Několik odstavců z lineární algebry

A. Pultr

Hm. Hodnost matice.

Hm.1. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

označme

$$\mathbf{r}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \ (\in V_n)$$

(*řádkové vektory* matice A) a

$$\mathbf{s}_i = (a_{1i}, \dots, a_{ki}) \ (\in V_k)$$

(*sloupcové vektory* matice A); podmodul

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) \subseteq V_n \quad \text{resp.} \quad \mathcal{L}(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \subseteq V_k$$

se nazývá *řádkový* resp. *sloupcový* modul matice A.

Hm.2. Řádkové a sloupcové úpravy matice. Budeme užívat následující úpravy matice A:

(r1) vyměníme dva řádky mezi sebou;
(r2) vynásobíme některý z řádků nenulovým číslem;
(r3) přičteme k některému řádku lineární kombinaci ostatních.

O těchto úpravách mluvíme jako o *řádkových úpravách* matice A.

(s1) vyměníme dva sloupce mezi sebou;
(r2) vynásobíme některý ze sloupců nenulovým číslem;
(r3) přičteme k některému sloupci lineární kombinaci ostatních.

O těchto úpravách mluvíme jako o *sloupcových úpravách* matice A.

Hm.3. Tři užitečné isomorfismy. Definujeme zobrazení

$$\varphi_{ij} : V_n \to V_n,$$
$$\chi_a : V_n \to V_n,$$
$$\psi_{a_2,\dots,a_n} : V_n \to V_n,$$

kde $i < j \leq n$, a je nenulové číslo a $a_2, \dots, a_n$ jsou libovolná čísla, předpisy

$$\varphi_{ij}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots x_n),$$
$$\chi_a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$\psi_{a_2,\dots,a_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j x_j, x_2, \dots, x_n).$$

Hm.3.1. Pozorování. *Zobrazení φ_{ij}, χ_a a $\psi_{a_2,\dots,a_n}$ jsou isomorfismy V_n na sebe.*

(Skutečně: Z předpisů se snadno ověří, že se jedná o lineární zobrazení; nadto, $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ij}$, $\chi_a \circ \chi_{\frac{1}{a}}$ a $\psi_{a_2,\dots,a_n} \circ \psi_{-a_2,\dots,-a_n}$ jsou identická zobrazení a naše zobrazení tedy mají inversní.)

Hm.4. Věta. *1. Řádkové (resp. sloupcové) úpravy nemění řádkový (resp. sloupcový) modul.*

2. Řádkové (resp. sloupcové) úpravy nemění dimensi sloupcového (resp. řádkového) modulu.

Důkaz. První tvrzení je triviální.

2: Připomeňme si fakt známy z předchozích přednášek:

> *Je-li $f : V \to W$ isomorfismus a je-li $V' \subseteq V$ konečně generovaný podprostor, platí* $\dim f[V'] = \dim V'$

Užijeme Hm.3.1. Při úpravě (r1) se sloupcový modul transformuje isomorfismem φ, při úpravě (r2) isomorfismem χ a konečně při úpravě (r3) se sloupcový modul transformuje isomorfismem ψ. □

Hm.5. Věta. *Dimense řádkového a sloupcového modulu jsou stejné.*

Důkaz provedeme tak, že postupnými řádkovými a sloupcovými úpravami (které podle Hm.4 nemění tyto dimense) získáme matici, u níž bude rovnost dimensí zřejmá.

Pokud všechna a_{ij} jsou nulová, jsou obě dimense 0. Nechť je některé z $a_{ij} \neq 0$. Pomocí (r1) a (s1) ho přemístíme do levého horního rohu. Vynásobením prvního řádku číslem $\frac{1}{a_{ij}}$ dostáváme matici tvaru

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \cdots & a'_{kn} \end{pmatrix}.$$

Nyní odečtěme postupně od druhého, třetího atd. řádku a'_{21}-, a'_{31}-násobek, atd., prvního řádku (úpravy typu (r3)) čímž získáme nuly v prvním sloupci, a obdobně úpravami typu (s3) získáme nuly v prvním řádku. Matice nyní vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}.$$

Je-li nyní již $b_{ij} = 0$ pro všechna $i, j \geq 2$ s úpravami přestaneme. Jinak vezmeme některé $b_{ij} \neq 0$ a podobně jako v předchozím ho přemístíme na místo (2,2), vydělíme na 1 a odečítáním od třetího (čtvrtého, atd.) řádku (sloupce) dosáhneme tvaru matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_{k3} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix}.$$

V proceduře pokračujeme dokud nacházíme ve zbylé části matice nenulové vstupy. Procedura se zastaví u tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

pro který je již tvrzení zřejmé □

Hm.5. Definice: Hodnost matice. Společnou hodnotu dimense řádkového a sloupcového modulu matice A nazveme *hodnost* matice A a někdy budeme označovat

$$\operatorname{hodn}(A).$$

Sk. Skalární součin

Sk.1. Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ realných čísel nebo nad tělesem $\mathbb{C}$ komplexních čísel. *Skalarním součinem* na V rozumíme zobrazení

$$\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C})$$

takové, že

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, a $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ jen když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$,
(b$\mathbb{R}$) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ resp. (b$\mathbb{C}$) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$,
(c) $\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
(d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

Poznámky. 1. Jako obvykle používáme označení $\overline{a}$ pro komplexní číslo sdružené s a.

2. Požadavky (b$\mathbb{R}$) resp. (b$\mathbb{C}$) jsou specifické pro případ telesa reálných resp. komplexních čísel. V bodech (a), (c) a (d) se požadavky neliší. Požadavek (b$\mathbb{R}$) je ovšem v reálném případě vlastně v (b$\mathbb{C}$) obsažen, píšeme ho však zvlášť: chceme zdůraznit komutativitu.

3. Nerovnost $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ v sobě obsahuje též předpoklad, ze i v případě komplexních čísel je skalární součin dvou stejných vektorů vždy číslo reálné.

4. Později se možná setkáte se skalárními součiny nad jinými tělesy. Potom musí být (a) modifikováno. Např. v případě tělesa $\mathbb{Z}_2$ zbytkových tříd modulo 2 stačí požadovat aby pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1$.

Konvence. Není-li nebezpečí nedorozumění, píseme prostě $\mathbf{uv}$ místo $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Sk.1.1. Tvrzení. *V komplexním případě je*

$$\mathbf{u}(\alpha\mathbf{v}) = \overline{\alpha}(\mathbf{uv}),$$

a v každem případě je

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{uw} + \mathbf{vw}.$$

Důkaz. Máme $\mathbf{u}(\alpha\mathbf{v}) = \overline{(\alpha\mathbf{v})\mathbf{u}} = \overline{\alpha(\mathbf{vu})} = \overline{\alpha}(\mathbf{uv})$.

Dále, $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}(\mathbf{u} + \mathbf{v})} = \overline{\mathbf{wu} + \mathbf{wv}} = \overline{\mathbf{wu}} + \overline{\mathbf{wv}} = \mathbf{uw} + \mathbf{vw}$. □

Sk.1.2. Příklad. Na vektorovém prostoru V_n n-tic reálných čísel se obvykle zavadí skalární součin predpisem

$$(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

V komplexním případě se tato formule modifikuje na

$$(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots y_n) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}.$$

Sk.2. Norma. V prostoru se skalárním součinem zavádíme *normu* vektoru $\mathbf{u}$ jako

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{uu}}$$

(což je vzhledem k pravidlu (a) nahoře korektní). Zřejmě platí

$$\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\|$$

(v komplexním případě $\sqrt{\alpha\mathbf{u}\alpha\mathbf{u}} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\mathbf{uu}} = |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\|$).

Sk.3. Rekonstrukce skalárního součinu z normy.

V reálném případě je možno rekonstruovat skalární součin z normy. Skutečně, podle (d) a (b$\mathbb{R}$) máme

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{uu} + 2\mathbf{uv} + \mathbf{vv} \tag{sk.3.1}$$

a tedy

$$\mathbf{uv} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2). \tag{sk.3.2}$$

Sk.3.1. Poznámka. Rovnici (sk.3.2) můžeme přepsat na

$$(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\frac{\mathbf{uv}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}\cdot\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|. \tag{sk.3.3}$$

Za okamžik uvidíme, že výraz $\frac{\mathbf{uv}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}$, jehož hodnota se zřejmě nezmění vynásobíme-li $\mathbf{u}$ nebo $\mathbf{v}$ kladným číslem, je v absolutní hodnotě mensí nebo roven nule a je ho tedy možno interpretovat jako kosinus jakéhosi úhlu přiřazeného dvojici $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (nebo: dvojici směrů určených těmito vektory).

Sk.4. Cauchy - Schwarzova nerovnost.

Věta. *Pro libovolné dva vektory v prostoru se skalárním součinem platí*

$$|\mathbf{uv}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

Důkaz. Máme $0 \leq (\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v})(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\overline{\lambda}\|\mathbf{u}\|^2 + \lambda\mathbf{uv} + \overline{\lambda}\mathbf{vu} + \|\mathbf{v}\|^2$. Nerovnost z tvrzení zřejmě platí když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Můžeme tedy předpokládat, že $\|\mathbf{u}\| \neq 0$ a položit $\lambda = -\frac{\mathbf{vu}}{\|\mathbf{u}\|^2}$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} 0 \leq & \frac{\mathbf{vu}}{\|\mathbf{u}\|^2}\frac{\overline{\mathbf{vu}}}{\|\mathbf{u}\|^2}\|\mathbf{u}\|^2 - \frac{\mathbf{vu}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{uv} - \frac{\overline{\mathbf{vu}}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{vu} + \|\mathbf{v}\|^2 = \\ &= \frac{|\mathbf{uv}|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} - \frac{|\mathbf{uv}|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} - \frac{|\mathbf{uv}|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} + \|\mathbf{v}\|^2 = -\frac{|\mathbf{uv}|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} + \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

odkud nerovnost z tvrzení dostaneme vynasobením $\|\mathbf{u}\|^2$, převedením $|\mathbf{uv}|^2$ na levou stranu a odmocněním. □

Sk.4.1. Důsledek (trojúhelníková nerovnost). *Pro normu součtu v prostoru se skalárním součinem platí*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Důkaz. Máme $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + \mathbf{uv} + \overline{\mathbf{uv}} + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)^2$ (užíváme při tom zřejmého faktu, že pro libovolné komplexní a je $a+\overline{a}$ reálné a menší nebo rovno $2|a|$); odmocněme získanou nerovnost. □

Sk.4.2. Metrická struktura na prostoru se skalárním součinem. Připomeňme, že *metrika* (nebo *vzdálenost*) na množině X je zobrazení

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$$

takové, že

(M1) $\rho(x,y) \geq 0$, a $\rho(x,y) = 0$ právě když $x = y$,
(M2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, a
(M3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Na vektorovém prostoru se skalárním součinem můžeme zavést vzdálenost (a budeme to tak vzdy činit) předpisem

$$\rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

((M1) je zřejmé z požadavku (a) na skalární součin, (M2) je triviální důsledek tvrzení Sk.1.1 ($\|\mathbf{a}\| = \|(-1)\cdot\mathbf{a}\|$) a (M3) dostaneme z nerovnosti v Sk.4.1 dosazením $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$).

Všimněte si, že v aritmetickém prostoru V_n při skalárním součinu z příkladu 1.2 takto dostaneme obvyklou euklidovskou metriku. Podívejte se z tohoto hlediska znovu na poznámku Sk.3.1 !

Sk.5. Kolmost. Řekneme, že vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou na sebe *kolmé* (*orthogonální*) jestliže $\mathbf{uv} = 0$.

Uvědomte si, že tento pojem odpovída kolmosti na kterou jste zvyklí. Jistě víte, že Pythagorovu větu je možno obrátit, to jest, platí-li formule o druhých mocninách délek stran trojúhelníka, jsou nutně dvě kratší strany na sebe kolmé. V případě "euklidovskeho" skalárního součinu (viz poslední odstavec předchozího odstavce) je v "kosinové větě" z odstavce Sk.3 $\mathbf{uv} = 0$ právě kdyz vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou na sebe kolmé tak, jak tento pojem znáte z geometrie.

Kroneckerovo delta. Značení nám často zjednoduší zavedení následujícího symbolu ("Kroneckerova delta")

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j, \\ 0 \text{ pro } i \neq j. \end{cases}$$

Soustava vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ se nazývá *orthogonální* (resp. *orthonormální*), platí-li

$$\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j = 0 \text{ pro } i \neq j \quad (\text{resp. } \mathbf{u}_i\mathbf{u}_j = \delta_{ij}).$$

Sk.5.1. Tvrzení. *Orthogonální soustava jejíž všechny členy jsou nenulové (speciálně, každá orthonormální soustava) je lineárně nezavislá.*

Důkaz. Nechť $a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$. Vynasobíme-li obě strany rovnice vektorem $\mathbf{u}_j$ dostaneme $a_j\|\mathbf{u}_j\| = 0$. Jelikož $\mathbf{u}_j$ je nenulový, musí být $a_j = 0$. □

Sk.6. Gram - Schmidtova orthogonalizační procedura. Buď $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ nezávislá soustava. Popíšeme nyní proceduru, kterou je možno získat orthonormalní soustavu $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, která se v jistém smyslu (viz Větu 6.1 dole) od původní liší co nejméně.

V prvním kroku položíme prostě

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1.$$

Tím dosáhneme toho, že

$$\|\mathbf{v}_1\| = 1 \quad \text{a} \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}_1) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1).$$

Nechť již máme pro nějaké $k < n$ nalezeny $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ takové, že

$$\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad \text{a} \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \text{ pro všechna } r \le k.$$

Hledejme nyní v $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_{r+1})$ vektor $\mathbf{w}$ tak, aby byl kolmý ke všem $\mathbf{v}_i$, $i \le k$. Zkusíme $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} a_i\mathbf{v}_i + \mathbf{u}_{k+1}$. Vynásobením $\mathbf{v}_j$ dostaneme $0 = a_j + \mathbf{v}_j\mathbf{u}_{k+1}$, t.j. $a_j = -\mathbf{v}_j\mathbf{u}_{k+1}$ jako postačující podmínku k tomu, aby $\mathbf{w}\mathbf{v}_j = 0$ pro $j \le k$. Jelikož $\mathbf{w} \ne \mathbf{o}$ (uvědomte si přesně proč: jinak by bylo $\mathbf{u}_{k+1} \in \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$), můžeme nyní položit $\mathbf{v}_{k+1} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ a máme vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}$ takové, že

$$\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad \text{a} \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \text{ pro všechna } r \le k+1$$

a můžeme pokračovat až do n.

Uvědomme si ještě, že pokud se nahodou stalo, že pro nějaké $k \le n$ je $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ orthonormální soustava, tato procedura ponechá až do k $\mathbf{v}_j = \mathbf{u}_j$.

Shrneme vlastnosti takto získane soustavy.

Sk.6.1. Věta. *Buď $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ nezávislá soustava v prostoru se skalárním součinem. Potom existuje orthonormální soustava $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ taková, že*

(1) $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ *pro všechna $k \le n$ a*
(2) *byla-li již $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ orthonormální soustava, je pro $j \le k$ $\mathbf{v}_j = \mathbf{u}_j$.*

Sk.6.2. Důsledek. *Každá orthonormální soustava v konečně generovaném prostoru se skalárním součinem se dá rozšířit na orthonormální basi.*

Důkaz. Rozšiřme ji nejprve na nějakou basi, a na tu pak užijme Větu Sk.6.1. □

Sk.7. Orthogonální doplněk. Buď V prostor se skalárním součinem, M podmnožina V (později budeme vetšinou provádět následující konstrukci s podmoduly, zatím ale může být M libovolná podmnožina). *Orthogonálním doplňkem* množiny M rozumíme množinu

$$M^\perp = \{\mathbf{v} \mid \forall \mathbf{u} \in M,\ \mathbf{vu} = 0\}.$$

Nasledující tvrzení jsou zřejmá:

Sk.7.1. Věta. *1. Je-li $M \subseteq N$ je $M^\perp \supseteq N^\perp$.*
2. $M^\perp$ je vždy podmodul.

Sk.7.2. Věta. *Pro podmoduly W libovolného vektorového prostoru V se skalárním součinem plati*

$$W \cap W^\perp = \{\mathbf{o}\}.$$

Je-li V navíc konečně generovaný, platí dále

$$W \oplus W^\perp = V$$

a následkem toho je

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W.$$

Důkaz. První tvrzení je zřejmé: kromě $\mathbf{o}$ není žadný vektor kolmý sám k sobě.

Buď nyní V konečně generovaný. Vezměme orthonormální basi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ podprostoru W (existuje podle Sk.6) a rozšiřme ji podle Sk.6.2 na orthonormální basi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ celého V. Potom zřejmě $\mathcal{L}(\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n) \subseteq W^\perp$ z čehož $W \oplus W^\perp = V$. Poslední tvrzení pak dostaneme z věty o dimensi spojení a průniku. □

Sk.7.3. Věta. *Pro podmodul W libovolného vektorového prostoru V se skalárním součinem platí*

$$W \subseteq (W^\perp)^\perp$$

Je-li V konečně generovaný, je

$$W = (W^\perp)^\perp$$

a pro obecnou podmnožinu $M \subseteq V$

$$(M^\perp)^\perp = \mathcal{L}(M).$$

Důkaz. Jelikož pro každý $\mathbf{u} \in W$ a každý $\mathbf{v} \in W^\perp$ platí $\mathbf{uv} = 0$, je $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. Je-li V konečně generován, je navíc podle Sk.7.2 $\dim W = \dim(W^\perp)^\perp$ a tedy platí rovnost. Nechť M je obecná podmnožina a W podmodul takový, že $M \subseteq W$. Pak podle Sk.7.1.1 $(M^\perp)^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp$ a tedy $(M^\perp)^\perp \subseteq W$. □

Poznámka. Předpoklad konečného generování v předchozí větě je podstatný, jak uvidíme z nasledujícího příkladu.

Buď V prostor všech posloupností $(x_1, x_2, \dots)$ takových, že $\sum x_i$ absolutně konverguje. Snadno vidíme, že formule $(x_1, x_2, \dots)(y_1, y_2, \dots) = \sum x_i y_i$ dává skalární součin na V. Položme

$$W = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \exists n, \ (k \geq n \ \Rightarrow \ x_k = 0\}.$$

Potom $W^\perp = \{\mathbf{o}\}$ protože $(x_1, x_2, \dots)$ kolmý ke všem prvkům z W musí být kolmý ke všem $(0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$, takže $x_i = 0$ pro všechna i. Tedy máme $(W^\perp)^\perp = V$.

Sk.7.4. "DeMorganova pravidla".

Věta. *V konečně generovaném vektorovém prostoru platí pro libovolný systém podprostorů*

$$(\bigoplus W_i)^\perp = \bigcap W_i^\perp$$

a

$$(\bigcap W_i)^\perp = \bigoplus W_i^\perp.$$

Důkaz. Jelikož podle Sk.7.1 $(\bigoplus W_i)^\perp \subseteq W_j$ a $W_j^\perp \subseteq (\bigcap W_i)^\perp$ pro každé j, máme

(sk.7.4.1) $$(\bigoplus W_i)^\perp \subseteq \bigcap W_i^\perp$$

a

(sk.7.4.2) $$\bigoplus W_i^\perp \subseteq (\bigcap W_i)^\perp$$

(v každém případě). Nyní využijeme konečné generovanosti: Z Sk.7.3, Sk.7.1 a (sk.7.4.1) dostaneme $(\bigcap W_i)^\perp = (\bigcap (W_i^\perp)^\perp)^\perp \subseteq (((\bigoplus W_i^\perp)^\perp)^\perp = \bigoplus W_i^\perp$ a podobně dostaneme z Sk.7.3 a (sk.7.4.2) i zbývající inklusi. □

Sk.8. Skalární součin v orthonormální souřadné soustavě. Formule pro skalární součin z příkladu Sk.1.2 má obecnou platnost pro orthonormální souřadné soustavy. Platí

Věta. *Buď* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ *orthonormální base. Nechť* $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots x_n\mathbf{u}_n$ *a* $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots y_n\mathbf{u}_n$. *Potom v reálném případě*

$$\mathbf{xy} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

a v komplexním

$$\mathbf{xy} = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}.$$

Důkaz. $\mathbf{xy} = \sum_i x_i \mathbf{u}_i \sum_j y_j \mathbf{u}_j = \sum_{ij} (x_i \mathbf{u}_i)(y_j \mathbf{u}_j) = \sum_{ij} v_i \overline{y_j} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j = \sum_{ij} x_i \overline{y_j} \delta_{ij} = \sum_i x_i \overline{y_i}$ □

Sk.9. Orthogonální doplněk a řešení rovnic. Zkoumejme soustavu rovnic (v neznámých $x_1, \dots, x_n$)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{sk.9.1}$$

Označme ve V_n vektory

$$\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}).$$

Potom $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_x)$ řeší soustavu nahoře právě když je prvkem orthogonálního doplňku

$$\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}^\perp = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)^\perp.$$

$\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ je ovšem řádkový modul matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}. \tag{sk.9.2}$$

Z tvrzení Sk.7.2 nyní dostáváme okamžitě

Sk.9.1. Důsledek. *Buď h hodnost matice (sk.9.2). Potom system všech řešení $(x_1, \dots, x_n)$ soustavy (sk.9.1) je podprostor V_n dimense $n - h$.*

Lm. Lineární množiny.

Lm.1. *Lineární množinou* ve vektorovém prostoru rozumíme buď

(Lim0) množinu prázdnou

nebo kteroukoli množinu tvaru

$$L = \mathbf{u} + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}, \tag{Lim1}$$

kde $\mathbf{u} \in V$ je pevně zvolený prvek a $W \subseteq V$ je podmodul.

Poznámka. Díváme-li se na V_n jako na representaci euklidovského prostoru, lineární podmnožiny representují body, přímky, roviny a vícerozměrné lineární podprostory.

Lm.2. Ve vyjadření (neprázdné linearní mnžiny (Li1) je modul W jednoznačně určen; naopak vektor $\mathbf{u}$ je v L možno volit zcela libovolně. Platí

Věta. *Buď $L = \mathbf{u} + W$ neprázdná lineární množina. Potom*

(1) $W = L - L = \{\mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L\}$ *a*

(2) *Pro libovolné $\mathbf{v} \in L$, $L = \mathbf{v} + W$.*

Důkaz. (1): Je-li $\mathbf{v} \in W$, můžeme ho napsat jako $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - (\mathbf{u}+\mathbf{o})$. Jsou-li $\mathbf{x} = \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{y} = \mathbf{u}+\mathbf{w} \in L$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$, máme $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$.

(2): Zvolme $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ kde $\mathbf{w}$ je nějaký prvek W. Je-li $\mathbf{x} \in \mathbf{u} + L$, dejme tomu $\mathbf{x} = \mathbf{u}+\mathbf{y}$ pro nějaké $\mathbf{y} \in W$, máme $\mathbf{x} = (\mathbf{u}+\mathbf{w}) + (\mathbf{y}-\mathbf{w}) \in \mathbf{v} + W$; je-li $\mathbf{x} = \mathbf{v}+\mathbf{y} \in \mathbf{v}+W$, máme $\mathbf{x} = \mathbf{u} + (\mathbf{w}+\mathbf{y}) \in \mathbf{u} + W$. $\square$

Lm.3. Dimense lineární množiny. Pro lineární množinu $L = \mathbf{u} + W$ (když už nyní víme, že podprostor W je jednoznačně určen) zavádíme dimensi

$$\dim L = \dim W.$$

Pro prázdnou množinu pak definujeme

$$\dim \emptyset = -1.$$

Lm.4. Věta. *Průnik libovolného systému lineárních podmnožin vektorového prostoru V je lineární podmnožina V.*

Důkaz. Buďte $L_i = \mathbf{u}_i + W_i$, $i \in J$, lineární podmnožiny V. Je-li $\bigcap_J L_i = \emptyset$, je to lineární množina podle definice. Jinak můžeme zvolit $\mathbf{u} \in \bigcap L_i$ a podle Lm.2 máme

$$\forall i \in J, \quad L_i = \mathbf{u} + W_i.$$

Položme $W = \bigcap_J W_i$; dokážeme, že $\bigcap L_i = \mathbf{u} + W$. Zřejmě $\mathbf{u} + W \subseteq \bigcap(\mathbf{u} + W_i)$. Ale i druhá inkluse je zřejmá: je-li $\mathbf{x} \in \bigcap L_i$ je pro každé i, $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_i$ pro nějaké $\mathbf{v}_i \in W_i$. Potom ale všechny $\mathbf{v}_i = \mathbf{x} - \mathbf{u}$ jsou tentýž vektor $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}$ je v $\bigcap W_i$. $\square$

Lm.5. Věta. *Buď $f : V \to V'$ libovolné lineární zobrazení.*

1. Je-li L lineární podmnožina V, je $f[L]$ lineární podmnožina V'. Pro $L = \mathbf{u} + W$ je

$$f[L] = f(\mathbf{u}) + f[W].$$

2. Je-li L lineární podmnožina V', je $f^{-1}(L)$ lineární podmnožina ve V; speciálně, pro každý vektor $\mathbf{v} \in V'$, $f^{-1}(\{\mathbf{v}\})$ je lineární podmnožina V. Je-li $L = \mathbf{u} + W$ a existuje-li nějaký $\mathbf{v} \in f^{-1}(L)$, je

$$f^{-1}(L) = \mathbf{v} + f^{-1}(W).$$

Důkaz. 1 je zřejmé.

2: Buď $\mathbf{v} \in f^{-1}(L)$; tedy $f(\mathbf{v}) \in L$ a můžeme psát L jako $f(\mathbf{v}) + W$. Platí $f^{-1}(L) = \mathbf{v} + f^{-1}(W)$: je-li $f(\mathbf{x}) \in L$, t.j., $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{v}) + \mathbf{w}$ pro nějaké $\mathbf{w} \in W$, je $f(\mathbf{x}-\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{v}) \in W$ a tedy $\mathbf{x}-\mathbf{v} \in f^{-1}(W)$; je-li $\mathbf{x} = \mathbf{v}+\mathbf{w}$ kde $f(\mathbf{w}) \in W$, je $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) \in L$. □

Rr. Soustavy lineárních rovnic. Existence řešení a tvar množin řešení.

Rr.1. Mějme dánu soustavu k lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k, \end{aligned} \tag{LR}$$

to jest, úlohu nalézt všechny n-tice $(x_1, \dots, x_n)$ čísel takových, že všechny rovnosti v (LR) platí. Takové n-tici říkáme (samozřejmě) *řešení* soustavy (LR).

O matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

mluvíme jako o *matici soustavy* (LR), o matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

jako o *matici rozšířené.*

Rr.2. Nejprve si řekneme, kdy soustava vůbec nějaké řešení má. Platí

Věta (Frobeniova). *Soustava lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned} \tag{LR}$$

má řešení právě když hodnost její matice se rovná hodnosti matice rozšířené.

Důkaz. Použijme značení pro sloupce matice $\mathbf{s}_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ki})$ jako v Hm.1 a označme ještě $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$. Potom rovnice (2.1) platí právě když

$$x_1\mathbf{s}_1 + \cdots + x_n\mathbf{s}_n = \mathbf{b}$$

pro nějaká x_i, t.j. právě když $\mathbf{b} \in \mathcal{L}(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n)$, t.j. právě když $\mathcal{L}(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) = \mathcal{L}(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n, \mathbf{b})$, t.j. právě když hodnosti matice soustavy a matice rozšířené jsou stejné. □

Rr.3. Homogenní soustavy. Soustavu lineárních rovnic nazýváme *homogenní* jsou-li všechna čísla na pravých stranách rovnic nulová. O soustavě

$$\text{(LRH)} \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

hovoříme jako o *homogenní soustavě příslušné k soustavě* (LR).

Rr.4. Věta. *Nechť soustava lineárních rovnic má řešení* $\mathbf{x}_0$. *Potom množina všech řešení této soustavy je lineární množina*

$$\mathbf{x}_0 + W,$$

kde W je množina všech řešení příslušné homogenní soustavy. Tento podprostor $W \subseteq V_n$ je orthogonální doplněk řádkového modulu matice A dané soustavy a jeho dimense je proto rovna

$$n - \mathrm{hodn}(A).$$

Abychom tedy zjistili všechna řešení soustavy (LR) stačí najít

- *jedno řešení $\mathbf{x}_0$ této soustavy a*
- *$k = n - \mathrm{hodn}(A)$ nezávislých řešení $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ příslušné homogenní soustavy (LRH);*

řešení soustavy jsou pak právě všechny vektory (n-tice)

$$\mathbf{x}_0 + \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jsou libovolná čísla.

Důkaz. Zobrazení $f : V_n \to V_k$ dané předpisem

$$f((x_1, \ldots, x_n)) = (\sum a_{1j}x_j, \sum a_{2j}x_j), \ldots, \sum a_{kj}x_j)$$

je zřejmě lineární a množina řešení soustavy (LR) je $f^{-1}(\{(b_1, \ldots, b_k)\})$. Podle věty Lm.5 je to buď množina prázdná nebo $\mathbf{x}_0 + f^{-1}(\{\mathbf{o}\})$. V druhém případě dále vidíme, že $W = f^{-1}(\{\mathbf{o}\})$, množinu všech $\mathbf{x}$ takových, že $f(\mathbf{x}) = (0, 0, \ldots, 0)$, tvoří právě všechna řešení homogenní

soustavy (LRH). Konečně podle Sk.9 je to orthogonální doplněk k řádkovmu modulu matice A soustavy, a tedy má dimensi $n - \text{hodn}(A)$.
$\square$

Rr.5. Konkretní řešení. O metodách řešení se dozvíte na cvičení; zatím jen dvě jednoduchá pozorování.

- Řádkové úpravy rozšířené matice dávají soustavy rovnic se stejnou množinou řešení.
- Řádkovými úpravami můžeme dosáhnout matic typu

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

kde je již řešení snadné.

(Zde je jistá nepřesnost: "schody" mohou být delší než po jednom kroku – třeba jako v

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– to však na snadnosti řešení nic nemění.)

Rm. Regulární matice.

Rm.1. Věta. *Existuje-li k matici A matice inversní, je A matice čtvercová.*

Důkaz. Je-li B inversní k

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

máme $\sum_k a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij}$ pro všechna i, j. Tedy má soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

řešení pro $(b_1, \dots, b_k)$ rovné kterémukoli $\mathbf{e}_i$, vektoru který má na i-tém místě 1 a jinde nuly. Podle Frobeniovy věty tedy musí být všechny $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ ve sloupcovém modulu matice A; jelikož jsou nezávislé, musí být $k \leq n$. Má-li matice A inversní matici, má ji i transponovaná matice A^T. Použijeme-li právě dokázaný fakt pro tuto, vidíme, že též $n \leq k$. □

Rm.2. Řekneme, že matice je *regulární*, je-li čtvercová a má-li maximální možnou hodnost.

Rm.3. Věta. *Buď A čtvercová matice Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *A je regulární.*
(2) *A má inversní matici.*
(3) *Existuje matice B taková, že AB je jednotková.*
(4) *Existuje matice B taková, že BA je jednotková.*

Důkaz. (1)⇒(2): Je-li A regulární, má soustava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= \delta_{i1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= \delta_{i2} \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= \delta_{in} \end{aligned}$$

podle Frobeniovy věty řešení pro každé i; označíme-li v takovém řešení $x_j = b_{ij}$ dostaneme matici B takovou, že $AB = E$; ze stejné uvahy o transponované matici získáme existenci matice C takové, že $CA = E$. Podle známého faktu je pak $B = C$.

Implikace (2)⇒(3) a (2)⇒(4) jsou triviální.

(3)⇒(1) dostaneme obdobnou úvahou jako v důkazu věty Rm.1: má-li soustava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

řešení pro pravou stranu $\mathbf{b}$ rovnou kterémukoli (z nezávislých) $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, musí být dimense sloupcového modulu aspoň n.

Implikaci (4)$\Rightarrow$(1) dostaneme užitím předchozí na matici A^T. $\square$

Rm.3.1. Poznámka. Zejména tedy, pro čtvercovou matici je jednostranná inverse automaticky oboustranná.

Rm.4. Důležitý speciální případ: Orthonormální matice. Čtvercová matice se nazývá *orthonormální* tvoří-li její řádky orthonormální soustavu ve V_n (jinými slovy, matice se nazývá orthonormální tvoří-li její řádky orthonormální basi V_n).

Rm.4.1. Věta. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *A je orthonormální.*
(2) *Sloupce A tvoří orthonormální basi V_n.*
(3) *AA^T je jednotková.*
(4) *A^T je inversní k A.*

Důkaz. (1)$\Leftrightarrow$(3): (3) je jen jiná formulace definice Rm.4.
(3)$\Leftrightarrow$(4) podle Rm.3.1.
Konečně, podle (4) též $A^TA = E$ a tedy (2). $\square$

Mz. Matice a lineární zobrazení.

Mz.1. Připomeňme dvě známá fakta o basích.

Mz.1.1. *Je-li $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ base vektorového prostoru V, dá se každý $\mathbf{x} \in V$ napsat jako lineární kombinace*

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n,$$

a to právě jedním způsobem. Přiřazení

$$\mathbf{x} \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

je isomorfismus V na V_n.

Mz.1.2. *Buď $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ base vektorového prostoru V, buď W libovolný vektorový prostor. Pro každé zobrazení φ množiny $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ do W existuje právě jedno lineární zobrazení $f : V \to W$ takové, že $f(\mathbf{u}_i) = \varphi(\mathbf{u}_i)$ pro každé i.*

Mz.2. *Souřadnou soustavou* (nebo *soustavou souřadnic*) ve vektorovém prostoru V rozumíme

$$\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

kde $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ je nějaká base prostoru V. Tedy, souřadná soustava je base s pevně zvoleným pořadím.

Čísla $x_1, \ldots, x_n$ z vyjádření

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

nazýváme *souřadnicemi* vektoru $\mathbf{x}$ v $\mathcal{A}$ a píšeme

$$\mathbf{x}_{\mathcal{A}} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Mz.3. Matice lineárního zobrazení. Buď $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ souřadná soustava ve V a $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)$ souřadená soustava v W. Pro lineární zobrazení $f : V \to W$ máme podle Mz.1.1 jednoznačně daná čísla f_{ij} taková, že

$$f(\mathbf{a}_i) = \sum_j f_{ij}\mathbf{b}_j.$$

Matici

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}, f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix}.$$

Nazýváme *maticí lineárního zobrazení f vzhledem k souřadným soustavám $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.*

Mz.3.1. Věta. *1. Pro pevně zvolené souřadné soustavy $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$ ve V resp. W je přiřazení*

$$f \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{A}, f, \mathcal{B})$$

vzájemně jednoznačná korespondence mezi lineárními zobrazeními $f : V \to W$ a maticemi typu $n \times m$.

2. Je-li ještě $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p)$ souřadná soustava v prostoru Z a $g : W \to Z$ lineární zobrazení, platí

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}, gf, \mathcal{C}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}, f, \mathcal{B})\mathcal{M}(\mathcal{B}, g, \mathcal{C}).$$

3. Pro identické zobrazení $\mathrm{id} : V \to V$ *je* $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathrm{id}, \mathcal{A})$ *jednotková matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. 1 plyne okamžitě z Mz.1.1 a Mz.1.2.

2: Je-li $f(\mathbf{a}_i) = \sum_j f_{ij}\mathbf{b}_j$ a $g(\mathbf{b}_j) = \sum_k g_{jk}\mathbf{c}_k$, máme

$$g(f(\mathbf{a}_i)) = g(\sum_j f_{ij}\mathbf{b}_j) = \sum_j f_{ij}g(\mathbf{b}_j) =$$
$$= \sum_j f_{ij}(\sum_k g_{jk}\mathbf{c}_k) = \sum_k(\sum_j f_{ij}g_{jk})\mathbf{c}_k.$$

3 je triviální. $\square$

Poznámka. Ve světle této věty je tvrzení Rm.1 zřejmé: Má li matice A inversní, odpovídá isomorfismu, a tedy dimense příslušných prostorů se rovnají.

Mz.4. Důležité úmluvy. Na aritmetické vektory $(x_1, \dots, x_n)$ se budeme někdy dívat jako na matice s jedním řadkem.

U matic (a) typu 1×1 budeme někdy zapomínat na závorky a budeme je chápat prostě jako čísla a.

Ve smyslu těchto úmluv budeme moci vyjadřovat skalární součin ve V_n (reálný případ) jako násobení matic:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n)^T.$$

Mz.5. Věta. *Pro vyjádření vektorů v souřadnicích platí při lineárních zobrazeních formule*

$$f(\mathbf{x})_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}(\mathcal{A}, f, \mathcal{B}).$$

Důkaz. Máme

$$f(\mathbf{x}) = f(\sum_i x_i\mathbf{a}_i) = \sum_i x_i f(\mathbf{a}_i) =$$
$$= \sum_i x_i(\sum_j f_{ij}\mathbf{b}_j) = \sum_j(\sum_i x_i f_{ij})\mathbf{b}_j. \quad \square$$

Mz.6. Lineární zobrazení $f : V_n \to V_m$ jsou tedy vždy dána formulí

$$f((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n)A$$

s vhodnou maticí typu $n \times m$ (je to samozřejmě matice zobrazení f vzhledem k basím $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$).

Položme si otázku, kdy zobrazení V_n do téhož V_n zachovává vzdálenost ve smyslu Sk.4 (a Sk.1.2). Odpověď je tato

Mz.6.1. Věta. (Reálný případ) *Pro zobrazení $f : V_n \to V_n$ dané formulí $f((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n)A$ jsou ekvivalentní následující tvrzení:*

(1) *f zachovává vzdálenost.*

(2) *f zachovává normu.*
(3) *Matice A je orthonormální.*

Důkaz. (1)$\Leftrightarrow$(2) je pro lineární zobrazení zřejmé.
(3)$\Rightarrow$(2): V maticovém vyjádření skalárního součinu máme

$$\|f(\mathbf{x})\|^2 = (\mathbf{x}A)(\mathbf{x}A)^T = (\mathbf{x}A)(A^T\mathbf{x}^T) = \mathbf{x}(AA^T)\mathbf{x}^T = \mathbf{x}\mathbf{x}^T = \|\mathbf{x}\|^2.$$

(2)$\Rightarrow$(3): Podle formule (sk.3.2) lineární zobrazení zachovávající normu zachovává i skalární součin. Vektory $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, 0, 1)$ tvoří orthonormální soustavu a zobrazení f ji převádí na řádky matice A. Tedy tyto řádky tvoří orhonormální soustavu. $\square$

Mz.7. Transformace souřadnic. Chceme-li nahradit souřadnou soustavu $\mathcal{A}$ novou soustavou $\mathcal{B}$ dostaneme z věty Mz.5 jednoduchou formuli na převod starých souřadnic do nových:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathrm{id}, \mathcal{B}).$$

Připomeňme, že matice v této formuli je $A = (\alpha_{ij})_{ij}$ kde

$$\mathbf{a}_i = \sum_j \alpha_{ij}\mathbf{b}_j.$$

Obvykle máme při transformaci souřadnic zadánu spíše novou basi vyjadřenou v původní, t.j. máme dánu matici $B = (\beta_{ij})_{ij}$ kde

$$\mathbf{b}_i = \sum_j \beta_{ij}\mathbf{a}_j.$$

Ale s tím si na základě věty Mz.3.1 snadno poradíme: potřebná matice A je B^{-1}.

Mz.8. Poznámka. V záležitostech týkajících se skalárního součinu jsme se v této sekci omezili na reálný případ. V komplexním případě je potřeba místo s maticemi transponovanými pracovat s maticemi adjungovanými (kde na ij-té místo klademe $\overline{a_{ji}}$ a ve větě odpovídající Mz.6.1 musíme místo zachování normy či vzdálenosti požadovat přímo zachování skalárního součinu.