) = \infty\}$. Potom N je zřejmě borelovská množina a pro každé $\delta > 0$ je $\delta \cdot k \in \mathcal{U}(1_N)$. Tudíž N má harmonickou míru 0.

Nechť $z \in \partial U \setminus N$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$f(z) \leq \liminf_{x\to z}(Hf(x) + \varepsilon \cdot k(x)) \leq \limsup_{x\to z} Hf(x) + \varepsilon \cdot \liminf_{x\to z} k(x).$$

Protože $\liminf_{x\to z} k(x) < \infty$, dostáváme nerovnost

$$f(z) \leq \limsup_{x\to z} Hf(x).$$

Důkaz se nyní dokončí přechodem k funkci $-f$. □

3.8.12. Korolár. *Nechť $x \in U$. Potom je zobrazení $f \mapsto Hf$, $f \in L^1(\mu_x)$, prosté.*

Důkaz. Plyne okamžitě z (3.8.11). □