Průvodce matematickou analýzou

Průvodce matematickou analýzou

Pavel Pyrih

17. června 2011

Úvod

Tento Průvodce je sestaven pro širokou matematickou obec, která pečuje o rozvoj matematiky a poskytuje její krásu dalším a dalším generacím. V Průvodci jsou nachystány ty nejkrásnější poklady matematické analýzy. Průvodce je nedokonalý pokus o neuskutečnitelné. V celé matematice i v matematické analýze je totiž takové množství překrásných výsledků, nápadů a postupů, že je vždy nutno některé vynechat. Tak je třeba Průvodce přijmout. Tolerantní přístup při čtení a do nejmírnější posuzování je jistě na místě...

Na začátku putování

Studium matematiky je do značné míry otázkou osobní. Velmi často se ke studovanému oboru vytvoří silný vztah a k tomuto (kladnému) citovému vztahu může pomoci i tento Průvodce. V žádném případě si matematika nezaslouží, aby byla studována z „nutnosti“, bez příjemného pocitu. Nechť je tedy při studiu matematické analýzy hodně radosti a pěkných chvil.

> Matematické vzdělání uspěje jako kulturní dobrodružství pouze, když v ní lidé objeví něco pro zábavu, k hraní, k zamyšlení, něco, co se vztahuje k jejich způsobu vidění světa a chápání jejich života.
>
> (S. Markus $\sim$ 2003)

Nyní pár poznámek k tomu nejdůležitějšímu. Jde o otázky Proč?, Co? a Jak?

> Thaletova základní otázka nebylo „co víme“, ale „jak to víme“.
>
> (Aristotelés ze Stageiry $\sim$ -350)

Proč

V Průvodci najdeme přehled matematické analýzy. Jde zde o jakýsi doplněk k existujícím učebním textům. Není zde systematický výklad daného tématu s příklady a dalším materiálem. Jde zde o vyzdvihnutí základních principů.

> Aktivace syntaktických složek na úkor obsahových složek je důležitým zájmem současného matematického vzdělání.
> (S. Markus ∼ 2003)

Je faktem, že pouze část studujících má matematickou analýzy za svůj cílový obor. Je tedy škoda, že se tedy většina dozví z matematické analýzy pouze nepatrnou část. Studijní texty dalších partií jsou zpravidla psány jako specializované učebnice pro studijní program matematická analýza a příbuzné obory. Takto je zde nabídnuta široké veřejnosti matematická analýza jako jeden fungující celek.

> Většina intelektuálů spojuje matematiku ne s lidským myšlením, ale se vzorečky, jejichž hodnota mimo matematiku je nulová.
> (S. Markus ∼ 2003)

Matematická analýza se rozrůstá, stejně jako celá věda, velmi rychle. Během dvacátého století se v matematické analýze objevilo tolik převratných novinek, že bylo třeba přehodnotit obsah základních kurzů matematiky a matematické analýzy.

> Toho co víme je kapka, toho, co nevíme, moře.
> (anonym)

Zde je pokus o poctivý výběr podstatných témat, pokud zde některá chybí, nepovedlo se to a je třeba další doplnit ...

> Student není číše, kterou je třeba naplnit, ale pochodeň, kterou je třeba zapálit.
> (Aristotelés ze Stageiry ∼ -350)

Existuje řada přístupů k prezentaci matematiky. Zde předvedený postup jistě nejde použít jako běžná učebnice.

> Mým cílem není „učinit vědu přístupnou každému“ ... . . .
>
> (S. Markus ∼ 2003)

Z nezvyklých přístupů je známý přístup používaný při výuce R.L. Moorem mezi roky 1920 a 1969 na University of Texas. Jeho styl spočíval v sestavení učebního textu obsahujícího pouze všechny potřebné definice a podstatné věty. Studium spočívalo v aktivním řešení problémů a doplňování chybějících důkazů. Tento způsob byl hodnocen jako velmi náročný, ale měl pěkné výsledky. Nelze to doporučit, nicméně je možné, použít tohoto Průvodce jako "pokusnou verzi"textu pro takovýto styl výuky.

> O to ustavičně dbám, aby se životodárná naše univerzita bez cvičení ve vědách nestala neplodnou, nýbrž aby rozkvetl obdivuhodný důvtip mistrů a jinoši byli v srdci podněcováni obírati se vědami . . .
>
> (J. Hus)

V každém případě je možno o zde uvedených definicích a větách odborně diskutovat při opakování nebo zkoušení matematické analýzy. Průvodce se také hodí jako zavazadlo na pustý ostrov nebo do necivilizované končiny. S jeho pomocí je možné (v případě nejvyšší nouze ;-) vybudovat celý aparát matematické analýzy.

> Nezáleží na tom, jak mnoho (máš knih), ale jak jsou dobré.
>
> (Seneca)

Podstatou matematické analýzy není zvládutí co největšího počtu tvrzení a definic. Podstata je jinde.

> . . . (jde o) kombinatorické myšlení, rekurzivní myšlení, algoritmické myšlení, metoda postupných kroků, deduktivní myšlení, induktivní myšlení, myšlení v analogiích, pravděpodobnostní myšlení, . . .
>
> (S. Markus ∼ 2003)

Jistě, látku, kterou nebylo možno zcela zvládnout, nemůžeme považovat za čistý přínos.

> Mládenec začal u Euklida studovat „Základy“ a u první věty se ptal: „Budu z toho mít nějaký zisk?“ Euklides zavolal otroka a řekl: „Dej mu minci, aby mu učení něco dalo.“
>
> (Eukleidés z Alexandrie ∼ -330)

Snad Průvodce pomůže pro získání rámcového přehledu a bude alespoň trochu užitečný.

> Výklad v obvyklé přednášce často neznamená o mnoho více, než že se studenti naučí názvy vět, dostanou strach z důkazů a získají jedině starost, zda se důkazy neobjeví u zkoušky.
>
> (P.R. Halmos 1980)

Pro matematickou obec je zde z matematické analýzy (snad) to nejhezčí. Vypráví se jedna drobnost o D. Hilbertovi. Ten prý často říkal řečníkům na odborném semináři „chceme pouze hrozinky z koláče“.

> Tak jsem se snažil vybírat i já ...

Co

Průvodce provede nekonečnou krajinou matematické analýzy. Pro snazší orientaci jsou zde uvedeny některé orientační body, které budou vždy (alespoň mlhavě) na dohled.

- Přímka odpovídá množině reálných čísel. Takto množina reálných čísel nemá mezery.
- Pro reálnou funkci jde definovat spojitost v bodě a funkce spojitá na množině reálných čísel nabývá vždy mezihodnot. Tedy spojitá funkce dělá pěkné „křivky“.
- Reálná funkce jde často aproximovat lineární funkcí, aparát derivování je k tomu jako stvořen.
- Konečně aditivní a spočetně aditivní integrování dovede spočítat plochu pod grafem funkce.
- Základní věta analýzy

  $$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

  svazuje operace derivace a integrace.

- Na reálné ose jde zkoumat míru a podle ní integrovat.
- Prostor spojitých funkcí na intervalu má pěknou vnitřní strukturu.
- Jde definovat prostory pouze určením okolí jednotlivých bodů a zkoumat je jako topologické prostory. Spojitost jde používat i pro zobrazení topologických prostorů.
- Řešením diferenciální rovnice $y' = y$ dostaneme exponenciálu, která určuje, jak se nám mají množit peníze v bance.

Matematika zde není pouze z matematické analýzy. Je zde i řada věcí z jiných oblastí matematiky.

Jednou z důležitých motivací k napsání tohoto textu bylo to, že pevně věřím, že mladá generace je řada inteligentních lidí, kteří si zaslouží pozvání k matematickým pokladům formou tohoto Průvodce.

Jak

Zpracování Průvodce zaslouží trochu vysvětlení. Matematika je zapsána tradičním způsobem. Důkazy jsou zpravidla vynechány, jinde pouze naznačeny. Úplné znění důkazů lze najít podle literatury uvedené v závěru Průvodce. Průvodce obsahuje různá matematická tvrzení, nejsou to vždy nejsilnější výsledky. Jejich formulace je zvolena tak, aby byl jejich význam co nejnázornější. Pravdivost je (snad) zachována.

> Článek obsahuje mnoho nového a mnoho pravdivého. Naneštěstí to, co je pravdivé, není nové a to, co je nové, není pravdivé.
>
> (anonym)
>
> Poslední část byla řečena zbytečně.
>
> (P. Holický $\sim$ 2000)

Zcela odlišnou roli mají osobní komentáře vytištěné s obrázkem jako text v rámečku.

Jejich prostřednictvím přidávám svoje poznámky.

Tím získává Průvodce trochu osobní ráz.

Jistě někde zůstanou překlepi a překlepové. Omlouvám se ;-)

Budou zde zdůrazněny důležité popřípadě nedůležité stránky matematických tvrzení. Jde zde o roli průvodce, který může osobní volbou ovlivnit směr a význam prohlídky …

Za „žertovné poznámky“ trapného charakteru se omlouvám :-(

Často bude klíčová otázka „Proč?“.

Hlavní nedostatek školské matematického vzdělání jsou: absence myšlenek, ty jsou nahrazeny procedurami; nedostatek motivace ve způsobu, jak jsou zaváděny pojmy, problémy jsou vybrány a věty dokázány; nedostatečná pozornost je věnována historickým aspektům; výhradní pozornost formální správnosti, nedostatek pozornosti pro porozumění, pro smysl, pro otázku „proč?“; velmi slabá vazba k ostatním předmětům vyučovaným na škole; sylabus a učebnice dvakrát až třikrát větší než to, co je efektivne přijato normálními studenty; nedostatečné použití hravých aspektů matematiky; nedostatečná souvztažnost s počítačovou vědou; nedostatečná pozornost matematickému způsobu myšlení a jeho významu v každodenním životě.

(S. Markus ∼ 2003)

Místy je látka doplněna obrázky.

Moje výtvarné nadání a prostorová představivost může způsobit drobné potíže …

Některé obrázky jsou docela hezké, za to patří jejich autorům dík …

Neradi děláme kornouty z čistého papíru,
jakmile je potištěn, rádi ho popadneme.
(G.Ch.Lichtenberg ∼ 1770)

Často pomůže představit si některé obecné pojmy jako konkrétní objekty. Tak lze kreslit obrázky funkcí a posloupností, . . .

Pracovat ale musíme tak, abychom používali pouze vlastnosti, které opravdu obecně platí.

Látka je sestavena podle témat, není metodicky uspořádána a nabízí pouze přehled matematické analýzy. Témata jsou řazena logicky a používají předchozí výklad.

Snaha byla minimalizovat partie, o kterých slušný člověk pronese: „SMETÍ!“

Kapitola o funkcích jedné proměnné má ukázat, jakými prostředky je matematická analýza tvořena. Důkazy tam uváděných tvrzení jsou jednoduché a dají se snadno vymyslet.

Je to součást základní gramotnosti.

V dalších kapitolách jde často o tvrzení, která opravdu není snadné dokázat. Proto si stačí nejprve udělat základní přehled o tom, co platí a jakými otázkami se matematická analýza zabývá.

Důkaz jednoduchého tvrzení se podobá vesnickému nádraží. Vláček čeká na druhý, po jeho příjezdu přestoupí pár lidiček a vláčky pokračují. Důkazy složitých tvrzení se pak podobají železniční dopravě v celé republice. Vláčky na sebe různým způsobem čekají, předávají si tajné zprávy, sem tam do sebe úmyslně narazí, nakonec se na hlavní nádraží dokodrcá půlnoční vlak. Unaveni jsou všichni . . .

Důkazová technika vyžaduje veliké úsilí.

Tvrzení, jejichž stručný důkaz je napsán na několika hustě popsaných stránkách, jistě čekají na jednodušší přístup. Pokud vím, tak ty opravdu průzračné důkazy sbíral P.Erdős do imaginárního díla zvaného „The Book“.

Základem matematiky jsou problémy a jejich řešení. Zde jsou problémy soustředěny v kapitolách podle jejich obtížnosti. Jde o problémy pro bakaláře, magistry a mistry.

V okamžiku, kdy píši tento komentář jsem se definitivně rozhodl, že ponechám problémy pro bakaláře, magistry a mistry na konci knihy. Odolal jsem tak pokušení zařadit je do Průvodce před kapitoly s matematickým výkladem.

Prvotními jsou v matematice problémy. K jejich řešení použije řešitel všechno možné. To pak odhodí a jde řešit další problémy.

Jako supi se na použité metody, které slavily úspěch, vrhnou další matematici a udělají z nich teorii.

Matematické teorie jsou něco jako obchod se zbraněmi v době míru.

(anonym)

Obsah je zde vytištěn v několika úrovních. Tím je vidět matematická analýza z různě podrobného pohledu. Hloubka odpovídá univerzitnímu studiu. V některých místech jsou doplněny i nové výsledky hlubší. Tradiční členění matematické analýzy na reálnou, komplexní a funkcionální analýzu, obyčejné, parciální a moderní diferenciální rovnice, variační počet, teorii potenciálu a další je zde vynecháno. Zvláště teorie diferenciálních rovnic je zde pouze naznačena u jednotlivých problémů.

Není tu tradiční škatulkování diferenciálních a integrálních rovnic. Není tu toho ale víc, Není tu prostě skoro nic. Nezlobím se.

Název „Průvodce matematickou analýzou“ vznikl mimojiné proto, že řada jiných názvů byla již použita (Eukleidovy „Základy“, Rudinovy „Principy“, Rektorysův „Přehled“, Lukešovy „Zápisky“, Nečasovy „Metody“).

Já jsem průvodce ...

Samotné čtení vyžaduje součinnost a toleranci k vypravěčovi, který se snaží co může, aby se konečně nějak vyjádřil.

Toto není nějaký neosobní text. Je to psáno a říkáno s citem, pro radost :-)

Pro lehčí orientaci v textu je použita následující úmluva: místo obvyklého textu „nazveme jej *skalárním součinem*“ budeme psát „nazveme jej **skalární součin**“.

Neštípejte mne do prstu - pohleďte kam ukazuje.

(W.S.McCulloch)

Tím bude trochu pošramocena plynulost textu, ale získá se optická orientace o nově definovaných pojmech. Podobně při jiných pojmech a formulacích bude používán první pád.

Já například nemluvím vždy pouze pravdu, mluvím nespisovně a tak ...

Letopočty jsou zde pro přibližnou představu. Nelze se na ně spolehnout.

Kdy se co stalo nikdo neví přesně, pokud mu něco nespadlo na nohu, to si pamatuje.

Průvodce je předkládán „tak, jak je“.

Jako autor se zříkám odpovědnosti za škody způsobené (a související, byť i nepřímo) tímto dílem. Použití je na vlastní riziko. Mohu se mejlit. Proto raději platnost tvrzení před použitím zkontrolujte.

Průvodce je psán jako přehled matematické analýzy a nevyžaduje její znalost.

...matematické učebnice jsou používány více učiteli než studenty ...

(S.Markus $\sim$ 2003)

Pro jeho lepší čitelnost se text vyhýbá označením, která nejsou všeobecně známá a jasná. V matematice je totiž pěkným zvykem pojmenovávat jednotlivé objekty nebo tvrzení jménem jejich objevitele. Tak vznikla Cauchyova věta, Verhulstova rovnice a podobně. Pro Průvodce matematickou analýzou budou používány (tam, kde to jde) pojmy srozumitelnější, tedy věta o komplexní integraci, rovnice populačního růstu a podobně.

Předpokládám, že Průvodce bude číst více těch, kteří matematickou analýzu neznají, než znalců. Proto jsem nepoužíval jmenné označení běžných pojmů. Na konec jsem zařadil seznam nezvyklých sousloví pro znalce i neznalce. Tam je uvedeno, jak říkám kterým prostorům apod.

Tak bude Průvodce lépe čitelný i pro planety, kde Verhulst objevil Cauchovu větu a naopak. Mimojiné se musíme připravit na dobu, kdy bude jen v matematické analýze řádově sto matematiků jménem Cauchy s principiálním přínosem k teorii funkcí komplexní proměnné ...

Ascoliho důkaz Brouwerova důsledku Cayleyovy poučky o Dedekindových řezech v Eukleidově prostoru všech Fréchetovsky derivovatelných funkcí s Gateauovou derivací v Hilbertově podprostoru Chinčinovy grupy transformací Isidorových mnohočlenů s nenulovým Jordanovým indexem Kellogových transformací Laplaceovy rovnice na Mőbiusově pásku s Newtonovskými okrajovými podmínkami vyhovujícím Osgoodově rovnici v Pascalově sumačním tvaru Rieszových potenciálů prvků Schauderovy báze s Taylorovými polynomy v Urysohnově kompaktu všech řešení Volterových rovnic Whiteheadovy úlohy zobecňujících Xuan-Locův martingal s Youngovým modulem v Zermelových axiomech byl pěkný.

Pro jednoduchost a čitelnost budou autoři uvedeni pouze u příslušné myšlenky.

Provokuji s potěšením.

Krása matematiky je nepřehlédnutelná a jejím tvůrcům patří veliký dík za jejich dílo.

Budu dostatečně odměněn, pokud, až to budeš říkat jiným, nebudeš prohlašovat, že ten objev je tvůj, ale řekneš, že je můj.
(Thalés z Mílétu ∼ -600)

Takto veřejně přiznávám, že jsem skoro všechno odněkud opsal. Některé věci jsem vymyslel sám, ale pravděpodobně ani v těchto případech jsem pravděpodobně nebyl první . . .

Jestliže pak jsem se při tomto svém díle dotkl nějakým slovem některého z mistrů nebo jej urazil, jak jsem neměl, odpusťte, nejdůstojnější mistři, viníkovi.
(J. Hus $\sim$ 1400)

Vše jsem napsal v dobré víře.

Quod bonum, felix, faustum, fortunatum-que sit.

Ať je to k dobru, štěstí, blahu a zdaru.
(z diplomu Karlovy Univerzity)

Seznam kapitol

Seznam kapitol a jejich dělení

Obsah

Kapitola 1

Svět matematiky

Tato kapitola představuje jednotlivé matematické obory a poskytuje základní přehled o matematice.

1.1 Co je matematika

Matematika je jedním z největších intelektuálních vítězství člověka.

> Matematika dává člověku nový smyslový orgán.
>
> (Ch.Darwin $\sim$ 1850)

K mnoha pokusům o definici matematiky přidávám formulaci:

Matematika je nejmenší systém, v němž jsou povoleny následující dvě činnosti

(i) Zvolíme soustavu tvrzení a její jednotlivá tvrzení prohlásíme za pravdivá.

(ii) Pomocí této soustavy zkoumáme další tvrzení, zda jsou také pravdivá.

> Zkoumání podle bodu (i) a (ii) musí (alespoň počítači) dělat radost :-)

Matematický zápis je často pro úsporu místa proložen značkami. Proto je rychlost jeho četby omezena.

> Matematika je napsána pro matematiky.
>
> (N.Copernicus $\sim$ 1515)

Matematika si buduje pro daný problém specifický svět. Přijme základní definice a vztahy a pak pracuje odtržena od zbytku světa. Na konci se pokusí svoje výsledky prodat ...

> Matematika je neomezený nástroj na abstraktní pojmy.
> (P.A.M.Dirac ∼ 1933)

Matematika jako neomezený nástroj pro tvorbu nových světů přináší matematikům veliké uspokojení.

> Život je dobrý právě pro dvě věci, objevovat matematiku a učit matematiku.
> (S.Poisson ∼ 1810)

Motivaci si matematika bere z okolního světa. Další zdroj nápadů je samotná matematika. Mezi matematiky najdeme hledače pokladů i pečlivé organizátory.

> ... skutečným jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení.
> (P.R.Halmos 1980)

Lidstvo dosáhlo velikého pokroku a rozvoje. Bez matematiky by jeho možnosti nebyly takové, jaké jsou.

> Matematika je součást kulturního dědictví lidstva.
> (S.Markus ∼ 2003)

Matematika je užitečná zábava.

> Matematika je jako akční hra. Pohybujeme se neznámým terénem a sbíráme kouzelné nápoje, zbraně a podobně. Ty si dáváme do batůžku a v pravém okamžiku je použijeme. Podobně si v matematice bereme do paměti vše, co v matematice slyšíme či vidíme, a používáme to pak k řešení problémů.

1.2 Škatulkování matematiky

Matematický svět je bez hranic a matematici jsou jeho obyvatelé. Jejich nadšení drží základy matematického vesmíru pohromadě. Každý matematik má svoji roli.

Dá se říci, že v matematice, stejně jako ve válce, jsou stratégové a taktici. Vojenský stratég má určitou intuitivní představu, jak vést tažení, ponětí o velkých masách a jejich vzájemných vztazích. Taktik se drží terénu, má technické znalosti a zřetelnou zálibu v organizační činnosti.

(G.Choquet ∼ 1990)

Tradičně je akceptováno dělení jednotlivých částí matematiky podle metod a objektů, které jsou zkoumány a používány. K nejstarším oborům patří geometrie a algebra.

"Čímpak vlastně jsi?"- "Zeměměřičem."- "Copak je to?"K. to vysvětloval, ona z výkladu začala zívat.

(F.Kafka ∼ 1925)

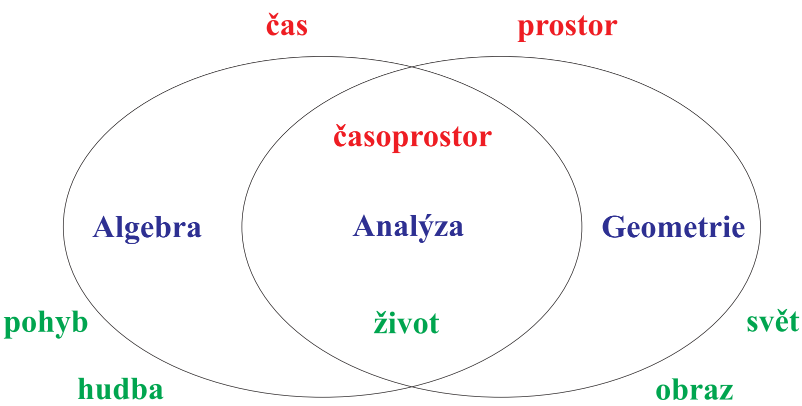
Jejich vzájemné prolínání, spolupráce a interakce se odehrává v oboru, který získal pojmenování matematická analýza.

Podle řeckého analyein = rozbít, rozmlátit, rozštípat, zničit, otevřít, rozdělit, rozložit, zorat, rozrušit, kazit, rozesmát, vyvolat bouři smíchu

Schematicky můžeme zachytit vztahy geometrie, analýzy a algebry obrázkem, ve kterém připodobňujeme algebru času, pohybu či hudbě, geometrii prostoru, obrazu či světu a analýzu časoprostoru či životu.
Toto přirovnání se do určité míry snaží zachytit charakter daného oboru ...

Všechny obory se pořád mění, kdo se v tom má vyznat ...

Vždy jde o matematiku.

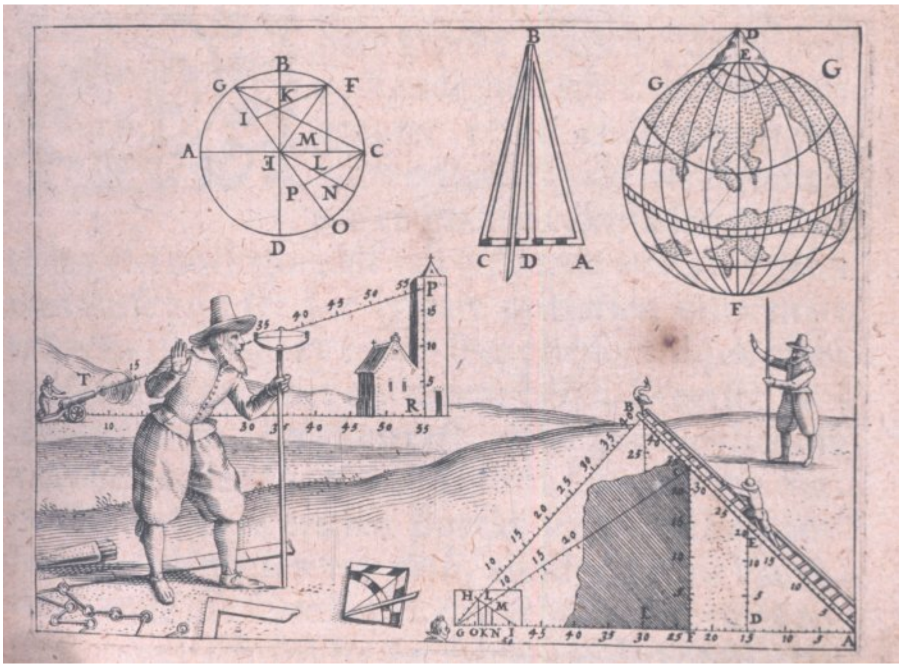


Obrázek 1.2.0: Vztah algebry, analýzy a geometrie.

Matematika je v podstatě počítání jablek a hrušek. Algebra je to počítání, geometrie jsou ta jablka a hrušky.

Obrázek 1.2.0: Algebra je služkou geometrie.

> … geometrie není ani tak odvětvím matematiky, jako spíše způsobem myšlení pronikajícím všemi odvětvími matematiky.
>
> (M.F. Atiyah 1982)



Obrázek 1.2.0: Geometrie je služkou algebry.

Původně se geometrie zabývala rovinnými a prostorovými objekty. Její současná podoba je velice obecný a široký obor obvykle nazývaný topologie (podle řeckého slova topos = místo).

> Starosta: "... ale my, bohužel, žádného zeměměřiče nepotřebujeme."
>
> (F. Kafka $\sim$ 1925)

Pro představu o současném rozsahu a oborech matematiky poslouží 2000 Mathematics Subject Classification, což je systém určený pro třídění recenzí matematických prací:

Obecné

00-xx Všeobecné

01-xx Historie a životopisy [viz též klasifikaci -03 v jiných sekcích]

Algebra

03-xx Matematická logika a základy

04-xx sekce zrušena [Pro teorii množin viz 03Exx]

05-xx Kombinatorika [Pro konečná tělesa viz 11Txx]

06-xx Uspořádání, svazy, uspořádané algebraické struktury [Viz též 18B35]

08-xx Obecné algebraické systémy

11-xx Teorie čísel

12-xx Tělesa a polynomy

13-xx Komutativní okruhy a algebry

14-xx Algebraická geometrie

15-xx Lineární a multilineární algebra; teorie matic

16-xx Asociativní okruhy a algebry [Pro komutativní případ viz 13-xx]

17-xx Neasociativní okruhy a algebry

18-xx Teorie kategorií; homologická algebra [Pro komutativní okruhy viz 13Dxx, pro asociativní okruhy 16Exx, pro grupy 20Jxx, pro topologické grupy a příbuzné struktury 57Txx; viz též 55Nxx a 55Uxx pro algebraickou topologii]

19-xx K-teorie [Viz též 16E20, 18F25]

20-xx Teorie grup a zobecnění

22-xx Topologické grupy, Lieovy grupy [Pro transformační grupy viz 54H15, 57Sxx, 58-xx. Pro abstraktní harmonickou analýzu viz 43-xx]

Analýza

26-xx Reálné funkce [Viz též 54C30]

28-xx Míra a integrace [Pro analýzu na varietách viz 58-xx]

30-xx Funkce komplexní proměnné [Pro analýzu na varietách 58-xx]

31-xx Teorie potenciálu [Pro pravděpodobnostní teorii potenciálu 60J45]

32-xx Více komplexních proměnných a analytické prostory [Pro nekonečně dimenzionální holomorfnost 46G20, 58B12]

33-xx Speciální funkce (33-xx se zabývá vlastnostmi funkcí jako funkcí) [Pro ortogonální funkce viz 42Cxx; pro kombinatorické aspekty viz 05Axx; pro číselně-teoretické aspekty viz 11-xx; pro teorii reprezentací viz 22Exx]

34-xx Obyčejné diferenciální rovnice

35-xx Parciální diferenciální rovnice

37-xx Dynamické systémy a ergodická teorie [Viz též 26A18, 28Dxx, 34Cxx, 34Dxx, 35Bxx, 46Lxx, 58Jxx, 70-xx]

39-xx Diferenční a funkční rovnice

40-xx Posloupnosti, řady, sčítatelnost

41-xx Aproximace a rozvoje [Pro celou teorii aproximaci v komplexním oboru viz 30Exx, 30E05 a 30E10; pro celou trigonometrickou aproximaci a interpolaci viz 42Axx, 42A10 a 42A15; pro numerickou aproximaci viz 65Dxx]

42-xx Fourierova analýza

43-xx Abstraktní harmonická analýza [Pro další analýzu na topologických a Lieových grupách viz 22Exx]

44-xx Integrální transformace, operační počet [Pro zlomkové derivace a integrály viz 26A33. Pro Fourierovu transformaci viz 42A38, 42B10. Pro integrální transformaci v prostorech distribucí viz 46F12. Pro numerické metody viz 65R10]

45-xx Integrální rovnice

46-xx Functionální analýza [Pro variety modelované na topologických lineárních prostorech viz 57N20, 58Bxx]

47-xx Teorie operátorů

49-xx Variační počet a optimální kontrola; optimalizace [Viz též 34H05, 34K35, 65Kxx, 90Cxx, 93-xx]

Geometrie

51-xx Geometrie [Pro algebraickou geometrii viz 14-xx]

52-xx Konvexní a diskrétní geometrie

53-xx Diferenciální geometrie [Pro diferenciální topologii viz 57Rxx. Pro základní otázky diferencovatelných variet viz 58Axx]

54-xx Obecná topologie [Pro topologii na varietách ve všech dimenzích viz 57Nxx]

55-xx Algebraická topologie

57-xx Variety a buněčné komplexy [Pro komplexní variety viz 32Qxx]

58-xx Globální analýza, analýza na varietách [Viz též 32Cxx, 32Fxx, 32Wxx, 46-xx, 47Hxx, 53Cxx; pro geometrickou teorii integrace viz 49Q15]

Matematické obory se speciálním zaměřením a aplikace

60-xx Pravděpodobnost a stochastické procesy [Pro další aplikace viz 11Kxx, 62-xx, 90-xx, 91-xx, 92-xx, 93-xx, 94-xx]

62-xx Statistika

65-xx Numerická analýza

68-xx Informatika (Computer science) [Pro články používající strojové výpočty a programy ve speciálních matematických oborech viz sekci -04 v daném oboru]

70-xx Mechanika částic a systémů [Pro relativistickou mechaniku viz 83A05 a 83C10; pro statistickou mechaniku viz 82-xx]

73-xx sekce zrušena [Pro mechaniku pevných těles viz 74-xx]

74-xx Mechanika pružných těles

76-xx Mechanika tekutin [Pro obecnou mechaniku kontinua viz 74Axx, pro další části viz 74-xx]

78-xx Optika, elektromagnetická teorie [Pro kvantovou optiku viz 81V80]

80-xx Klasická termodynamika, přenos tepla [Pro termodynamiku pevných těles viz 74A15]

81-xx Kvantová teorie

82-xx Statistická mechanika, struktura hmoty

83-xx Relativita a gravitační teorie

85-xx Astronomie a astrofyzika [Pro celestiánskou mechaniku viz 70F15]

86-xx Geofyzika [Viz též 76U05, 76V05]

90-xx Operační výzkum, matematické programování

91-xx Teorie her, ekonomie, společenské vědy a vědy o chování

92-xx Biologie a další přírodní vědy

93-xx Teorie systémů; kontrola [Pro optimální kontrolu viz 49-xx]

94-xx Informace a komunikace, obvody

Vzdělávání

97-xx Matematické vzdělávání

Kapitola 2

Základy matematické analýzy

Tato kapitola představí základní pojmy, se kterými pracuje matematická analýza. Budeme se zabývat výroky, množinami a číselnými obory. Budeme pracovat i s nekonečnými součty.

2.1 Výroky a množiny

2.1.1 Výroky

Výrok je tvrzení, u kterého má smysl zkoumat pravdivost. Každý výrok je buď pravdivý, nebo nepravdivý

(Aristotelés ze Stageiry $\sim$ -350)

Tento **princip vyloučení třetího** se stal základním kamenem matematiky.

Obrázek 2.1.1: Co je a co není výrok je někdy problém ...

Otřásla s ním až zjištění, že v závislosti na přijatých axiomech mohou některá tvrzení být buď pravdivá, nepravdivá nebo nedokazatelná (například pátý geometrický axiom o tom, že daným bodem k dané přímce vede pouze jedna rovnoběžka).

Axiom je když ...
Axiom je to, co se bere za pravdu a nedokazuje se! Eukleidés řekl, že bod je to, co nemá délku ani šířku, přímka nemá šířku, má jen délku. Axiom je například, že každými dvěma body vede právě jedna přímka.

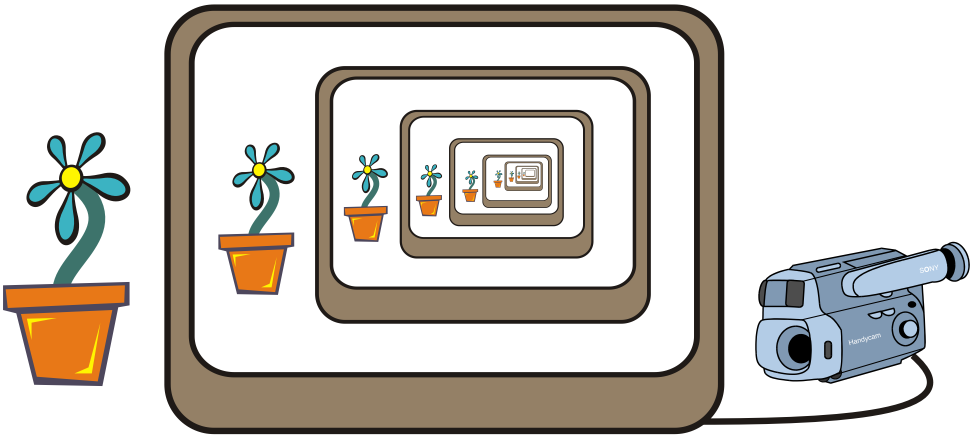
Axiomy tvoří základ každého matematického zkoumání. S jejich pomocí matematici vědí, že mluví o věcech se stejnými vlastnostmi. Každý si může zvolit svoji realizaci domluvených pojmů.

Musí být možné kdykoliv použít místo bodů, přímek a rovin například stoly, židle a džbánky s pivem.
(D.Hilbert $\sim$ 1900)

2.1.2 Zacyklené vlastnosti

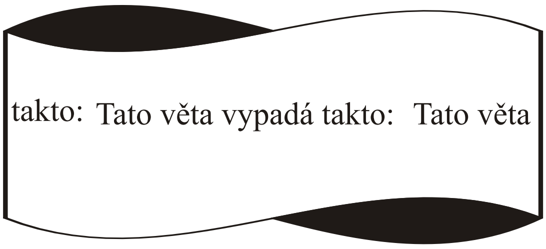
Při tomto jevu se zpravidla objekt odkazuje sám na sebe:

- Kamera připojená k obrazovce, kterou sleduje.



Obrázek 2.1.2: Nekonečně mnoho elektronů v práci.

- Součástí zakoupeného výrobku je poukázka na část dalšího výrobku.
- "Tato věta vypadá takto: "Tato věta . . . "
- "Nejdůležitější v životě jsou dvě věci:
  1. Nikdy neříkej ostatním vše, co znáš."



Obrázek 2.1.2: Zacyklené tvrzení.

> Jediné, co vím, je, že nic nevím.
> (Sókratés ∼ -410)

2.1.3 Paradox (O nejmenším obrovi)

Nejmenší přirozené číslo, které nejde vyjádřit méně než 1000 znaky jde vyjádřit 100 znaky.

(Berry)

> Slovo "vyjádřit"nelze vyjádřit v češtině. V každém případě jde o pěkně jemnou záležitost ;-)

2.1.4 Paradox (Můžeme věřit lháři?)

"Toto není pravda."

> Lháři obvykle nevěříme, ani když mluví pravdu.
> (Cicero)

Tato věta je pravdivá, právě tehdy, když není pravdivá. Vzhledem k principu vyloučení třetího se nejedná o výrok.

> V matematice nerozumíte věcem. Jenom si na ně zvyknete.
> (J.v.Neumann ∼ 1940)

2.1.5 Věta (Nedefinovatelnost pravdy)

V jazyku teorie nelze mít zároveň zacyklený odkaz (např. "toto"), vyjádření negace (např. "není") a vyjádření pravdivosti (např. "pravda").

(A.Tarski 1936)

Slovo "pravda"nelze vyjádřit v češtině.

2.1.6 Věta (Nerozhodnutelnost ve výrokovém počtu)

Neexistuje algoritmus, který by v konečně mnoha krocích rozhodl, zda daná aritmetická formule jde dokázat, nebo ne.

(A.Church 1936)

Důkaz: Ze symbolů $x, y, z, \cdots, 0, 1, +, *, =, \neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow, \exists, \forall$. tvoříme aritmetické formule. Nechť existuje algoritmus, který pro zadanou aritmetickou formuli rozhodne, zda je pravdivá, nebo není. Předložíme mu vhodné tvrzení a odvodíme spor. $\blacksquare$

Takže, když nejde věta dokázat, je čas posvačit a zkusit to znova ;-)

2.1.7 Naivní teorie množin

Soubor dobře definovaných a dobře rozlišitelných objektů se nazývá **množina**.

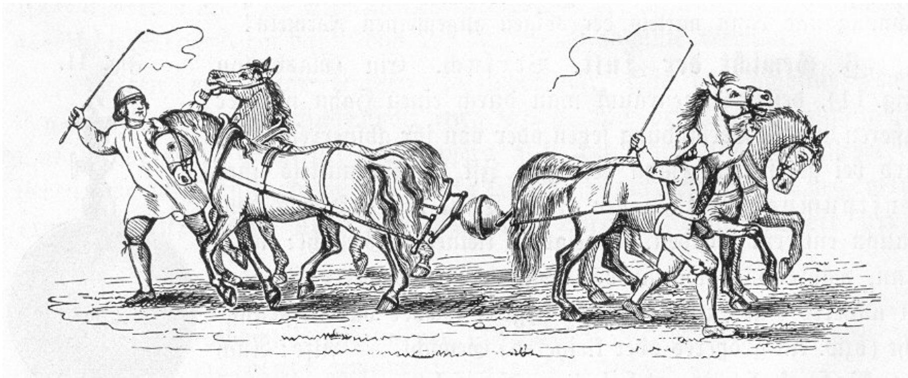
(G.Cantor 1873)

Je to ta naivita mládí ...

Každý objekt tohoto souboru nazýváme **prvek**. Množiny píšeme ve tvaru

$$M = \{x \ : \ x \text{ má vlastnost ... } \} \ .$$

Nechť M, N a X jsou množiny. Množina bez prvků se nazývá **prázdná množina**, značíme $\emptyset$. Říkáme, že M je **podmnožina** N, jestliže $x \in M$ implikuje $x \in N$. Zapisujeme to $M \subseteq N$. Říkáme, že M a N jsou rovny, jestliže $M \subseteq N$ a $N \subseteq M$, , tedy jestliže M a N obsahují přesně stejné prvky. Píšeme $M = N$. Definujeme **průnik** M a N rovnicí $M \cap N = \{x : x \in M \text{ a } x \in N\}$. Definujeme **sjednocení** M a N vztahem $M \cup N = \{x : x \in M \text{ nebo } x \in N\}$.



Obrázek 2.1.7: Praktická realizace prázdné množiny.

Jestliže $M \subseteq X$, definujeme **doplněk** M v X vztahem $X \setminus M = \{x : x \in X \text{ a } x \notin M\}$. **Potenční množina** X se definuje vztahem $\mathcal{P}(X) = 2^X = \{M : M \subseteq X\}$. **Součin množin** M a N je množina $M \times N = \{(m, n) : m \in M, n \in N\}$, kde **uspořádaná dvojice** (m, n) se chápe takto $(m, n) = \{m, \{m, n\}\}$.

(Descartes)

Tuhle část v žádné knize nečtu, vřele doporučuju. Například ty dvojice jsou fakt hustý.

Označujeme:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \text{množina přirozených čísel} \\
\mathbb{Z} &= \text{množina celých čísel} \\
\mathbb{Q} &= \text{množina racionálních čísel} \\
\mathbb{R} &= \text{množina reálných čísel} \\
\mathbb{C} &= \text{množina komplexních čísel} \, .
\end{aligned}
$$

A poslední rybář dostal mínus dvě ryby.
(P.A.M.Dirac $\sim$ 1933)

Množinu $\{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ značíme (a, b) a nazýváme **otevřený interval**, $\{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ značíme $[a, b]$ a nazýváme **uzavřený interval**. Symbol $\mathbb{I}$ značí interval $[0, 1]$.

2.1.8 Paradox (Kdo holí holiče?)

Uvažujme množinu A všech množin, které se neobsahují jako prvky. Přesněji

$$A = \{B : B \notin B\} \, .$$

Vidíme, že pokud $A \in A$, musí mít A vlastnost, která je vyžadována ode všech prvků A, tedy $A \notin A$, pak ale zase musí být $A \in A$. Tedy nejsme schopni o množině A říci, zda patří do A, nebo ne.

(B.A.W.Russel 1918)

Tento paradox je paralelou problému holiče, který dostal za úkol holit všechny muže ve městě, kteří se neholí sami. Nechť $A = \{B$: muž B se sám neholí $\}$, ...

2.1.9 Relace

Nechť X a Y jsou dvě množiny.
Relace mezi X a Y je každá podmnožina $X \times Y$. Relace $R \subseteq X \times X$ se nazývá

- **reflexivní**, jestliže $(x, x) \in R$ pro každé $x \in X$;
- **symetrická**, jestliže $(x, y) \in R$ implikuje $(y, x) \in R$;
- **antisymetrická**, jestliže $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$ implikuje $x = y$;
- **transitivní**, jestliže $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$ implikuje $(x, z) \in R$.

Ekvivalence na množině X je symetrická, reflexivní a transitivní relace $R \subseteq X \times X$. Jestliže $x \in X$ a jestliže R je ekvivalence, pak $[x]_R = \{y \in X : (x, y) \in R\}$ se nazývá **třída ekvivalence** prvku x vzhledem k relaci R.

Já mám třídu ekvivalence jednoprvkovou.

2.1.10 Zobrazení

Zobrazení f z X do Y (značíme $f : X \to Y$) je relace $f \subseteq X \times Y$, která splňuje

(i) Pro každé $x \in X$ existuje $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$.

(ii) Jestliže $(x, y_1) \in f$ a $(x, y_2) \in f$, pak $y_1 = y_2$.

Zobrazení je vlastně pravidlo, které vzoru přiřadí obraz. Je to takový mlýnek.

Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $f(x) = y$.
Je-li $A \subset X$, množina $\{f(a) : a \in A\}$ se nazývá **obraz množiny** A, značí se $f(A)$. Je-li $B \subset Y$, množina $\{a : a \in X \;\&\; f(a) \in B\}$ se nazývá **vzor množiny** B, značí se $f^{-1}(B)$. Je-li $f(X) = Y$, říkáme, že zobrazení je **na** množinu Y. Mají-li různé prvky z X různé obrazy v Y,

říkáme, že zobrazení je **prosté**, neboli **injektivní**. Prosté zobrazení z X na Y se nazývá **bijekce**, nebo **bijektivní** či **vzájemně jednoznačné**.

Je-li zobrazení $f : X \to Y$ prosté, definujeme **inverzní zobrazení** $f^{-1} : Y \to X$ jako relaci $f^{-1} \subseteq Y \times X$, která splňuje

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1} .$$

Je-li zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$, definujeme **složené zobrazení** $g(f) : X \to Z$ jako relaci která splňuje

$$(x, z) \in g(f) \iff (x, y) \in f \ \&\ (y, z) \in g .$$

Je-li zobrazení $f : X \to Y$ a $A \subset X$, definujeme **zúžení zobrazení** $f \restriction A : A \to Y$ jako relaci $f \cap A \times Y$.

Zobrazení $f : \mathbb{N} \to X$ nazýváme **posloupnost** prvků množiny X a značí se $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

No vlastně todle jenom uklidňilo pochybovače. Právě se dozvěděli, že zobrazení je vlastně nějaká množina. BTW, jednou jsem se koukal do zrcadla a to zobrazení bylo asi to zrcadlo ;-)

2.1.11 Uspořádání

Částečné uspořádání na množině X je antisymetrická, reflexivní a transitivní relace $R \subseteq X \times X$. Jestliže $(x, y) \in R$, píšeme $x \leq y$. Tedy platí

(i) $x \leq x$ pro všechny $x \in X$.

(ii) $x \leq y$ a $y \leq x$ implikuje $x = y$ pro všechny $x, y \in X$.

(iii) Jestliže $x \leq y$ a $y \leq z$, pak $x \leq z$ pro všechny $x, y, z \in X$.

Říkáme, že $(X, \leq)$ je **částečně uspořádaná množina**. Platí-li navíc, že pro každé dva prvky platí buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$, mluvíme o **uspořádání**, množině říkáme **uspořádaná množina**. Říkáme, že uspořádaná množina $(X, \leq)$ je **dobře uspořádaná množina**, když má každá neprázdná podmnožina X nejmenší prvek.

Dobře :-)

2.1.12 Definice (Ordinální čísla)

Řekneme, že množina X je **ordinální číslo**, když

(i) Každý prvek množiny X je zároveň podmnožinou množiny X.

(ii) Relace "býti prvkem"je dobré (ostré) uspořádání množiny X.

Ordinální čísla označujeme $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$, $\cdots$, $n+1 = \{0, 1, \cdots, n\}$, $\cdots$, $\omega = \{0, 1, \cdots, n, \cdots\}$, $\omega + 1 = \{0, 1, \cdots, n, \cdots, \omega\}$. Ordinální čísla seřadíme do jedné linie inkluzí:

$$0, 1, 2, 3, \cdots, \omega, \omega+1, \omega+2, \cdots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \cdots .$$

Jinými slovy: konec světa nebude. Vždycky bude další následovník ...

2.1.13 Paradox (O největším ordinálním čísle)

Množina všech ordinálních čísel má dobré uspořádání, tedy je svým prvkem, což není možné.

(C.Burali-Forti 1897)

2.1.14 Transfinitní indukce

Nechť je dána dobře upořádaná množina X a nechť $P(x)$ je tvrzení, které má smysl pro každý prvek $x \in X$. Jestliže

(i) P platí pro nejmenší prvek množiny X.

(ii) Platí-li tvrzení $P(x)$ pro všechny prvky $x < y$, pak platí $P(y)$.

pak platí $P(x)$ pro každé $x \in X$.

Takhle se doleze s tvrzením P všude. Přeleze to všechna nekonečna.

2.1.15 Paradox (Žádný strom neroste do nebe)

Pro každé přirozené číslo m definujeme následující posloupnost:

$m_2 =$ číslo m vyjádřené úplně v mocninách čísla 2.

$m_3 =$ číslo, které získáme z m_2 nahrazením čísla 2 číslem 3 a odečtením jedničky od výsledku, vyjádřené úplně v mocninách čísla 3.

...

$m_{n+1} =$ číslo, které získáme z m_n nahrazením čísla n číslem $n+1$ a odečtením jedničky od výsledku, vyjádřené úplně v mocninách čísla $n+1$.

POZOR!!! Tohle je úplná šílenost. Ta posloupnost ze zvětšuje i zmenšuje. Pro každé m je ale ta posloupnost daná, třeba má limitu nekonečno, nebo nulu. Na axiomech nezáleží, to je vidět.

Například pro $m = 29$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
m_2 &= 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1 \\
m_3 &= 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3 \\
m_4 &= 4^{4^4} + 4^{4+1} + 4^4 - 1 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 4^2.3 + 4.3 + 3 \\
m_5 &= 5^{5^5} + 5^{5+1} + 5^2.3 + 5.3 + 2
\end{aligned}
$$

S použitím tranfinitní indukce pro každé m existuje index n takový, že $m_n = 0$.

(R.L.Golgstein 1944)

Já to říkal předem.

V **axiomatické aritmetice** přirozených čísel (s obyčejnou indukcí) nejde výše uvedený výsledek dokázat. Tedy se jedná v axiomatické aritmetice o nerozhodnutelné tvrzení, které je dokazatelné v širším axiomatickém systému.

(L.Kirby a J.Paris 1982)

Já si to myslel, ale schválně jsem to neřekl.

2.1.16 Velikost množin

Otázka, jak zkoumat velikost nekonečných množin, byla otázkou prvořadé důležitosti. Množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel byla nejjednodušší nekonečnou množinou. Takto "veliká"množina (která jde "očíslovat", seřadit do posloupnosti) se nazývá **spočetná množina**.

Jak zvládnout množiny "větší"je problém, který není dosud zcela vyřešen.

2.1.17 Paradox (O diagonální posloupnosti)

Uvažujme množinu P všech posloupností nul a jedniček, které jdou definovat pomocí konečně mnoha českých slov. Tato množina je spočetná. Seřadíme si množinu P do posloupnosti $\{p_n\}$. Definujeme nyní další posloupnost p takto: "Posloupnost p se na n-tém místě liší od n-tého místa posloupnosti d_n o jedničku."Tato posloupnost p je definována pomocí konečně mnoha slov a proto leží (a zároveň neleží) v P.

(J.Richard 1905)

> Takže neexistuje člověk, který není nikomu podobný?

2.1.18 Definice (Mohutnost množin)

Pokud existuje prosté zobrazení X do Y, píšeme $X \preccurlyeq Y$. Dvě množiny X a Y mají stejnou **mohutnost**, nebo též **kardinální číslo**, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny X na množinu Y, píšeme $X \approx Y$. Relace $\approx$ je ekvivalence na množinách, třídu ekvivalence $\approx$ nazveme **kardinální číslo**. Kardinální číslo množiny $\mathbb{N}$ (a všech spočetných množin) označujeme $\aleph_0$ (čte se "alef nula").

(G.Cantor 1873)

> Takže až v 19. století zformalizovali počítání na prstech.

2.1.19 Věta (O mohutnostech)

Jestliže $A \preccurlyeq B$ a $B \preccurlyeq A$, pak $A \approx B$.

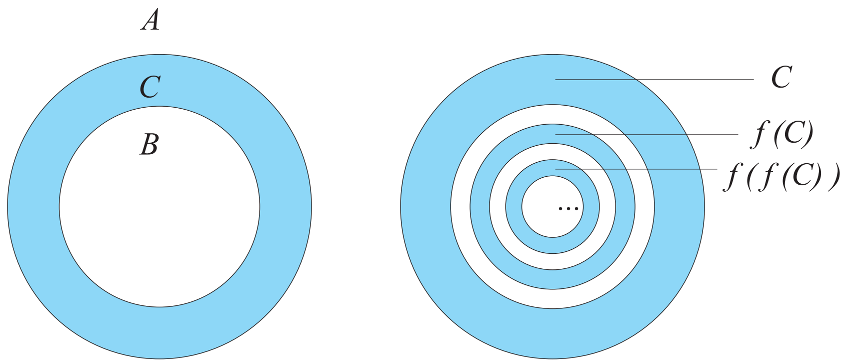
(G.Cantor 1899, E.Schrőeder, Bernstein)

Důkaz: Můžeme předpokládat, že B je podmnožinou A (místo B lze použít příslušný obraz). Označme g prosté zobrazení A do B a položme $C = A \setminus B$.
Hledané vzájemně jednoznačné zobrazení z A na B budeme definovat jako f na množině $C \cup f(C) \cup f(f(C)) \cup \cdots$ a jako identitu jinde. ■

2.1.20 Věta (O potenci)

Pro žádnou množinu neexistuje vzájemně jednoznačné zobrazení X a $\mathcal{P}(X)$.

(G.Cantor 1899)



Obrázek 2.1.19: Věta o mohutnostech.

Důkaz: Nechť $g : X \to \mathcal{P}(X)$ je bijekce. Nechť $Y = \{x \in X : x \notin g(x)\} \in \mathcal{P}$. Označme $y = g^{-1}(Y) \in X$. Pak $y \in Y \iff y \notin g(y) \iff y \notin Y$ vytváří spor (tudíž bijekce g neexistuje). ■

> Výsledkem myšlení nemá být pocit, ale čin.
>
> (V.v.Gogh)

> Věta mimojiné tvrdí, že pomocí prvků množiny nemůžeme očíslovat její podmnožiny.

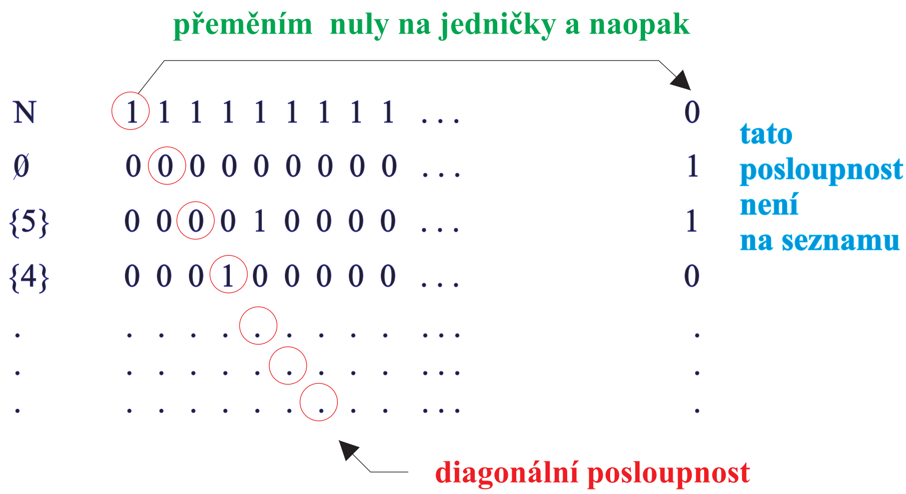
Postup použitý v důkazu se nazývá **diagonalizace**.

Například podmnožiny přirozených čísel odpovídají posloupnostem nul a jedniček. Pokud by se podařilo seřadit tyto posloupnosti do jedné posloupnosti ("seznamu") posloupností, můžeme vytvořit novou posloupnost modifikací "diagonální posloupnosti". Takto vytvořená posloupnost není na "seznamu".

> Podobně můžeme dokázat, že některých objektů je více než spočetně. Metodou diagonalizace jde často sestrojit nový objekt, který není na "seznamu".

2.1.21 Paradox (O potenci největší množiny)

Množina všech množin X a její potenční množina $\mathcal{P}(X)$ mají (a nemohou mít díky větě o potenci) stejnou mohutnost.



Obrázek 2.1.20: Diagonální posloupnost.

(G.Cantor 1899)

Uvnitř zeměkoule měla prý být ještě jedna větší . . .

2.1.22 Definice (Upravená definice množiny)

Základní schéma

$$M = \{x : x \text{ má vlastnost ... }\}$$

v naivní teorii množin nahradíme konstrukcí:

Nechť X je množina. Pak $M = \{x : x \in X \quad \& \quad x \text{ má vlastnost ... }\}$ je také množina.

(A.Zermelo 1904)

Tímto se vyhneme všem množinovým paradoxům. COOL :-)

2.1.23 Axiomatická teorie množin

Základní linií, která se táhne celou axiomatickou teorií množin, je usilovná snaha neudělat podobnou chybu jako naivní teorie množin. Proto jsou přesně stanovena pravidla "povolených činností". Množinou je prázdná množina $\emptyset$, množina $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin dané množiny X je též množina. Obecně pro to, abychom o něčem tvrdili, že je to množina, potřebujeme vždy nějaký axiom. Objekty, které jsou příliš veliké, například soubor všech množin, se nazývají **třída**.

Axiomatický systém teorie množin nazýváme **TEMNO**. Tuto teorii popíšeme v následujících paragrafech.

(A.Zermelo a A.A.Fraenkel 1908)

Následuje docela slušnej mač:

2.1.24 Jazyk axiomatické teorie množin

Jazyk L teorie množin se skládá ze symbolů $x, y, z, \ldots$ pro proměnné, binární relace $\in$ (čteme **je prvek**), logické symboly $\&, \neg$ (čteme **a zároveň**, **neplatí**), kvantifikátor $\exists x$ (čteme **existuje** x **takové, že**), znak rovnosti $=$, závorky (a). Pro proměnné x a y a formule α a β jsou formulemi též $x = y$, $x \in y$, $\alpha \& \beta$, $\neg\alpha$ a $\exists x\ \alpha$.
Rozšíříme jazyk o známé výrazy

$$\begin{aligned}
\alpha \vee \beta &= \neg\left((\neg\alpha)\,\&\neg\,(\beta)\right) \\
\alpha \Rightarrow \beta &= ((\neg\alpha) \vee \beta) \\
\alpha \Longleftrightarrow \beta &= (\alpha \Rightarrow \beta)\,\&\,(\beta \Rightarrow \alpha) \\
\forall x\ \alpha &= \neg\,\exists x\ (\neg\alpha)
\end{aligned}$$

a čteme **nebo**, **implikuje**, **právě tehdy** a **pro každé** x Podobně $\exists!$ znamená **existuje právě jeden**.

Myslím, tudíž jsem.
(R.Descartes 1637)

Přidáme základní pravidla výrokového počtu

(i) $\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$

(ii) $[\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)] \Rightarrow [(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \chi)]$

(iii) $(\neg\phi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$ **(důkaz sporem)**

(iv) $(\phi\&\psi) \Rightarrow \phi$ a $(\psi\&\phi) \Rightarrow \phi$

(v) $\phi \Rightarrow (\phi \vee \psi)$ a $\psi \Rightarrow (\phi \vee \psi)$

(vi) $[\chi \Rightarrow \phi] \Rightarrow [(\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow [\phi\&\psi])]$

(vii) $[\phi \Rightarrow \chi] \Rightarrow [(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ([\phi \vee \psi] \Rightarrow \chi)]$

a pravidla pro rovnost

(i) $x = x$

(ii) $(x = y) \Rightarrow (x = z \Rightarrow y = z)$

(iii) $(x = y) \Rightarrow (((x \in z) \Rightarrow y \in z))$

(iv) $(x = y) \Rightarrow (((z \in x) \Rightarrow z \in y))$.

Nakonec pravidla odvozování:

(i) ψ is vyplývá z ϕ a $\phi \Rightarrow \psi$. ("Modus Ponens")

(ii) $(\forall x\ \phi) \Rightarrow \psi$ vyplývá z $\phi \Rightarrow \psi$.

(iii) $\phi \Rightarrow (\exists x\ \psi)$ vyplývá z $\phi \Rightarrow \psi$.

(iv) $\phi \Rightarrow (\forall x\ \psi)$ vyplývá z $\phi \Rightarrow \psi$, kde x není volná proměnná v ϕ.

(v) $(\exists x\ \phi) \Rightarrow \psi$ vyplývá z $\phi \Rightarrow \psi$, kde x není volná proměnná v ψ.

2.1.25 Axiomy teorie množin (TEMNO)

Teorii množin nazývanou **TEMNO** tvoří následujících 9 axiomů:

(i) Axiom existence množin: $\exists x \forall y\, (\neg\, (y \in x))$

Existuje množina bez prvků.

(ii) Axiom extenzionality: $\forall x \forall y\, (x = y \iff \forall z\, (z \in x \iff z \in y))$

Dvě množiny jsou rovny právě když mají stejné prvky.

(iii) Axiom dvojice: $\forall x \forall y \exists z \forall w\, (w \in z \iff (w = x \vee w = y))$

Pro dvě množiny x a y existuje množina mající za prvky právě tyto množiny.

(iv) Schéma axiomů vydělení: $\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \iff (z \in x\ \&\ \phi\,(z)))$

kde $\phi\,(z)$ je formule jazyka $\mathfrak{L}$ s volnou proměnnou z.

(v) Axiom potence: $\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \iff z \subseteq x)$

Pro každou množinu x existuje množina všech podmnožin x.

(vi) Axiom sjednocení: $\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \iff \exists w\, (z \in w\ \&\ w \in x))$

Pro každou množinu x existuje množina která je sjednocením prvků x.

(vii) Axiom nekonečna: $\exists x\, (\emptyset \in x\ \&\ \forall y\, (y \in x\ \Rightarrow\ y \cup \{y\} \in x))$

Existuje **induktivní množina**.

(viii) Schéma axiomů nahrazení: $\forall x \exists y \forall y'\, (y' \in y \iff \exists x'\, (x' \in x\ \&\ \phi\,(x', y')))$

kde $\phi\,(s,t)$ je formule taková, že $\forall s \exists t\, (\phi\,(s,t)\ \ \&\ \forall t'\, (\phi\,(s,t') \Rightarrow t' = t))$.

(ix) Axiom fundovanosti: $x = \emptyset \vee \forall x \exists y\, (y \in x\ \&\ x \cap y = \emptyset)$

Každá množina je fundovaná, tedy obsahuje $\in -$minimální prvek.

Použili jsme i symboly mimo L, např. $\subseteq$, $\emptyset$, $x \cup y$, $x \cap y$, $\{y\}$ se zřejmým významem.

Nechť S je relační struktura pro jazyk L splňující devět uvedených axiomů. Objektu náležejícímu do S říkáme **množina**. Jestliže $x \in y$ platí pro množiny x a y, říkáme, že x je prvek y.

(A. Zermelo a A.A.Fraenkel 1908)

Je to jako u Beethovena, tem měl 9 symfonií a ty taky mají jména. Třetí je Eroica, devátá je poslední a je i s Ódou na radost. BTW, desátou nedokončil. To by **TEMNO** mohlo mít taky upgrade.

2.1.26 Axiom výběru (AC, axiom of choice)

Pro libovolný systém neprázdných množin existuje množina, která obsahuje po jednom prvku z každé množiny zadaného systému.

(A.Zermelo 1904)

V každé množině mám svého informátora, jejich seznam se mi nepodařilo sepsat ...

AC má řadu důležitých důsledků a je řadou matematiků považován za součást teorie množin. Teorie **TEMNO** spolu s **AC** se nazývá **TEMNO + AC** a je běžně používána v různých partiích matematiky.

Pravidla "povolených činností"v teorii množin neposkytovala automaticky možnost některých zdánlivě samozřejmých operací. Existence množiny, která obsahuje po jednom prvku z předem zadaných množin, se stala zatěžkávací zkouškou teorie množin. Na první pohled se tato existence zdála samozřejmá, její axiomatizace v podobě axiomu výběru však přinesla mnohé těžkosti (existence neměřitelných množin a další paradoxy v teorii míry).

Já mu věřím, i když se mi nepovedl ten seznam ...

2.1.27 Paradox (O shodných množinách na sféře s AC)

S pomocí axiomu výběru lze povrch jednotkové koule rozdělit na disjunktní sjednocení $A \cup B \cup C \cup D$, kde D je spočetná množina a množiny A, B, C a $B \cup C$ jsou shodné.

(F.Hausdorff $\sim$ 1930)

Koupím si z pozlacené koule díl B, ten je stejně velký jako $B \cup C$, tak si odloupnu C a vrátím B. Tady bych se asi mohl snadno napakovat ...

2.1.28 Paradox (O dvou koulích s AC)

Jednotková koule v prostoru jde rozdělit na 5 identických částí, ze dvou z nich jde opět sestavit jednotková koule, ze zbývajících tří také.

(S.Banach a A.Tarski $\sim$ 1925)

„Všechno,“ řekl K. - zvykl si na to vyčítání a vzpamatoval se - „všechno, co říkáš, je v jistém smyslu správné; není to nepravdivé, jen je to nepřátelské.“
(F.Kafka $\sim$ 1925)

Paradox je to šílený. Představa, že hmota by šla zdvojit, je lákavá. Nicméně jde o množinovou věc. Kdyby se to odehrávalo v celém prostoru, vůbec by to nepřekvapilo. Ty kousky by byly nekonečně veliké a o nic by nešlo.

2.1.29 Ekvivalentní formulace AC

Každý vektorový prostor má bázi.

Součin neprázdných množin je neprázdný.

Každá dvě kardinální čísla jsou srovnatelná.

Každá neprázdná částečně uspořádaná množina M, ve které každý řetěz má suprémum, má maximální prvek.

(Zorn)

Axiom dobrého uspořádání (WO): Každá množina lze dobře uspořádat.

(Zermelo 1904)

Dobře uspořádat se asi nerovná uklidit . . .

2.1.30 Důsledky AC

Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina.
Nekonečná množina má spočetnou podmnožinu.
Reálná čísla nejsou spočetné sjednocení řídkých množin.

(R.L.Baire $\sim$ 1920)

2.1.31 Slabší verze AC

Axiom závislého výběru (**DC**) : Nechť v neprázdné množině má každý prvek alespoň jeden prvek, který mu něco "dluží". Pak je možné najít nekonečnou posloupnost "zřetězených"dlužníků.

Axiom spočetného výběru (**CC**) : Pro libovolný spočetný systém neprázdných množin existuje množina, která obsahuje po jednom prvku z každé množiny zadaného systému.

2.1.32 Věta (Mohutnost množiny reálných čísel)

Mohutnost množiny $\mathbb{R}$ se označuje $\mathfrak{c}$ a platí $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

(G.Cantor 1899)

To $\mathfrak{c}$ je podle slova continuum.

Důkaz: Podmnožiny přirozených čísel odpovídají posloupnostem nul a jedniček, tyto posloupnosti pak ve dvojkovém zápisu odpovídají reálným číslům. ■

To, že je reálných čísel nespočetně, jsem věděl dávno. Například nešly mi sečíst.

2.1.33 Hypotéza kontinua (CH, continuum hypothesis)

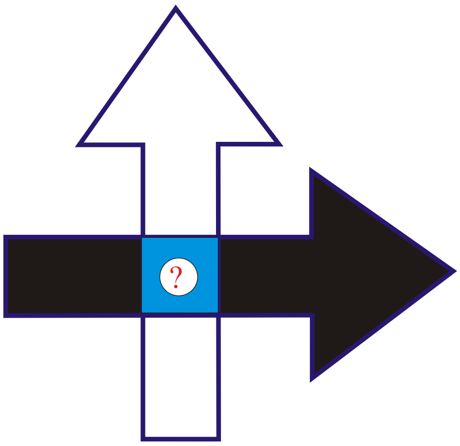
Každá nekonečná podmnožina $\mathbb{R}$ má stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$ nebo jako $\mathbb{N}$.

(G.Cantor 1878)

Hypotézu kontinua uvedl D. Hilbert v roce 1900 na seznam důležitých matematických problémů na první místo. Jde o rovnost $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, kde $\aleph_1$ označuje nejmenší nespočetné kardinální číslo.

2.1.34 Černobílá rovina s CH (Pro optimisty i pesimisty)

S pomocí **CH** je možné obarvit rovinu dvěma barvami, černou a bílou, tak, že každá vodorovná přímka bude černá, až na spočetně mnoho bílných bodů a že každá svislá přímka bude bílá, až na spočetně mnoho černých bodů.



Obrázek 2.1.34: Neměřitelná množina s divnými řezy.

(W.Sierpiński)

2.1.35 Zobecněná hypotéza kontinua (GCH)

Pro žádný nekonečný kardinál $\mathfrak{m}$ neexistuje kardinál $\mathfrak{n}$ splňující $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$

(G.Cantor 1899)

Z **GCH** plyne **AC**.

2.1.36 Definice (Malý kardinál)

Označíme $\mathfrak{d}$ takové kardinální číslo, že množina iracionálních čísel lze pokrýt $\mathfrak{d}$ kompaktními podmnožinami iracionálních čísel, ale ne méně než $\mathfrak{d}$.

(F.Rothenberg 1939)

Sezveme všechny kardinály a pak najdeme ty malé, pak mezi nima ...

2.1.37 Definice (Velké kardinály)

Každé kardinální číslo má svého bezprostředního následovníka, nejmenší kardinální číslo, které je větší. Říkáme, že kardinální číslo je **limitní kardinální číslo**, pokud nemá svého předchůdce.

Říkáme, že kardinální číslo je **silně limitní kardinální číslo**, pokud je větší než velikost potenční množiny každého menšího kardinálu.

Je definována řada dalších "velkých"kardinálních čísel, které mohou a nemusí existovat v teorii množin. Jejich existence bývá přidávána k teorii množin jako další axiom. Uvedeme názvy některých takových kardinálních čísel:

slabě nedosažitelný $\leq$ silně nedosažitelný $\leq$ slabě kompaktní $\leq$ subtilní $\leq$ nevýslovný $\leq$ měřitelný $\leq$ silně kompaktní $\leq$ superkompaktní $\leq$ obří .

A jeden kardinál je můj, na ten mi nešahejte!

2.1.38 Definice (Konstruovatelné množiny)

Označíme **V** třídu všech množin.

Označíme **L** třídu všech množin, které získáme transfinitní indukcí z prázdné množiny, pokud v každém kroku použijeme pouze "konečné konstrukce"(vynecháváme nyní detaily těchto konstrukcí, nepoužijeme např. možnost vytvoření potenčních množin) z množin předcházejících kroků. Říkáme, že **L** je **třída konstruovatelných množin** a její prvek nazýváme **konstruovatelná množina**.

Tvrzení **V = L** se nazývá **axiom konstruovatelnosti**. Rozšíření teorie množin **TEMNO** o tento axiom se nazývá **TEMNO + V = L**.

(K.Gődel 1938)

2.1.39 Nekonečné hry

Je dána podmnožina M reálné osy. Dva hráči střídavě určují cifry desetinného rozvoje společně vytvářeného reálného čísla x. Hráč A vyhraje, pokud bude $x \in M$, jinak vyhraje hráč B. Množina A se nazývá **determinovaná množina**, pokud má alespoň jeden hráč vyhrávající strategii.

(H.Steinhaus 1925)

Například množina iracionálních čísel má vyhrávající strategii pro hráče A vytvářením neperiodické posloupnosti.

2.1.40 Axiom determinovanosti (AD)

Každá množina reálných čísel je determinovaná.

(H.Steinhaus a J.Mycielski 1962)

Mezi důsledky axiomu determinovatosti patří měřitelnost všech podmnožin reálných čísel.

2.1.41 Konzistence teorie množin

Konzistence dané teorie znamená, že v ní nelze dokázat zároveň tvrzení i jeho negaci.

Jsou axiomy teorie množin v pořádku? Je teorie množin bezesporná? Mají (nebo mohou) se přidávat další axiomy? Těmito problémy se zabývala celá řada matematiků.

2.1.42 Věta o konzistenci s CH

Přidáním **CH** do **TEMNO** (+ **AC**) neporušíme případnou konzistenci.

(K.Gődel 1931)

2.1.43 Věta o konzistenci s negací CH

Přidáním $\neg$ **CH** do **TEMNO** (+ **AC**) neporušíme případnou konzistenci.

(P.Cohen 1963)

Bůh existuje, protože je matematika konzistentní, a Ďábel existuje, protože to nemůžeme dokázat.

(A.Weil $\sim$ 1970)

Důkaz: Vycházíme ze základní teorie a přidáme nové tvrzení. Zde použijeme existenci $\aleph_2$ různých podmnožin $\aleph_0$ a vytvoříme rozšíření **TEMNO**, kde neplatí **CH**. ■

Netoda důkazu se nazývá **forsing**. Principem je postup podobný tomu, když se k reálným číslům přidají kořeny rovnice $x^2 + 1 = 0$ a najde se nejmenší nadtěleso reálných čísel, v němž je rovnice řešitelná.

2.1.44 Věta (Existuje nedokazatelná pravda)

Pro každý konzistentní axiomatický systém Σ teorie množin existuje pravdivé tvrzení nedokazatelné v Σ.

(K.Gődel 1931)

Nevěřím přírodním vědám.
(K.Gődel $\sim$ 1930)

Důkaz: Nechť $\mathcal{D}$ označuje množinu čísel, která kódují dokazatelná tvrzení (například převedením textu důkazu do počítače získáme jednoznačný číselný zápis textu). Označíme tento kód tvrzení d zápisem $< d >$.

Tedy $< d > \in \mathcal{D}$ právě tehdy, když je d dokazatelné.

Označme q větu "Tato věta je nedokazatelná."Tedy

$$q \iff < q > \notin \mathcal{D} \iff q \text{ je nedokazatelné .}$$

Pokud je q nepravda, pak je q dokazatelné, což není možné, protože v konzistentním systému jdou dokázat pouze pravdivá tvrzení. Tedy je q pravdivé. Tedy je nedokazatelné. Tedy jsme našli pravdivé a nedokazatelné tvrzení. ■

Místo věty „Tato věta je nedokazatelná“ je možné najít i jiná tvrzení, která jsou pravdivá a nedokazatelná. Například existuje konkrétní celočíselný polynom P takový, že tvrzení „Polynom P nemá celočíselné řešení“ je pravdivé, ale nedokazatelné.

Důležitou součástí důkazu je **diagonalizace**: Pro relaci $R(x, y)$ definujeme výrok $V(x) = \neg R(x, x)$, pak V není roven žádnému výroku R_x definovanému $R_x(y) \iff R(x, y)$, protože V nasouhlasí s R_x v x.

2.1.45 Věta (Nedokazatelnost vlastní konzistence)

Je-li Σ konzistentní a dostatečně bohatý axiomatický systém teorie množin, pak v Σ nelze dokázat konzistenci Σ.

(K.Gődel 1931)

Důkaz: Jde totiž dokázat, že tvrzení: „Tato věta je nedokazatelná.“ a tvrzení: „Neexistuje $< r >$ takové, že $< r >$ a zároveň $< \neg r >$ jsou v $\mathcal{D}$.“ vyjadřující konzistenci Σ jsou ekvivalentní. Tedy podle předchozí věty je důkaz hotov. ■

Když budu dost bohatý, dokážu cokoliv ...

2.1.46 Nová axiomatika na obzoru?

Jaká axiomatika je ta nejlepší? Je to axiomatika

$$\mathbf{TEMNO} + \neg\mathbf{AC} + \mathbf{CC} + \neg\mathbf{CH} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2 + \mathbf{AD} + \cdots$$

nebo zcela jiná?

Podaří se sestavit axiomatický systém, aby nedokazatelná zůstala pouze tvrzení typu: „Tato věta je nedokazatelná.“?

2.2 Oblíbená říkadla v matematické analýze

2.2.1 Základní ukolébavka

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x platí

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad .$$

(A.L.Cauchy a B.Bolzano 1821)

Tvrzení podobná tomuto jsou je v matematické analýze nejčastější. Zde uvedené tvrzení vyjadřuje spojitost funkce f v bodě x_0.

... a je to tady :-(
Pokusíme se taková říkadla zvládnout s úsměvem :-)

2.2.2 Velký Kvantifikátor si toho navymýšlí ...

Velký Kvantifikátor $\forall$ je formulka, která donutí všechny další výroky v řadě za ním (t.j. nás) sloužit do roztrhání těla. Musí být totiž ochotni ke každému objektu, který jim Velký Kvantifikátor předloží, dokázat zbytek tvrzení.

Ve skutečnosti se vlastně dokazuje zbytek tvrzení s „parametry“, které předloží Velký Kvantifikátor.

Zbytek tvrzení (t.j. my) musí mít nutně pocit, že si Velký Kvantifikátor příliš vymýšlí :-(

Věta : Ka každému vejci existuje slepice, která ho snesla.

Důkaz: Velký Kvantifikátor nachystá vejce, a zbytek tvrzení (my) musí hledat tu šikovnou slepici, která ho snesla. Tak se můžeme bavit do nekonečna . . . Pokud ovšem zbytek tvrzení nejde dokázat přímo, například sporem: kdyby žádná slepice nebyla, tak by to vejce neexistovalo, spor. ■

Testem prvotřídní inteligence je schopnost pojmout dvě protichůdné myšlenky a zachovat si funkčnost.

(F.S.Fitzgerald)

2.2.3 Malý Kvantifikátor dává hádanky ...

Malý Kvantifikátor $\exists$ je formulka, která (nás) donutí hledat odpověď na hádanku, která spočívá v platnosti dalších výroků v řadě za Malým Kvantifikátorem.

Musíme být šikovní a najít, v čem hádanka spočívá.

... a pokud je hádanka pěkná, máme pak radost :-)

Věta : Existuje slepice, která snesla alespoň dvě vejce.

Důkaz: Malý Kvantifikátor nám zadal hádanku, my budeme buď hledat konkrétní superslepici, nebo můžeme spočítat vejce a slepice, pokud je počet vajec větší, máme existenční důkaz hotov. ■

Často zadrží kance nepříliš veliký pes.

(Ovidius)

2.2.4 Třikrát a dost !

Tři kvantifikátory již vyžadují velikou pozornost.

základní škola	1 kvantifikátor
střední škola	2 kvantifikátory
vysoká škola	3 kvantifikátory

Obrázek 2.2.4: Jak nás kvantifikátory provází životem.

Vyšší počet kvantifikátorů než 3 již nezvyšuje náročnost.

P O Z O R ! ! !
Pro pochopení dalších věcí je třeba zvládnout bezpečně úlohy se třemi kvantifikátory. Těžko na cvičišti, lehko na bojišti :-)

2.2.5 Cvičiště se třemi kvantifikátory

$\forall\,\exists\,\forall$: Každý den existuje okamžik, že kdykoliv později bude již většina toho dne v tahu.

Oběd ničím nenahradíš.

Nalezněte příklady na dalších 7 možností. Všimněte si, že pořadí kvantifikátorů je důležité!

Člověk se nenaučí dělat matematiku **posloucháním** vybroušených výkladů pri vyučovacích hodinách, nýbrž **samostatnou prací** s matematickými pojmy.
(G.Choquet ∼ 1990)

2.2.6 Bojiště s ....

$[(\exists x \in M)\&(\exists y \forall x(x \in M \Rightarrow x \leq y))] \Rightarrow [\exists z \forall y(\forall x(x \in M \Rightarrow x \leq y) \Leftrightarrow z \leq y)].$

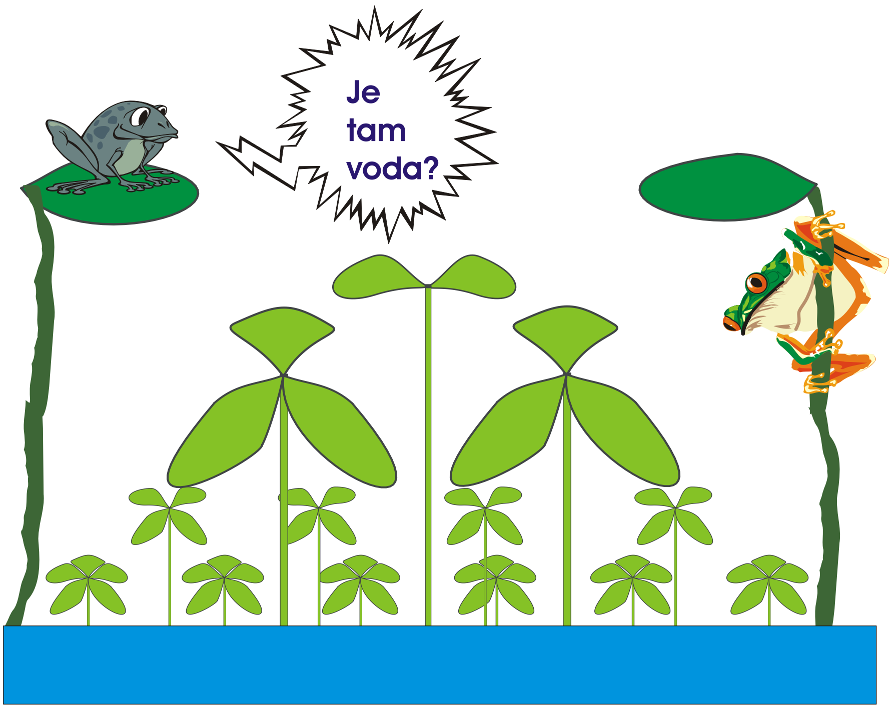
Podařilo se rozluštit?

2.2.7 Další záludnosti již nejsou ...

Důkazová technika v matematické analýze používá běžný výrokový počet (implikace, důkaz sporem, matematickou indukci, ...).

2.3 Reálná čísla

Představme si rybníček, ve kterém přes léto vyrašily všechny možné n-lístky, každý druh v konečném počtu exemplářů. Zbyla tam ještě nějaká voda?



Obrázek 2.3.0: Je tam kromě rostlinek i voda?

Při ideálně tenkých stoncích jistě ano.

Toto je podstata reálných čísel. Mezi racionálními čísly (rostlinky) je ještě spousta iracionálních čísel (vody).

Obrázek 2.3.0: Ano, jen ji najít.

2.3.1 Konstrukce racionálních čísel

Konstrukce racionálních čísel je příkladem na třídy ekvivalence pro vhodnou relaci. Relace $\approx$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ se definuje vztahem $(a, b) \approx (c, d)$ právě tehdy, když $ad = bc$. Vlastně to znamená, že platí pro "zlomky"následující rovnost

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

zde ovšem ještě neumíme říci, co je dělení dvou celých čísel.

> Hubička je nic dělené dvěma.
>
> (anonym)

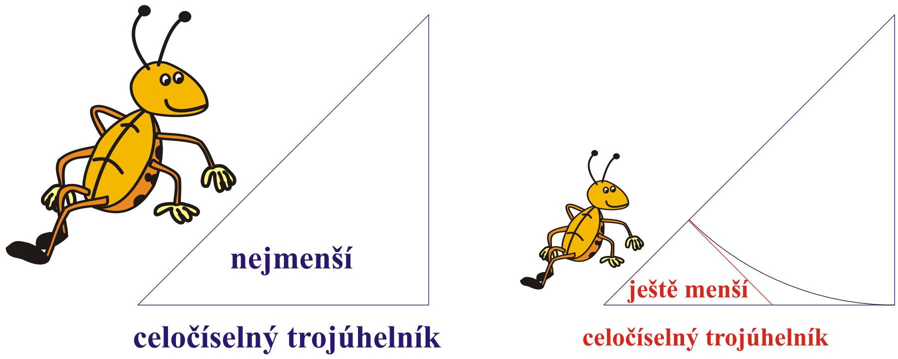
Třída ekvivalence podle této relace příslušná pro danou dvojici je tvořena všemi dvojicemi, které dávají při naznačeném "dělení"stejný výsledek. Třídu ekvivalence nazveme **racionální číslo**. S těmito třídami musíme umět počítat, definujeme tedy operace s těmito třídami tak, že počítáme s vybraným zástupcem každé třídy (ukáže se, že výsledek nezávisí na výběru prvku) a výsledek zase určí třídu, odpovídající výsledku. Nakonec se identifikují „stará“ přirozená čísla n s třídou $[(n, 1)]$, ponechá se značení a najdou se na číselné ose racionální čísla (jejich obrazy).

... a jede se dál :-)

Tato metoda je důležitá i v jiných situacích.

2.3.2 Věta ($\sqrt{2}$ není racionální - geometrický důkaz)

$\sqrt{2}$ odpovídá velikosti přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s jednotkovými odvěsnami. Je-li $\sqrt{2}$ racionální, pak existuje podobný trojúhelník s celočíselnými stranami. V nejmenším takovém celočíselném (q, q, p) najdeme menší celočíselný $(p-q, p-q, 2q-p)$, což je spor.



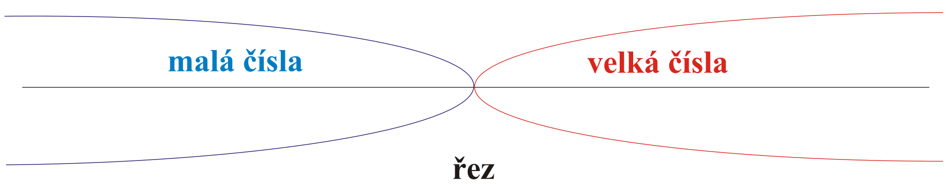
Obrázek 2.3.2: Nejmenší celočíselný nenajdeme.

(T.M.Apostol)

> Žádný dům není tak malý, aby nepojal mnoho přátel.
>
> (Seneca)

2.3.3 Konstrukce reálných čísel pomocí řezů

Řekneme, že rozdělení množiny racionálních čísel na dvě neprázdné podmnožiny tvoří **řez**, pokud všechny prvky první („malé“) množiny jsou menší než všechny prvky druhé („velké“) množiny (přitom navíc chceme, aby „malá“ množina neměla největší prvek, přesuneme ho případně do „větší“ množiny).



Obrázek 2.3.3: Řez množiny racionálních čísel.

Tyto řezy nazveme **reálná čísla** a množinu všech řezů označíme $\mathbb{R}$. S těmito řezy musíme umět počítat, definujeme tedy operace s těmito řezy tak, že při operaci počítáme se všemi prvky „malé“ množiny, výsledek pak určuje „malou“ množinu výsledku. Nakonec se identifikují "stará"racionální čísla r s řezem ($(-\infty, r),\ [r, +\infty)$), ponechá se značení a najdou se na číselné ose reálná čísla (jejich obrazy).

... a jsme tam (v $\mathbb{R}$).

Každý řez tak identifikuje právě jedno místo na číselné ose. Tak se podařilo zaplnit všechny „mezery“, číselné ose nyní nic nechybí.

(R.Dedekind $\sim$ 1869)

Zřejmý důvod pro studentův nezájem je to, že nepředstavujeme celý obraz matematiky jako oboru, kde si můžete vybírat mezi mnoha kariérami, které jsou intelektuální odměnou i výzvou.
(Griffith 2000)

2.3.4 Věta (Axiomy reálných čísel)

Množina $\mathbb{R}$ všech **reálných čísel** splňuje následující axiomy

Axiomy tělesa:

Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z,\ x(yz) = (xy)z.$

(ii) $x + y = y + x,\ xy = yx.$

(iii) $x(y + z) = xy + xz.$

(iv) $x + 0 = x,\ x1 = x.$

(v) $\forall x\ \exists y\ :\ x + y = 0.$

(vi) $\forall x \neq 0\ \exists y : xy = 1.$

Když chce být muž šťastný, nesmí přičítat k vlastnictví, ale odečítat od potřeb.
(Seneca)

Axiomy uspořádání:

Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$

(i) nastává právě jedna z možností $x < y, x = y, y < x$

(ii) $x < y \,\&\, y < z \Longrightarrow x < z.$

(iii) $x < y \Longrightarrow\; x + z < y + z.$

(iv) $(x < y \,\&\, 0 < z) \Longrightarrow xz < yz.$

Axiom zařazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$:

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$.

(Archimédés ze Syrákús $\sim$ -250, Eudoxus)

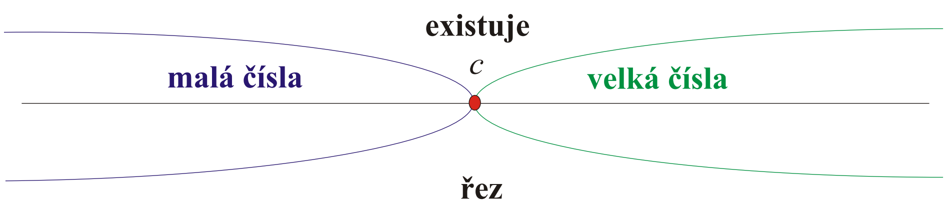
Výchova by měla být taková, aby to, co je nabízeno, bylo přijímáno jako cenný dar, ne jako povinnost.
(A.Einstein $\sim$ 1940)

Axiom úplnosti:

Je-li $\mathbb{R}$ disjunktní sjednocení neprázdných množin A a B, přičemž všechny prvky A jsou menší než všechny prvky B, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$A = (-\infty, c),\;\; B = [c, \infty) \;\text{ nebo }\; A = (-\infty, c],\;\; B = (c, \infty)\;.$$

(R.Dedekind $\sim$ 1869)



Obrázek 2.3.4: Řez určuje nějaké "číslo".

Tyto axiomy jednoznačně popisují množinu reálných čísel.

Všimněme si, že axiom úplnosti tvoří řezy na množině řezů ;-)

2.3.5 Poznámka ke konstrukci reálných čísel

Pokud bychom definovali množinu reálných čísel pomocí výše uvedených axiomů, nebyli bychom si jisti, že taková množina existuje. Proto je potřeba nějaká konstrukce (například výše uvedená konstrukce řezů), nebo jiný důkaz existence.

Další možné konstrukce reálných čísel jsou použití fundamentálních posloupností nebo konečných desetinných rozvojů, což jsou opět metody, které "identifikují"mezery v číselné ose.

> Ten, který rozumí Archimédovi a Apolloniovi, bude méně obdivovat výsledky jejich následovníků.
> (G.W.Leibnitz ∼ 1680)

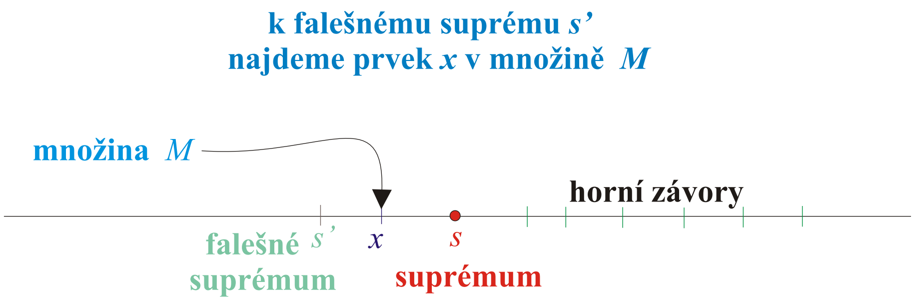
2.3.6 Definice (Suprémum)

Řekneme, že množina M reálných čísel je **omezená množina**, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechny prvky $x \in M$ platí $x \le K$. Takové číslo K se zazývá **horní závora** množiny M. Existuje-li nejmenší horní závora množiny M, nazveme ji **suprémum**.

Číslo s je suprémem množiny M právě když

(i) pro všechny prvky $x \in M$ platí $x \le s$ (... jde o horní závoru),

(ii) pro všechna čísla $s' < s$ existuje $x \in M$ tak, že platí $s' < x$ (... je nejmenší závora).



Obrázek 2.3.6: Suprémum je největší pravý kraj množiny.

> Číslo s' je "falešné suprémum", něco jako falešná nevěsta ;-)

Podobně se definuje **infimum** (největší **dolní závora**).

> Vzdělání má hořké kořeny, ale sladké ovoce.
> (Démokritos z Abdér ∼ -400)

2.3.7 Věta (Axiom o suprému)

Každá neprázdná shora omezená množina má suprémum.

Důkaz: Jde o tvrzení ekvivalentní s axiomem úplnosti. ■

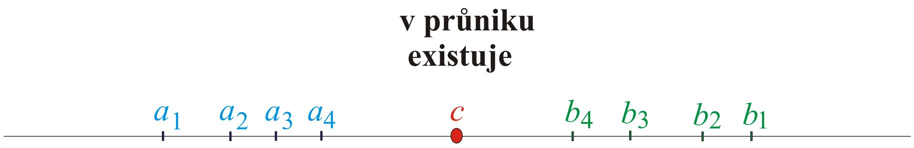
2.3.8 Věta (O neprázdném průniku intervalů)

Průnik posloupnosti intervalů

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$$

je neprázdný.

(K.Weierstrass 1874)



Obrázek 2.3.8: Průnik intervalů bude neprázdný.

Důkaz: Jde o tvrzení ekvivalentní s axiomem úplnosti. ■

Důkaz je něco jako polapit pachatele. Musíme uzavřít všechny východy a udělat BAF!!!

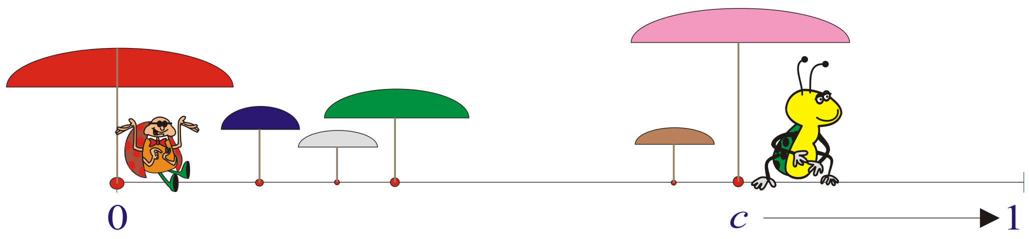
2.3.9 Věta (Plážové lemma o slunečnících)

Nechť má každý človíček (reálné číslo x) na pláži (interval $[0,1]$) svůj slunečník (interval $U(x) = (x - \delta_x, x + \delta_x)$). Pak se mohou všichni človíčci schovat před sluncem (svítícím kolmo) pod konečně mnoha slunečníky (teda $[0,1]$ je podmnožinou konečného sjednocení intervalů $U(x_1) \cup U(x_2) \cup \cdots \cup U(x_n)$ pro vhodné body $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$).

(H.E.Heine 1872, É.Borel 1875)

Důkaz: Označíme A množinu všech záporných čísel spolu s těmi čísly $x \in [0,1]$, pro které je možné „konečné" pokrytí na kousku pláže $[0,x]$. Množina A jako „dolní" množina definuje řez na množině reálných čísel, podle axiomu úplnosti existuje c, které tomuto řezu odpovídá. Pak $c = 1 \in A$ (jinak použijeme slunečník v bodě c a pokryjeme větší kousek pláže). ■

Běžně se tomuto tvrzení říká „plíživé lemma", neboť informace (zde konečné pokrytí) se nenápadně plíží zleva doprava a nakonec dosáhne bodu 1.



Obrázek 2.3.9: Plážové lemma.

2.3.10 Definice (Rozšířená reálná osa)

Přidáme k reálným číslům dva další prvky, $-\infty$ a $+\infty$ a nazveme takto vzniklou množinu **rozšířená reálná osa**, značíme $\mathbb{R}^*$. Rozšíříme operace uspořádání, sčítání a násobení tam, kde to dává smysl. $\mathbb{R}^*$ tím získá vzhledem k uspořádání strukturu intervalu $\mathbb{I} = [0, 1]$.

(J.Wallis 1655)

Obrázek 2.3.10: Rozšířená reálná osa.

Jedná se vlastně o kompaktifikaci $\mathbb{R}$. Nyní platí (v $\mathbb{R}^*$) axiom o suprému takto: „Každá množina má suprémum.“

2.4 Komplexní čísla

2.4.1 Konstrukce komplexních čísel

Množinou $\mathbb{C}$ rozumíme množinu uspořádaných dvojic (a, b) reálných čísel s operacemi

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)\ , \quad (a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)\ .$$

Prvek $\mathbb{C}$ nazýváme **komplexní číslo**. Reálné číslo x ztotožňujeme s dvojicí $(x, 0)$. Označíme $i = (0, 1)$ a budeme ho nazývat **imaginární jednotka**. Pak lze psát

$$(a, b) = a + ib$$

a platí všechna pravidla počítání, používáme dodatečnou informaci $i^2 = -1$.
Identifikaci komplexních čísel $a + ib$ s body $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nazýváme **komplexní rovina**.

(C.F.Gauss $\sim$ 1800)

Nejsem nikdy spokojen, pokud neřeknu co nejvíce co nejméně slovy.
(K.F.Gauss ∼ 1829)
…je jako liška, která ocasem zametá stopy.
(N.H.Abel ∼ 1829)

To i je prostě v komplexní rovině „nahoře“, to má za následek, že násobení číslem i otáčí rovinu „doleva“ (z bodu 1 do i).

Jiná možnost definice komplexních čísel vychází z algebry, kde se konstruuje kořenové nadtěleso tělesa reálných čísel, ve kterém je řešitelná rovnice $x^2 + 1 = 0$.

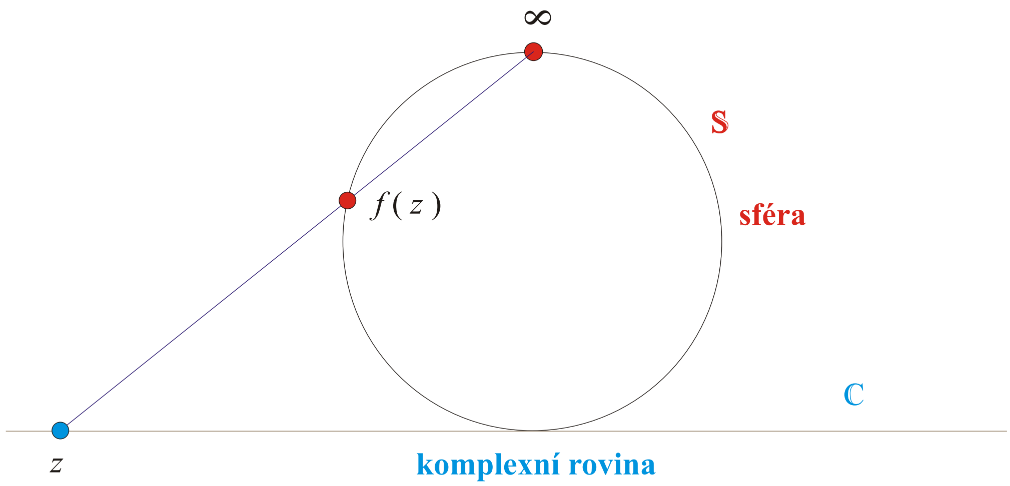
2.4.2 Definice (Rozšířená komplexní rovina)

Přidáme ke komplexním číslům další prvek ∞ a nazveme takto vzniklou množinu **rozšířená komplexní rovina**, značíme $\mathbb{S}$. Pro představu je možné použít zobrazení, které každému komplexnímu číslu z přiřadí bod $f(z)$ na jednotkové sféře (sféra se dotýká komplexní roviny) na spojnici „severního pólu“ a bodu z. Tím zobrazíme $\mathbb{C}$ na sféru (s výjimkou „severního pólu“, ten odpovídá bodu ∞).

Obrázek 2.4.2: Tučňáci marně hledají severní pól.

Takto má $\mathbb{S}$ strukturu jednotkové sféry v $\mathbb{R}^3$.

Jedná se zde vlastně o kompaktifikaci $\mathbb{C}$.



Obrázek 2.4.2: Přidáním severního pólu dostaneme rozšířenou komplexní rovinu.

2.4.3 Věta (Základní věta algebry)

Polynom kladného stupně má kladný počet kořenů.

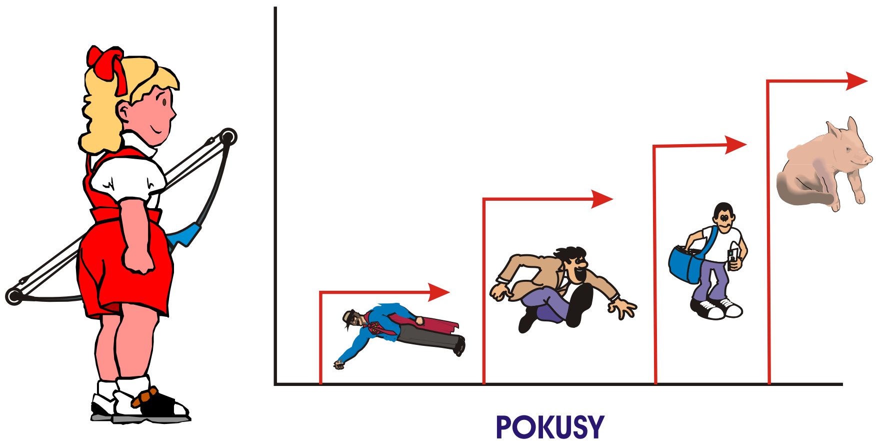
U stupně $n > 0$ má právě n kořenů (počítáme-li násobnost). Nalezení toho prvního kořene mi dá vždycky největší práci.

2.5 Posloupnosti

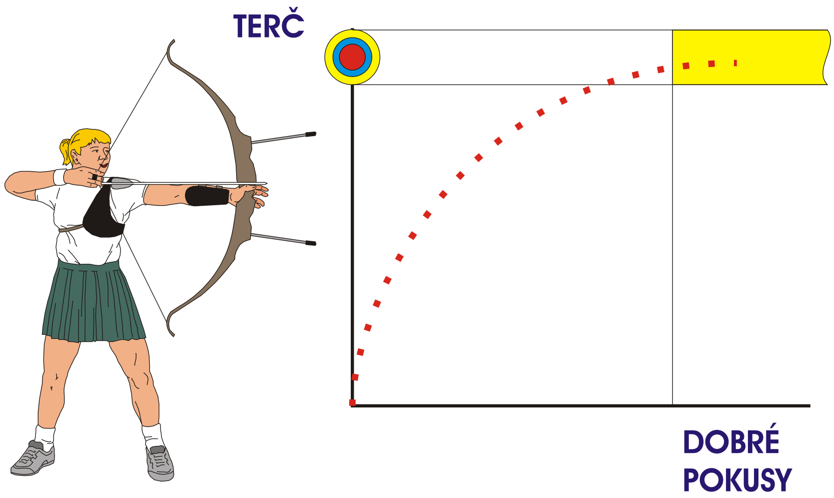
Malá Evička dostala luk a šípy. Nejprve si nebyl jistý vepřík, pošťák, soused, prostě nikdo.

Obrázek 2.5.0: Byl to těžký život, než se to Evička naučila alespoň trošku.

Pak se zlepšila, takže se postupně soused, pošťák i vepřík přestali bát.
Když Evička vyrostla, byla skvělá. Ať dostala libovolně malý terč, vždy se vypracovala a od jisté doby jej neminula.



Obrázek 2.5.0: Ano, pak nastal klid.



Obrázek 2.5.0: Ano, Evička je skvělá.

2.5.1 Definice (Limita)

Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je **limita posloupnosti** $\{x_n\}_1^{+\infty}$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $|x_n - A| < \varepsilon$.

Píšeme

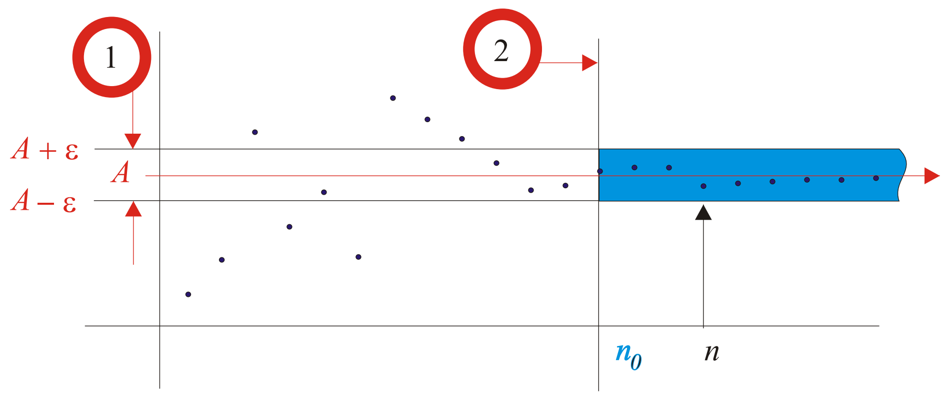
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = A\,, \quad \text{nebo} \quad x_n \to A,\ n \to +\infty\,.$$

Říkáme v tom případě, že posloupnost $\{x_n\}_1^{+\infty}$ **konverguje k** $A \in \mathbb{R}$.

(A.L.Cauchy 1821)

Ta hra na tři kvantifikátory je síla …

Podobně můžeme definovat i pro $A \in \mathbb{R}^*, \mathbb{C}$.



Obrázek 2.5.1: Limita posloupnosti.

Jde o jakousi ustálenou hodnotu v nekonečnu. Je to základní postup analýzy. Chceme, aby určitá veličina byla ve svém „finálním stádiu" nějak odhadnutelná.

... a stačí 3 kvantifikátory ! Takto založená analýza má pevné základy. Předtím se počítalo (například plocha kruhu) s limitami bez definice . . .

2.5.2 Další pojmy

Zkoumáme tyto pojmy:

- **monotónní posloupnost** (... hodnoty posloupnosti stále např. rostou)
- **omezená posloupnost** (... hodnoty posloupnosti jsou omezené)
- **vybraná podposloupnost** (... některé členy posloupnosti škrtneme)
- **hromadný bod** (... k němuž konverguje nějaká vybraná podposloupnost)
- **limes superior** (... největší hromadný bod)
- **limes inferior** (... nejmenší hromadný bod)

2.5.3 Další věty

Větší posloupnost má větší (nebo stejnou!) limitu než menší posloupnost.

Limita součtu (součinu, podílu, ...) je rovna součtu (součinu, podílu, ...) limit.

Monotónní posloupnost má limitu.

2.5.4 Věta (Existence hromadného bodu)

Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.

(B.Bolzano $\sim$ 1850, K.Weierstrass $\sim$ 1869)

No oni v těch posloupnostech měli namočené prsty mnozí. Je pěkné, že našli všichni to samé.

Důkaz: Půlením intervalů získáme vybranou konvergentní podposloupnost. ■

Tak se hledají lvi na Sahaře.

2.5.5 Věta (Podmínka ustálenosti)

Posloupnost $\{x_n\}_1^{+\infty}$ má vlastní limitu právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n, m > n_0$ platí $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

(A.L.Cauchy 1821, B.Bolzano 1817)

Přednost podmínky ustálenosti před definicí limity je v tom, že nemusíme znát hodnotu limity, tedy stačí zjistit, že se hodnoty posloupnosti „již příliš nemění“ (od určitého indexu ...).
POZOR !!!
Toto je opravdu chytré :-)

Posloupnost splňující podmínku ustálenosti podmínku se nazývá **ustálená posloupnost**.

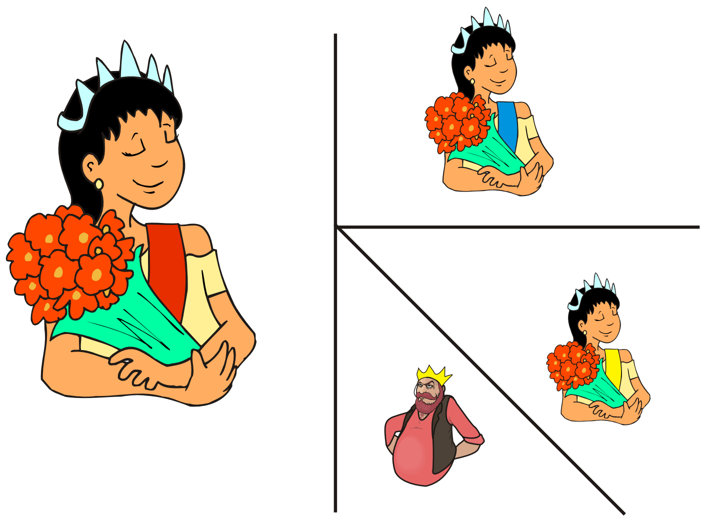
2.5.6 Konstrukce reálných čísel pomocí posloupností

Prohlásíme za ekvivalentní každé dvě posloupnosti racionálních čísel se stejnou konečnou limitou. Třída ekvivalence (podle této ekvivalence) příslušná pro danou posloupnost je tvořena všemi posloupnostmi, které mají stejnou limitu. S těmito třídami musíme umět počítat, definujeme tedy operace s těmito třídami tak, že počítáme s vybraným zástupcem každé třídy (ukáže se, že výsledek nezávisí na výběru posloupnosti) a výsledek zase určí třídu, odpovídající výsledku. Nakonec se identifikují racionální čísla s konstantními posloupnostmi. Množina tříd ekvivalence je jiný popis reálných čísel (jde ukázat, že jsou splněny příslušné axiomy).

Prostě reálná čísla nemají dírky, ty se pojmenují buď pomocí řezů nebo pomocí konvergentních posloupností racionálních čísel.

2.6 Řady

Budeme nekonečně mnohokrát sčítat (nebo odečítat).



Obrázek 2.6.0: Jestli má král opravdu nekonečně mnoho dcer, tak skončí na mizině.

2.6.1 Definice (Formální řada čísel)

Nechť $\{x_n\}_1^{+\infty}$ je posloupnost (komplexních) čísel. Nazveme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$$

nekonečná řada, číslo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = s_n$$

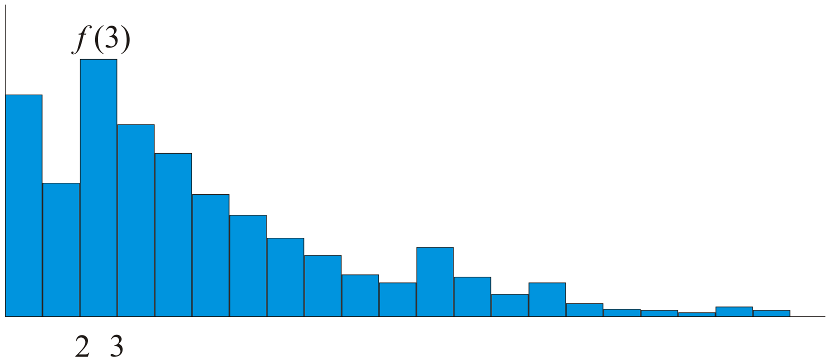
nazveme n-tý **částečný součet řady**. Má-li posloupnost částečných součtů (t.j. posloupnost $\{s_n\}_1^{+\infty}$) konečnou limitu s, řekneme, že **řada konverguje** a má součet s,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = s$$

jinak říkáme, že **řada diverguje**.

(Gregory 1668)

Mimojiné to vypadá, že součet řady byl definován historicky dříve než limita posloupnosti. Hle ...



Obrázek 2.6.1: Při konvergenci jde o konečnost plochy pod grafem po částech konstantní funkce $f \restriction (n-1, n] = x_n$.

Největší věci na světě jsou působeny jinými věcmi, které podceňujeme, malými příčinami, které přehlížíme a které se posléze hromadí.
(G.Ch.Lichtenberg $\sim$ 1770)

Řekneme, že **řada konverguje absolutně**, když konverguje řada z absolutních hodnot členů původní řady.

2.6.2 Věta (Nutná podmínka konvergence)

Je-li řada $\sum x_n$ konvergentní, pak posloupnost $\{x_n\}$ má limitu 0.

Důkaz: Vidíme, že $s_{n+1} - s_n = x_{n+1}$ a provedeme limitní přechod $n \to +\infty$. $\blacksquare$

Chování vědce připomíná chování průzkumníka na pochodu napínajícího všechny smysly, využívajícího postranní pěšinky a připraveného přijmout všechny podněty.
(G.Choquet $\sim$ 1990)

Ono to zde jinak nejde. Když si toho nevšimnete, vypadáte směšně.

2.6.3 Věta (Srovnávací kritérium)

Pokud $x_n > y_n > 0$ a $\sum x_n$ konverguje, pak $\sum y_n$ konverguje (nazýváme řadu $\sum x_n$ **majorantní řada** k řadě $\sum y_n$).

(A.L.Cauchy 1821)

Jde o často používaný test konvergence. Pro jeho používání potřebujeme řady, které jde používat jako majoranstní (a minorantní). Potřebujeme tedy vlastně řadu řad ;-)

2.6.4 Věta (Harmonická řada diverguje)

Nazveme řadu $\sum 1/n$ **harmonická řada**. Harmonická řada diverguje.

(N.Oresme 1350)

Důkaz: Ozávorkujeme a vidíme, že posloupnost částečných součtů je neomezená

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

■

2.6.5 Věta (Konvergence geometrické řady)

Nazveme řadu $\sum q^n$ **geometrická řada**. Geometrická řada konverguje pro $|q| < 1$.

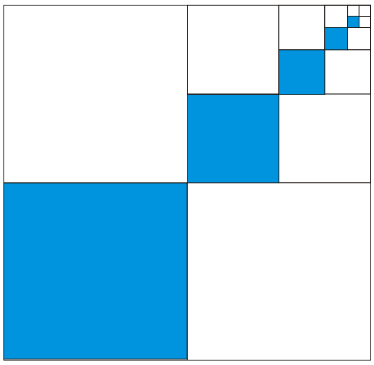
(Archimédés ze Syrákús $\sim$ -250, F.Viete 1593)

Důkaz: Zjistíme snadno částečné součty a spočteme limitu. ■

Je neuvěřitelné, jak taková blbinka jako geometrická řada může být důležitá.

Srovnáním s geometrickou řadou dostaneme **podílové kritérium**

$$\exists q : \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < q < 1 \implies \text{řada } \sum x_n \text{ konverguje}$$



$$\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ \dots\ = \frac{1}{3}$$

Obrázek 2.6.5: Kdo má oči k vidění, tak to vidí.

(d'Alembert 1765)

a **odmocninové kritérium**

$$\exists q:\ \sqrt[n]{|x_n|} < q < 1 \implies \text{řada} \sum x_n \text{ konverguje}\ .$$

(A.L.Cauchy 1821)

2.6.6 Věta (Alternující řada)

Je-li $\{x_n\}$ monotónní posloupnost nezáporných čísel, pak $\sum(-1)^n x_n$ nazýváme **alternující řada**. Alternující řada konverguje právě tehdy, když posloupnost $\{x_n\}$ má limitu 0.

(G.W.Leibnitz $\sim$ 1675)

Důkaz: Ozávorkujeme a vidíme, že

$$s_1 < s_3 < s_5 < \cdots < s_6 < s_4 < s_2\ ,$$

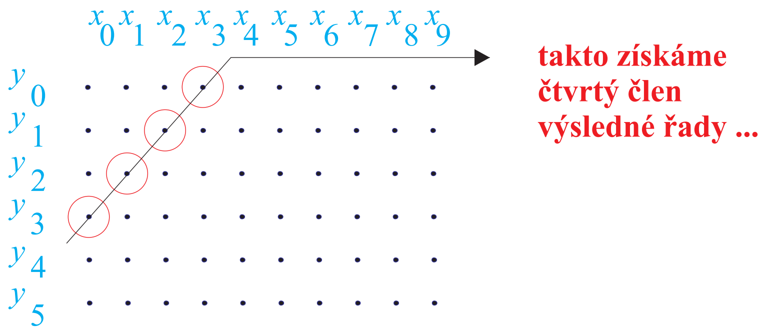
tedy liché i sudé částečné součty mají limitu (monotónní posloupnosti). Navíc $|s_n - s_{n+1}| = x_n \to 0,\ n \to +\infty$. ■

2.6.7 Operace s řadami

Řadu můžeme přerovnat, pro absolutně konvergentní se nic nestane při jakémkoliv **přerovnání**, pro neabsolutně konvergentní můžeme "nasčítat"cokoliv.

Součet řad definujeme „po členech“ (tedy $\sum(x_n + y_n)$). U součinu je situace komplikovanější. Musíme zařídit, aby se vynásobil každý člen první řady s každým členem druhé řady. Nabízí se z tabulky „každý s každým“ vybírat postupně všechny, rozumný postup je dávat do jedné skupiny „vedlejší diagonály“.

BTW. Po řádcích to nemá cenu sčítat.



Obrázek 2.6.7: Tabulka násobení "každý s každým".

Součinem řad $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ a $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ nazýváme řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, kde $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$,

Uvědomme si, že se sčítat mohlo i jinak.

2.6.8 Věta (O součinu řad)

Je-li řada $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$ absolutně konvergentní a $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = B$ konvergentní, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = A.B$, kde $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$.

Veličiny by se neměly zbytečně násobit.
(William z Occamu $\sim$ 1400)

Kapitola 3

Funkce jedné proměnné

Tím nejdůležitějším pro matematickou analýzu jsou funkce a zkoumání jejich vlastností. Funkce je vlastně nejjednodušší animace probíhajícího děje. Důležitá je schopnost aproximovat její funkční hodnotu a předpovědět její chování.

3.1 Pojem funkce

Zachycení pohybu pomocí grafu funkce je nejstarší animovaný film.

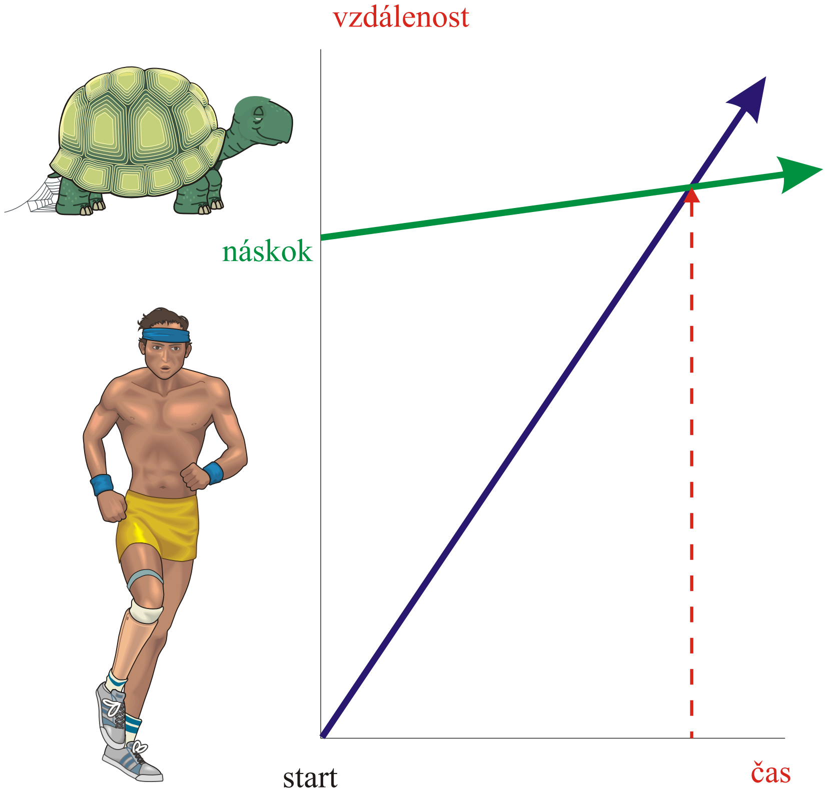
Herci jsou nahrazeni pohybujícím se bodem.

3.1.1 Definice (Funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$)

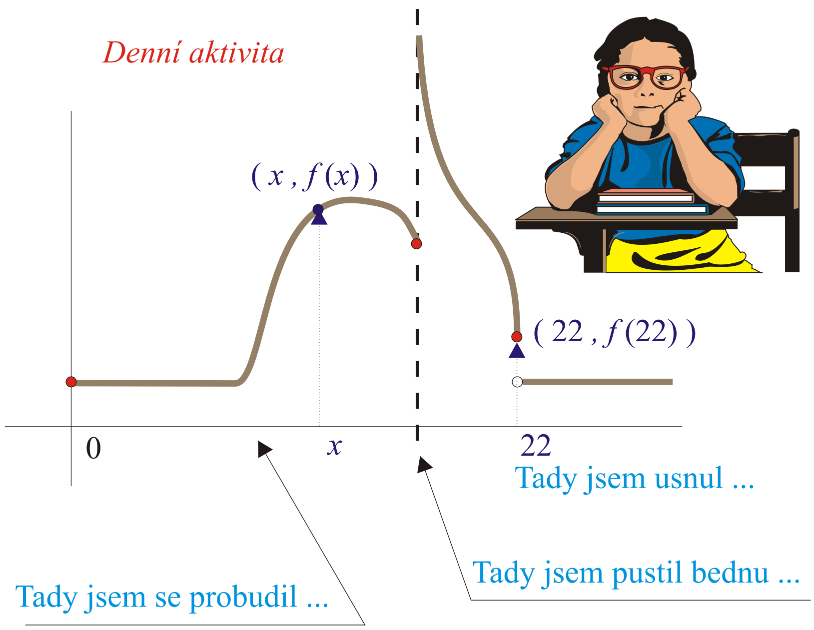
Zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme **funkce** (např. $f(x) = 1 - x$). Zobrazení, které každé funkci přiřazuje reálné číslo, nazýváme **funkcionál** (např. $\varphi(f) = f(1)$). Zobrazení, které každé funkci přiřazuje funkci, nazýváme **operátor** (např. $\varphi(f) = 2f$).

(G.W.Leibnitz 1692)

Funkce bude nejčastěji zadána v příkladech pomocí nějaké formulky, sumy, limity, popřípadě kombinací těchto funkčních předpisů na jednotlivých podmnožinách $\mathbb{R}$.



Obrázek 3.1.0: Probíhající závod je zachycen jako animovaný film.

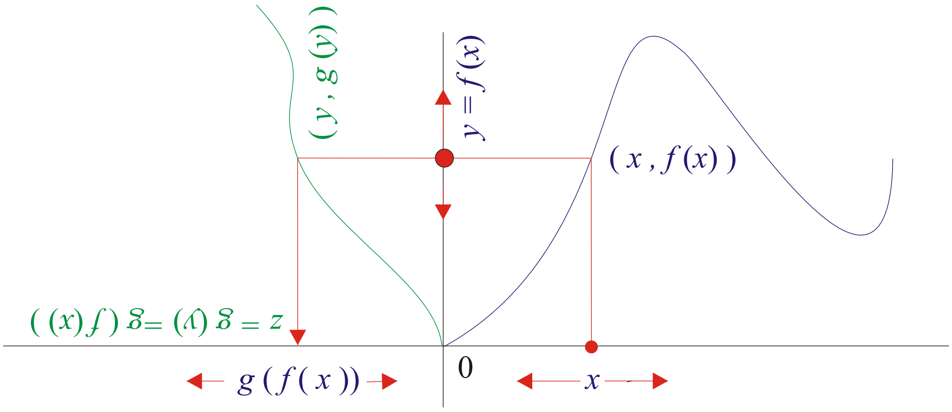


Obrázek 3.1.2: Jak probíhal den.

3.1.2 Zobrazování funkcí

Funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nejčastěji znázorňujeme jako množinu bodů $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$. Této množině říkáme **graf funkce**.

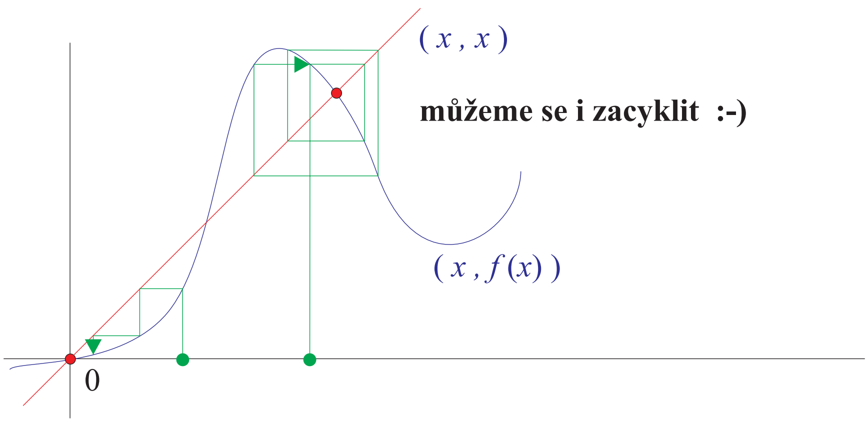
Pro znázornění složené funkce $x \mapsto g(f(x))$ můžeme (někdy!) s výhodou použít následující "dvojgraf":



Obrázek 3.1.2: Složená funkce a její "graf".

Složená funkce je něco jako organizovaný zločin.

Opakované skládání téže funkce jde (někdy!) znázornit pomocí „odrážení“ od grafu funkce $\mathrm{Id}(x) = x$.



Obrázek 3.1.2: Hledání pevného bodu.

Takto můžeme hledat pevný bod funkce ... a je to zábava :-)
To samé dělá kalkulačka, při opakovaném mačkání funkce sinus nebo kosinus, jde to pro každou fukci?

3.1.3 Operace s funkcemi

Funkce budeme běžným způsobem sčítat, násobit, dělit, skládat, dělat restrikce, vytvářet inverzní funkce, definovat různým postupem na různých částech definičního oboru. Pro definování funkční hodnoty se budou často používat limity posloupností a řady čísel ...

... a málokdy se setkáme s tak „hodnou“ funkcí, jako je konstanta nebo identita ;-)

Budeme zkoumat různé vlastnosti (monotonii, omezenost, ...) funkcí na různých množinách.

3.1.4 Věta (O monotonii)

Funkce je rostoucí na intervalu právě tehdy když je rostoucí v každém bodě intervalu.

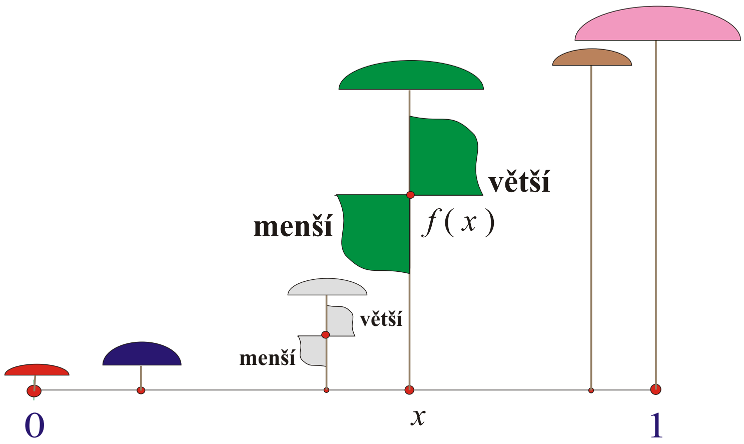
Důkaz: Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu $[0, 1]$. Pak ke každému bodu $x \in [0, 1]$ přiřadíme okolí $U(x)$, na němž platí „vlevo od x jsou v $U(x)$ hodnoty f menší než $f(x)$ a vpravo hodnoty větší“. S těmito $U(x)$ jako slunečníky použijeme plážové lemma. Dostaneme konečně mnoho slunečníků a vidíme, že hodnota funkce pod těmi slunečníky roste „zleva doprava“. Tedy $f(1) > f(0)$.

Tedy z lokální informace se podařilo sestavit globální. To je typický trik analýzy.

Obrácená implikace je snadná. ■

Nečti to jenom; bojuj s tím! Ptej se vlastní otázky, hledej svoje příklady, objev svůj důkaz. Jsou předpoklady nezbytné? Platí opak? Co se děje v klasických speciálních případech? A co degenerované případy? Kde důkaz používá předpoklady?

(P.R.Halmos)



Obrázek 3.1.4: Pláž se slunečníky.

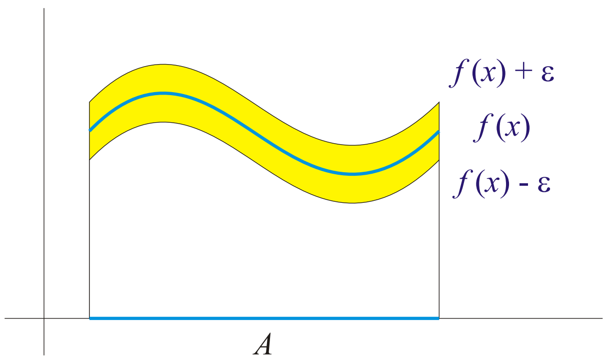
3.1.5 Definice (Stejnoměrná konvergence)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a nechť $f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou funkce $f_n : A \to \mathbb{R}$. Říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ **konverguje stejnoměrně** na M k funkci f když platí:
„Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $x \in M$ a $n > n_0$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad .$$

"
Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na M.

(K.Weierstrass 1841)



Obrázek 3.1.5: Stejnoměrná konvergence.

Od určitého indexu jsou všechny funkce v ε-ovém okolí limitní funkce. Stejnoměrnost tkví v tom, že se ten index n_0 najde společně pro všechny body M. Podobně se zkoumá stejnoměrnost konvergence řady funkcí.

Zase tu může nastoupit ta ukrutná podmínka ustálenosti . . .

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** na (a, b) k funkci f když konverguje stejnoměrně na každém $[c, d] \subset (a, b)$.

…nebo pro každý bod stejnoměrně na nějakém jeho úplném okolí. Zase to lokálně-globální trápení.

Píšeme $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na M

Lokální záležitosti mě zajímají jenom globálně a naopak podobně.

Pokud je pouze zajištěna konvergence pro jednotlivá $x \in M$, říkáme této konvergenci posloupnosti funkcí **bodová konvergence**

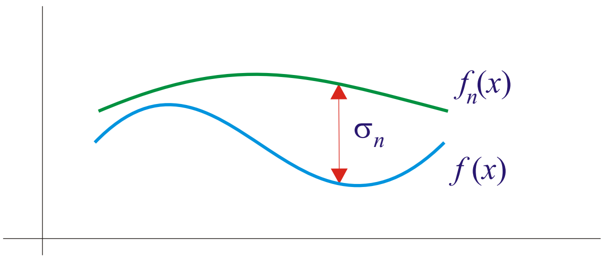
Není problém zjistit stejnoměrnost z obrázku, potíž nastává při komplikovaném vzorečku pro funkce f_n, popřípadě naší malé „vědomosti“ o limitní funkci …, protože pak se musí hledat odhad :-(

3.1.6 Věta (Test stejnoměrné konvergence)

Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M k funkci f právě když platí:

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} \to 0\ , \quad n \to \infty\ .$$

... stačí najít odhady těch suprém a poslat je k nule.



Obrázek 3.1.6: Odchylka dvou funkcí, jde o suprémum rozdílů.

3.1.7 Věta (Majorantní kritérium)

Řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na M pokud existuje číselná řada $\sum c_n$ taková, že:

(i) $|f_n| < c_n$

(ii) $\sum c_n$ konverguje.

(K.Weierstrass $\sim$ 1869)

To je užitečné kritérium.

3.1.8 Věta (Součinová kritéria)

Nechť

(i) $\sum f_n \rightrightarrows$ na M,

(ii) $g_1(x) \geq g_2(x) \geq \cdots \geq 0$,

pak $\sum f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na M.

(N.H.Abel $\sim$ 1824)

Nechť

(i) $\sum f_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů na M,

(ii) $g_1(x) \geq g_2(x) \geq \cdots \geq 0$ stejnoměrně konverguje k nule,

pak $\sum f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na M.

(G.P.L.Dirichlet 1840)

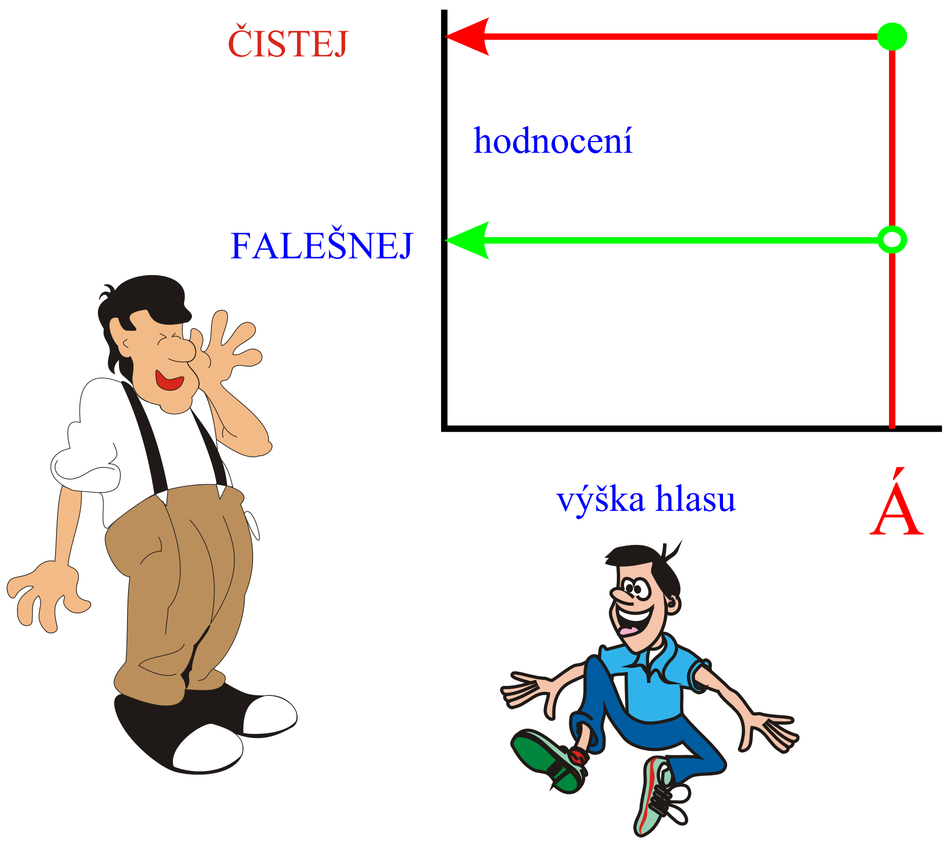
V důkazu se používá **parciální sumace** ve tvaru

$$\sum_{k=p+1}^{q} f_k g_k = \sum_{k=p+1}^{q} F_k(g_k - g_{k+1}) \;+\; F_q g_{q+1} - F_p g_{p+1} \;,$$

kde $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

(N.H.Abel $\sim$ 1824)

Je to velmi málo „zřejmá“ identita. Jde ověřit, ale najít tutově nejde …
Věty platí i pro konstantní funkce.



Obrázek 3.2.0: Nepřiměřené hodnocení je nefér.

3.2 Spojitost

Základním pojmem matematické analýzy je pojem spojitost funkce. Jde o její „přiměřené chování“ v okolí daného bodu. Přiměřenost pomůže zjistit přibližnou hodnotu funkce v daném bodě pomocí hodnot funkce v blízkých bodech.
Pokud je například hodnocení zpěvu dvojhodnotové (čisté, falešné), není přiměřeně odměněna snaha o zlepšení.

Podobně očekáváme přiměřenou odměnu za práci.

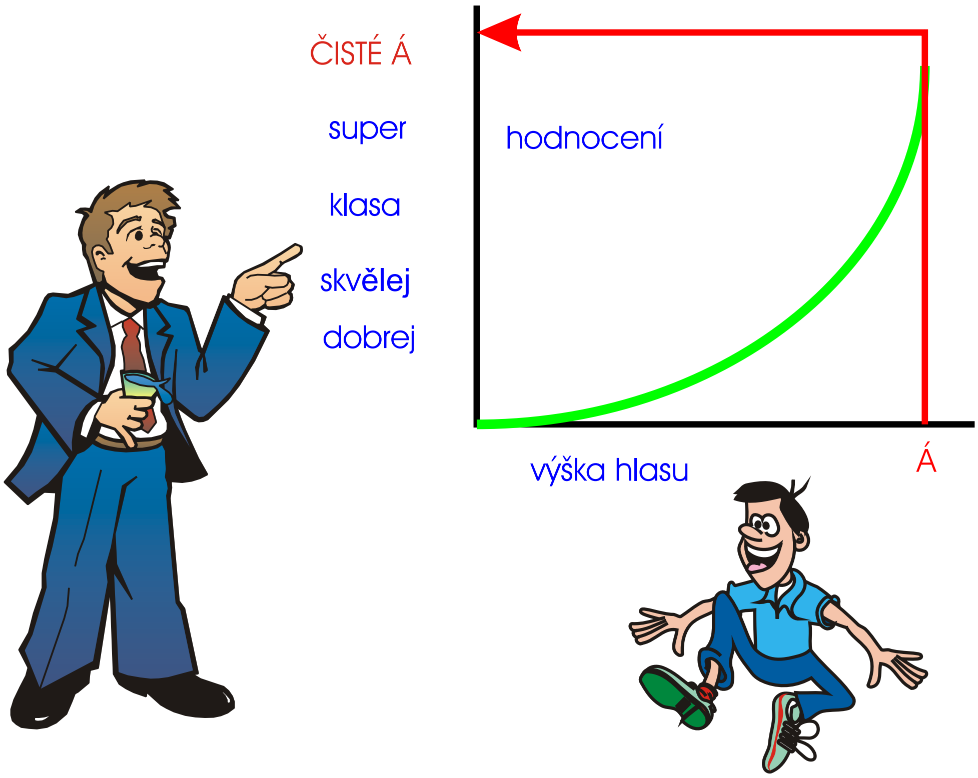
3.2.1 Definice (Spojitost v bodě)

Řekneme, že funkce f je v bodě a **spojitá**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x platí

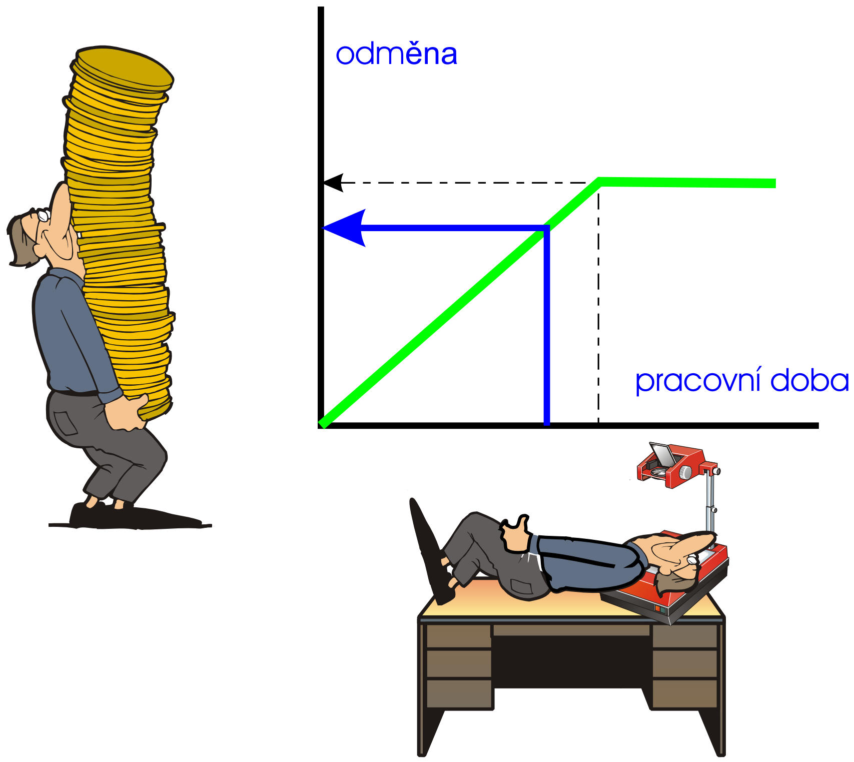
$$|x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad .$$

(K.Weierstrass 1861)

Jedná se o definici, která vznikla po usilovných snahách zachytit situaci, kdy se funkce chová v daném bodě „hezky“.



Obrázek 3.2.0: Přiměřené hodnocení podpoří snahu.



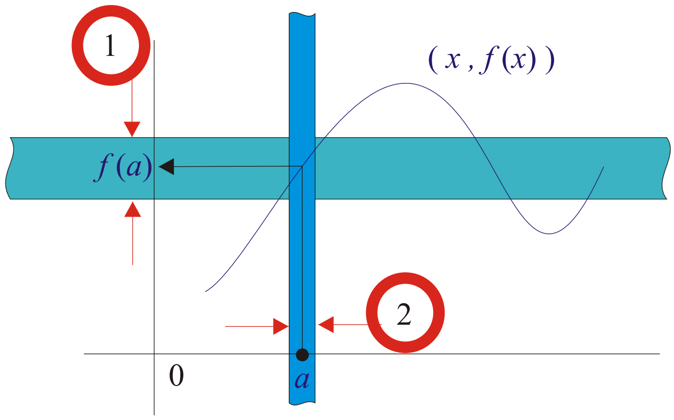
Obrázek 3.2.0: Za práci náleží přiměřená odměna.

Má své lepší i horší stránky.

Uvědomme si, že ověřování spojitosti z definice spočívá v důkazu jisté nerovnosti pro všechny body x z jistého intervalu.

To může být nepříjemný úkol.

Zdánlivá nesrozumitelnost definice se lehce odstraní obrázkem



Obrázek 3.2.1: Mechanismus spojitosti v bodě.

Bod a zde funguje jako "tahoun", který ovlivňuje funkci ve svém okolí tak, že má v blízkých bodech blízké hodnoty.

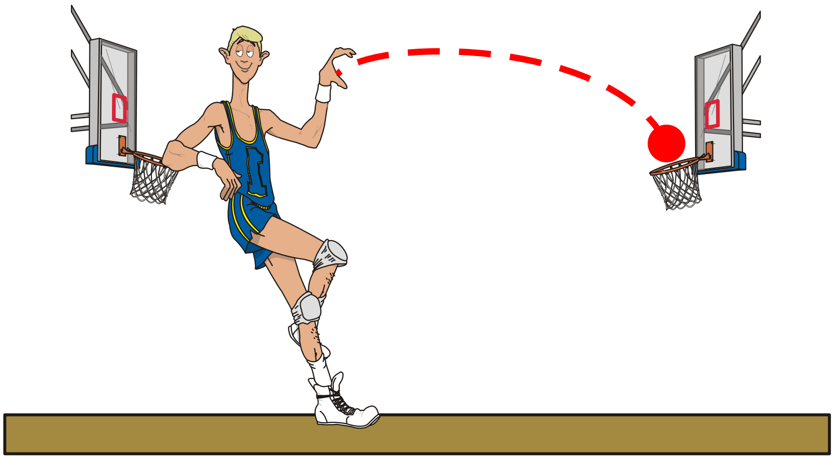
3.2.2 Definice (Limita)

Zajímá nás také prognóza budoucího vývoje dané situace.
Zvolíme vhodně funkci a zkoumáme, k jakému výsledku se funkční hodnota blíží.

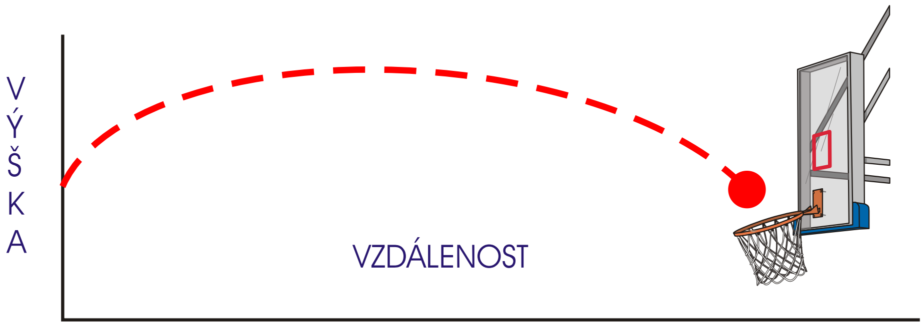
Některé situace se mohou nečekaně vyvinout.
Některé chování je nečekané.ˇ
Děje nás zajímají i do minulosti, tedy zkoumáme vývoj v „obou směrech“.

Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu** A, píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \, .$$



Obrázek 3.2.2: Jistě se opět trefí. Má prostě „limitu“ v ruce.



Obrázek 3.2.2: Funkce a její limita.

pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x platí

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon \quad .$$

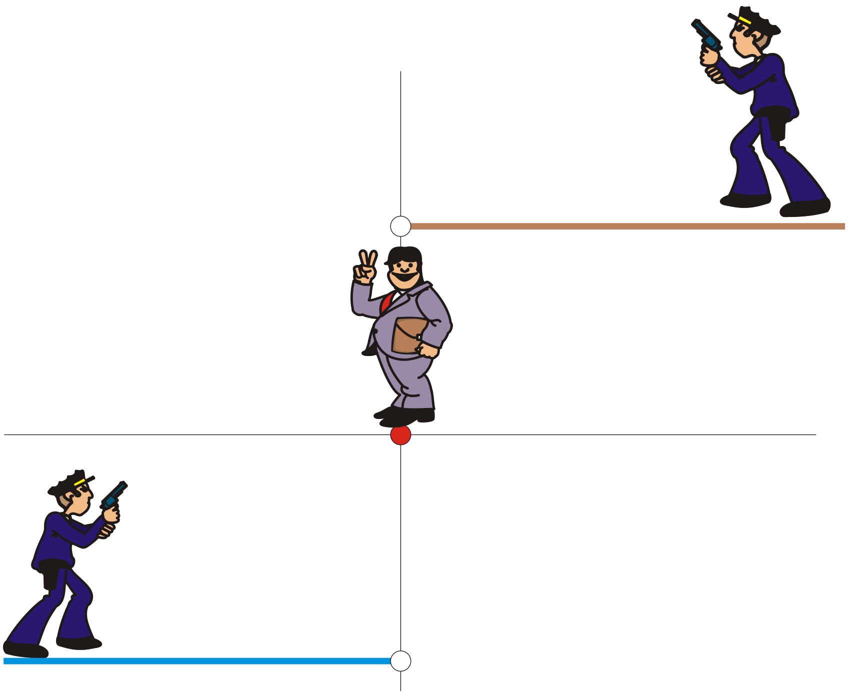
Vlastně je limita funkce totéž jako spojitost, až na hodnotu funkce v bodě a.

Pokud se omezíme na jednostranná okolí, definujeme jednostranou spojitost a limitu.

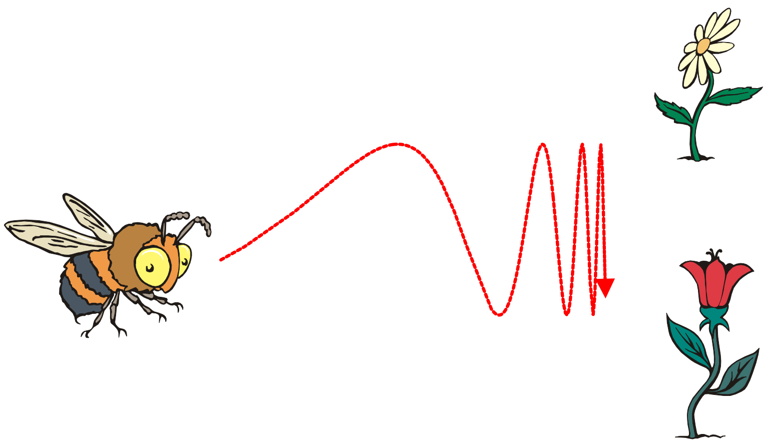
3.2.3 Definice (Okolí a okolíčko)

Pro bod $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ definujeme (úplné) ε-ové **okolí** bodu x jako interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a značíme $U^\varepsilon(x)$. Podobně **prstencové** ε-ové okolí bodu x jako interval $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$ a značíme $P^\varepsilon(x)$. Pro levé a pravé okolí se omezíme pouze na body $\geq x$ nebo $\leq x$.
Pak definice spojitosti zní:

"Ke každému ε-ovému okolí $U^\varepsilon(f(x))$ bodu $f(x)$
existuje δ-ové okolí $U^\delta(x)$ bodu x tak,
že $f(U^\delta(x)) \subset U^\varepsilon(f(x))$."



Obrázek 3.2.2: Tam, kde má být, není, tak ho nemohou „ulimitit“.



Obrázek 3.2.2: Čmelák letí k té hezčí kytce. Když k ní přiletí blíž, nelíbí se mu její vůně a tak letí k druhé kytce. Zblízka opět nevoní a tak se opět vrací k první kytce . . .

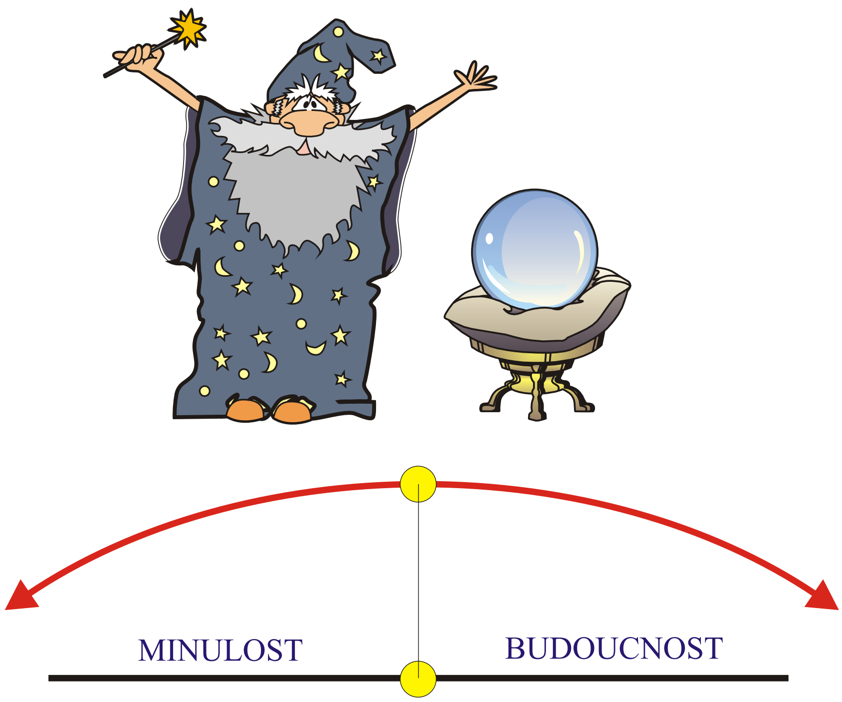
3.2.4 A zase kvantifikátory ...

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$

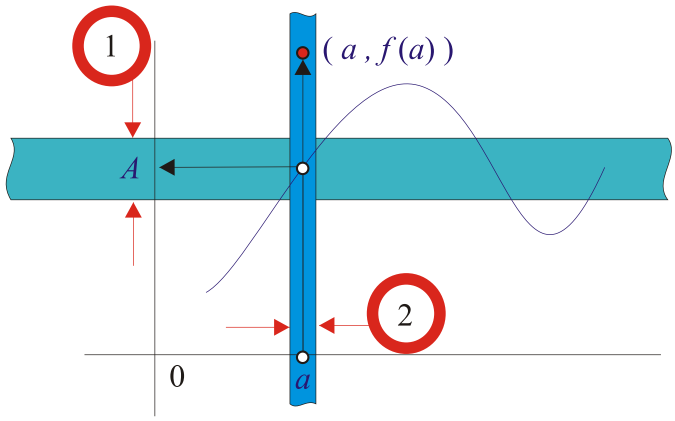
platí právě tehdy, když platí

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - A| < 7\varepsilon$

Tady těch 7ε mám rád. Bez nich to nejde.



Obrázek 3.2.2: Já to vidím.



Obrázek 3.2.2: Limita funkce.

a to platí právě tehdy když neplatí
$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \quad \& \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon \quad .$

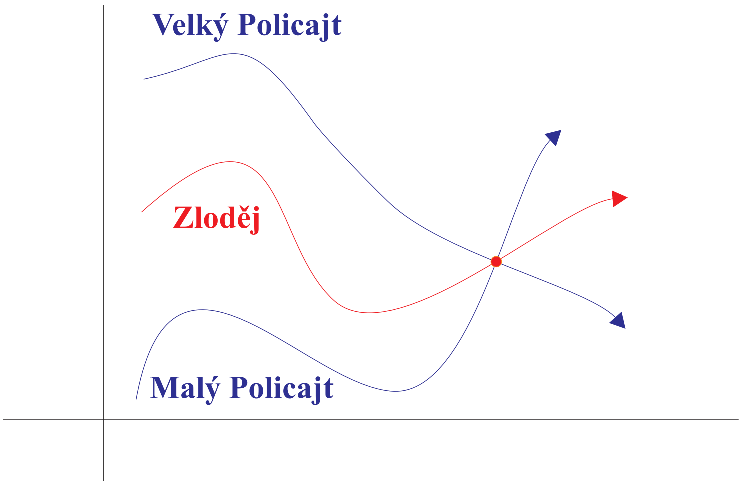
3.2.5 Věty (Pozorování obrázku limity)

Limita v bodě je nejvýše jedna.
Větší funkce má větší (nebo stejnou) limitu.
Spojitost v bodě dává omezenost na okolí.
Monotonní funkce má limitu.
Limita součtu, součinu a podílu funkcí se chová očekávaně.
Polynomy jsou spojité v každém bodě.

3.2.6 Věta (O policajtech)

„Nechť Velký Policajt a Malý Policajt mají mezi sebou stále Zloděje, pak při dopadení Velký Policajt, Zloděj a Malý Policajt jedno jsou.“

(matematický folklór na MFF UK)



Obrázek 3.2.6: Mezi dvěma policajty se nic neztratí.

Nechť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A \,,$$

pak

$$\lim_{x \to a} g(x) = A \,.$$

3.2.7 Věta (O limitě složené funkce)

Platí

(i) Složením spojitých funkcí vznikne spojitá funkce. (Pro limitu složené funkce stačí pouze spojitost vnější funkce a limita vnitřní funkce.)

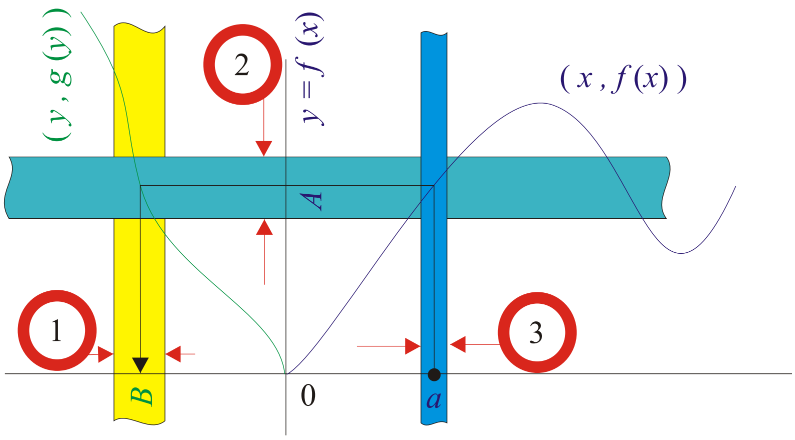
(ii) Pokud

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \,,\, \lim_{y \to A} g(x) = B$$

a existuje prstencové okolí bodu a na němž $f(x) \neq A$, pak

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = B \,.$$

Důkaz: Obecné schéma je toto: k ε existuje δ z definice spojitosti (nebo limity) pro g, k δ existuje ∂ z definice spojitosti (nebo limity) pro f. ■



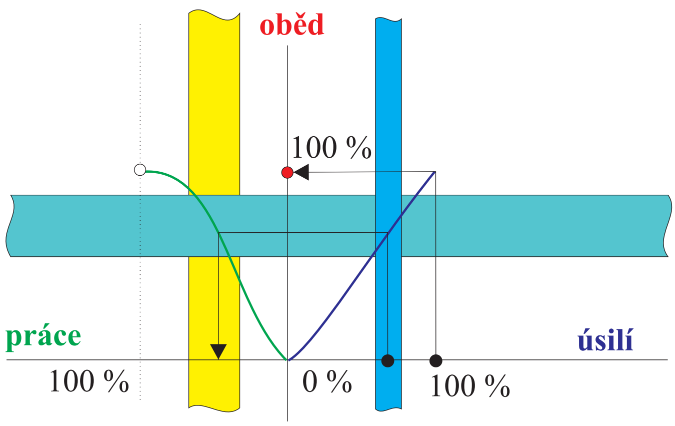
Obrázek 3.2.7: Je to snadné jako RAZ, DVA, TŘI.

VELMI ČASTO se to používá!

Nechť například funkce $f(x)$ určuje kvalitu oběda, který připraví manželka svému muži s úsilím x, nechť $g(y)$ určuje množství užitečné práce, kterou je schopen vykonat muž po snědení oběda kvality y.

Ke každému množství vykonatelné práce manželka přesně ví, kolik musí vynaložit úsilí (případ (i)).

Pokud je mužovo chování po obědu „nejvyšší kvality" nevhodné (například okamžitě usne), musí žená dávat pozor, aby takový oběd nepřipravila (případ (ii)).

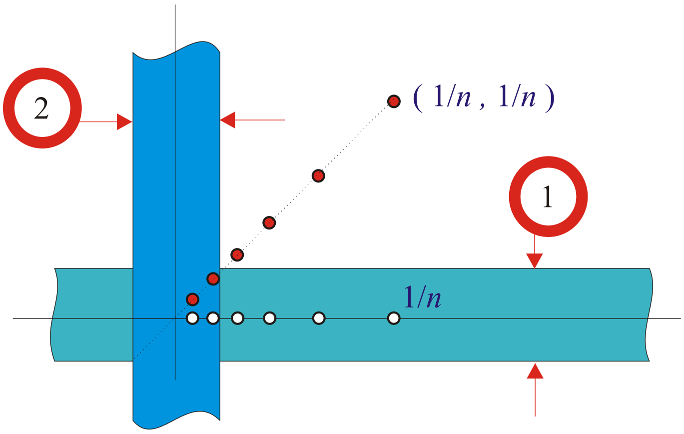


Obrázek 3.2.7: Stoprocentní oběd $\Longrightarrow$ žádná práce.

... a pokud takovému muži manželka připraví vždy nejvyšší kvalitu, je ztracena ;-)

3.2.8 Ukázky (ne)spojitosti v bodě

Funkce ($\frac{1}{n} \to \frac{1}{n}$, jinde 0) je spojitá v nule.



Obrázek 3.2.8: Spojitost (spravedlivost) v počátku.

Křivé racionální síto (racionální $\frac{p}{q} \to \frac{1}{q}$, iracionální $\to 0$) má v každém bodě limitu (a je spojitá mimo $\mathbb{Q}$).

(B.Riemann $\sim$ 1850)

Rovné racionální síto (racionální $\to 1$, iracionální $\to 0$) není spojitá nikde.

(G.P.L.Dirichlet $\sim$ 1840)

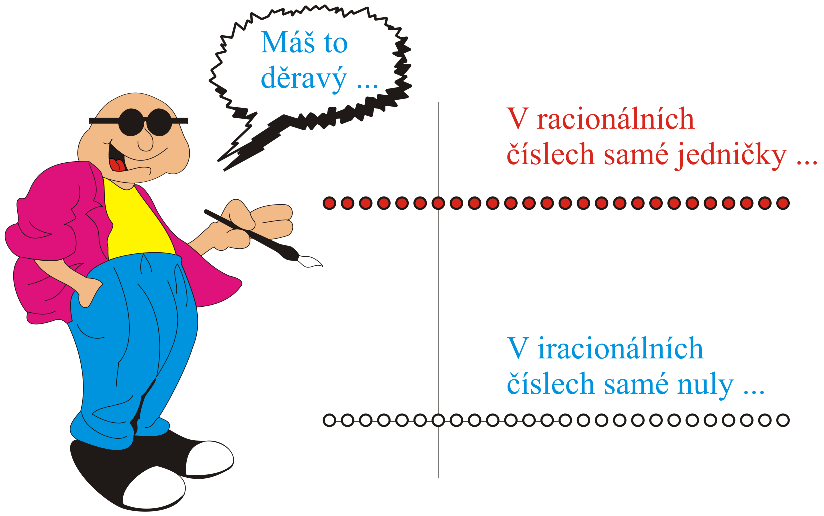
3.2.9 Věta (Jiné definice spojitosti v bodě)

Funkce f je v bodě a spojitá, právě tehdy když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x, y platí

$$|x - a| < \delta \quad \& \quad |y - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad .$$

(A.L.Cauchy 1821, B.Bolzano 1817)

Jedná se opět o podmínku ustálenosti.



Obrázek 3.2.8: Rovné racionální síto.

Funkce f je v bodě a spojitá právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ platí (při $n \to \infty$)

$$x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(a) \quad .$$

(H.E.Heine 1872)

... a kdo má rád posloupnosti může zapomenout na ε a δ. Jsou tam ale na každou posloupnost 3 kvantifikátory. Takže celkem je ani nespočítám.

3.2.10 Definice (Nevlastní limity)

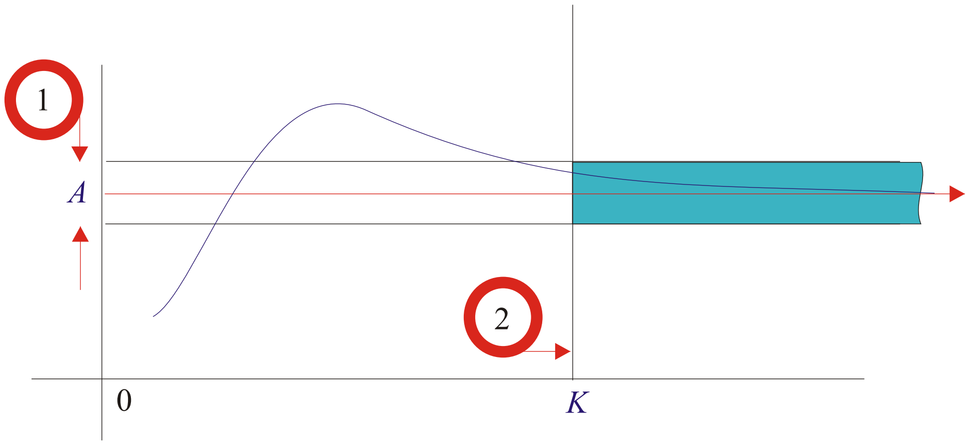
Nazveme pro $K \in \mathbb{R}$ interval $(K, +\infty)$ (prstencové K-) **okolí nekonečna** (úplná okolí nyní nepoužíváme). Pak jde definice limity (NE definice spojitosti!) rozšířit na "nevlastní limity"a "nevlastní body"(tím jsou míněny $+\infty$ a $-\infty$).

Říkáme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$ když ke každému okolí $U(A)$ bodu A existuje okolí $U(a)$ bodu a takové, že $f(U(a)) \subset U(A)$.

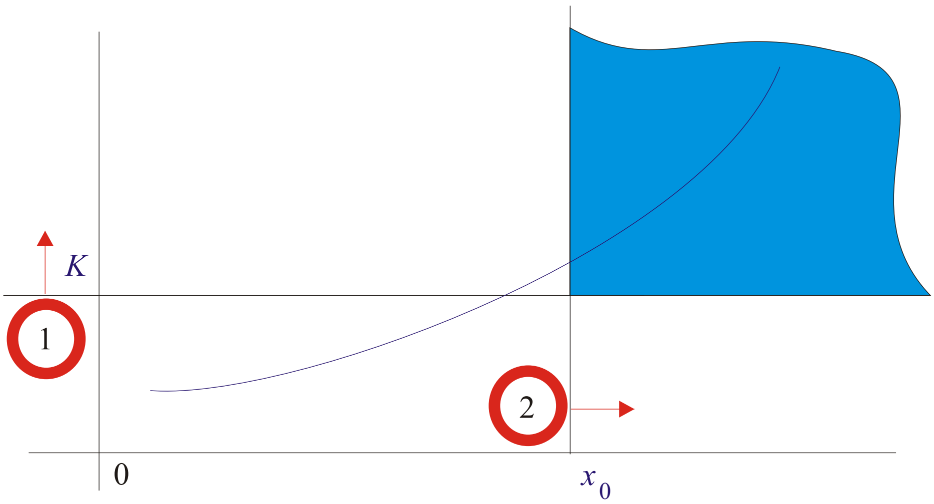
SUPERDEFINICE :-)

3.2.11 Věta (O nevlastních limitách)

Algebraické operace s limitami jdou dělat i v případě „nevlastních limit“ a „nevlastních bodů“ (pokud příslušná operace s výsledkem dává smysl).



Obrázek 3.2.10: Vlastní limita v nevlastním bodě.

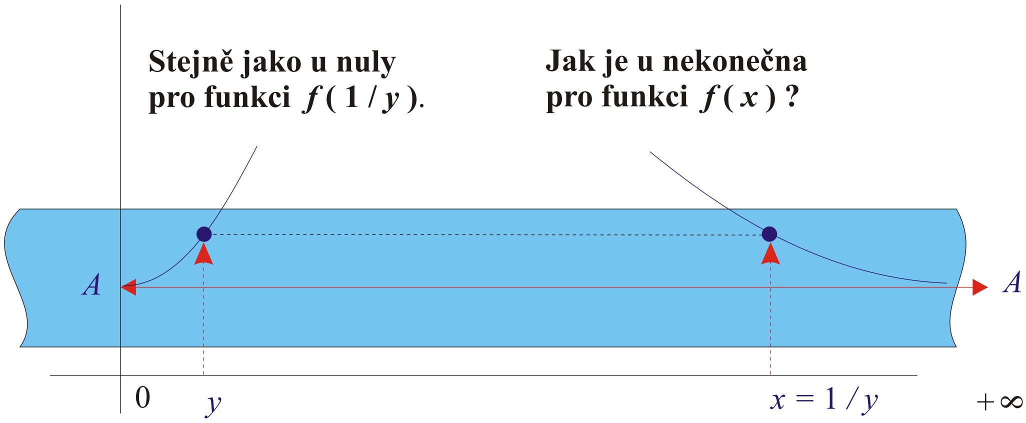


Obrázek 3.2.10: Nevlastní limita v nevlastním bodě.

Kuchařka:
$\frac{1}{\pm\infty} = 0$, $\frac{1}{+0} = +\infty$,

3.2.12 Věta (O nevlastních bodech)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \iff \lim_{y \to 0} f\left(\frac{1}{y}\right) = A\,.$$



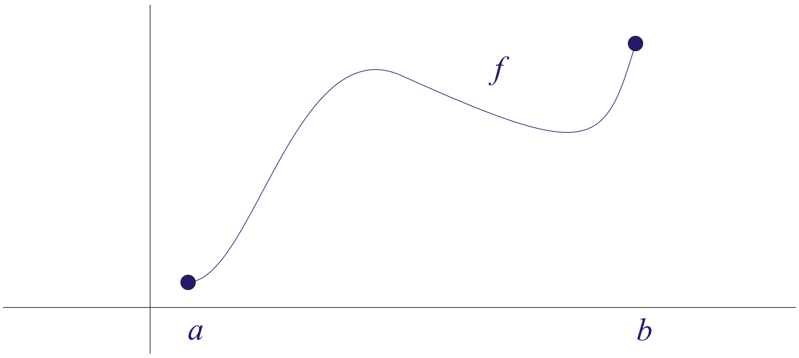
Obrázek 3.2.12: Jak se dostat do konečna.

... takové triky ovšem můžeme dělat kdykoliv !!!

Důkaz: Jde o použití věty o limitě složené funkce (nebo přímo z definice). ■

3.2.13 Definice (Spojitost na intervalu)

Řekneme, že funkce je **spojitá na intervalu**, když je spojitá v každém jeho bodě (v krajních bodech jednostranná spojitost).



Obrázek 3.2.13: Funkce spojitá na intervalu je vždy takto „hezká“.

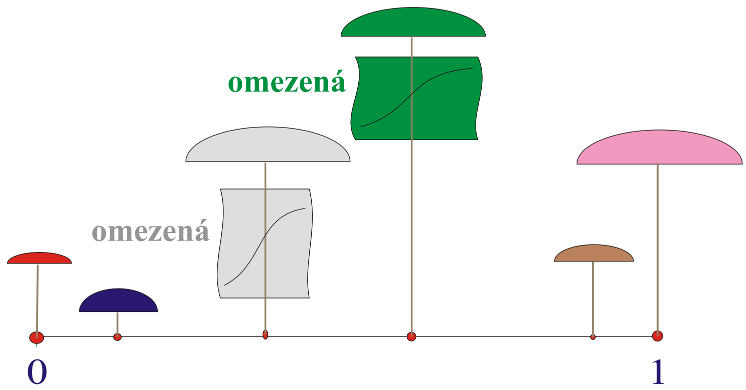
Definice spojitosti na intervalu dává výsledky, které již přesně odpovídají našim přestavám o „hodné funkci“ !!!

Následující věty ukazují dobré vlastnosti funkce spojité na intervalu.

3.2.14 Věta (Omezenost spojité funkce)

Na uzavřeném omezeném intervalu plyne ze spojitosti funkce její omezenost.

Důkaz: Nechť f je spojitá na $[0, 1]$. Každému bodu $x \in [0, 1]$ přiřadíme okolí $U(x)$, na němž je f omezená (ze spojitosti v bodě x).



Obrázek 3.2.14: Slunečníky omezenosti.

Použijeme nyní plážové lemma (slunečník = $U(x)$). ■

... nebo sestrojíme množinu $\{x \in [0, 1] : f$ je omezená na $[0, x]\}$ a použijeme axiom o suprému.

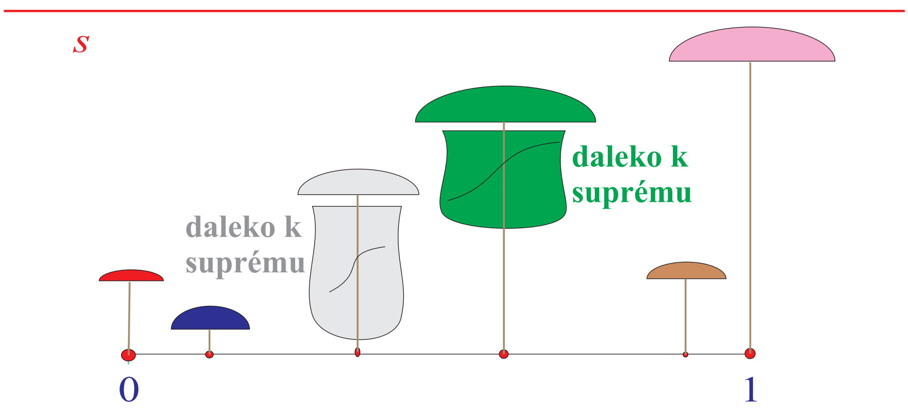
3.2.15 Věta (Spojitá funkce nabývá maxima)

Na uzavřeném omezeném intervalu spojitá funkce nabývá maxima.

(K.Weierstrass 1861)

Spojitost v bodě je vlastnost lokální. Spojitost na intervalu je použití spojitosti v bodě globálně, výsledkem je vytvoření pěkné křivky. Souboj lokálních a globálních vlastností je důležitá část matematické analýzy.

Důkaz: Použijeme z předchozí věty omezenost množiny M funkčních hodnot funkce f na intervalu $[0, 1]$. Označme s suprémum M. Nechť se hodnoty s nenabývá v žádném bodě intervalu $[0, 1]$. Odvodíme spor. Každému bodu $x \in [0, 1]$ přiřadíme okolí $U(x)$, na němž f nedosahuje do poloviny vzdálenosti of $f(x)$ k s. (ze spojitosti v bodě x).
Použijeme nyní plážové lemma (slunečník = $U(x)$). Získáme spor s tím, že s je suprémum (s konečně mnoha slunečníky najdeme „falešné suprémum“). ■



Obrázek 3.2.15: Slunečníky malosti.

... anebo označíme funkci $F(x) = 1/(s - f(x))$, bude to kladná spojitá funkce, tedy bude omezená konstatnou K, pak $f(x) < s - 1/K$ a opět máme „falešné suprémum“!

3.2.16 Věta (Spojitá funkce nabývá mezihodnot)

Funkce spojitá na uzavřeném omezeném intervalu nabývá všech mezihodnot.

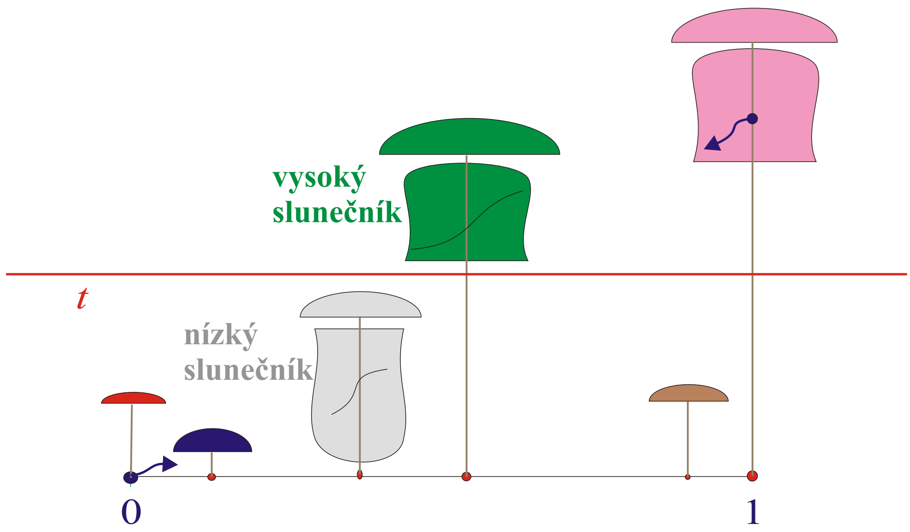
(B.Bolzano 1817)

Důkaz: Nechť f je spojitá na $[0, 1]$ a $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Zvolme $t \in (0, 1)$. Nechť f nenabývá hodnotu t v žádném bodě intervalu $[0, 1]$, odvodíme spor. Každému bodu $x \in [0, 1]$ v němž $f(x) > t$ pak přiřadíme okolí $U(x)$, na němž je $f > t$ (ze spojitosti v bodě x) a nazveme toto okolí „vysoký slunečník“. Analogicky každému bodu $x \in [0, 1]$ v němž $f(x) < t$ pak přiřadíme okolí $U(x)$, na němž je $f < t$ (ze spojitosti v bodě x) a nazveme toto okolí „nízký slunečník“.
Použijeme nyní plážové lemma (slunečník = $U(x)$). Pak alespoň jeden bod pláže pokrývá zároveň vysoký i nízký slunečník, což nelze. Spor. ■

Těch slunečníků už bylo celkem dost ...

3.2.17 Věta (Spojitost inverzní funkce)

Je-li f spojitá a rostoucí na intervalu J a $f(J) = I$, pak inverzní funkce je spojitá a rostoucí na I.



Obrázek 3.2.16: Slunečníky odlišnosti.

3.2.18 Definice (Stejnoměrná spojitost)

Řekneme, že funkce f je na intervalu J **stejnoměrně spojitá**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in J$ platí

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad .$$

(A.L.Cauchy 1821, B.Bolzano 1817)

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ NEZÁVISLE na volbě x. Proto říkáme „stejnoměrně“.
O B T Í Ž N É ! ! !

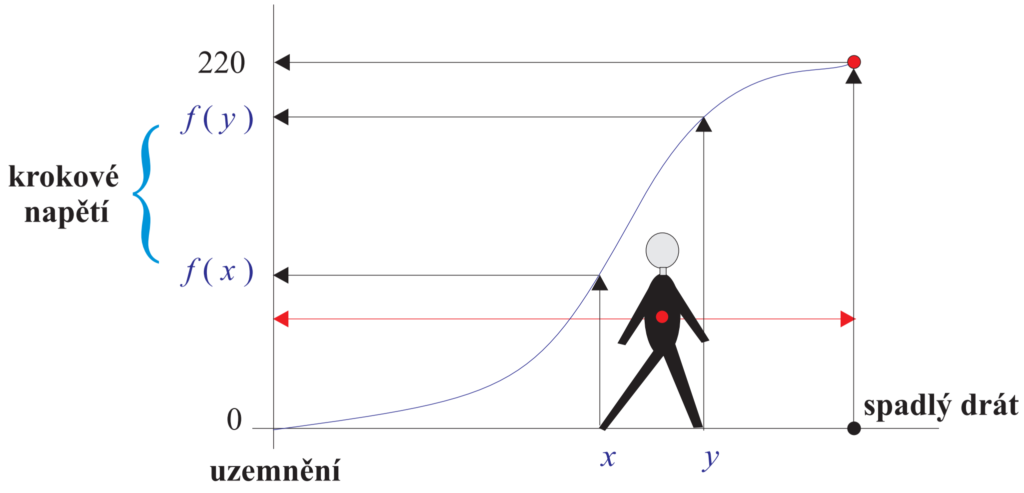
Představme si, že na reálné ose je v každému bodě určité napětí. Pokud funkce určující napětí je stejnoměrně spojitá, můžeme najít délku kroku, se kterou se po reálné ose můžeme (bezpečně) procházet (takzvané „krokové napětí“). Pokud budeme mít požadavek na rozdíl napětí (ε), najdeme velikost kroku (δ).

Na každé zadané funkci hned vidíme, kde je „nejhorší“ místo, kde se bude hledat to skutečné δ k zadanému ε.

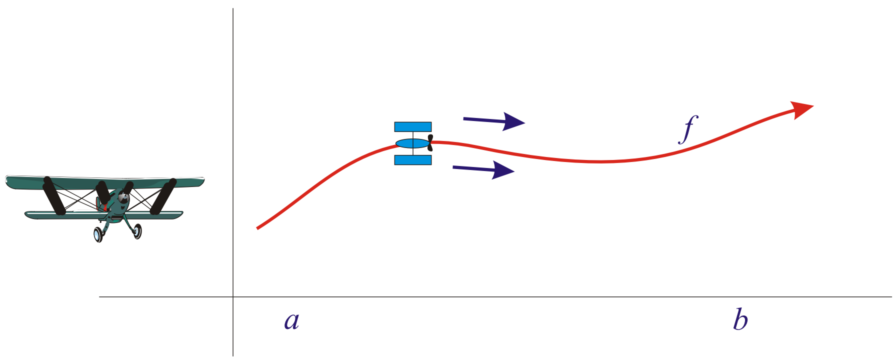
3.2.19 Definice (Sublinearita)

Řekneme, že funkce f je na intervalu J **sublineární**, pokud existuje $L > 0$ tak, že $\forall x, y \in J$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad .$$



Obrázek 3.2.18: Stejnoměrnou spojitost poznáme na vlastní kůži.

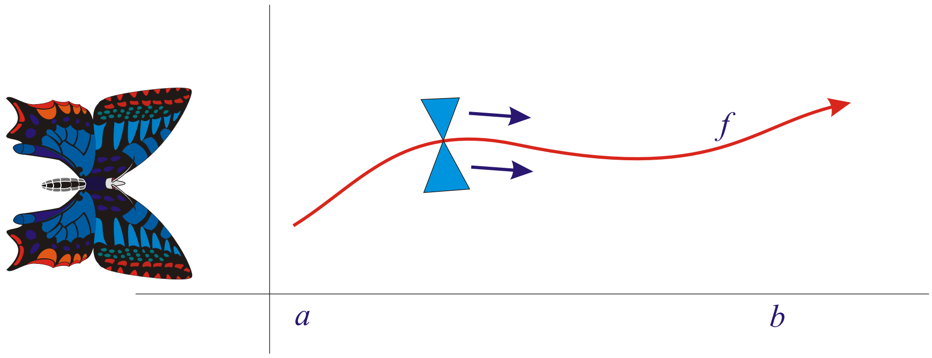


Obrázek 3.2.18: Stejnoměrnou spojitost si představujeme tak, že po grafu letí dvojplošník, který se nesmí dotknout grafu dolním ani horním křídlem. Před letem si můžeme upravit letadlo (křídla jsou od sebe vzdálena o ε a jsou dlouhá δ). Pokud se let podaří, je funkce stejnoměrně spojitá.

(Lipschitz)

Funkce neroste rychleji než lineární funkce se směrnicí L.

Tedy máme kontrolu růstu globálně na celém definičním oboru. V každém bodu si můžeme sestrojit dvě různoběžky vymezující zóny, kde se funkce nemůže vyskytovat.

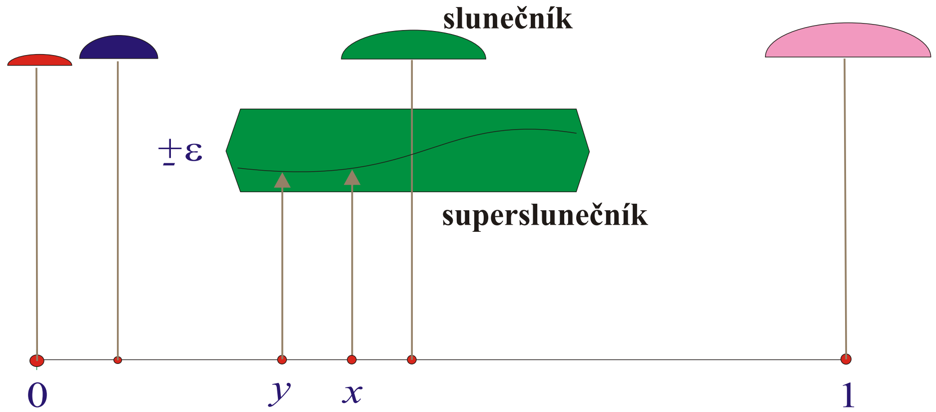


Obrázek 3.2.19: Sublinearitu poznáme podle toho, že na grafu může proletět „motýlek“, který má křídla v úhlu odpovídajícímu konstantě L tak, že se křídly nedotkne grafu.

3.2.20 Věta (O stejnoměrné spojitosti)

Funkce spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[0, 1]$ je na $[0, 1]$ stejnoměrně spojitá.

Důkaz: Zvolíme $\varepsilon > 0$ a budeme hledat $\delta > 0$. Se zvoleným ε ke každému bodu $x \in [0, 1]$ najdeme $V(x)$ („superslunečník“) z definice spojitosti a přiřadíme bodu x okolí $U(x)$ („slunečník“) se polovičním poloměrem než má $V(x)$.



Obrázek 3.2.20: Konstrukce superslunečníku.

Použijeme plážové lemma a najdeme konečně mnoho slunečníků pokrývající $[0, 1]$. Položíme δ rovno poloměru nejmenšího vybraného slunečníku. Nyní pro každé dva body vzdálené od sebe maximálně δ najdeme slunečník, pod kterým leží jeden z nich. Pak oba dva leží pod stejným superslunečníkem. ■

... a dostaneme 2ε, což nevadí :-)

Stejnoměrná spojitost a sublinearita mají k sobě blízko, ale nejde o totéž.

Když pojede auto sublineárním způsobem, tak si jde koupit rychloměr takový, který bude vždy ukazovat správně. Když pojede stejnoměrně spojitým způsobem (například $\sqrt[3]{x}$), tak se může každý rychloměr pokazit.

3.2.21 Věty (O spojitosti a stejnoměrné konvergenci)

Stejnoměrná limita posloupnosti spojitých funkcí je spojitá.

(A.L.Cauchy 1853)

Stejnoměrná limita funkcí majících limitu v pevně zvoleném bodě má v tom bodě limitu.

(E.H.Moore 1900, Osgood 1897)

Tedy (při stejnoměrné konvergenci) píšeme

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \quad .$$

Taková kouzla se budou používat často.

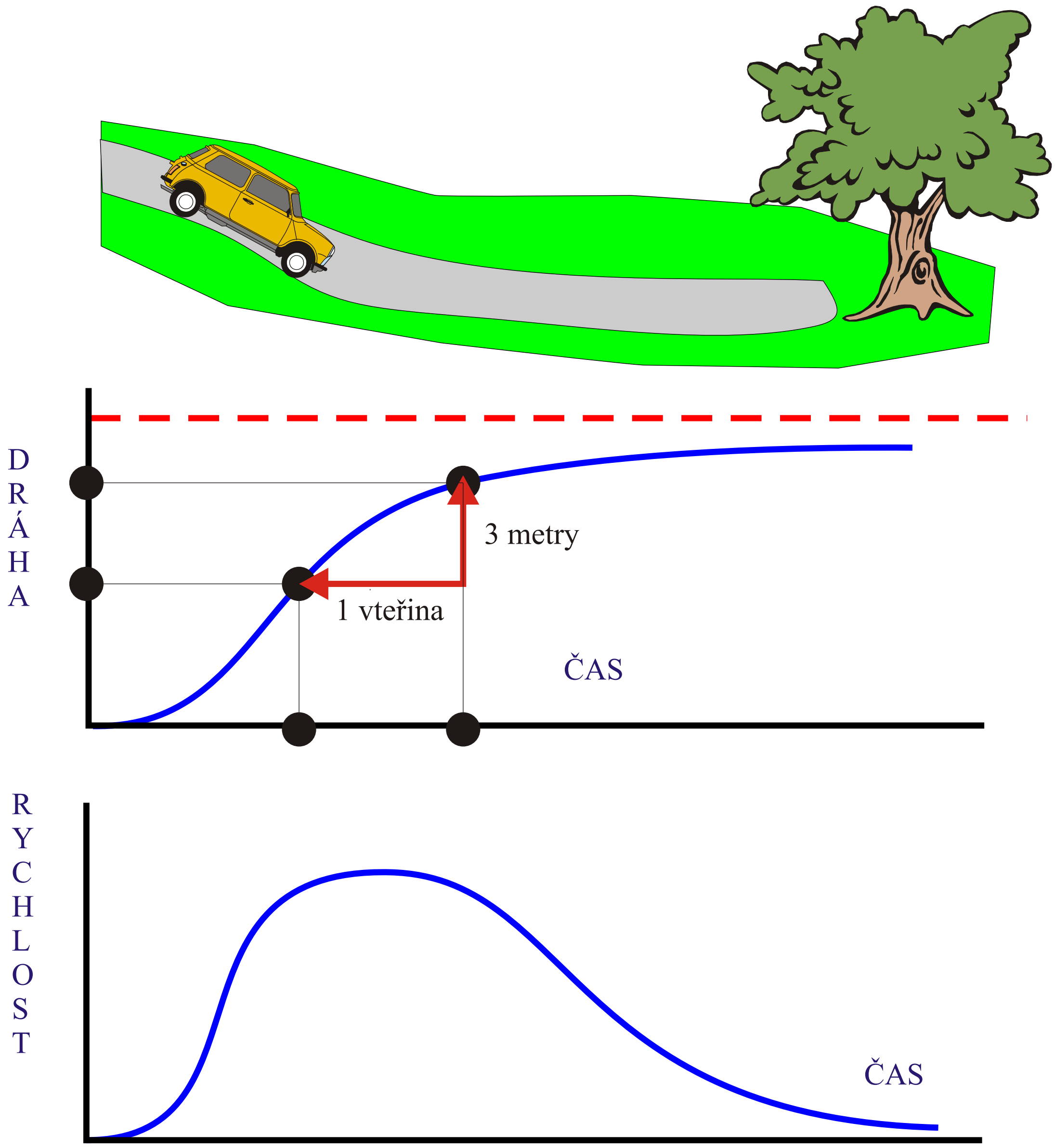
Nechť posloupnost $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí, která konverguje na intervalu $[0,1]$ ke spojité funkci f. Pak konverguje stejnoměrně.

(U.Dini 1878)

Důkaz: Můžeme předpokládat, že f_n jsou nezáporné a konvergují bodově k nule. Zvolme $\varepsilon > 0$, najdeme v každém bodě „slunečník" a použijeme plážové lemma. ■

3.3 Derivace

Základní otázkou při zkoumání dějů je rychlost, s jakou probíhají. Zjištění okamžité rychlosti jde jednoduše zvládnout s pomocí jednoduchého limitního procesu. Budeme zkoumat limitu sečen, které odpovídají průměrné rychlosti a které se blíží k tečně grafu. Tato tečna pak odpovídá okamžité rychlosti, derivaci.



Obrázek 3.3.0: Auto brzdí, aby nenarazilo.

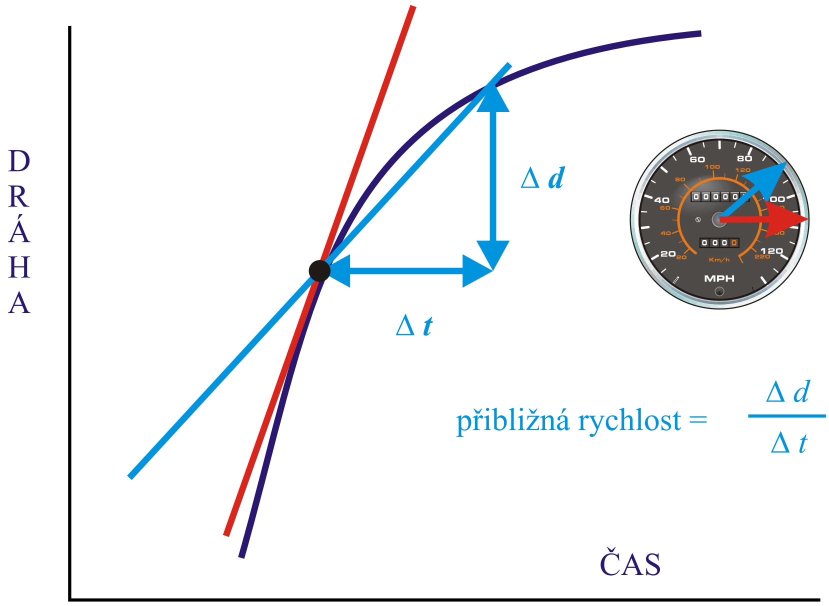
3.3.1 Definice (Derivace v bodě)

„Řekneme, že funkce má v bodě derivaci, pokud má graf funkce v daném bodě tečnu."

> Matematika je umění dávat stejné jméno různým věcem.
>
> (J.H.Poincaré $\sim$ 1890)

Přesněji řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **derivaci** $f'(x_0)$, pokud existuje (vlastní či nevlastní)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\,.$$



Obrázek 3.3.0: Okamžitá rychlost je aproximována průměrnou.

Tomuto zlomku se říká **diferenční podíl**. Podobně definujeme i jednostranné derivace $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ jako jednostranné limity diferenčního podílu.

> Infinitezimální veličiny nejsou ani konečné veličiny, ani veličiny nekonečně malé, ani to není prosté nic. Nemohli bychom je nazývat duchy zesnulých veličin?
>
> (G.Berkeley 1734)

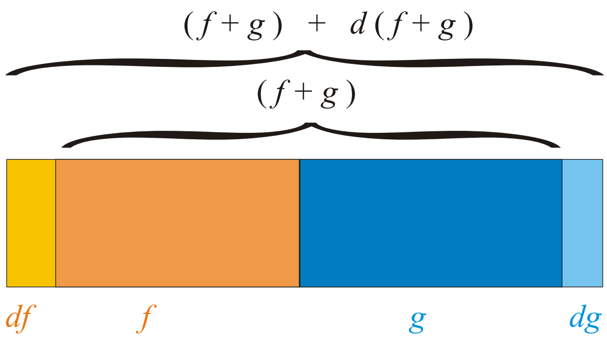
Jak kdo vidí derivaci:

- Geometr vidí derivaci jako tečnu, limitu sečen.
- Fyzik vidí derivaci jako převodní koeficient pohybu x a $y = f(x)$.
- Algebraik vidí derivaci jako podíl, se kterým se dá počítat.
- Analytik vidí derivaci jako nedokonalé nahrazení funkce f lineární funkcí.

> …a student jako mlýnek, do kterého se dá funkce a po zatočení kličkou vypadne derivace.

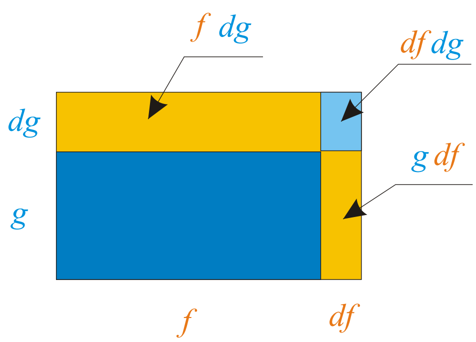
3.3.2 Věty (Pozorování derivace v bodě)

Z vlastní derivace v bodě plyne spojitost v bodě.
Polynomy mají derivaci všude.
Funkce sign a $\sqrt[3]{x}$ mají v počátku nevlastní derivaci.
Derivace součtu je součet derivací.



Obrázek 3.3.2: Derivace součtu.

Derivace součinu není součin derivací.



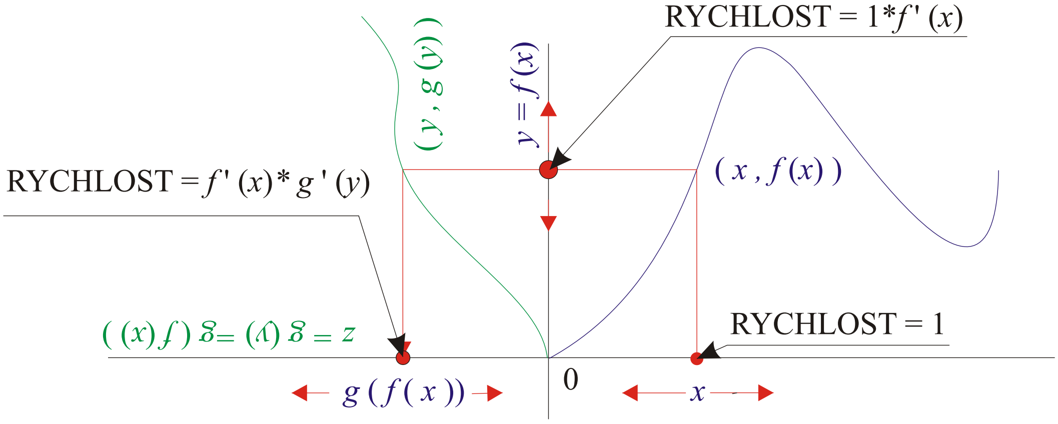
Obrázek 3.3.2: Derivace součinu.

Je to z obrázku jasné ?

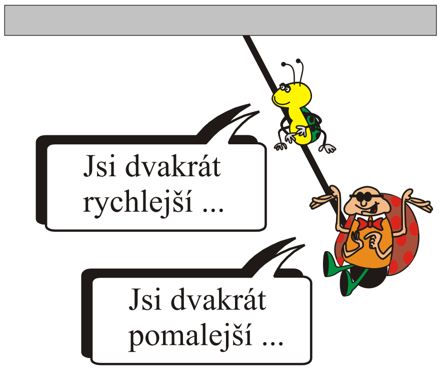
Derivace složené funkce je součin derivací.

(O.Stolz 1893)

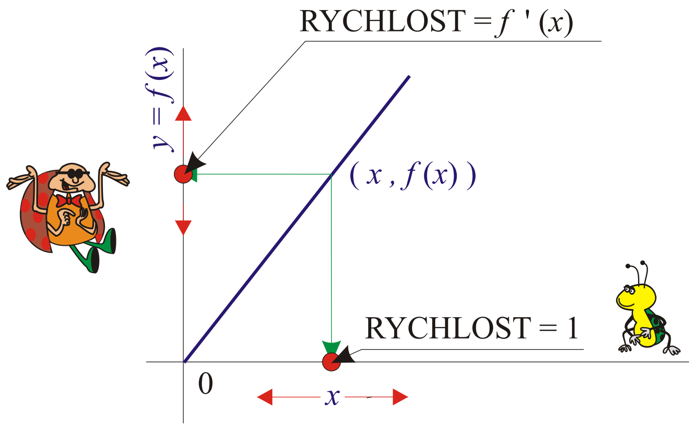
. . . to prostě fyzik "vidí", analytik se však "nezapotí": označí si jako novou funkci rozdíl diferenčního podílu a funkce, pak se to dosadí a ulimití . . .



Obrázek 3.3.2: Derivace složené funkce.



Obrázek 3.3.2: Derivace inverzní funkce v praxi.



Obrázek 3.3.2: Derivace inverzní funkce na grafu.

Derivace inverzní funkce je převrácená hodnota derivace.

... to prostě vidíme z obrázku, nebo použijeme derivaci složené funkce ...

A podobně to zjistíme i pro nevlastní nebo nulovou derivaci :-)

3.3.3 Věty (Pozorování derivace)

Pokud má funkce v bodě kladnou derivaci, je v tom bodě rostoucí.
Pokud má funkce na intervalu nezápornou derivaci, je v tom intervalu neklesajicí.

... vidíme, že $f(x) + \varepsilon x$ je rostoucí pro každé ε.

Pokud má funkce na intervalu nulovou derivaci, je v tom intervalu konstantní.

Derivace je vlastně lineární aproximace funkce. Každá rozumná funkce půjde lokálně nahradit konstantou, pro lepší výsledek lze vzít přímku (derivace), popřípadě parabolu či polynomy vyšších stupňů.

Pokud mají dvě funkce na jednom intervalu stejnou vlastní derivaci, pak se liší o konstantu.

To je na první pohled úplná trivialita, ale stojí na tom celá teorie integrálu. Bomba!!!

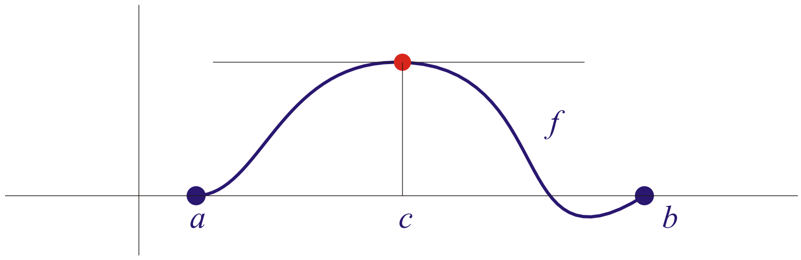
3.3.4 Věty (O tečně ke grafu funkce)

Nechť je f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má na (a, b) derivaci.

(i) Pokud $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (0, 1)$ takové, že $f'(c) = 0$.

(Rolle 1691)

Je to jasná tečna ke grafu funkce f.

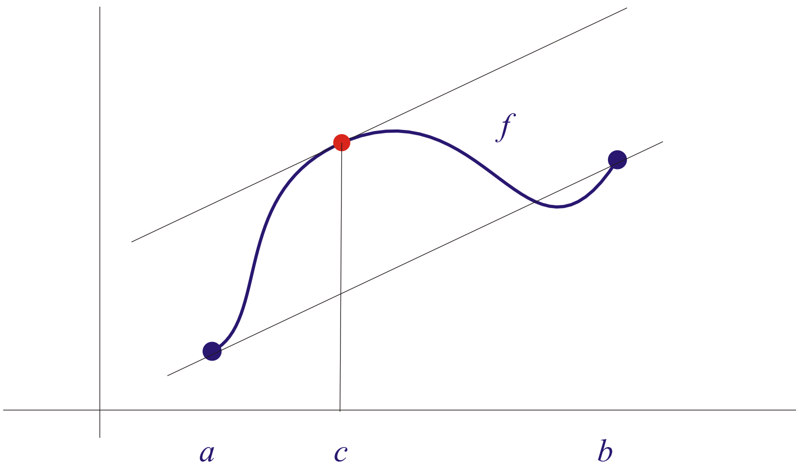


Obrázek 3.3.4: Existuje nejvyšší (nebo nejnižší) bod s vodorovnou tečnou.

(ii) Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,.$$

(J.L.Lagrange 1797)



Obrázek 3.3.4: Existuje dotyk v daném směru.

... a teď je to jenom trochu natočené.

Pro tato tvrzení se používá název **věta o střední hodnotě**.

3.3.5 Věta (Zobecněná věta o střední hodnotě)

Nechť

(i) Funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$.

(ii) Funkce f má derivaci na intervalu (a, b).

(iii) Funkce g má vlastní nenulovou derivaci na intervalu (a, b).

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

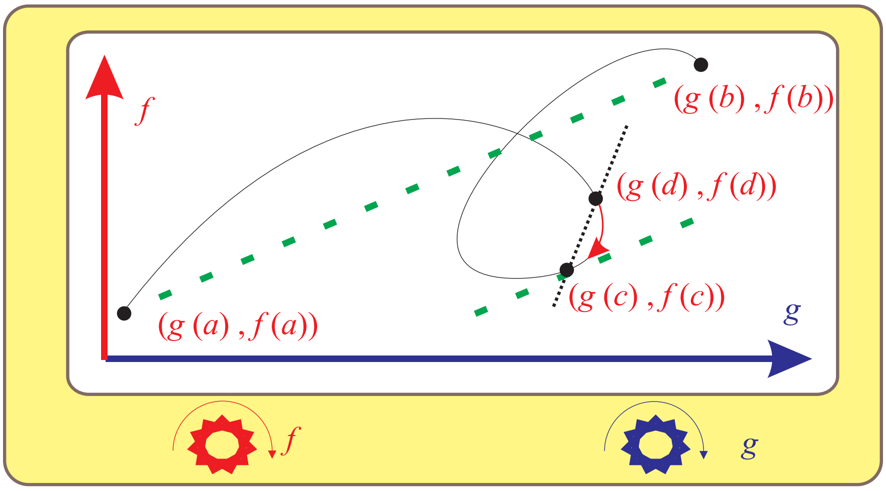
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \, .$$

(A.L.Cauchy 1823)

Důkaz: Pro funkci $(f(x) - f(a)).(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a)).(f(b) - f(a))$ použijeme větu o tečně ke grafu funkce. ■

Uvažujme zobrazení z $[a, b]$ do $\mathbb{R}^2$ s předpisem $x \mapsto (g(x), f(x))$. Jde vlastně o křivku v rovině. Tečna k této křivce ve směru z bodu $(g(a), f(a))$ do bodu $(g(b), f(b))$ má směrnici

$$\frac{f(d) - f(c)}{g(d) - g(c)} = \frac{\frac{f(d)-f(c)}{d-c}}{\frac{g(d)-g(c)}{d-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \, .$$



Obrázek 3.3.5: Oblíbená dětská hračka

Všimněme si, že „klička“ na obrázku nemůže být díky monotonii g.

3.3.6 Věta (Pravidlo pro limity $\frac{0}{0}$)

Nechť funkce f, g mají nulovou limitu v bodě a. Pak platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, ,$$

pokud existuje limita vpravo.

(J.Bernoulli $\sim$ 1691)

NEČTE SE: „Umíme-li derivovat, nepotřebujeme umět limitit“.

Důkaz: Odvodíme podle zobecněné věty o střední hodnotě, že

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

a zlimitíme pro $x \to a$. ■

Podobné pravidlo platí i pro $\frac{?}{+\infty}$.

3.3.7 Věta (O jednostranné derivaci)

Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě a. Pak platí

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a} f'(x)\ ,$$

pokud existuje limita vpravo.
Důkaz: Odvodíme z věty o tečně ke grafu funkce, že

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(c(h))$$

a zlimitíme pro $h \to a$. ■

3.3.8 Věta (O rozvoji funkce)

Je-li n-tá derivace $f^{(n)}$ spojitá v bodě x_0, pak existuje právě jeden polynom $T(x)=T_n^{f,x_0}(x)$ tak, že

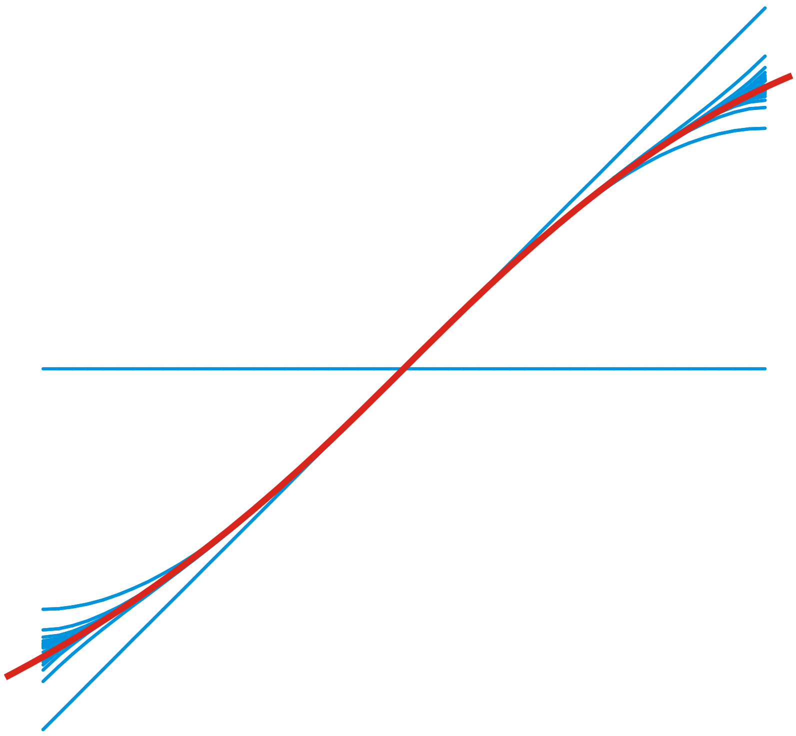
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n}=0\ .$$

Polynomu $T(x)=T_n^{f,x_0}(x)$ se říká n-tý **aproximační polynom** funkce f v bodě x_0.

(B.Taylor 1715)

Důkaz: Použijeme pravidlo pro limity $\frac{0}{0}$ a limitu spočteme. ■

Jedná se o nejlepší aproximaci daného (zde n-tého) řádu. Pro $n=0$ jde o konstantní funkci, pro $n=1$ jde o tečnu ke grafu, pro $n=2$ o parabolu a tak dál. Přesnost "dotyku"grafu f a T se zpřesňuje.



Obrázek 3.3.8: Konstantní, lineární, kvadratická, kubická a další aproximace funkce arkustangens na intervalu $(-1, 1)$.

Důkaz: Použijeme pravidlo pro limity $\frac{0}{0}$ a limitu spočteme. ■

Tedy můžeme psát

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n ,$$

kde $\approx$ znamená, že se jedná o aproximační polynom.

3.3.9 Definice (Symbol "malé o")

Platí-li

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 ,$$

píšeme $f(x) = o(g(x))$, pro $x \to x_0$ a říkáme „ef iks je malé ó gé iks pro iks se blíží k iks nula“.

(Landau $\sim$ 1930)

Symbolem o zde vlastně zavádíme lokální pomocnou funkci $o(g(x))$, o které se neví skoro nic, jenom to, že jakási limita je rovna nule. Takových lokální funkcí se může objevit více, my je můžeme sčítat, násobit a podobně (a není je potřeba nějak rozlišovat, např. „indexovat“). Až bude potřeba o nějakém výrazu něco dokázat, použijeme tu informaci o limitě . . .

Například pokud $f(x) = o(x^2)$, pro $x \to x_0$ a $g(x) = o(x^3)$, pro $x \to x_0$, pak $(f(x) + g(x)) = o(x^2)$, pro $x \to x_0$.

Je dobré si myslit, že $f(x) = o(g(x))$, pro $x \to x_0$ znamená, že f je „řádově mnohem menší“ než g poblíž x_0 (což ve skutečnosti doslova neplatí). Pak je pochopitelné $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$.

Takže se dá psát (pro $x \to x_0$)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o(x^n) \, .$$

Zápisu $f - T = o(x^n)$, $x \to x_0$ říkáme **óčkový tvar zbytku**.

(G.Peano $\sim$ 1900)

Pomocí vět o střední hodnotě lze najít další tvary zbytku.

3.3.10 Věta (Pravidla počítání rozvojů)

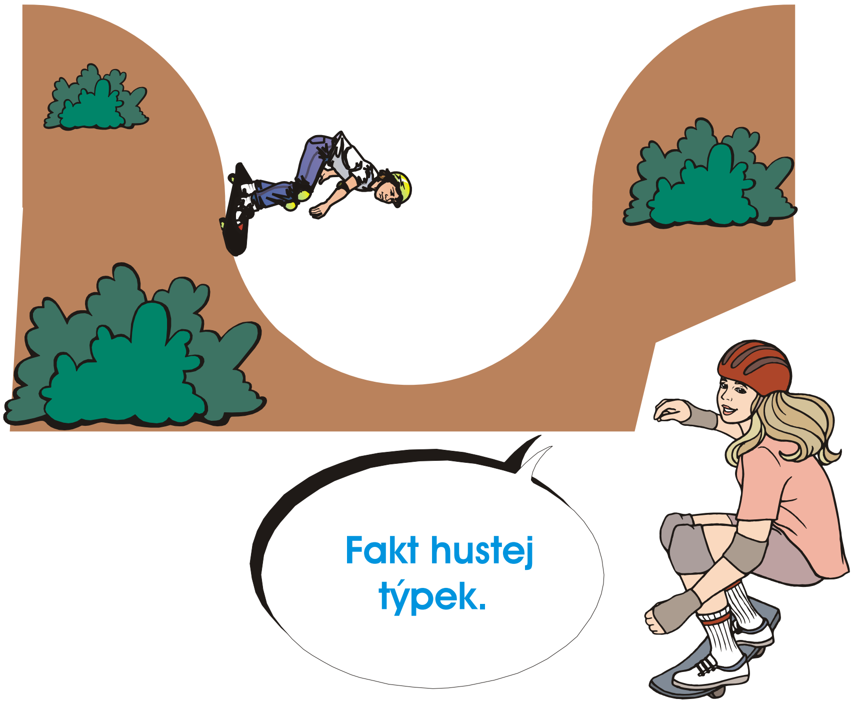
Aproximační polynom součtu je součet aproximačních polynomů sčítanců.

Podobně pro součin, skládání a podobné operace.

Ony vlastně všechny lepší funkce jsou zadány jejich aproximačním rozvojem, vlastně řadou z něho koukající.

3.4 Průběh funkce

Průběh daného děje a jeho zkoumání je užitečnou pomůckou k přežití. Pokud je situace přehledná, pomůže pouhý pohled. Pokud jsme v nepřehledné situaci, pomůže počítání derivací a podobně.



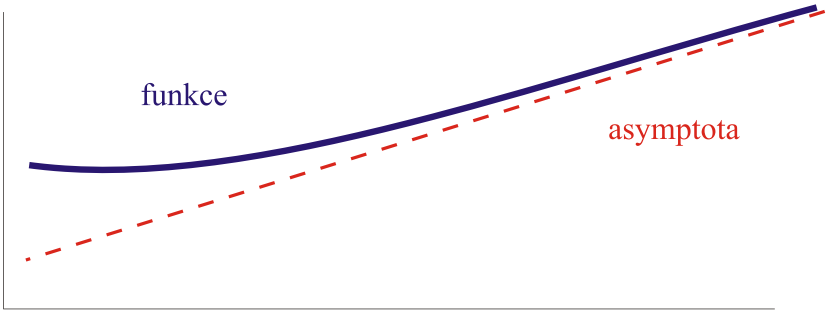
Obrázek 3.4.0: Ano, to je výkon. Mládenec dosáhl inflexního bodu na grafu funkce a bodu obdivu v dívčím srdci.

3.4.1 Definice (Průběh funkce)

Průběhem funkce rozumíme „promyšlený obrázek“ grafu funkce, na kterém je vidět (pokud pro danou funkci existují):

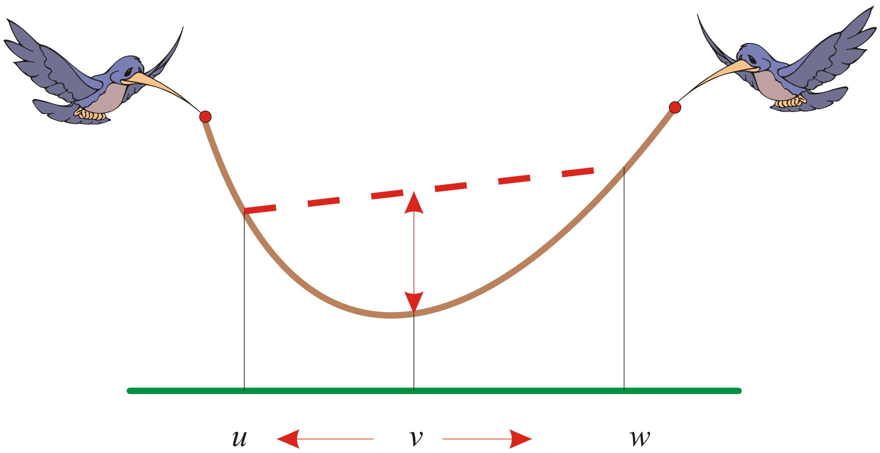
- definiční obor, obor hodnot
- hodnoty (limity) ve významných bodech
- monotonie
- spojitost
- derivace
- **asymptota** (přímka přimykající se ke grafu funkce v nevlastním bodě)
- **konvexita** (graf funkce je pod sečnou)

…funkce je „ohnutá“ nahoru



Obrázek 3.4.1: Asymptota. Jde o „téměř linearitu“ u nekonečna.

- **konkavita** (graf funkce je nad sečnou)



Obrázek 3.4.1: Konvexní funkce. Je to tažené nahoru.

... funkce je „ohnutá“ dolů

- **inflexní bod** (kde se mění konvexita na konkavitu).

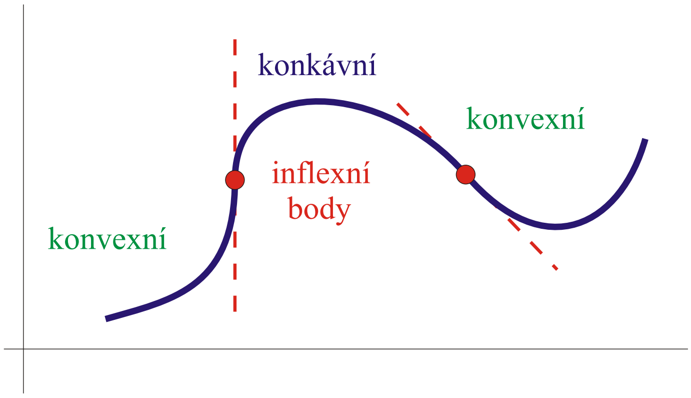
3.4.2 Věty (O konvexitě)

Je-li druhá derivace kladná, je první derivace rostoucí a funkce je konvexní.
Konvexní funkce je spojitá ve vnitřních bodech intervalu.

3.4.3 K čemu se hodí průběh funkce

Pomocí vyšetření průběhu funkce lze dokázat řadu tvrzení, např.:

- nerovnost $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0)$,



Obrázek 3.4.1: Jde o samozřejmosti.

- existence řešení rovnice ($\exists x \in \mathbb{R} : x^3 - 2 = 0$).

Pro hledání nulových bodů funkce můžeme použít například metodu půlení intervalů nebo metodu tečen.

> Je mnoho lidí, kteří čtou jen proto, aby nemuseli přemýšlet.
> (G.Ch.Lichtenberg $\sim$ 1770)

3.4.4 Věta (Exponenciála je pěkná funkce)

Existuje právě jedna funkce $\exp$ definovaná na $\mathbb{R}$, pro kterou platí

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Této funkci budeme říkat **exponenciála**.

(A.L.Cauchy 1821)

Jde o funkci

$$\exp(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n ,$$

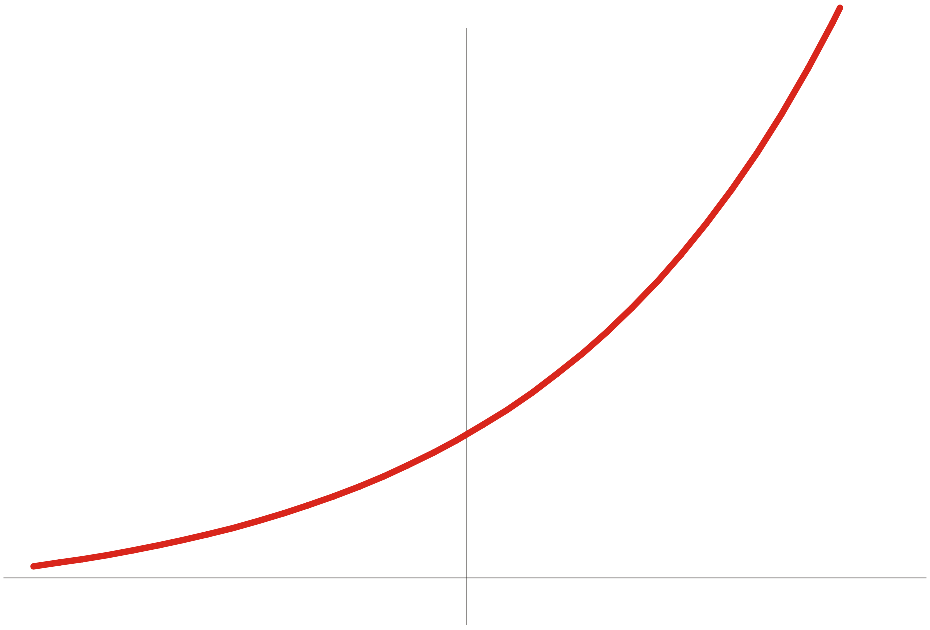
kde limita i řada konvergují lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

A dále samozřejmě platí řada věcí

- Exponenciála je rovna své derivaci.
- Exponenciála je rostoucí a konvexní na $\mathbb{R}$.

✏ $\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Hle!!! Součin řad !!!



Obrázek 3.4.4: Graf exponenciály.

Inverzní funkci k exponenciále nazveme **logaritmus**.

(L.Euler $\sim$ 1748)

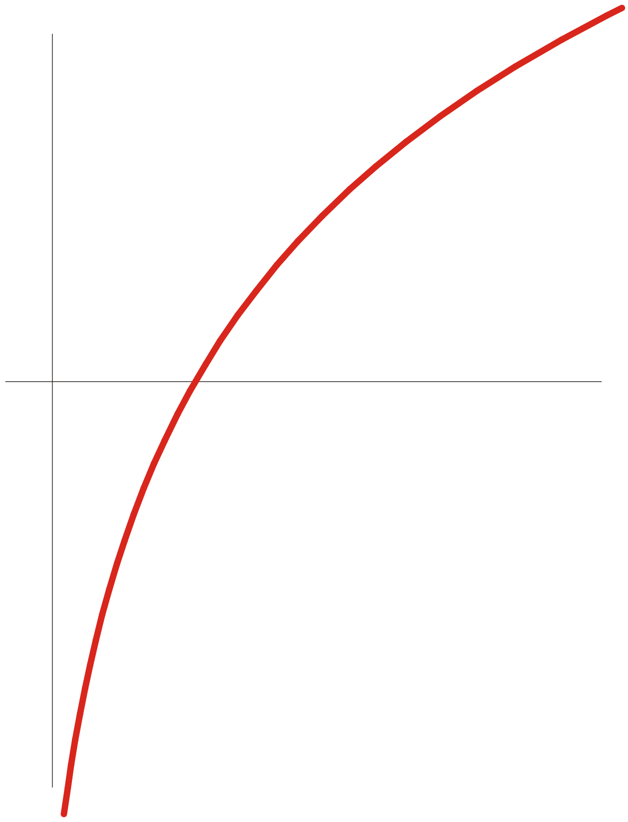
... přirozeně ;-)

Označíme $e = \exp(1)$

... a jde ukázat, že
$e - 1 - 1/2! - \cdots - 1/n! < 1/n \cdot n!$,
z čehož vyplývá, že číslo e je iracionální „drobeček“

a budeme místo $\exp(x)$ používat i zápis e^x. Podobně definujeme

$$a^b = \exp(b \cdot \log(a))$$



Obrázek 3.4.4: Graf logaritmu.

pro kladné a,

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \cdot \log(f(x)))$$

pro kladnou funkci g. Této operaci se říká **obecná mocnina**.

A většina toho jde provést i v $\mathbb{C}$ . . . .

A vzorečky se množí samy od sebe:

$$\exp(x + i \cdot y) \;=\; \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) \;,$$

kde funkce **sinus** a **kosinus** se definují

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \;, \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \;.$$

K funkcím $\sin, \cos, \mathrm{tg}\,, \mathrm{cotg}\,$ přidáme inverzní funkce **arkus sinus**, . . .

. . . a nic nám nemůže chybět ke spokojenosti :-)

Číslo π je nejmenší kladné reálné číslo, pro které je sinus nulový.

Zcela nedůležitou, ale praktickou otázkou je, zda se neměla konstanta π zvolit dvojnásobná, pak by řada vzorečků vypadala lépe (např. plný úhel by byl π, kvadrant by byl $\pi/4$, platilo by $e^{\pi \cdot i} = 1$). To, co platí, je $e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$.

Kapitola 4

Integrace podle jedné proměnné

Tato kapitola se zabývá měřením rovinných objektů. Budeme zkoumat velikost plochy rovinného obrazce omezeného funkcí. Překvapivým zjištěním bude to, že velikost plochy pod grafem funkce souvisí s operací derivování a k ní inverzní operaci integrování.

4.1 Konečně aditivní integrace

4.1.1 Definice (Konečně aditivní integrace)

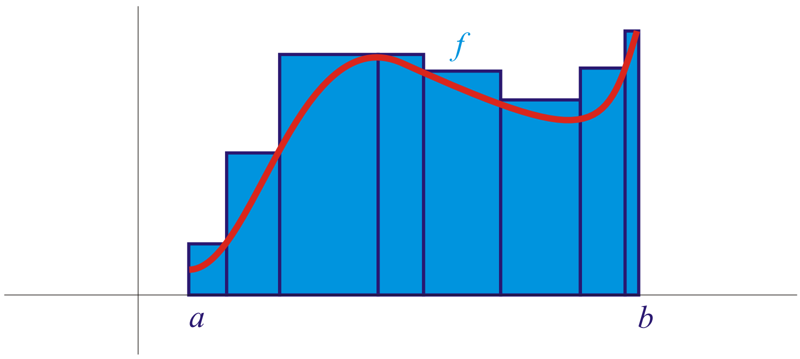
Pro funkci f omezenou na omezeném intervalu $[a, b]$ a **dělení** intervalu

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n \ : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

na $n \in \mathbb{N}$ intervalů definujeme

- **horní funkci** $\overline{fD}$ jako nejmenší funkci větší než (nebo rovnou) f, která je konstantní na vnitřcích intervalů D

- **horní součet** $S(D, f)$ plochu mnohoúhelníka pod grafem funkce $\overline{fD}$ (sjednocení obdélníků)

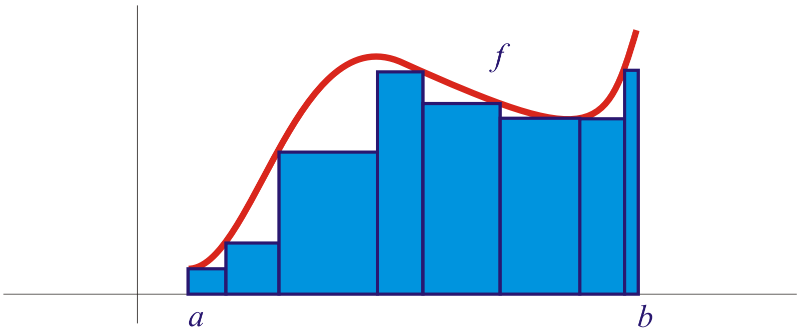


Obrázek 4.1.1: Horní součet.

- **horní integrál** jako infimum horních součtů přes všechna dělení intervalu $[a, b]$:

$$\overline{\int_a^b} f \;=\; \inf\{S(D, f) : D \text{ je dělení } [a, b]\}\ .$$

- **dolní funkci** $\underline{fD}$ jako nejmenší funkci menší než (nebo rovnou) f, která je konstantní na vnitřcích intervalů D
- **dolní součet** $s(D, f)$ plochu mnohoúhelníka pod grafem funkce $\underline{fD}$ (sjednocení obdélníků)



Obrázek 4.1.1: Dolní součet.

- **dolní integrál** jako suprémum dolních součtů přes všechna dělení intervalu $[a, b]$:

$$\underline{\int_a^b} f \;=\; \sup\{s(D, f) : D \text{ je dělení } [a, b]\}\ .$$

Když se dolní a horní integrál rovnají, říkáme, že funkce je **integrovatelná** a společnou hodnotu nazveme **integrál** funkce f na intervalu $[a, b]$ a značíme

$$\int_a^b f\ .$$

(B.Riemann $\sim$ 1850)

Tak, jak je snadné derivování, tak nesnadné je integrování. Navíc někdy ani nevíme, jestli integrál lze najít.
(J.Bernoulli $\sim$ 1720)

Budeme pojem integrovatelnosti ještě rozšiřovat, pro jednoznačnost můžeme takto integrovatelné funkci říkat **integrovatelná podle dělení**.

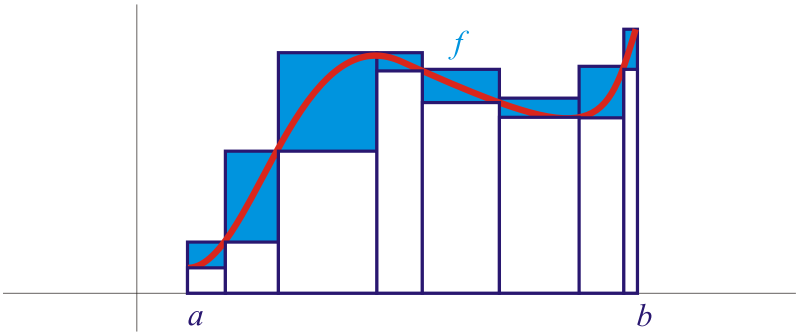
Podobně se počítala dávno plocha kruhu. Nic nového pod sluncem. Jenom je to fikaně definováno.

Všimněme si, co se stane, když místo daného dělení D použijeme jeho **zjemnění** $D^* \supset D$.

4.1.2 Věta (Kritérium integrovatelnosti)

Funkce f je integrovatelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D tak, že

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon \,.$$



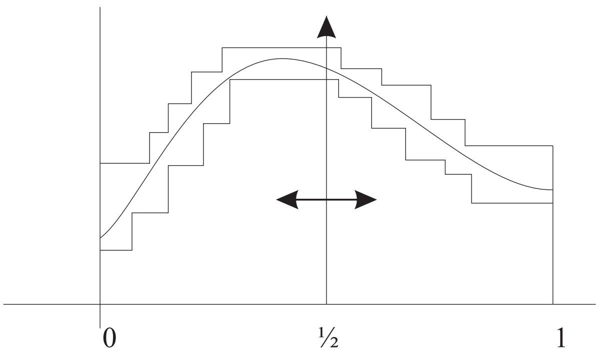
Obrázek 4.1.2: Integrovatelnost se pozná podle toho, že se dá graf funkce pokrýt obdélníčky s libovolně malou celkovou plochou.

4.1.3 Věta (Základní věta analýzy)

Spojitá funkce je integrovatelná.

> Celek je víc než součet součástí.
> (Aristotelés ze Stageiry $\sim$ -350)

Důkaz: Spojitá funkce má na intervalu [0,1] integrál. Důkaz sporem.



Obrázek 4.1.3: Někde je ta chyba větší než poloviční.

Je-li na intervalu $I_1 = [0, 1]$ rozdíl $\mathcal{U} - \mathcal{L} > d$ (a tedy někde výška pásu $\mathcal{P}$ alespoň d), pak je po rozdělení v bodě na dva poloviční intervaly vlevo nebo vpravo rozdíl $\mathcal{U} - \mathcal{L} > d/2$ (a tedy někde výška pásu $\mathcal{P}$ alespoň d). Označíme ten interval I_2. Postup opakujeme a v průniku intervalů I_n najdeme bod s výškou pásu $\mathcal{P}$ alespoň d. V tomto bodě nemuže být f spojitá. Spor.
■

(Stephen M. Walk 2010)

Ted „důkaz obrázkem“ je neuvěřitelně jednoduchý. Klasicky (do roku 2010) se to dokazovalo pomocí stejnoměrné spojitosti.

4.1.4 Věta (Integrace je lineární funkcionál)

Jsou-li f a g integrovatelné, pak je integrovatelný i jejich součet $f+g$ a integrál ze součtu je roven součtu integrálů. Podobně pro násobek reálným číslem.

Důkaz: Vezmeme společné zjemnění dělení pro f a pro g. ■

4.1.5 Definice (Plocha pod grafem funkce)

Označme $\mathcal{M}$ množinu

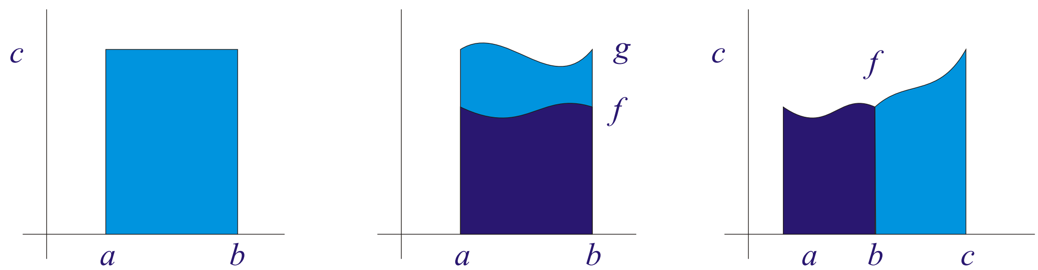
$$\mathcal{M} = \{(f,[a,b]) \ : \ \text{funkce } f \text{ je spojitá na intervalu } [a,b] \ \} \ .$$

Zobrazení $\mathcal{P} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ nazveme **plocha pod grafem funkce**, pokud platí následující podmínky:

(i) $\mathcal{P}(c,[a,b]) = c \cdot (b-a)$ ... (pro konstantní funkci se rovná obsahu obdélníka),

(ii) pokud $f \le g$, pak $\mathcal{P}(f,[a,b]) \le \mathcal{P}(g,[a,b])$ ... (pro menší funkci je plocha menší),

(iii) pokud $a < b < c$, pak $\mathcal{P}(f,[a,b]) + \mathcal{P}(f,[b,c]) = \mathcal{P}(f,[a,c])$ ... (sousední plochy lze sčítat).



Obrázek 4.1.5: Základní vlastnosti plochy pod grafem funkce.

4.1.6 Věta (Plocha pod grafem funkce)

Existuje právě jedno zobrazení, které má vlastnosti plochy funkce pod grafem. Tímto zobrazením je integrál a platí

$$\mathcal{P}(f,[a,b]) \ = \ \int_a^b f \ .$$

Ta integrace podle dělení spočívá na třech vlastnostech plochy funkce pod grafem. Jinak to ani nemohlo vyjít. Ty tři vlastnosti jsou krystalicky čistá esence integrování.

4.1.7 Výhody a nevýhody

Výhody:

- Integrál je jednoduchý.
- Spojité funkce jsou integrovatelné.

Nevýhody:

- Neumí integrovat neomezené funkce.
- Neumí integrovat na neomezených intervalech.
- Neumí limitní přechod (integrál z limitní funkce).

U charakteristické funkce množiny racionálních čísel (rovné racionální síto) jsou nastaveny „ochranné štíty“ před "útokem"shora. Takhle můžeme „ochránit“ každou funkci zdola i shora - a horní funkce a dolní funkce se vůbec nic nedozví o naší funkci …

A co znamená ta „konečná aditivita“? Integrace probíhá na konečně mnoha sousedních intervalech a je lineární pro konečně mnoho sčítanců.

4.2 Spočetně aditivní integrace

4.2.1 O počítání drobných

Představme si člověka, který počítá své kapesní úspory tak, že vytahuje z kapsy drobné mince a postupně připočítává jejich hodnotu k průběžnému výsledku (konečně aditivní integrace).

Nabízí se ovšem i jiný postup, vyndat všechny mince a roztřídit je podle hodnoty, pak sčítat podle jednotlivých druhů mincí součiny „počet x hodnota“ („jinak“ aditivní integrace).

Převedeno do řeči integrace tato „jiná“ integrace znamená připustit jiné množiny než pouze intervaly. Pro tyto množiny musíme být schopni zjistit jejich velikost, „poctivou míru“. Pokud to dovedeme, pak se „jiná“ integrace definuje podobně jako integrace podle dělení.

4.2.2 Definice (Plocha pod grafem funkce)

Označme $\mathcal{N}$ množinu $\mathcal{N} = \{(f, A) \quad : \quad \text{funkce } f \text{ je nezáporná na množině } A\}$. Zobrazení $\mathcal{P} : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ nazveme **plocha pod grafem funkce**, pokud platí následující podmínky:

(i) $\mathcal{P}(f, A) \geq 0$, $\mathcal{P}(0, A) = 0$ (je nezáporná).

(ii) $\mathcal{P}(f_1 + f_2 + \cdots, A) \;=\; \mathcal{P}(f_1, A) \;+\; \mathcal{P}(f_2, A) \;+ \cdots$
(pro funkce je spočetně aditivní).

(iii) Pro disjunktní $A_1, A_2, \ldots$ platí

$$\mathcal{P}(f, A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \mathcal{P}(f, A_1) + \mathcal{P}(f, A_2) + \cdots$$

(přes disjunktní množiny je **spočetně aditivní**).

Například je to hodnota funkce v pevném bodě, to jsme chtěli? Zatím to neřeším.

4.2.3 Definice (Nulová míra)

Podmnožina $\mathbb{R}$ se nazývá **nulová množina**, pokud jde pokrýt spočetně mnoha otevřenými intervaly, součet jejichž délek je libovolně malý.

Řekneme, že vlastnost $\mathcal{V}$ platí **skoro všude**, pokud $\mathcal{V}$ platí až na množinu nulové míry.

Racionální čísla jsou nulovou množinou. Taková množina by neměla z hlediska plochy hrát žádnou roli a plocha pod grafem charakteristické funkce množiny racionálních čísel (která je rovna nule skoro všude) by měla být nulová.

4.2.4 Definice (Vnější míra)

Soubor podmnožin $\mathbb{R}$ nazveme σ-**algebra**, pokud je uzavřený na doplňky, spočetná sjednocení a spočetné pruniky.

Prvek nejmenší σ-algebry obsahující otevřené množiny nazveme **topologická množina**.

(É.Borel $\sim$ 1920)

Prvek nejmenší σ-algebry obsahující všechny topologické a všechny nulové množiny nazveme **(poctivě) měřitelná množina**.

To je nejlepší metoda!!! Jde to i jinak ...

Pro otevřenou množinu $G = \cup_{n=1}^{+\infty}(a_n, b_n)$ definujeme $m(G) = \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n)$.
Pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ definujeme

$$m^*(A) = \inf\{m(G) \;:\; G \text{ je otevřená nadmnožina } A\}$$

a tomuto číslu říkáme **vnější míra** množiny A.

Poctivější než vnější míru jen tak nenajdeme ...

4.2.5 Věta (Spočetná subaditivita vnější míry)

Vnější míra m^* splňuje

(i) $m^*(\emptyset) = 0$

(ii) jestliže $A \subset B$, pak $m^*(A) \leq m^*(B)$

(iii) $m^*(f, A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \leq m^*(f, A_1) + m^*(f, A_2) + \cdots$
(je **spočetně subaditivní**).

4.2.6 Věta (Charakteristika měřitelných množin)

Následující podmínky jsou ekvivalentní:

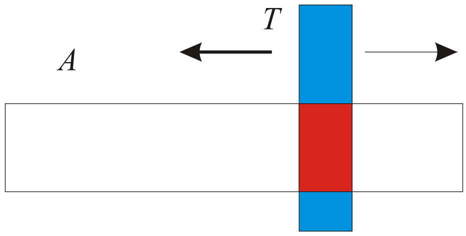
(i) Množina A je měřitelná

(ii) Pro každé ε existuje otevřená množina G tak, $m^*((A \setminus G) \;\cup\; (G \setminus A)) < \varepsilon$

(iii) $m^*(T) = m^*(T \cap A) + m^*(T \setminus A)$ platí pro každou ("testovací") $T \subset \mathbb{R}$

(Carathéodory $\sim$ 1920)

... technické podmínky :-(



Obrázek 4.2.6: Použití testovací množiny.

4.2.7 Věta (Míra na měřitelných množinách)

Platí následující

(i) $m^*(\emptyset) = 0$

(ii) Pro A měřitelnou platí $m^*(A) \geq 0$

(iii) Pro vzájemně disjunktní měřitelné množiny A_i platí

$$m^*(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = m^*(A_1) + m^*(A_2) + \cdots$$

(je **spočetně aditivní** na disjunktních měřitelných množinách).

Vnější míře na měřitelných množinách budeme říkat **(poctivá) míra** a na systému měřitelných množin budeme místo m^* psát m.

Teď to je hotové. Začalo se s vnější mírou pomocí aproximace shora otevřenými množinami. Pak se jakýmsi kouzlem ukázalo, že tahle vnější míra je na měřitelných množinách spočetně aditivní mírou. A funguje to na všech topologických množinách.

4.2.8 Věta (Axiom výběru a neměřitelná množina)

Definujeme na $[0, 1]$ relaci $x \approx y$ pokud rozdíl $x - y$ je racionální. Pomocí axiomu výběru z každé třídy ekvivalence vybereme jeden prvek a z těchto prvků sestavíme množinu A, která je neměřitelná.

S axiomem výběru si ještě užijeme …

Důkaz: Jestliže je A měřitelná, pak musí být míra nulová, protože sjednocení spočetně mnoha jejich posunutých kopií se vejde do omezeného intervalu. To ale nejde, protože interval $[0, 1]$ se vejde do sjednocení spočetně mnoha posunutých kopií množiny A. ■

Změř všechno, co je měřitelné a učiň měřitelným to, co není.
(G.Galilei $\sim$ 1620)

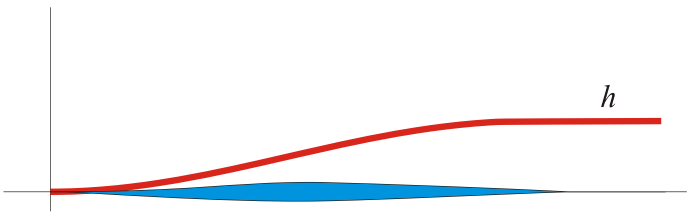
Galileo zřejmě nepracoval s axiomem výberu.

4.2.9 Definice (Míra na tlustější reálné ose)

Místo $b - a$ jako velikosti intervalu $[a, b]$ lze vzít i jinou „velikost“. Pro libovolnou neklesající zprava spojitou funkci h (určující „tloušťku“ reálné osy v daném místě) můžeme za "velikost"intervalu $[a, b]$ vzít číslo $h(b)-h(a)$, pak vnější míra, měřitelné množiny a míra se definuje zcela stejně jako v předchozím textu. Takto vzniklá nová „míra“ se nazývá **nepoctivá míra** a dá se s ní také vybudovat teorie integrace.

(T.J.Stieltjes $\sim$ 1913)

Dvakrát měř, jednou ŘEŠ!



Obrázek 4.2.9: Jak se nad tlustší reálnou osou měří s pomocnou funkcí h. Záporná reálná osa zde nedostala žádnou míru.

4.2.10 Definice (Měřitelné funkce)

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **měřitelná**, pokud jsou „vrstevnicové množiny“ $\{x : f(x) > c\}$ měřitelné pro každé $c \in \mathbb{R}$.

4.2.11 Věta (O měřitelných funkcích)

Součet, součin, maximum, limes superior, ... měřitelných funkcí je měřitelný.

A nyní již nic nebrání spočetně aditivním hrátkám.

4.2.12 Definice (Spočetně aditivní integrace)

Pro množinu A je **charakteristická funkce množiny** A funkce definovaná předpisem $\chi_A(x) = 1$ pro $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ jinde.
Součet tvaru

$$s(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \chi_{A_j}(x)$$

nazveme **jednoduchá funkce** a pokud jsou množiny A_j měřitelné a funkce s nezáporná, definujeme **(poctivý) integrál** předpisem

$$\int s \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot m(A_j)\;.$$

Pro nezápornou měřitelnou funkci f definujeme

$$\int f \;=\; \sup\left\{\int s \;:\; 0 \le s \le f,\; s \;\text{ je jednoduchá měřitelná funkce}\right\}\;.$$

Zde vystačíme s aproximací zdola, horní nic nového nedá.

Pro měřitelnou funkci f definujeme $f^+ = \max(f, 0)$ (**kladná část**) a $f^- = -\min(f, 0)$ (**záporná část**), s nimi dokončíme definici integrálu

$$\int f \;=\; \int f^+ \;-\; \int f^-\;.$$

Je-li hodnota obor integrálů vpravo konečná, říkáme funkci f **(poctivě) integrovatelná**.

(H.Lebesgue 1901 a 1902, F.Riesz 1912 a 1920)

Příroda se směje potížím při integrování.
(P.S.de Laplace $\sim$ 1790)

Podobá se to integraci podle dělení. Místo dělení máme však měřitelné množiny, které si rozumí se spočetnými operacemi. To se projeví ve vlastnostech integrálu.

4.2.13 Věty (Limitní chování spočetně aditivní integrace)

Věta o monotónní konvergenci: Nechť $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ jsou měřitelné funkce. Pak

$$f_n \to f \;,\; n \in \mathbb{N} \implies \int f_n \to \int f \;,\; n \to +\infty$$

(B.Levi 1906)

Věta o limes inferior: Nechť $f_1, f_2, \ldots$ jsou nezáporné měřitelné funkce. Pak

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n \;.$$

(P.J.L.Fatou 1906)

Důkaz: Funkce $g_n = \inf_{i\geq n}$ tvoří neklesající posloupnost konvergující k f. ∎

Věta o majorizované konvergenci: Nechť $f_1, f_2, \ldots$ jsou nezáporné měřitelné funkce. Nechť existuje integrovatelná g tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$. Pak

$$f_n \to f \;,\; n \in \mathbb{N} \implies \int f_n \to \int f \;,\; n \to +\infty$$

(H.Lebesgue 1910)

Důkaz: Použijeme pro $f_n + g$ a $g - f_n$ větu o limes inferior. ∎

Jde o nejdůležitější vlastnosti integrálu, jeho schopnost spolupracovat s limitními přechody. Je namístě nasávat sílu spočetně aditivního integrovaní :-)

4.2.14 Věty (Vztah měřitelných a spojitých funkcí)

Věta o spojitosti skoro všude: Nechť je f měřitelná na intervalu $[0, 1]$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spojitá funkce g na intervalu $[0, 1]$ tak, že se f a g liší na množině míry menší než ε.

(N.N.Luzin 1912)

Jak dokazovat věty „chytrým způsobem“?

(Griffith)

Důkaz: Napíšeme funkci f jako řadu z jednoduchých funkcí. Každou z nich zaproximujeme spojitou funkcí a řada z těchto funkcí konverguje stejnoměrně ke spojité funkci. ■

S dobrými definicemi zpravidla není důkaz žádný zázrak.

Věta o polospojité aproximaci: Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $[0,1]$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existují funkce g, h tak, že $g < f < h$ a platí

$$\int (h-g) < \varepsilon \; .$$

Funkce g, h lze volit tak, že g je **shora polospojitá** (v každém bodě x ke každému $\varepsilon > 0$ existuje okolí, kde jsou funkční hodnoty $< \; g(x) + \varepsilon$), že h je **zdola polospojitá** (v každém bodě x ke každému $\varepsilon > 0$ existuje okolí, kde jsou funkční hodnoty $> g(x) - \varepsilon$).

(Vitali, Carathéodory $\sim$ 1920)

Důkaz: Funkci f vyjádříme řadou z charakteristických funkcí měřitelných množin. Tyto množiny aproximujeme zevnitř uzavřenými množinami (z nich se udělá funkce g) a zvenčí otevřenými množinami (z nich se udělá funkce h). ■

4.2.15 Definice (Integrace na podmnožině)

Pro měřitelnou $A \subset \mathbb{R}$ definujeme

$$\int_A f \; = \; \int f \cdot \chi_A \; .$$

Poctivou míru budeme označovat m a itegraci podle poctivé míry

$$\int f \, dm$$

a pro $A = [a,b]$ budeme psát

$$\int_A f \; = \; \int_a^b f \, dm = \int_a^b f(x) \, dx \; .$$

Pro A měřitelnou a f integrovatelnou rozšíříme definici plochy pod grafem funkce předpisem

$$\mathcal{P}(f, A) = \int_A f \, dm \; .$$

4.2.16 Věta (Plocha pod grafem funkce)

Plocha pod grafem funkce $\mathcal{P}$ má vlastnosti:

(i) $\mathcal{P}$ je nezáporná pro nezáporné funkce.

(ii) $\mathcal{P}$ je spočetně aditivní pro nezáporné měřitelné funkce.

(iii) $\mathcal{P}$ je spočetně aditivní pro disjunktní měřitelné množiny.

OK, nic jiného jsem nečekal.

4.2.17 Věta (Základní věta analýzy)

Je-li funkce F derivovatelná v každém bodě intervalu $[a, b]$ a její derivace F' integrovatelná na intervalu $[a, b]$, pak platí

$$\int_a^b F'(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

Každý čtenář, který došel až sem a který vidí tuto krásu, je mi velmi drahý.

Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, pak pro

$$F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\, dt$$

(neurčitý integrál funkce f) platí $F'(x) = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ a tedy

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \int_a^b F'(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

Při derivování nahradíme (v podstatě lineární) funkci $x \mapsto cx$ konstantou c. Při integrování konstanty c dostaneme lineární funkci cx a jsme zase doma.

Důkaz: Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje δ-okolí bodu x_0 tak, že na něm platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pak na δ-okolí bodu x_0 máme odhad

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \;=\; \left| \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\, dt \right| \;<\; \varepsilon\,,$$

čili $F'(x_0) = f(x_0)$. Dokázali jsme spojitý případ. Nyní dokážeme první část věty.
K $\varepsilon > 0$ najdeme zdola polospojitou aproximaci g na intervalu $[a, b]$ splňující $g > F'$ a

$$\int_a^b g(x)\, dx \ < \ \int_a^b F'(x)\, dx \ + \varepsilon$$

podle věty o polospojité aproximaci.
Dokážeme později, že

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b g(x)\, dx \ < \ \int_a^b F'(x)\, dx \ + \varepsilon\ ,$$

z toho pro $\varepsilon \to 0$ dostaneme

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b F'(x)\, dx$$

a zopakováním celého postupu pro $-F$ dostaneme i opačnou nerovnost, což je znění věty.
Zbývá dokázat, že

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b g(t)\, dt\ .$$

K tomu dokážeme pro $x \in [a, b]$ podobnou nerovnost

$$F(x) - F(a) \leq \int_a^x g(t)\, dt\ ,$$

nebo ještě snáze nerovnost

$$F(x) - F(a) \leq \int_a^x g(t)\, dt \ + \ c \cdot (x - a)$$

pro kladnou malou konstantu c (kterou pak pošleme k nule). Tato nerovnost platí pro $x = a$. Všimneme si, že levá strana roste lokálně v okolí bodu x nanejvýš jako lineární funkce se směrnicí $F'(x) + c$, pravá strana lokálně roste (díky polospojitosti funkce g) jako lineární funkce se směrnicí $g(x) + c > F'(x) + c$, tedy vidíme, že nerovnost zůstane platit na celém intervalu $[a, b]$. ∎

Kouzlo věty spočívá v tom, že dovedeme spočítat plochu pod grafem funkce F', tedy že platí

$$\int_a^b F'(x)\, dx \ = \ F(b) - F(a)\ ,$$

4.2.18 Funkce derivovatelné skoro všude

Budeme nyní usilovat o další verzi základní věty analýzy. V její formulaci a odvozování se bude podstatným způsobemo objevovat derivování (zejména monotónních funkcí) skoro všude. Často se používá následující „skoro pokrývací lemma“.

4.2.19 Věta (O konečném skoro pokrytí)

Nechť množina $A \subset \mathbb{R}$ konečné míry je pokryta souborem S intervalů. Nechť je každý bod A obsažen v libovolně malém intervalu systému S. Pak v S existuje konečný podsoubor disjunktních intervalů pokrývající A až na množinu libovolně malé míry.

(Vitali)

Důkaz: V každém kroku si vezmeme interval alespoň poloviční délky ze "supremální"délky mezi „použitelnými“ intervaly. Tak sestavíme posloupnost intervalů $I_1, I_2, \ldots$, jejichž délky tvoří konvergentní řadu. Pokud si vezmeme do konečného podsouboru tolik, aby zbytek řady poloměrů byl $< \varepsilon$, pak pětinásobně zvětšené zbývající intervaly pokrývají zbytek, tedy náš konečný podsoubor nepokryl míru $< 5\varepsilon$. ■

4.2.20 Věta (Derivace monotónní funkce)

Monotónní funkce má derivaci skoro všude.

(G.Faber 1910, G.C.Young a W.H.Young 1911)

To je úžasná vlastnost.

Důkaz: Nechť je f neklesající na $[a, b]$. Ukážeme, že množina $A = \{x \in [a, b] : f'_+(x) > c > d > f'_-(x)\}$ má nulovou míru. Nechť je $m(A) = s > 0$, odvodíme spor.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Množinu A skoro (až na ε) pokryjeme (podle předchozí věty o konečném skoro pokrytí) konečně mnoha intervaly $(x_n - h_n, x_n)$, na nichž funkce f nevzroste o více než

$$d \cdot \sum h_n < d \cdot (s + \varepsilon) \, .$$

Sjednocení těchto intervalů opět skoro pokryjeme konečně mnoha intervaly $(y_n, y_n + k_n)$, na nichž funkce f vyroste o více než

$$c \cdot \sum k_n > c \cdot (s - 2\varepsilon) \, .$$

Tedy

$$c \cdot (s - 2\varepsilon) < d \cdot (s + \varepsilon)$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$, Tedy $s = 0$, spor.

Podobně bychom ukázali totéž i pro jednostranná limes superior a limes inferior diferenčních podílů (horní a dolní jednostranná derivovaná čísla). Vhodnou volbou c a d dokážeme, že množina, kde se rovnají všechna derivovaná čísla, má v intervalu $[a, b]$ plnou míru. ■

Dalo se čekat, že bez ε to nepůjde ;-)

4.2.21 Definice (Funkce omezené variace)

Řekneme, že u funkce f je na intervalu $[a, b]$ **omezená variace**, pokud existuje konstanta M, že pro každé dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ je

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \; < \; M \; .$$

4.2.22 Věta (O omezené variaci)

Funkce má omezenou variací právě když lze napsat jako rozdíl dvou neklesajících funkcí.

(C.Jordan 1881)

Důkaz: Pro dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = y$ máme

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|^{+} = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|^{-} + f(y) - f(a) \; .$$

Pak vezmeme suprémum přes všechna dělení a dostaneme $R(y) = K(y) + f(y) - f(a)$ (kde R je neklesající a K nerostoucí). ■

Ta omezená variace a monotónní funkce se kamarádí. Jde jim skoro o to samé.

4.2.23 Definice (Absolutní spojitost)

Řekneme, že funkce f je na intervalu $[a, b]$ **absolutně spojitá**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje δ tak, že pro disjunktní intervaly $[x_k, x'_k]$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - x'_k| < \delta \implies \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x'_k)| < \varepsilon \; .$$

Na malých množinách neroste moc. OPRAVDU, je to tak. Na malých množinách nesmí být veliký přírůstek. Absolutní spojitost je velice jemný nástroj. Bude se hodit k lepší verzi základní věty analýzy.

4.2.24 Věta (O absolutní spojitosti)

(i) Absolutně spojitá funkce má omezenou variaci.

Důkaz: Zvolíme $\varepsilon > 0$, najdeme δ a najdeme $K > (1 + b - a)/\delta$. ■

(ii) Má-li absolutně spojitá funkce nulovou derivaci skoro všude, pak je konstantní.

Důkaz: K $\varepsilon > 0$ najdeme δ z absolutní spojitosti. Množinu nulových bodů derivace skoro pokryjeme až na množinu míry δ konečně intervaly, na nichž se neroste rychleji, než "ε". Na zbytku se také neroste více než (celkově) "ε". ■

Ta druhá vlastnost je klíčová pro definici integrálu. Teda pro jednoznačnost absolutně spojitých skoro všude primitivních funkcí (teda až na konstantu). No, zapletl jsem se. Přesněji to bude uvedeno níže.

4.2.25 Věta (Základní půlvěta analýzy)

Je-li funkce F neklesající na intervalu $[a, b]$, pak skoro všude na intervalu $[a, b]$ existuje její derivace F', ta je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b F'(x)\,dx \;\le\; F(b) - F(a)\,.$$

Důkaz: Existence derivace F' skoro všude plyne z věty o derivaci monotónní funkce. Rozšiřme funkce F konstantou $F(b)$ pro $x > b$ a položme

$$g_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}\,.$$

Pak $g_n \to F'$ skoro všude, tedy je F' měřitelná. Navíc je $g_n \ge 0$, tedy podle věty o limes inferior

$$0 \;\le\; \int_a^b F'(x)\,dx \;\le \liminf \int_a^b g_n(x)\,dx \;\le\; F(b) - F(a)\,.$$

■

A půl je hotovo. Teď uvedeme přesné znění základní věty analýzy v lepším tvaru.

4.2.26 Věta (Základní věta analýzy - verze "skoro všude")

Je-li funkce F absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$, pak skoro všude na intervalu $[a, b]$ existuje její derivace F', ta je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b F'(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

(H.Lebesgue 1904)

Důkaz: Je-li F absolutně spojitá, má konečnou variaci, je rozdílem dou neklesajících funkcí a existuje skoro všude F'. Pak

$$|F'(x)| \leq F_1'(x) + F_2'(x)$$

a

$$\int_a^b |F'(x)|\,dx \;\leq \int_a^b F_1'(x)\,dx \;+ \int_a^b F_2'(x)\,dx \;\leq F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a)$$

podle základní půlvěty, tedy je F' integrovatelná.

Nechť je $G(x) = \int_a^b F'(t)\,dt$. Pak je G absolutně spojitá, tedy $F - G$ je absolutně spojitá a její derivace je skoro všude nulová. Tedy $F = G$. ■

4.2.27 Věta (Základní věta analýzy - verze "singulární")

Má-li funkce F omezenou variaci na intervalu $[a, b]$, pak existuje funkce G s derivací rovnou nule skoro všude a existuje skoro všude derivace F', ta je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí že

$$F(x) = G(x) \;+ \int_a^x F'(t)\,dt\;.$$

Funkci G říkáme **singulární část** funkce F. Pak platí

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \;+ \int_a^b F'(x)\,dx\;.$$

Tak to je konečně vidět. V každé funkci je schován singulární kus, který právě chybí při integrování té derivace. Pokud tu singulární část přičteme (nebo odečteme), máme vystaráno.

4.2.28 Poznámka o absolutní spojitosti

Vidíme, že v každé monotónní funkci je „schována“ singulární část a absolutně spojitá část. To samé platí pro funkce s omezenou variací. Pro srovnání se nyní můžeme podívat na podobnou situaci s měrami.

4.2.29 Definice (Absolutní spojitost míry)

Funkci ze systému $\mathcal{A}$ podmnožin reálné osy do $(\infty, +\infty]$ budeme nazývat **znaménková míra** na $\mathcal{A}$, pokud je spočetně aditivní na disjunktních množinách $\mathcal{A}$ a nulová na prázdné množině.

Řekneme, že míra μ je absolutně spojitá vzhledem k míře m, pokud je pro nulovou množinu A míra μ nulová: ($m(A) = 0 \implies \mu(A) = 0$).

Ta míra m je takový dobrý mustr. Když se mu nová míra podřídí, je dobře.

4.2.30 Věta (O absolutní spojitosti měr)

Jestliže f je nezáporná integrovatelná funkce, pak funkce μ definovaná předpisem

$$\mu(A) = \int_A f\, dm$$

je absolutně spojitá vzhledem k m.

Naopak, pokud je konečná míra μ absolutně spojitá vzhledem k m, pak existuje integrovatelná funkce f tak, že

$$\mu(A) = \int_A f\, dm$$

pro všechny měřitelné množiny A.

(J.Radon $\sim$ 1913, Nykodým)

Prostě ty absolutně spojité míry mají vzhledem k míře m derivaci, a podle té se zase spočítají integrací. Pěkná hračka.

4.2.31 Věta (Integrace pomocí sublineární substituce)

Nechť I a J jsou otevřené množiny a funkce $\varphi : J \to I$ je lokálně sublineární, nechť f je měřitelná na $\varphi(J)$ a $E \subset J$ je měřitelná množina. Definujeme $N(x, \varphi, E)$ jako počet prvků množiny $E \cap \varphi^{-1}(x)$. Pak

$$\int_{\varphi(G)} N(x, \varphi, E) f(x)\, dx = \int_E f(\varphi(t)) |\varphi'(t)|\, dt\,.$$

Sublinearita deformuje slušným způsobem.

Důkaz: Ze sublinearity φ plyne derivace φ skoro všude. Zvolíme f nejprve jako charakteristickou množinu měřitelné funkce. Pečlivým odhadováním ... dokážeme větu. ■

4.3 Integrace podle základní věty analýzy

4.3.1 Definice (Integrace podle základní věty analýzy)

Nechť pro konečnou funkci f na intervalu (a, b) existuje funkce F tak, že platí $F'(x) = f(x)$ na (a, b). Definujeme (pokud dává pravá strana smysl)

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b-) - F(a+)$$

a nazýváme výslednou hodnotu **(primitivním) integrálem** funkce f na (a, b).

(I.Newton ~ 1665)

Dosud jsme používali integrál podle dělení a jeho rozšíření poctivý integrál. Primitivní integrál není rozšířením. Existují primitivně integrovatelné funkce, které nejdou poctivě integrovat (např. $\int \sin(x)/x$ a naopak ($|\text{sign}\,(x)|$). Pokud je daná funkce integrovatelná více způsoby, dávají stejný výsledek.

4.3.2 Definice (Primitivní funkce)

Funkci F nazýváme **primitivní funkce** k funkci f na intervalu J, pokud $F'(x) = f(x)$.
Množinu primitivních funkcí (lišících se navzájem o konstantu) k funkci f označujeme tradičně

$$\int f(x)\,dx$$

a při výpočtech lze psát

$$\int f(x)\,dx \;=\; F(x) + c,\ x \in J$$

nebo

$$\int f(x)\,dx \;\stackrel{c}{=}\; F(x),\ x \in J\ .$$

Je to krásná tradice :-)

4.3.3 Věty (O primitivních funkcích)

Každé dvě primitivní funkce na tomtéž intervalu se liší o konstantu.

Definice primitivního integrálu nazávisí na volbě primitivní funkce.

Primitivní funkce k součtu je součet primitivních funkcí.
Ke spojité funkci existuje primitivní funkce.
Primitivní funkce na dvou sousedních intervalech jdou "slepovat".

4.3.4 Věta (Integrace po částech)

Nechť známe primitivní funkce k f a g:

$$\int f(x)\,dx \stackrel{c}{=} F(x)\ ,\ x \in J, \qquad \int g(x)\,dx \stackrel{c}{=} G(x)\ , x \in J\ .$$

Pak platí rovnost

$$\int f(x)G(x)\,dx\ +\ \int F(x)g(x)\,dx \stackrel{c}{=} F(x)G(x)\ ,\ x \in J\ ,$$

existuje-li alespoň jedna primitivní funkce vlevo.

Důkaz: Jde o derivování součinu vpravo. ■

Po částech zde znamená, že zvlášť integrujeme jednotlivé činitele a pak si výsledek vhodně namícháme.
Jde o přepracování poučky o derivování součinu funkcí.

4.3.5 Věta (Integrace pomocí derivovatelné substituce)

Nechť I a J jsou otevřené intervaly a zobrazení $\varphi : J \to I$ je na a má konečnou nenulovou derivaci v J.
Platí-li

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\ \stackrel{c}{=}\ G(t),\ t \in J\ ,\ \text{např.}\ \int \exp(t)\cdot\frac{1}{2}\,dt\ \stackrel{c}{=}\ \frac{1}{2}\exp(t),\ t \in \mathbb{R}$$

pak (zde máme $x = \varphi(t) = (t-1)/2,\ t = \varphi^{-1}(x) = 2x+1$)

$$\int f(x)\,dx\ \stackrel{c}{=}\ G(\varphi^{-1}(x)),\ x \in I\ ,\ \text{např.}\ \int \exp(2x+1)\,dx\ \stackrel{c}{=}\ \frac{1}{2}\exp(2x+1),\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Platí-li

$$\int f(x)\,dx\ \stackrel{c}{=}\ F(x),\ x \in I\ ,\ \text{např.}\ \int x^7\,dx\ \stackrel{c}{=}\ \frac{1}{8}x^8,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

pak (zde máme $x = \varphi(t) = t^3 + 1$, nepotřebujeme $\varphi' \neq 0$)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\ \stackrel{c}{=}\ F(\varphi(t)),\ t \in J\ ,\ \text{např.}\ \int (t^3+1)^7\cdot 3t^2\,dt\ \stackrel{c}{=}\ \frac{1}{8}(t^3+1)^8,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Je-li f spojitá na $[A, B]$ a pro $t \in [\alpha, \beta]$ platí $A \le \varphi(t) \le B$, označíme $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx\ = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\ ,\ \text{např.}\ \int_1^2 x^7\,dx\ =\ \int_0^1 (t^3+1)^7\cdot 3t^2\,dt\ .$$

Jde o přepsání věty o derivaci složené funkce.

4.3.6 Věta (Kritéria integrovatelnosti)

Srovnávací kritérium: je-li $f \leq g \leq h$ na intervalu $[a, b)$ a funkce f a h mají konečný primitivní integrál, pak jej má konečný i funkce g.

První součinové kritérium: Nechť funkce f je spojitá a má omezenou primitivní funkci v $[a, b)$, nechť g má vlastní derivaci a je klesající v $[a, b)$, $g(b-) = 0$. Pak existuje primitivní integrál ze součinu fg na $[a, b)$.

(G.P.L.Dirichlet 1840)

Druhé součinové kritérium: Nechť funkce f je spojitá a má primitivní integrál v $[a, b)$, nechť g má vlastní derivaci a je monotónní a omezená $[a, b)$. Pak existuje primitivní integrál ze součinu fg na $[a, b)$.

(N.H.Abel 1863)

> Jak se hodně naučit? Studujte mistry, ne jejich žáky.
>
> (N.H.Abel $\sim$ 1829)

Důkaz: Použije se podmínka ustálenosti pro konečnou limitu funkce a integrace po částech. ■

4.4 Obecná integrace

Představa, že by platilo obecně

$$\int_a^b F'(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a)$$

pro každou funkci F, není správná. K tomu stačí zkusit **ďábelské schody**, které mají nulovou derivaci skoro všude.

(G.Cantor $\sim$ 1910)

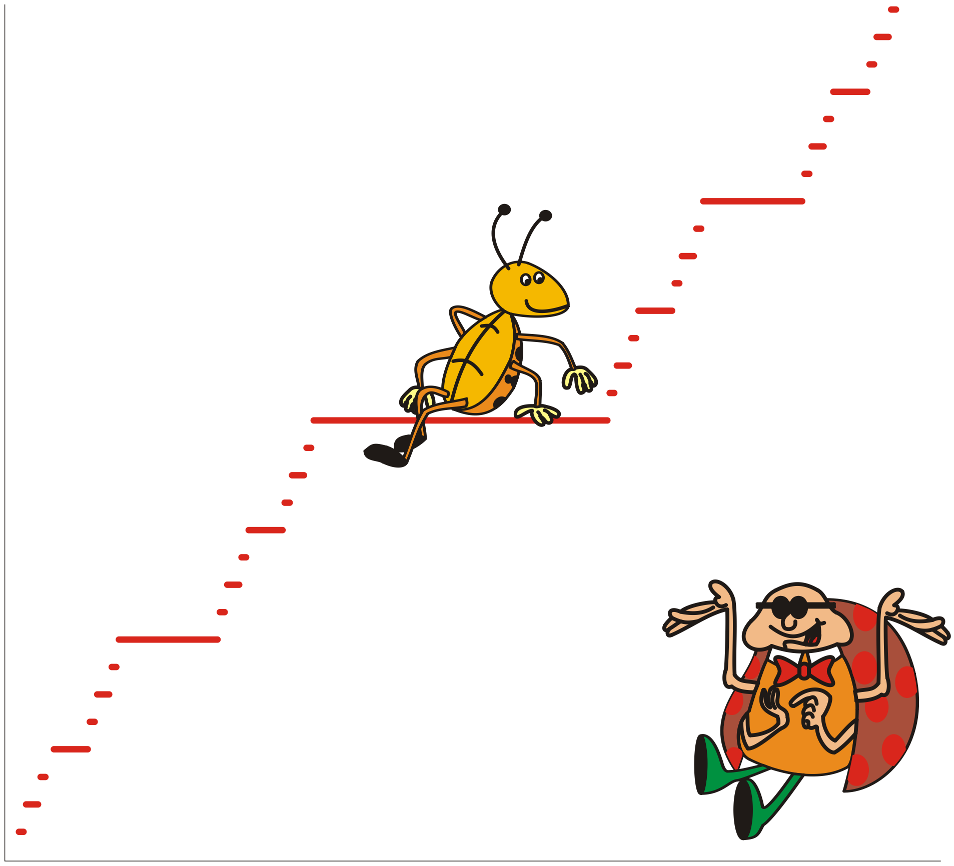
4.4.1 Definice (Primitivní funkce)

Spojitou funkci F nazýváme **primitivní funkce** k funkci f na intervalu J, pokud $F'(x) = f(x)$ platí

- ✏ $F'(x) = f(x)$ platí všude

(I. Newton $\sim$ 1665)

- ✏ $F'(x) = f(x)$ platí až na konečně mnoho bodů
- ✏ $F'(x) = f(x)$ platí až na spočetně mnoho bodů



Obrázek 4.4.0: Funkce má derivaci rovnu nule skoro všude.

✏ $F'(x) = f(x)$ platí skoro všude a F je absolutně spojitá

(H. Lebesgue 1903)

✏ $F'(x) = f(x)$ platí skoro všude a F je absolutně spojitá tam, kde nemá derivaci

(J. Kurzweil, R. Henstock 1957)

4.4.2 Věta (Primitivní integrace)

Každé dvě primitivní funkce se liší o konstantu. Formulka

$$\int_a^b F'(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a)$$

definuje integrál.

Karty jsou prostě dobře rozdány. Ty primitivní funkce jsou jednoznačné až na konstantu. Podle všech výše uvedených definic. Je to tak v nich nachystáno.

4.4.3 Věta (Definitivní integrace)

Ve formulce

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

jsou f a F svázány takto

$$\lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c) - f(c)(x - c)}{x - c} = 0\,.$$

(I. Newton 1677)

Pokud jsou f a F svázány rostoucí funkcí φ takto

$$\lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c) - f(c)(x - c)}{\varphi(x) - \varphi(c)} = 0\,,$$

dostaneme definitivní integrál ekvivalentní výše uvedeným primitivním integracím.

(H. Bendová & J. Malý 2011)

Jde o nejjednodušší přístup k integraci. Potřebujete jenom jednu rostoucí funkci a jednu limitu :-)

Kapitola 5

Funkce více proměnných

Techniku pro zkoumání dějů v prostoru rozvineme v této kapitole. Spojitost a derivace jsou zde pouze přeformulovány do více rozměrů, více proměnných.

5.1 Pojem funkce a zobrazení více proměnných

5.1.1 Definice (Body, vzdálenost a okolí v $\mathbb{R}^n$)

Prvek v $\mathbb{R}^n$ budeme nazývat **bod** a označovat $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Vzdálenost mezi body $\mathbb{R}^n$ budeme značit

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

Vzdáleností dvou množin nazýváme infimum vzdáleností jejich bodů. **Okolí** bodu $a \in \mathbb{R}^n$ je množina

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - a| < \varepsilon\}\,.$$

Množina A je **otevřená**, pokud s každým svým bodem obsahuje nějaké okolí. Množina B je **uzavřená**, pokud její doplněk je otevřená množina. Množina bodů, které mají nulovou vzdálenost od množiny A i od jejího doplňku se nazývá **hranice** množiny A a značí ∂A.

> Výzkumný pracovník by se při snaze vyjádřit základní zákony přírody v matematickém tvaru měl snažit hlavně o matematickou krásu.
>
> (P.A.M.Dirac 1939)

Postupujeme podobně jako u jedné proměnné. Např. řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_1^{+\infty}$ bodů v $\mathbb{R}^n$ má **limitu** (nebo **konverguje k**) $A \in \mathbb{R}^n$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $|x_n - A| < \varepsilon$.

5.1.2 Definice (Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ a jejich zobrazování)

Zkoumáme zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$. Zapisujeme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f = (f_1, \dots, f_k)$, kde $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá j-tá **složka** zobrazení. Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ nazýváme **funkce více proměnných**.

Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ nejčastěji znázorňujeme jako množinu bodů $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Např. zobrazení $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ nazýváme **šroubovice**.

Obrázek 5.1.2: Prostorové objekty si dělá příroda sama.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nejčastěji znázorňujeme jako množinu bodů $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Této množině budeme říkat **graf funkce**. Např. zobrazení $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ určuje **vzdálenost** bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od počátku $(0, 0)$.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ můžeme znázornit jako množinu bodů $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v) \in A\} \subset \mathbb{R}^2$ pro vhodnou množinu A a chápeme toto zobrazení jako „deformaci“ roviny. Např. zobrazení $P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ nazýváme **polární souřadnice**.

Například: Poklad je zakopán 100 kroků na západ od počátku.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ můžeme znázornit jako množinu bodů $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), (u, v, w) \in A\} \subset \mathbb{R}^3$ pro vhodnou množinu A a chápeme toto zobrazení jako "deformaci"prostoru. Např. zobrazení

$$S(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

nazýváme **sférické souřadnice**.

$S(430 \text{ světelných let }, 0, \pi/2)$ je Severka.

5.1.3 Definice (Parciální zobrazení a funkce)

Pokud u zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ považujeme za konstantní všechny proměnné až na jednu vybranou (J-tou) proměnnou, nazývá se takto získané zobrazení j-té **parciální zobrazení**. Např.

$$g(y) = (x_0 + y, y + z_0) \quad \text{kde } f(x, y, z) = (x + y, y + z)\ ,$$

je druhé parciální zobrazení.

Jde zde o cosi jako „řez“ funkcí ve směru druhé proměnné. Tento řez je funkcí jedné proměnné :-)

5.2 Spojitost

5.2.1 Definice (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ **spojité**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x platí

$$|x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad .$$

Podobně je možné definovat limitu.
Obecně se postupuje velmi podobně jako u jedné proměnné, některé věci jsou někdy formálně komplikovanější.

5.2.2 Věty (Někdy více proměnných nevadí)

Pro zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ platí hodně věcí stejně nebo podobně jako pro funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Například

- Polynomy jsou spojité.
- Složením spojitých zobrazení vznikne spojité zobrazení.
- Spojitá funkce na uzavřené omezené množině nabývá maxima.

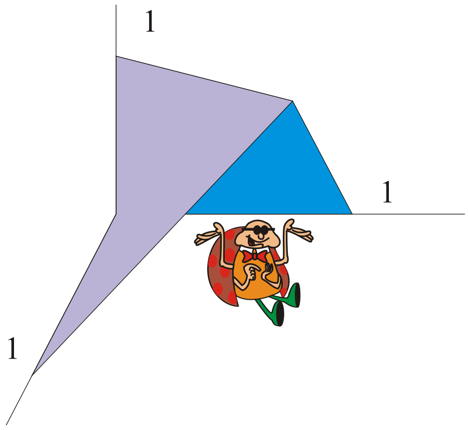
5.2.3 Věta (Komplikace nepřináší „kam“)

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je spojité právě když jsou spojité všechny jeho složky $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pro $j = 1, \ldots, n$.
Důkaz: Z konečně mnoha "jednorozměrných"okolí je "vícerozměrné"okolí. ■

5.2.4 Příklad (Komplikace přináší „odkud“)

Existuje nespojité zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro které jsou všechna parciální zobrazení ve všech bodech spojitá.
Důkaz: Zvolme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, aby pro každé x kladné graf funkce f (jako podmnožina $\mathbb{R}^3$) obsahoval úsečku z bodu $(x, 0, 0)$ do bodu $(x, x, 1)$ a úsečku z bodu $(0, x, 0)$ do bodu $(x, x, 1)$ (tím je funkce definovaná pro $\{(x, y) : x > 0 \;\&\; y > 0\}$), jinde necháme funkci f nulovou. ■

Zde zlobí chování funkce ve směru osy prvního kvadrantu.



Obrázek 5.2.4: Funkce nespojitá v počátku.

5.2.5 Příklad (Ke spojitosti nestačí „všechny směry“)

Existuje nespojité zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro které jsou všechna parciální zobrazení ve všech bodech a ve všech směrech spojitá.

Důkaz: Zvolme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, aby pro každé x kladné graf funkce f (jako podmnožina $\mathbb{R}^3$) obsahoval úsečku z bodu $(x, 0, 0)$ do bodu $(x, x^2, 1)$ a úsečku z bodu $(0, x^2, 0)$ do bodu $(x, x^2, 1)$ (tím je funkce definovaná pro $\{(x, y) : x > 0 \;\&\; y > 0\}$), jinde necháme funkci f nulovou. ■

... slavný „parabolický trik“

5.2.6 Klasická zlobidla - nespojitost skrytá ve vzorečku

V předchozích příkladech byla nespojitost téměř součástí definice funkce. V praxi jsou předkládány funkce zpravidla vzorečkem, ze kterého se musí „zlobivá“ přímka (popřípadě parabola a spol.) vymyslet.

Klasické parabolické zlobidlo:

$$f(0,0) = 0\ ,\ \ f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{jinde}\ .$$

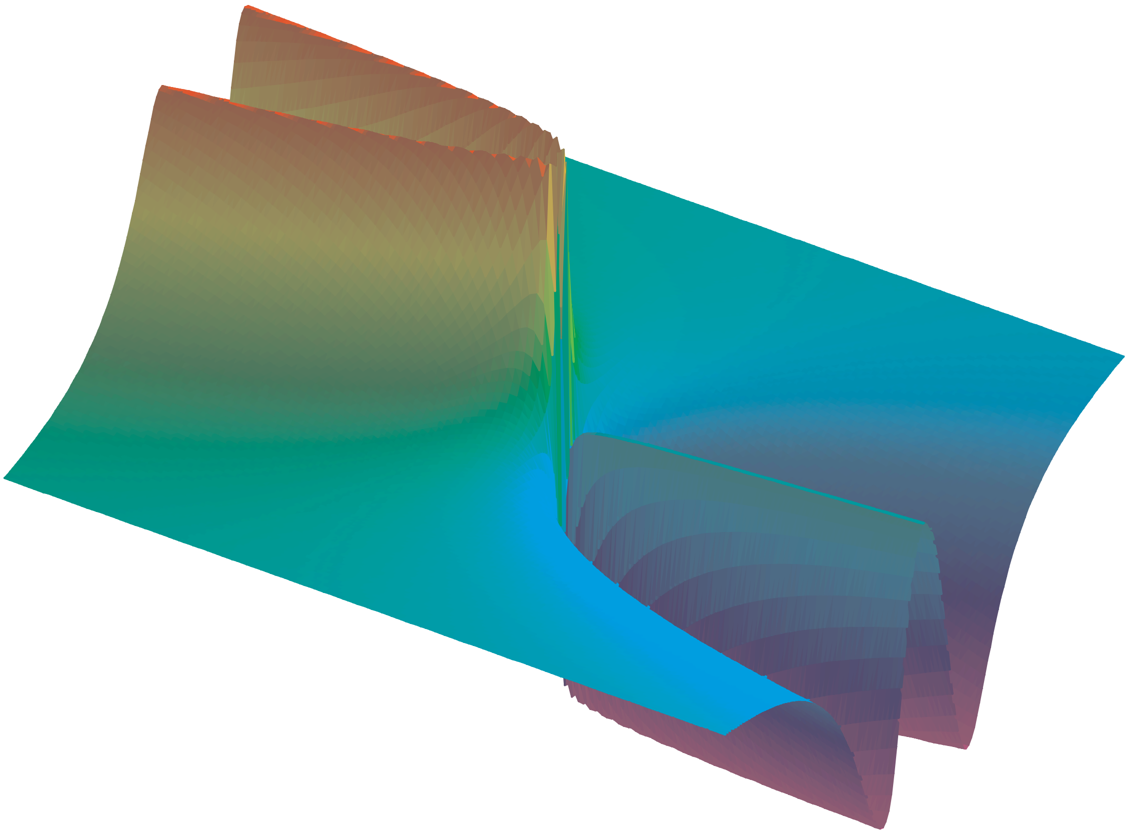
Čtyřlístek:

$$f(0,0) = 0\ ,\ \ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{jinde}\ .$$

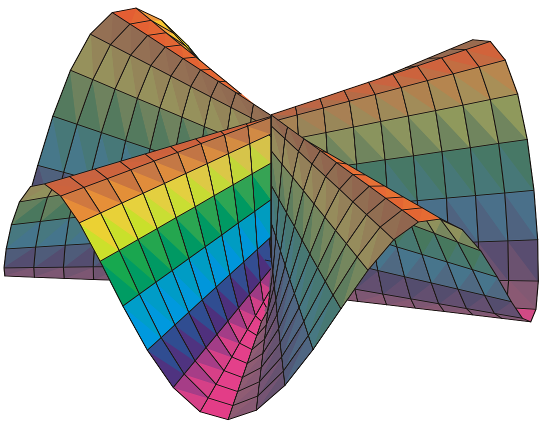
5.2.7 „Stejná“ spojitost parciálních zobrazení

Pokud pro všechny směry vycházející z bodu x je řez spojitý a podaří se k danému ε najít společné δ pro všechny směry, jsme schopni najít okolí bodu x vyžadované v definici spojitosti.

Podobně pro parciální zobrazení.



Obrázek 5.2.6: Parabolické pohoří s vodopádem do parabolické hlubiny s bodem nespojitosti.



Obrázek 5.2.6: Čtyřlístek je přímková plocha s bodem nespojitosti.

5.3 Derivace

5.3.1 Definice (Derivace v bodě)

„Řekneme, že zobrazení má v bodě derivaci, pokud má v bodě lineární chování podobné tečně, tečné rovině, . . . „

Je lokálně skoro lineární ...

Přesněji řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je **derivace** funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ v bodě x_0, pokud platí

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(|h|) \ , \ h \to 0 \ .$$

Chceme, aby odchylka od lineárního zobrazení byla řádově menší než vzdálenost od bodu, v němž zkoumáme derivaci.

Takže zobrazení $f(x)$ a $f(a) + L(x-a)$ mají poblíž bodu a "dotyk", mohou se protínat, ale "naplacato"...

Dříve se říkalo derivaci u více proměnných říkalo "diferenciál", nebo "totální diferenciál".

5.3.2 Definice (Parciální derivace funkce v bodě)

Pro funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}^n$ definujeme **parciální derivaci** v bodě a podle j-té proměnné jako derivaci j-té parciální funkce v bodě a a značíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \ .$$

Například

$$\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}(3,7) \ = \ 6 \ .$$

Definujeme **gradient** (nebo též **nabla** ∇) funkce

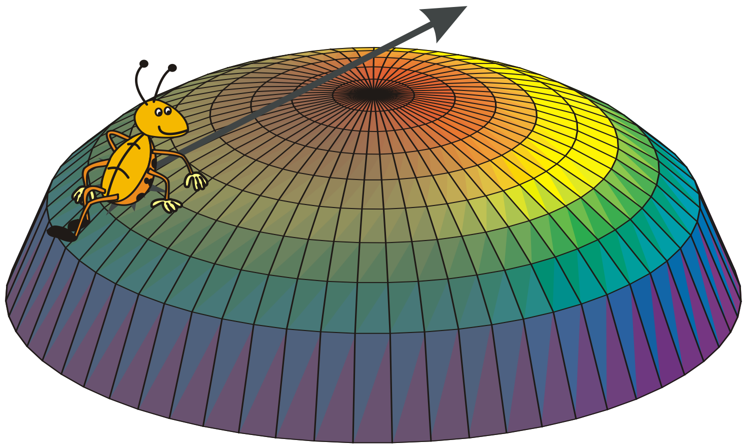
$$\operatorname{grad} f(a) \ = \ \nabla f(a) \ = \ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \ .$$

Tímto směrem funkce f nejvíce roste.

5.3.3 Věty (Derivace a parciální derivace funkce)

(i) Nechť pro funkci $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existuje derivace v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Pak existují v bodě a všechny parciální derivace a platí

$$L(h) = L(h_1, \ldots, h_n) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(a)h_n \ .$$



Obrázek 5.3.2: Kudy se nejrychleji dostat nahoru.

(ii) Nechť pro funkci $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou spojité parciální derivace v bodě a, pak existuje v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivace.

Důkaz: Pro $n = 2$ je možno použít obrázek. Mezi bodem (a_1, a_2) a bodem $(a_1 + h_1, a_2 + h_2)$ se pohybujeme ve směru souřadnicových os a pro parciální zobrazení použijeme větu o střední hodnotě. ■

5.3.4 Derivace a její maticový zápis

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ má v bodě a derivaci $F'(a)$. Matici tohoto lineárního zobrazení budeme značit $[F'(a)]$ a nazývat **funkční matice** zobrazení F v bodě a. Pro tuto matici platí

$$[F'(a)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} .$$

Pro $n = k$ jde o čtvercovou matici, její determinant nazýváme **funkční deteminant** funkcí $F_1, \dots, F_k$ a značíme

$$J_F(a)\ , \quad \text{nebo} \quad \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) \ .$$

(C.G.J.Jacobi ∼ 1828)

Právě tento determinant měří rozpínavost zobrazení v bodě. Je-li roven 1, nerozpíná se to. Pro lineární zobrazení je to jasně vidět, pro nelineární jde o limitní chování v bodě.

Podobně budeme používat i funkční determinant pro funkce s více proměnnými, tedy např.

$$\frac{D(F_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3),F_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3),F_3(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3))}{D(y_1,y_2,y_3)}(a)\ .$$

5.3.5 Věta (Derivace složeného zobrazení)

Nechť $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ má derivaci v bodě a, nechť $G:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ má derivaci v bodě $F(a)$. Pak složené zobrazení $H:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ má derivaci v bodě a a tato derivace vznikne složením derivací $F'(a)$ a $G'(F(a))$ (jde o složení dvou lineárních zobrazení). V maticovém zápisu platí

$$[H'(a)] \;=\; [G'(F(a)][F'(a)]\ . .$$

… jde o součin matic. Platí to i v $\mathbb{R}$.

Roznásobením získáme takzvané **řetízkové pravidlo**.

5.3.6 Derivace vyšších řádů

Pro funkce $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ se dají definovat derivace i parciální derivace vyšších řádů a získá se obdoba věty o aproximačním polynomu.

5.3.7 Extrémy funkcí více proměnných

Vyšetřování lokálních extrémů funkcí více proměnných probíhá podobně jako v případě jedné proměnné. V bodě podezřelém z nabývání extrému jsou derivace (zde parciální) nulové. V podezřelém bodě se používá navíc "kvadratický test", spočívající v porovnání funkce s parabolou:

Pokud existuje kladná konstanta K tak, že

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \geq K|h|^2$$

(zde jde o "pozitivně definitní formu"), pak

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(|h|^2)\ \geq f(a) + \frac{1}{2}K|h|^2 + o(|h|^2)\ ,\ h\to 0$$

a funkce má v bodě a ostré lokální minimum.

Jde o porovnání se vhodným paraboloidem.

5.3.8 Jak si zajistit inverzní zobrazení

Funkce jedné reálné proměnné má inverzní funkci v různých situacích. Nejsnáze se k ní (ve skutečnosti k prostotě funkce) dostaneme použitím monotonie na intervalu. Pokud chceme použít jako základní argument existenci derivace, musíme si dát pozor. Z existence derivace v daném bodě inverzní funkci nezískáme. Nabízí se možnost požadovat spojitost a kladnost derivace na okolí. Tato podmínka je použita v základní větě o existenci inverzního zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$.

5.3.9 Věta (O inverzním zobrazení)

Nechť má zobrazení F z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Nechť $F'(a)$ je bijekce $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$. Pak existuje okolí bodu a na němž má F^{-1} spojité parciální derivace.

Důkaz: Pro jednoduchost nechť je $a = F(a) = 0$, $F'(a)$ nechť je identita. K důkazu existence inverzního zobrazení použijeme následující trik. Pro y hledáme x tak, aby $F(x) = y$. To je ekvivalentní s $x = y + x - F(x)$. Najdeme takové x jako pevný bod zobrazení $g(x) = y + x - F(x)$. Tento pevný bod bude limitou posloupnosti $x_0 = 0, x_{n+1} = g(x_n)$. Konvergenci této posloupnosti pro malá y je možné dokázat. ■

5.3.10 Definice (Regulární zobrazení)

Zobrazení F z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ se nazývá **difeomorfismus**, pokud F je bijekce otevřené množiny U na otevřenou množinu V tak, že F má spojité parciální derivace na U a F^{-1} má spojité parciální derivace na V.

Zobrazení F z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ se nazývá **regulární**, pokud má F má spojité parciální derivace a nenulový funkční determinant.

5.3.11 Věta (O regulárním zobrazení)

Platí

- Regulární zobrazení je lokálně prosté (difeomorfismus).
- Regulární obraz otevřené množiny je otevřená množina.
- Zobrazení je difeomorfismus právě tehdy, když je regulární a prosté.

Regulární zobrazení zachovává typ prostoru (naoříklad regulární obraz roviny je placatý).

5.3.12 Implicitní funkce (Povídání o šťastném houbařovi)

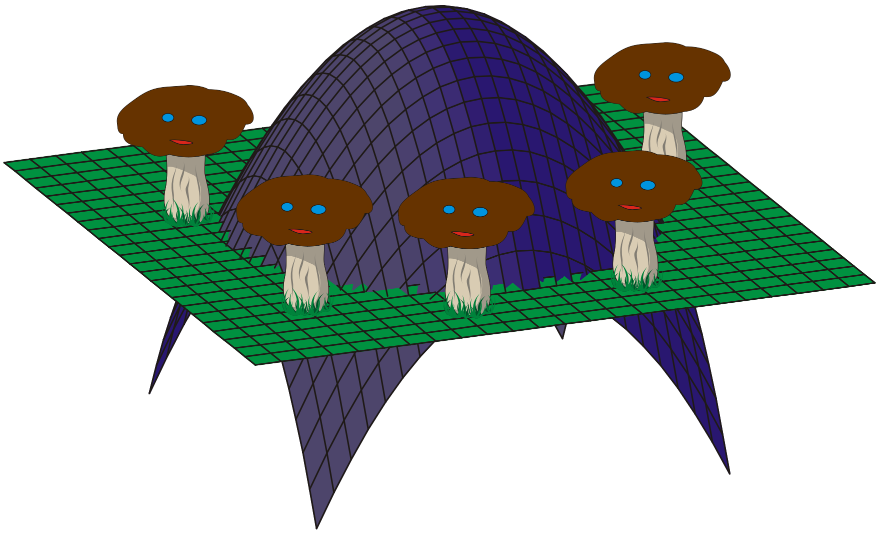
Nechť jsme v lese "Na rovince", popsaném rovnicí $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Nechť M je "vlnoplocha"optimálních podmínek (vlhkost, živiny, ...) pro růst hříbků a je dána funkcí $g(x, y) = 0$, tedy $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y) = 0\}$. Nastávají 3 základní možnosti

(i) Houby ještě nerostou ($L \cap M = \emptyset$, $g(x, y) < 0$).

(ii) Houby už nerostou ($L \cap M = \emptyset$, $g(x, y) > 0$).

(iii) Houby ROSTOU ($L \cap M \neq \emptyset$, někdy $g(x, y) = 0$).

Pokud rostou a najdememe hříbek, pravděpodobně se les L a „vlnoplocha“ M protínají v nějaké křivce. Pokud ji určíme jako funkci $y = f(x)$, máme vyhráno. Zpravidla se v okolí naleznou další hříbky, které pomohou určit první derivaci . . .



Obrázek 5.3.12: Jak rostou houby? Nejčastěji v linii nebo v čarovných kruzích.

Jedna z mála vět, které jdou experimentálně ověřit ;-)

5.3.13 Věta (Implicitní funkce v rovině)

Nechť pro funkci $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a bod $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ platí

(i) $g(a, b) = 0$.

(ii) g má spojité parciální derivace v okolí bodu (a, b).

(iii) $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

Pak existuje funkce f na okolí V bodu (a, b) tak, že na V je $g(x, y) = 0$ právě když $y = f(x)$. Navíc má f tolik derivací, kolik jich má g spojitých.

Funkce $y = f(x)$ byla zadána rovnicí, „implicitním způsobem“, proto hovoříme o „implicitní funkci“, což je nesmysl ;-)

Důkaz: Je-li funkce g ve směru y rostoucí a prochází nulou v bodě (a, b), pak musí procházet nulou i na přímkách rovnoběžných s osou y poblíž bodu (a, b) ■

... cestou ze Záporna do Kladna se musí přes Nulu ;-)

5.3.14 Implicitní funkce (Řešení soustavy rovnic)

Pokud chceme pracovat s více proměnnými a implicitní funkcí, není v tom problém. Podmínka $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$ znamenala v podstatě, že z pohledu y není funkce g „znehodnocená“. Pro více proměnných $y = (y_1, \ldots, y_k)$ budeme testovat nenulovost funkčního determinantu (předpokládáme, že budeme mít tolik rovnic g_j jako neznámých y_j)

$$\frac{D(g_1, \ldots, g_k)}{D(y_1, \ldots, y_k)}(a, b) \neq 0 \, .$$

Ukážeme metodu na řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 - y_2 &= 0 \\ x_1 y_2 + y_1 y_2 + y_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - y_1 y_3 + y_2 &= 0 \end{aligned}$$

v okolí bodu $(a, b) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) = ((0, 0), (0, 0, 0))$. Zde

$$\frac{D(g_1, g_2, g_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}(a, b) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \, .$$

Tedy existují na okolí bodu (a, b) funkce

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2) \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2) \end{aligned}$$

k naší spokojenosti.

Ti x_1, x_2 a x_3 jsou něco jako tři parametři.

5.3.15 Implicitní funkce a inverzní zobrazení - kámoši

Pokud hledáme fobrazení $F^{-1}(y) = x$ jako inverzní k $F(x) = y$, můžeme z rovnice $y - F(x) = 0$ spočítat x pomocí y díky větě o implicitních funkcích.

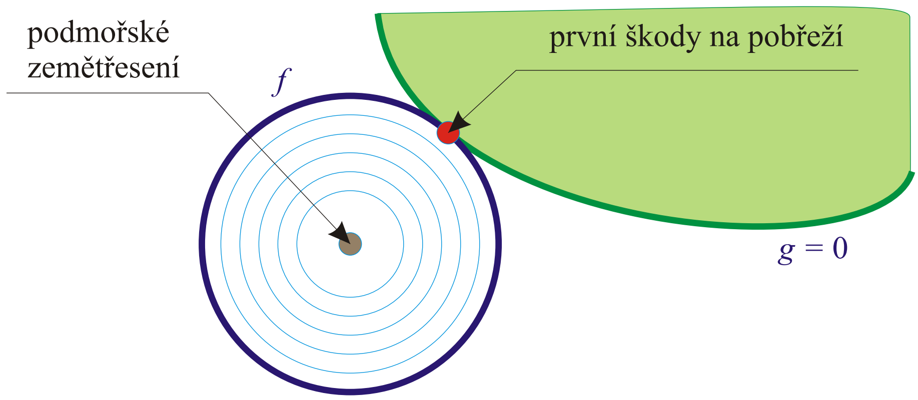
Naopak, pokud řešíme $g(x, y) = 0$ a chceme spočítat y pomocí x, můžeme k zobrazení $(x, y) \mapsto (x, g(x, y))$ najít inverzní zobrazení ve tvaru $(x, y) \mapsto (x, h(x, y))$ pro nějaké zobrazení h. Pak $y = f(x) = h(x, 0)$ je hledané zobrazení.

Je to opravdu takhle jednoduché. Až na to, že se to plete …

5.3.16 Vázané extrémy

Představme si, že v prostoru na ploše S hledáme bod nejbližší počátku $(0, 0, 0)$. Nabízí se možnost „nafukovat v počátku balónek“ a čekat, kdy se poprvé dotkne zadané plochy. Ve skutečnosti zkoušíme pro různé konstanty c průnik plochy S s plochou "vzdálenost od počátku se rovná c". V okamžiku „dotyku“ se (pokud existují) musejí rovnat tečné roviny obou ploch.

Ve skutečnosti hledáme extrém zadané funkce f (zde vzdálenost od počátku) na zadané množině S (zde plocha). Nutnou podmínkou je rovnost tečných rovin plochy S a „plochy $f = c$“ (pokud existují) v bodě nabývání extrému (a tedy lineární závislost gradientů f a S).



Obrázek 5.3.16: Jak se šíří vlnění, tak se vytvářejí „vrstevnicové množiny“ odpovídající funkci f. V místě dotyku s pobřežím jsou tečné přímky vlnoplochy a pobřeží totožné. Nastal dotyk.

5.3.17 Věta (Vázané extrémy)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť funkce f a $g_1, \ldots, g_s$ $(1 \leq s < n)$ mají spojité parciální derivace na G a nechť v každém bodě $x \in G$ jsou vektory $\operatorname{grad} g_1(x), \ldots, \operatorname{grad} g_s(x)$ lineárně nezávislé. Nechť

$$M = \{x \in G \ : \ g_1(x) = 0, \ldots, g_s(x) = 0\}$$

a funkce f má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, pak existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tak, že funkce

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_s g_s(x)$$

má nulové parciální derivace v bodě a.

To je ale PRAPODIVNÉ. Sčítáme zde hrušky a jablka a hledáme extrém ...

Nabývání extrému můžeme potvrdit „kvadratickým testem“, např. pozitivní definitností kvadratické formy druhých parciálních derivací L.
Koeficientům $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ se říká **vázané multiplikátory**.

(J.L.Lagrange $\sim$ 1770)

Důkaz: Nulové parciální derivace funkce L dávají vyjádření $\mathrm{grad}\, f(a)$ jako lineární kombinaci $\mathrm{grad}\, g_1(a), \dots, \mathrm{grad}\, g_s(a)$, což vyjadřuje „dotyk“.

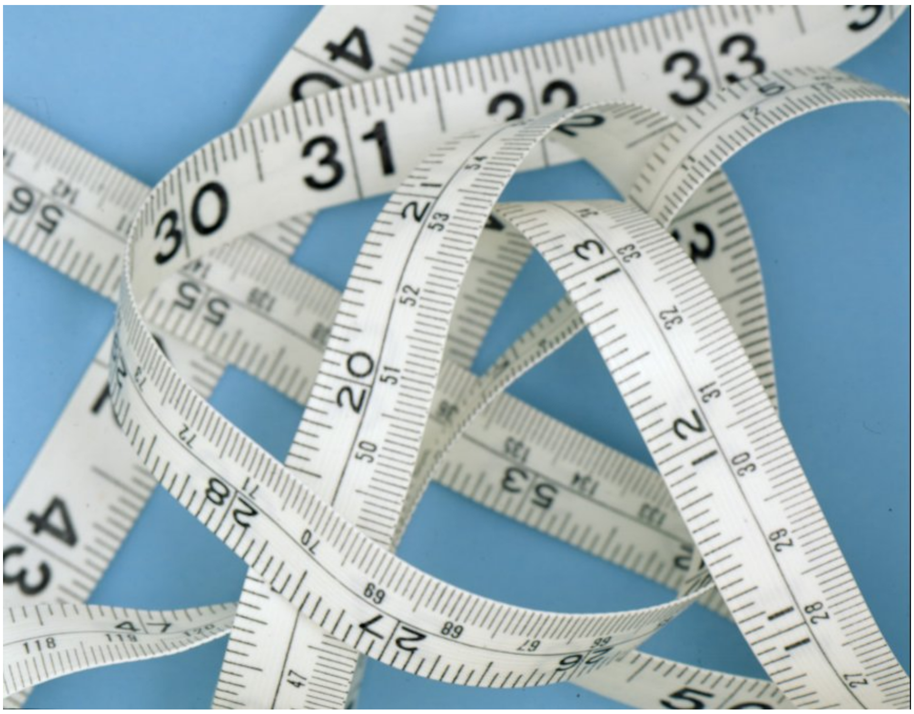
Nabývání extrému se zkoumá u f na M, při vhodné parametrizaci na množině parametrů. Můžeme zkoumat místo toho i extrémy L, která se na M rovná f. Funkce L má první parciální derivace v bodě a nulové, tak lze použít kvadratický test. ■

Kapitola 6

Integrace podle více proměnných

Tato kapitola bude zkoumat velikosti (například objemy nebo povrchy) vícerozměrných objektů.

Budeme též měřit, kolik vody proteče cedníkem.



Obrázek 6.0.0: Jak si s měřením poradíme v prostoru?

Kdykoliv můžeme změřit objem člověka tím, že jej ponoříme do plné vany a zjistíme, kolik vody vyteklo.

6.1 Konečně aditivní integrace

6.1.1 Intervaly, čtverečky, krychličky, ...

Vícerozměrný integrál je jednorozměrný integrál přepsaný do více proměnných.

Vybudování teorie konečně aditivní integrace v prostoru $\mathbb{R}^n$ lze provést podobně jako v $\mathbb{R}$. Místo intervalů v $\mathbb{R}$ vezmeme součin intervalů v $\mathbb{R}^n$. Budeme zkoumat dělení na čtverečky v $\mathbb{R}^2$, na krychličky v $\mathbb{R}^3$ atd. Definujeme horní a dolní integrál funkce a zkoumáme integrovatelné funkce a příslušnou míru.

(B.Riemann $\sim$ 1850, C.Jordan $\sim$ 1870)

6.1.2 Integrace přes řezy

Při zkoumání velikosti plochy P pod grafem funkce jsme pro funkci f spojitou a nezápornou na intervalu $[a, b]$ „sčítali“ pro jednotlivá $x \in [a, b]$ velikost „řezu“ - t.j. úsečky spojující body $(x, 0)$ a $(x, f(x)$ o velikosti $f(x)$. Toto „sčítání“ nekonečně mnoha čísel proběhlo přes konečné dělení intervalu (konečný součet) a následně pomocí procesu supréma, popřípadě limity.

Podobně budeme počítat míru rovinných množin jako (rozumný) „součet“ velikostí „řezů“ množiny pro různá x.

Analogicky lze počítat velikost „tělesa“ pod grafem funkce v $\mathbb{R}^2$ přes jednotlivé „řezy“ - zde je takový řez vlastně plochou pod grafem funkce.

To mi připomíná řízky :-)

Takto lze tedy integraci v $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^7$ nahradit integrací v $\mathbb{R}^3$ z řezů v $\mathbb{R}^7$.

Tedy po konečně mnoha krocích můžeme používat pouze na integraci v $\mathbb{R}$ (jednorozměrné řízky).

6.1.3 Věta (Integrace přes řezy)

Nechť je A měřitelná množina v $\mathbb{R}^{m+n}$. Nechť je funkce $f : A \to \mathbb{R}$ integrovatelná na množině A. Body v $\mathbb{R}^{m+n}$ budeme psát $z = (x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. Pro množinu A označíme $\underline{\downarrow A \downarrow}$ **průmět množiny** A na prostor $\mathbb{R}^m$, t.j.

$$\underline{\downarrow A \downarrow} = \{x \in \mathbb{R}^m \ : \ \exists y \in \mathbb{R}^n \ , \ (x, y) \in A\} \ .$$

Pro $x \in \underline{\downarrow A \downarrow}$ označíme A_x **řez množiny** A, t.j.

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ (x, y) \in A\} \ .$$

Pak platí

$$\int_A f(z)\, dz \ = \ \int_{\underline{\downarrow A \downarrow}} \left(\overline{\int_{A_x}} f(x, y)\, dy \right) dx \ .$$

(C.Fubini 1907)

Důkaz: Nechť jsme v $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Rozdělení množiny A na čtverečky pro aproximaci integrace přes A interpretujeme (bereme čtverečky „po sloupcích“) jako aproximaci integrace přes jednotlivé řezy. ■

Ve vzorečku je použit horní integrál, stejně tam mohl stát dolní integrál. Obecně není zaručena integrovatelnost všech řezů. Na to je třeba dávat pozor.

6.1.4 Integrace přes řezy v praxi

$$\int_{[0,1]\times[2,3]} 4xy\, dxdy \ = \ \int_{[0,1]} \left(\int_{[2,3]} 4xy\, dy \right) dx \ = \int_{[0,1]} \left(2x(3^2 - 2^2) \right) dx \ = 5 \ .$$

Takto lze převést integraci podle více proměnných na integraci v $\mathbb{R}$.

6.1.5 Věta (Integrace pomocí substituce)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, tedy funkční determinant J_φ je na množině A nenulový. Nechť je $M \subset A$ uzavřená a omezená množina a f spojitá funkce $f : \varphi(M) \to \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int_{\varphi(M)} f(x)\, dx \ = \ \int_M f(\varphi(y)|J_\varphi(y)|\, dy \ ,$$

existuje-li jeden z integrálů.

Funkční determinant je koeficient srovnávající lokálně velikost (míru) množiny M a $\varphi(M)$. Pokud by zobrazení φ bylo lineární, pak se například v $\mathbb{R}^2$ transformuje každý čtvereček $\square$ o velikosti 1 v množině M na rovnoběžník $\diamond$ o velikosti $|J_\varphi|$ v množině $\varphi(M)$.

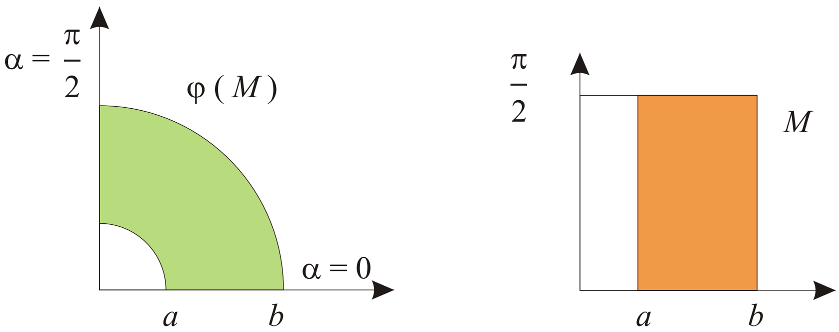
6.1.6 Integrace pomocí substituce v praxi

Pro $M = [a,b] \times [0, \pi/2]$, $(x,y) = \varphi(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $\varphi(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \ \& \ x \geq 0 \ \& \ y \geq 0\}$, $J_\varphi(r,\alpha) = r$ dostaneme

$$\int_{\varphi(M)} 1 \; dxdy \ = \ \int_M r \; drd\alpha$$

a integrál vpravo lze snadno spočítat integrací přes řezy

$$\int_M r \; drd\alpha \ = \ \int_{[a,b]} \left(\int_{[0,\pi/2]} r \; d\alpha \right) \; dr \ = \ \frac{1}{4}\pi(b^2 - a^2) \; .$$



Obrázek 6.1.6: Množina, která není hranatá, se převedla na množinu hranatou, přes kterou se dobře integruje.

Kulaté věci se na hranaté převedou pomocí sférických souřadnic v prostoru, v rovině pak stačí polární souřadnice.

6.2 Spočetně aditivní integrace

6.2.1 Jak na to a co dostaneme ...

Začneme s objemem krychliček a objemem jejich konečného sjednocení v $\mathbb{R}^n$, tento objem označíme m. Z takového objemu definujeme vnější míru $m^*(A)$ libovolné množiny $A \subset \mathbb{R}^n$

$$m^*(A) = inf\{m(G) \ : \ A \subset G \ \& \ G \text{ je konečné sjednocení krychliček } \} \; .$$

Integrovatelné funkce a měřitelné množiny získáme podobně jako v $\mathbb{R}$.

Při integrování přes řezy získáme integrovatelnost řezů pro skoro všechna x a věta o integrování přes řezy platí i pro spočetně aditivní integraci.

6.2.2 Věta (Integrace pomocí substituce)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je lokálně sublineární zobrazení. Nechť f je měřitelná funkce na $\varphi(G)$ a $M \subset G$ je měřitelná množina. Označme $N(x, \varphi, M)$ počet prvků množiny M, které zobrazení φ zobrazí do x.

…tímto N korigujeme „neprostotu“ zobrazení φ.

Pak platí

$$\int_{\varphi(G)} N(x, \varphi, M) f(x)\, dx \;=\; \int_M f(\varphi(y)|J_\varphi(y)|\, dy\,,$$

existuje-li jeden z integrálů.

Důkaz: Existence derivace skoro všude, tedy i funkční determinant, vyplývá z lokální sublinearity . Odhad integrálů vychází z lokálního nahrazení funkce její derivací a z odhadu odchylky. Při pečlivém ošetření „skoro všude“ dostaneme znění věty. ■

6.3 Placatá integrace

6.3.1 Křivky, plochy, …

Rozumná křivka a plocha v $\mathbb{R}^3$ má míru nula.

Nicméně, když se podíváme, tak nějakou velikost mají. Například zamotaný vlasec má pořád svoji délku.

Budeme definovat k-rozměrnou míru v $\mathbb{R}^n$ pro množiny, které dovedeme parametrizovat nějakým vhodným zobrazením z $\mathbb{R}^k$.

To je jako narovnat ten vlasec.

Budeme dávat pozor na to, aby taková definice nezávisela na zvolené parametrizaci. Vytvoříme k-rozměrou míru pomocí pokrývání množiny „parametrizovatelnými kousky“ a zkoumáním infima takovýchto pokrytí.

Jakou k-rozměrou míru má rovnoběžník v $\mathbb{R}^3$ tvořený vektory u_1 a u_2? To zjistíme jednoduše tak, že sestrojíme jednotkový vektor u_3 kolmý na u_1 a u_2 a spočítáme objem vzniklého kolmého hranolu. Pak je ale objem roven „základna x výška“, tedy rovnoběžník má stejnou „plošnou míru“ jako má hranol „objemovou míru“.

Geniální!!! A to je základ placaté integrace :-)

6.3.2 Definice (k-rozměrná míra v $\mathbb{R}^n$)

Pro $E \subset \mathbb{R}^n$ položme

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_j m(G_j)\} ,$$

kde infimum bereme přes všechny posloupnosti otevřených množin $\{G_j\}$, $G_j \subset \mathbb{R}^k$ a pro každé j existuje 1-sublineární funkce φ_j na G_j tak, že E je pokryta sjednocením obrazů $\varphi_j(G_j)$.

Tedy chceme, aby (všechny) takové parametrizace φ_j pracovaly za nás při definování míry.

Tuto množinovou funkci budeme nazývat **vnější k-rozměrná míra** v $\mathbb{R}^n$. Opět získáme systém měřitelných množin a míru, kterou budeme značit μ a nazývat k-**rozměrná míra** v $\mathbb{R}^n$, dále dostaneme k-**rozměrný integrál**

$$\int_M f(x)\, d\mu(x) .$$

Pro 1-rozměrnou míru v $\mathbb{R}^n$ budeme používat označení s, pro $(n-1)$-rozměrnou míru v $\mathbb{R}^n$ budeme používat označení S . Tedy budeme psát

$$\int_M f(x)\, ds \ , \ \int_M f(x)\, dS .$$

Nazýváme to lidově „placatý integrál“ :-)

6.3.3 Vlastnosti k-rozměrné míry v $\mathbb{R}^n$

.

Platí

(i) Každá topologická množina je μ-měřitelná.

(ii) Izometrické zobrazení zachovává k-rozměrnou míru.

(iii) β-sublineární zobrazení zvětší k-rozměrnou míru množiny nanejvýš β^k-krát.

6.3.4 Definice (Objem lineárního zobrazení)

Pro lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ definujeme **objem zobrazení** L jako k-rozměrnou míru množiny $L(\mathbb{I})$, kde $\mathbb{I}$ je jednotková krychle v $\mathbb{R}^k$ a píšeme $\mathrm{vol}\, L = \mu(L(\mathbb{I}))$.

Jde o placatou verzi funkčního determinantu.

6.3.5 Věta (Integrace pomocí substituce)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je lokálně sublineární zobrazení. Nechť f je μ-měřitelná funkce na $\varphi(G)$ a $M \subset G$ je měřitelná množina. Označme $N(x, \varphi, M)$ počet prvků množiny M, které zobrazení φ zobrazí do x.

… tímto N korigujeme „neprostotu“ zobrazení φ.

Pak platí
$$\int_{\varphi(G)} N(x, \varphi, M) f(x)\, d\mu(x) \;=\; \int_M f(\varphi(t))\, \mathrm{vol}\, \varphi'(t)\, dt\,,$$
existuje-li jeden z integrálů.

6.3.6 Křivkový integrál

Nechť $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je prosté lokálně sublineární zobrazení parametrizující $M = \varphi(G)$. Tedy pro $x \in M$ píšeme $x = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$. Nechť f je měřitelná funkce na $\varphi(G)$.
Pak lze počítat křivkový integrál

… nebo definovat !

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, ds(x) \;=\; \int_G f(\varphi(t))\, \mathrm{vol}\, \varphi'(t)\, dt \;=\; \int_G f(\varphi(t)) \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 + (\varphi_3'(t))^2}\, dt\,.$$
Věta o substituci říká, že nezáleží na zvolené parametrizaci φ „křivky“ M. Jednorozměrná plocha se nazývá **křivka**.

6.3.7 Plošný integrál

Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je prosté lokálně sublineární zobrazení parametrizující $M = \varphi(G)$. Tedy pro $x \in M$ píšeme $x = \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$. Nechť f je měřitelná funkce na $\varphi(G)$.
Pak lze počítat plošný integrál

… nebo definovat !

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, dS(x) \;=\; \int_G f(\varphi(u,v))\, \mathrm{vol}\, \varphi'(u,v)\, dudv \;=\; \ldots$$

Věta o substituci říká, že nezáleží na zvolené parametrizaci φ „plochy“ M. Dvourozměrná plocha se nazývá **plocha**.

6.4 Vektorová integrace

6.4.1 Práce, síla, …

Budeme počítat úlohy typu „jak velkou práci musíme vykonat při chůzi ve větru?“, „kolik vody přemístí mořské proudy ze severní na jižní polokouli?“, …

Tedy nás bude zajímat působení vektorové veličiny (proud vzduchu, vody, …) na určitou lokalitu (dráhu, plochu, …).

Budeme proto zkoumat složku vektorové veličiny působící ve směru, popřípadě kolmo k naší lokalitě. Tuto složku pak můžeme integrovat (například placatou integrací) a získat celkový výsledek.

6.4.2 Zákon zachování

Základní principy zachování energie a hmoty nám dovolují předpovědět výsledky některých úloh. Například vidíme předem, že mořské proudy přemístí ze severní polokoule na jižní přesně tolik, kolik přemístí z jižní na severní. Nebo že celková práce vynaložená při chůzi ve větru na kruhové dráze je zpravidla nulová („po větru“ je práce záporná, „proti větru“ je práce kladná) …

Pokud však neobcházíme rotující tornádo v „protisměru“ …

6.4.3 Jak na to?

Budeme integrovat vektorovou funkci přes orientovanou k-rozměrnou množinu v $\mathbb{R}^n$. Tím získáme základní nástroj ke zkoumání našich úloh. Zákon zachování bude vícerozměrnou obdobou základní věty analýzy

$$\int_a^b F'(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a)\,,$$

kde chápeme F' jako lokální zdroje prostředí

Obrázek 6.4.2: Tornádo vytváří vektorové pole, pro něž je nenulová rotace.

… například puštěné kohoutky s vodou.

a F jako vstupy a výstupy přes hranici.

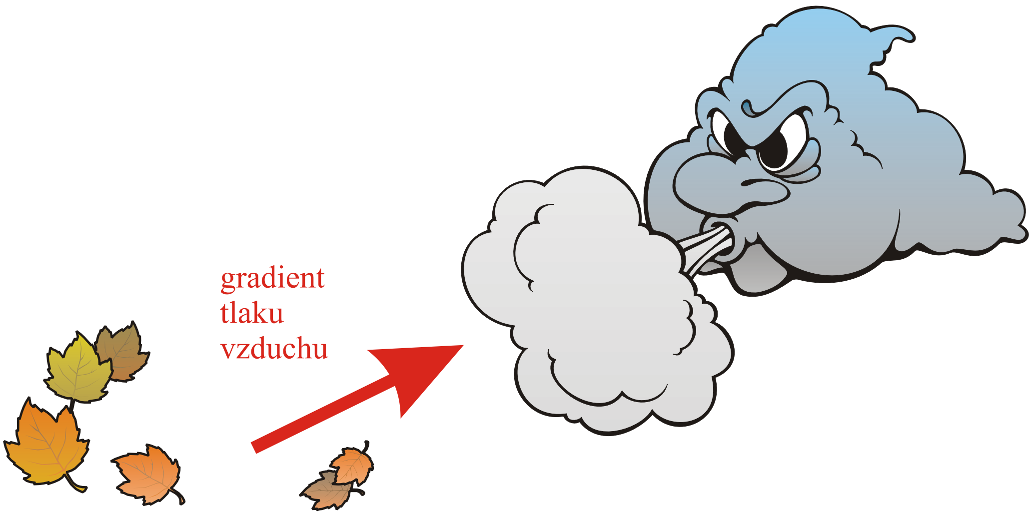
Obrázek 6.4.3: Kolik se dostane dovnitř, tolik musí ven …

Kolik vody do místnosti naprší oknem, kolik vody vyteče dveřmi ...

6.4.4 Vektorové pole, gradient, divergence, rotace

Zobrazení z množiny M do $\mathbb{R}^n$ budeme nazývat **vektorové pole**.
Pro spojitě derivovatelnou funkci F na otevřené množině v $\mathbb{R}^n$ definujeme **gradient** funkce F jako vektorové pole

$$\operatorname{grad} F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right) .$$



Obrázek 6.4.4: Proti větru se jde k místu vysokého tlaku.

Je-li F tlak vzduchu, pak ve směru $-\operatorname{grad} F$ fouká vítr.

Pro spojitě derivovatelnou vektorové pole $F = (F_1, \dots, F_n)$ na otevřené množině v $\mathbb{R}^n$ nazýváme **divergence** pole F funkci

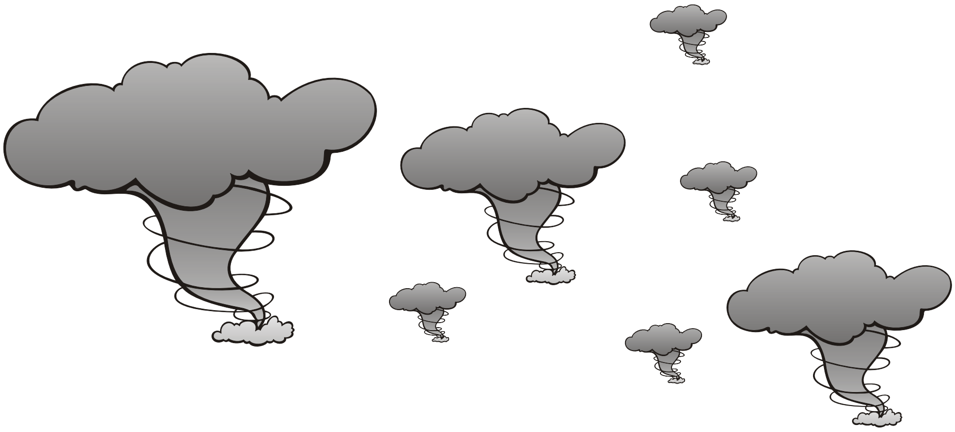
$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) .$$

Je-li F proudění vody, pak v voda přitéká tam, kde je $\operatorname{div} F > 0$ (kohoutky) a odtéká tam, kde je $\operatorname{div} F < 0$ (kanály). Jde o lokální „zdroje“ vody v prostředí.

Obrázek 6.4.4: Voda se v bytě nehromadí ...

Pro spojitě derivovatelnou vektorové pole $F = (F_1, F_2)$ na otevřené množině v $\mathbb{R}^2$ nazýváme **rotace** pole F funkci

$$\operatorname{rot} F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\ .$$



Obrázek 6.4.4: Rotace se lehce nakreslí.

Je-li F proudění vzduchu, pak je vír (tornádo a podobně) tam, kde je $\operatorname{rot} F \neq 0$. Znaménko říká, na kterou stranu se vír točí.

Pro spojitě derivovatelnou vektorové pole $F = (F_1, F_2, F_3)$ na otevřené množině v $\mathbb{R}^3$ nazýváme **rotace** pole F pole

$$\operatorname{rot} F(x) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right)\ .$$

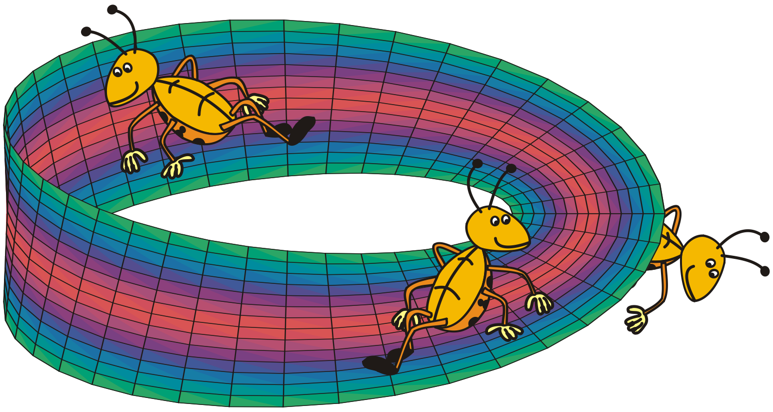
Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ nazveme **vektorový součin** vektorů $u_1, \dots, u_{n-1}$ pokud je na všechny kolmý, má velikost rovnou objemu $(n-1)$-rozměrného rovnoběžnostěnu vytvořeného vektory $u_1, \dots, u_{n-1}$, orientace je zvolena tak, aby platilo "pravidlo pravé ruky". Značíme

$$w = u_1 \times \cdots \times u_{n-1} .$$

Například $(0, 0, 4) = (2, 0, 0) \times (0, 2, 0)$.

6.4.5 Orientace ploch

Jedná se o zvolení lokální informace, kde je například u křivky „začátek“ a „konec“, jakým směrem se křivka „pohybuje“. U plochy zase chceme vědět, kde je „nahoře“ a kde „dole“.



Obrázek 6.4.5: Kde je „nahoře“, říká gravitace. Pokud jsme ve stavu beztíže, není to jasné ...

U překřížené pásky to neurčíme globálně, pouze lokálně.

Nechť Ω je k-rozměrná plocha a $x \in \Omega$. Spojité zobrazení, které každému bodu $x \in \Omega$ a každé parametrizaci okolí $x \in \Omega$ přiřadí přívlastek "kladná"nebo "záporná", nazveme **orientace** plochy Ω.

Plochu s orientací nazveme **orientovaná plocha** a říkáme například, že plocha Ω je kladně orientovaná.

6.4.6 Tečný vektor a křivkový integrál

Je-li $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ kladně orientovaná křivka, zavádíme **jednotkový tečný vektor** v bodě $x = \varphi(t)$ jako vektor

$$\mathbf{t}(x) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} .$$

Integrál

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{t} \, ds$$

Zde $F \cdot \mathbf{t}$ vyjadřuje složku síly F ve směru tečného vektoru, tedy ve směru našeho pohybu. Tím, že to integrujeme křivkovým integrálem, sbíráme "příspěvky"síly F k našemu pohybu ...

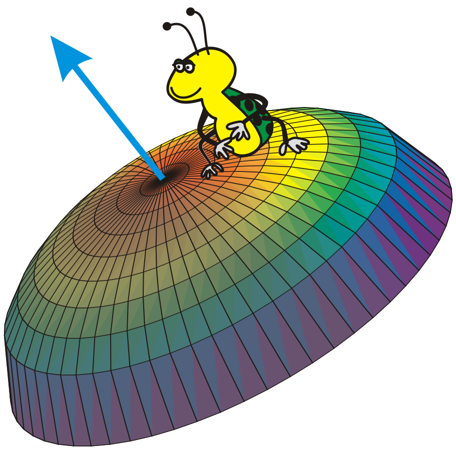
nazýváme **křivkový integrál druhého druhu** vektorového pole F a někdy značíme

$$\int \vec{F}\, d\vec{\varphi} \text{ nebo } \oint F\, d\varphi\,.$$

6.4.7 Normálový vektor a plošný integrál

Je-li $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ kladně orientovaná $(n-1)$-rozměrná plocha, zavádíme **jednotkový normálový vektor** v bodě $x = \varphi(t)$ jako vektor

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)}{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)\right|}\,.$$



Obrázek 6.4.7: Normálový vektor je kolmý k ploše.

Integrál

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{n}\, dS$$

nazýváme **plošný integrál druhého druhu** vektorového pole F a někdy značíme

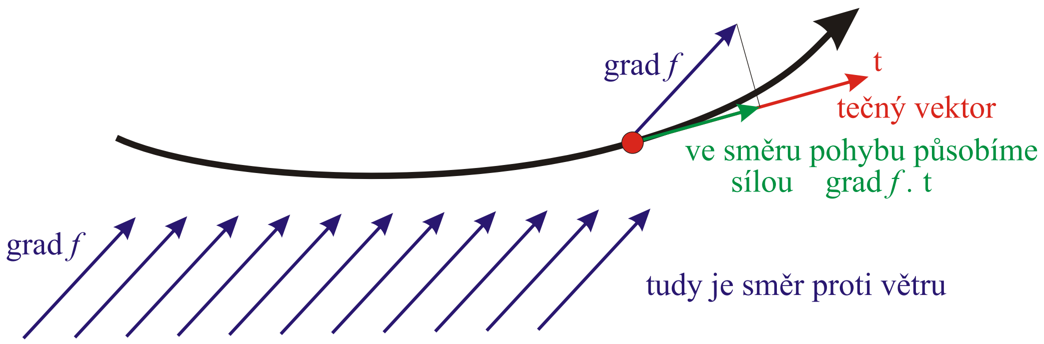
$$\int \vec{F}\, d\vec{S} \text{ nebo } \oint F\, dS\,.$$

Zde $F \cdot \mathbf{n}$ vyjadřuje složku proudu vody F ve směru normálového vektoru, tedy ve směru kolmém k ploše. Tím, že to integrujeme křivkovým integrálem, sbíráme "příspěvky"proudu vody F, které projdou přes naši plochu ...

6.4.8 Věta (O křivkovém integrálu)

Je-li $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ kladně orientovaná křivka s jednotkovým tečným vektorem $\mathbf{t}(x)$. Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na okolí $\varphi(a,b)$. Pak

$$\int_{\varphi(a,b)} \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{t}\, ds \;=\; f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))\,.$$



Obrázek 6.4.8: Cesta proti větru.

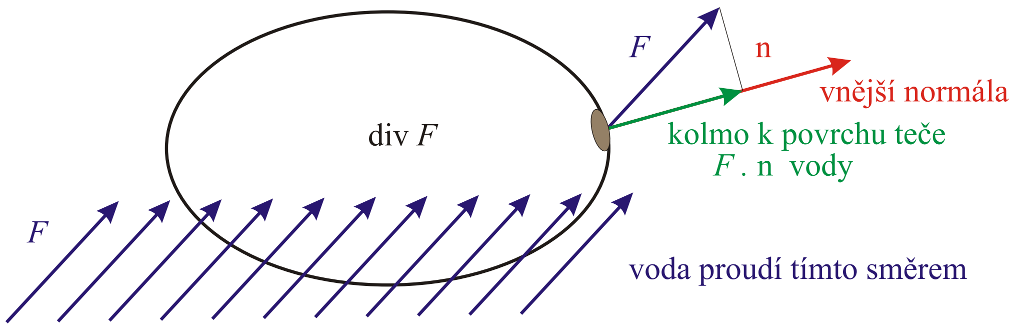
Pokud je křivka uzavřená, f určuje tlak vzduchu, $\operatorname{grad} f$ síla k překonání větru, celková práce je nulová :-)

6.4.9 Věta (O divergenci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je orientovaná $(n-1)$-rozměrná plocha která tvoří hranici Ω a orientující pole normálových vektorů "ven"z Ω. Je-li F spojitě diferencovatelné vektorové pole na okolí $\Omega \cup \varphi(G)$. Pak

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{n}\, dS \;=\; \int_{\Omega} \operatorname{div} F\, dm\,.$$

(C.F.Gauss $\sim$ 1800, Ostrogradski)



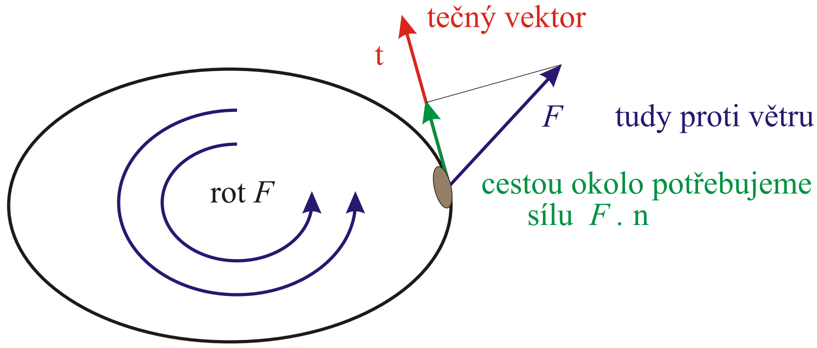
Obrázek 6.4.9: Divergence a tok přes hranici.

6.4.10 Věta (O rotaci v $\mathbb{R}^2$)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ je orientovaná křivka která tvoří hranici Ω a orientující pole tečných vektorů „ve směru hodinových ručiček“. Je-li F spojitě diferencovatelné vektorové pole na okolí $\Omega \cup \varphi(G)$. Pak

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{t}\, ds \;=\; \int_{\Omega} \mathrm{rot}\, F\, dm\,.$$

(G.Green $\sim$ 1840)



Obrázek 6.4.10: Cesta okolo tornáda.

6.4.11 Věta (O rotaci v $\mathbb{R}^3$)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná dvourozměrná plocha s orientovaným okrajem parametrizovaným zobrazením $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$. Zvolíme orientaci podle obrázku. Je-li F spojitě diferencovatelné vektorové pole na okolí $\Omega \cup \varphi(G)$. Pak

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{t}\, ds \;=\; \int_{\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\, F\, dS\,.$$

(Stokes)

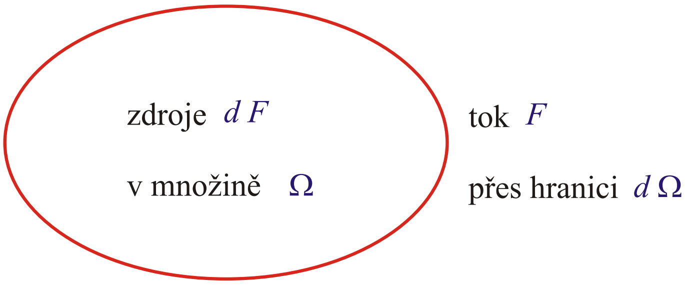
V prostoru je to to samé, jen pokřivené. Funguje to proto, že to funguje v rovině.

6.4.12 Věta (Zákon zachování)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná omezená k-rozměrná plocha s okrajem $d\Omega$. Je-li F spojitě diferencovatelná $(k-1)$-forma a dF její diferenciál na okolí $\Omega \cup d\Omega$. Pak

$$\int_{d\Omega} F = \int_{\Omega} dF \, .$$

(G.Stokes $\sim$ 1854)



Obrázek 6.4.12: Nic se nikam neztratí bezdůvodně.

Integrujeme přes množinu Ω „zdroje“ dF. Výsledek se musí rovnat integraci přes okraj $d\Omega$ „chování“ F. Je to nejobecnější formulace zákona zachování ve tvaru základní věty analýzy pro vektorou integraci.

Speciální případy zákona zachování jsou například základní věta analýzy, věta o křivkovém integrálu, věta o divergenci a věta o rotaci.

Technické dovednosti jsou mistrovstvím složitosti, zatímco kreativita je mistrovstvím jednoduchosti.
(E.Ch.Zeeman $\sim$ 1970)

Důkaz: Pro ilustraci dokážeme zákon zachování pro jeden speciální případ ve větě o divergenci v $\mathbb{R}^2$.

> Pro matematika je polovina důkazu rovna nule.
>
> (K.F.Gauss $\sim$ 1840)

Nechť

$$\Omega = \{(x,y) \ : \ x \in [0,1], \ y \in [0, f(x)]\} \ ,$$

kde $f(x) = 1 - x^2$ a $F(x,y) = (0, F_2(x,y))$. Pak podle věty o integraci přes řezy píšeme

$$\int_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \ dxdy \ = \int_0^1 \left(\int_0^{f(x)} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \ dy \right) \ dx = \int_0^1 (F_2(x, f(x)) - F_2(x,0)) \ dx \ .$$

Pravou stranu upravíme na požadované křivkové integrály

$$\int_0^1 (0, F_2(t, f(t))) \cdot (f'(t), 1) \ dt \ + \int_0^1 (0, F_2(t,0)) \cdot (0,-1) \ dt \ + \int_0^1 (0, F_2(0,t)) \cdot (-1,0) \ dt \ ,$$

ve kterých vidíme vektory „vnější“ normály k jednotlivým kouskům okraje Ω. ■

> Lze očekávat, že zákon zachování je vysloven tak, že platí. To ale znamená, že si dovedeme význam tajuplných formulací jako „forma“, „diferenciál formy“ a „integrace formy“ doplnit. Jak?
>
> Použijeme-li větu o integraci přes řezy, převedeme „plošný“ integrál na „okrajový“. Ten je přesně hodnotou toho integrování formy.
>
> I když to není zcela pravda, lze o tom uvažovat ;-)

Kapitola 7

Funkce komplexní proměnné

Tato kapitola ukáže, které pojmy z reálného světa mají své analogie i ve světě komplexních čísel. Budou to derivování, integrování, nekonečné součty ...

Zintegrujeme $1/z$ a postavíme si nekonečné schodiště.

7.1 Pojem komplexní funkce

7.1.1 Body, vzdálenost a okolí v $\mathbb{C}$

Prvek v $\mathbb{C}$ budeme nazývat **bod** (komplexní roviny) a označovat $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Vzdálenost mezi body $\mathbb{C}$ budeme značit

$$\rho(z_1, z_2) \;=\; |z_1 - z_2| \;=\; \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \cdots + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

Okolím bodu $z \in \mathbb{C}$ rozumíme množinu

$$U^{\varepsilon}(z) \;= \{w \in \mathbb{C} \;:\; |w - z| \;< \varepsilon\}\,.$$

Množina A je **otevřená**, pokud s každým svým bodem obsahuje nějaké okolí. Množina B je **uzavřená**, pokud její doplněk je otevřená množina. Množina bodů, které mají nulovou vzdálenost od množiny A i od jejího doplňku se nazývá **hranice** množiny A a značí ∂A.

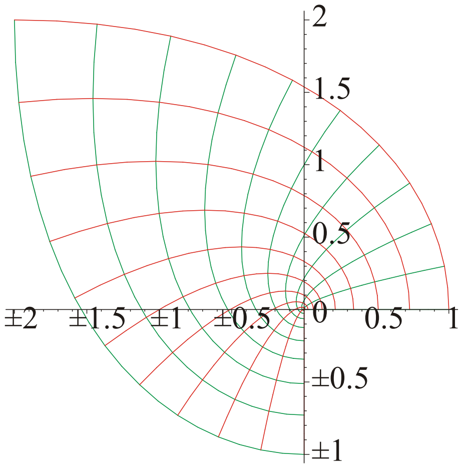
7.1.2 Konvergence a spojitost v $\mathbb{C}$

Postupujeme podobně jako u reálné proměnné. Např. řekneme, že posloupnost $\{z_n\}_1^{+\infty}$ bodů v $\mathbb{C}$ má **limitu** (nebo **konverguje k**) $z_0 \in \mathbb{C}$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Podobně zkoumáme spojitost komplexních funkcí.

7.1.3 Funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$ a jejich zobrazování

Zkoumáme **funkce komplexní proměnné** jako zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Zapisujeme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = \Re f + i\Im f$, kde $\Re f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ se nazývá **reálná složka** funkce f a $\Im f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ se nazývá **imaginární složka** funkce f.

Zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ můžeme znázornit jako transformaci komplexní roviny, například jako deformaci čtvercové sítě v komplexní rovině vzorů.



Obrázek 7.1.3: Transformace jednotkového čtverce pomocí funkce $z \mapsto z^3$.

Zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ můžeme též znázornit jako dvojici zobrazení $\Re f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ a $\Im f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Tak si představíme funkci jako dvě plochy. Nic moc.

7.2 Derivace komplexní funkce

7.2.1 Definice (Derivace v bodě)

Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 **derivaci** $f'(z_0)$, pokud existuje následující limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)\,.$$

Tomuto zlomku se říká **diferenční podíl**. Nedefinujeme jednostranné derivace.

Důležitá záležitost je to, že se všechno odehrává v komplexní rovině. Tedy se h pohybuje poblíž nuly v komplexní rovině, dělí se komplexní čísla a podobně. Geometrický smysl je opět takový, aby se funkce dala v bodě dobře aproximovat lineárním zobrazením. Jaké lineární zobrazení je míněno se lehce zjistí.

Například funkce $z \mapsto z$ derivaci má.

...zatímco $z \mapsto \bar{z}$ ji nemá. To je v té komplexce záludné. Spusta rozumných věcí tu neplatí. Například se v podstatě nesmí oddělovat reálnou a imaginární složku komplexního čísla, ty musí žít společně.

7.2.2 Věta (O komplexní derivaci a otáčení rovin)

Funkce f definovaná v okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ má v bodě z_0 derivaci $f'(z_0)$ právě když funkce f_1 a f_2 definované předpisem

$$f(x+iy) = f_1(x+iy) + if_2(x+iy)$$

mají derivaci a platí „tečná rovina k f_2 je otočená o 90^o doleva oproti tečné rovině k f_1“.

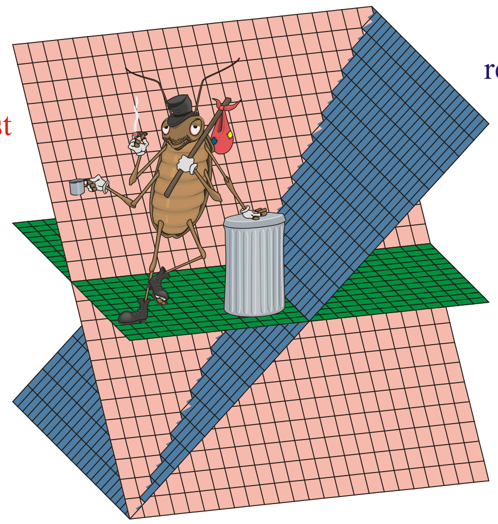
(A.L.Cauchy ∼ 1930, B.Riemann ∼ 1850)

... což platí pro $z \mapsto z$, ale neplatí pro $z \mapsto \bar{z}$.

Reálný človíček stoupá po reálné části funkce, imaginární človíček stoupá po imaginární části ve směru o 90^o doleva. Reálný človíček je „pravičák“, imaginární človíček je „levičák“.

Podmínky popisující vztah tečných rovin reálné a imaginární části funkce s komplexní derivací se nazývají **holomorfní podmínky**.

(A.L.Cauchy ∼ 1930, B.Riemann ∼ 1850)



Obrázek 7.2.2: Po které ploše mám stoupat?

Holomorfní funkce jsou vlastně řešení rovnice $\bar{\partial} f(z) = 0$, což je jiný zápis kolmosti reálné a imaginární části funkce. Obě části jsou harmonické, zpravidla jde z jedné části dopočítat druhou.

Takhle by možná šlo pro každou rovnici udělat vlastní holomorfní funkce.

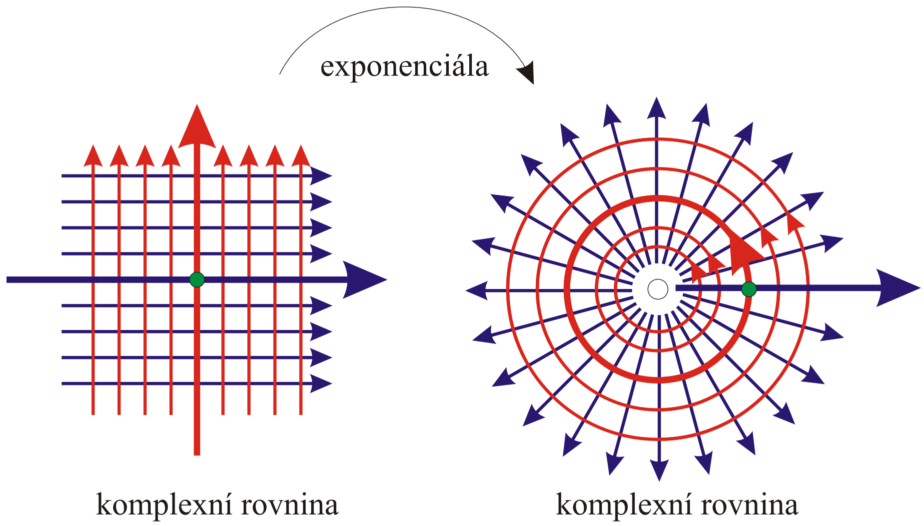
7.2.3 Věta (O komplexní derivaci a zachování úhlů)

Jestliže funkce f definovaná v okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ má v bodě z_0 nenulovou derivaci $f'(z_0)$, pak se křivka procházející bodem z_0 ve směru α zobrazí pomocí f do křivky procházející bodem $f(z_0)$ ve směru $f'(z_0)\alpha$. Tedy se zachovávají úhly křivek procházející bodem z_0.

7.2.4 Definice (Holomorfní funkce)

Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{C}$ je **holomorfní** na množině $M \subset \mathbb{C}$ když má f na množině M derivaci.

Zpravidla máme funkci holomorfní na otevřené množině. Ukáže se, že funkce holomorfní jsou velmi hezké, lokálně jsou rovny mocninné řadě, mají vlastnost průměru, …



Obrázek 7.2.3: Exponenciála převádí vodorovné přímky do pěkného vějíře (s nekonečněnásobným překrytím). Přímky svislé zase do kružnic (s nekonečným otáčením).

7.3 Komplexní křivkový integrál

7.3.1 Definice (Křivky, cesty, cykly)

Křivka je zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, kde φ_1 a φ_2 jsou reálné funkce se spojitými derivacemi. Spojitým napojováním křivek vznikne **cesta** („po částech hladká křivka“). Cesta je **uzavřená**, pokud se koncový bod poslední křivky rovná počátečnímu bodu první křivky. Konečné sjednocení cest se nazývá **cykl**.

7.3.2 Definice (Oblast a křivková souvislost)

Množina $U \subset \mathbb{C}$ se nazývá **křivkově souvislá**, pokud pro každé dva body U existuje cesta v U cesta spojující tyto body.

Otevřená křivkově souvislá množina $U \subset \mathbb{C}$ se nazývá **oblast**.

Množina $U \subset \mathbb{S}$ se nazývá **jednoduše souvislá**, pokud její doplněk je souvislý.

To přibližně znamená, že množina U "nemá díry".

7.3.3 Definice (Komplexní křivkový integrál)

Nechť f je spojitá na otevřené množině $U \subset C$ a $\varphi : [a, b] \to U$ je křivka. Definujeme **(komplexní) křivkový integrál** z f podél φ

$$\int_\varphi f(z)\, dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt\, .$$

Zde se integruje komplexní funkce „po složkách“.

POZOR !!!
Integrál z jedničky přes kružnici je nula !!!
Připomíná to trochu vektorovou integraci ...

Podobný ingegrál přes cesty se počítá jako součet příslušných integrálů přes křivky, které tvoří danou cestu. Podobně přes cykl.

...a u křivek, cest a cyklů integrál nezáleží na „parametrizaci“!!! (Pokud je kladná.)

7.3.4 Definice (Komplexní primitivní funkce)

Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $g' = f$ na U. Pak říkáme, že funkce g je **(komplexní) primitivní funkce** k funkce f na U.

7.3.5 Věta (Komplexní zákon zachování)

Nechť na oblasti U má funkce f derivaci f'. Pak platí

$$\int_\varphi f'(z)\, dz = f(\beta) - f(\alpha)$$

pro libovolnou křivku φ jdoucí z bodu α do bodu β.

Důkaz:

$$\int_\varphi f'(z)\, dz = \int_a^b f'(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(f(\varphi(t))\right)\, dt = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))\,.$$

■

Zatím se nám daří. Podobá se to docela reálnému případu. Budeme se dále zabývat obrácením této věty v tom smyslu, zda se takovým křivkovým integrálem dá počítat primitivní funkce. To by zřejmě integrál přes uzavřenou křivku měl být nula. Pro celou komplexní analýzu je základním následující příklad.

7.3.6 Cesta kolem pólu

Komplexní integrál z funkce $1/z$ přes jednotkovou kružnici ($\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$) je roven $2\pi i$. Opravdu

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,dt = 2\pi i\,.$$

Jednotková kružnice obchází „pól“ funkce $1/z$ umístěný v počátku. Kdyby ta křivka šla kolem počátku dvakrát, byl by výsledek dvojnásobný. Pokud by šla v protisměru, měl by výsledek opačné znaménko. Je to jako chůze po točitém schodišti.

P O Z O R ! ! !
Tuto vlastnost má v podstatě pouze "zlá"funkce $1/z$, popřípadě sečtená s jinými "hodnými"funkcemi.

Obrázek 7.3.6: Pro zeměkouli je pól na jihu a na severu. Pro obecnou funkci může být kdekoliv.

Budeme zkoumat, kdy je interál z holomorfní funkce přes uzavřenou cestu nulový, kdy křivkový integrál z holomorfní funkce závisí pouze na počátečním a koncovém bodě (nezávisí na volbě cesty). Toto souvisí s tím, zda má holomorfní funkce primitivní funkci. Její sestavení pomocí křivkového integrálu dané funkce není problém (podle komplexního zákona zachování), pokud ovšem je toto sestavení korektní . . .

Je to pořád ten samý problém, pohybujeme se v kruhu ;-)

7.3.7 Věta (Primitivní funkce a integrace)

Nechť je funkce f spojitá na otevřené množině U. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní

(i) f má na U primitivní funkci.

(ii) Integrál z f nezávisí v U na dráze.

(iii) Integrál z f přes uzavřenou cestu je nulový.

Pokud množina nemá "díry", primitivní funkce nakonec bude existovat. To se brzy ukáže.

7.3.8 Věta (Integrace okolo trojúhelníku)

Nechť je funkce f holomorfní na otevřené množině U a cesta φ popisuje obvod trojúhelníku $T \subset U$. Pak

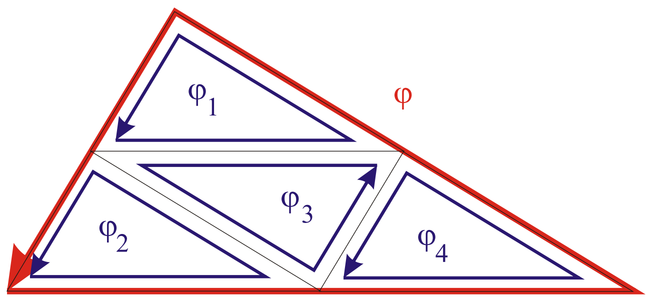
$$\int_\varphi f(z)\,dz = 0\,.$$

Takový integrál je vždycky nulový, jediná výjimka je ta funkce $1/z$ při obcházení počátku. Mimojiné se zde potvrzuje, že trojúhelník nemá díru ;-)

Důkaz: Nechť

$$\left|\int_\varphi f(z)\,dz\right| = K > 0\,.$$

Odvodíme spor. Označme L obvod trojúhelníku T. Rozdělíme trojúhelník T středními příčkami na čtyři trojúhelníky. Alespoň přes obvod jednoho je analogický integrál roven alespoň $K/4$.



Obrázek 7.3.8: Integraci přes obvod trojúhelníku nahradíme integrací přes obvody menších trojúhelníků. Úseky, které jdeme sem i tam se ruší.

Tak postupujeme indukcí a sestavíme zmenšující se posloupnost trojúhelníků. Její průnik je jeden bod, označíme jej z_0. V bodě z_0 použijeme existenci derivace a vyjádříme funkci f ve tvaru

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z)\,.$$

První dva sčítanci na pravé straně jsou funkce mající primitivní funkci, tedy se integrace z funkce $f(z)$ přes uzavřenou křivku redukuje na integraci funkce $(z - z_0)\varepsilon(z)$.

V n-tém kroku při integraci přes obvod φ_n trojúhelníku T_n vybraného v n-tém kroku odhadujeme

$$\frac{K}{4^n} \leq \left| \int_{\varphi_n} f(z)\, dz \right| \leq \left| \int_{\varphi_n} (z - z_0)\varepsilon(z)\, dz \right| \leq \frac{L^2}{4^n} \sup_{z \in T_n} |\varepsilon(z)| \ .$$

Po násobení 4^n plyne díky derivaci v bodě z_0 z

$$K \leq L^2 \sup_{z \in T_n} |\varepsilon(z)| \ \to \ 0 \ , \ n \to \infty$$

spor. ■

Tak jsme si zase něco dokázali. Stálo to za to, ta věta je poklad :-)

Pokud oslabíme předpoklady tak, že je funkce f spojitá v U a holomorfní v $U \setminus \{w_0\}$, platí tvrzení věty stejně.

Okolo bodu w_0 uděláme malinký trojúhelníček T_w s nepatrným integrálem a zbytek rozdělíme opět na trojúhelníky s nulovým integrálem . . . .

7.3.9 Věta (Existence primitivní funkce na kruhu)

K funkci f holomorfní na jednotkovém kruhu existuje na jednotkovém kruhu primitivní funkce.

Důkaz: Definujeme primitivní funkci v bodě z integrálem

$$\int_{\varphi_z} f(w)\, dw \ ,$$

kde křivka φ_z je úsečka z počátku do bodu z. S použitím věty o integraci okolo trojúhelníku jde dokázat, že jsme sestrojili primitivní funkci. ■

Podobně se sestrojí primitivní funkce na „hvězdicovité“ množině.

7.3.10 Index bodu ke křivce

Při výpočtu integrálu

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z}\, dz$$

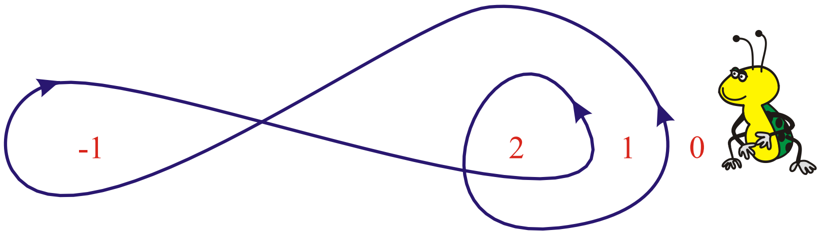
pro křivku φ neprocházející počátkem můžeme křivku φ lokálně nahrazovat částmi jednotkové kružnice díky předchozí větě. Celkem můžeme přetvořit křivku φ na cestu procházející pouze

jednotkovou kružnicí. Takto integraci převedeme na známý integrál přes jednotkovou kružnici, který je roven $2\pi i$. Tedy vidíme, že výsledek bude roven n-krát $2\pi i$, kde n udává počet „oběhů“ křivky φ okolo počátku (proti směru hodinových ručiček).
Obecně počítáme tento počet oběhů křivky (cesty, cyklu) φ okolo daného bodu z_0 jako integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi}\frac{1}{z-z_0}\,dz$$

a tomuto číslu říkáme **index** bodu z_0 ke křivce φ, značíme $\mathrm{ind}(z_0,\varphi)$.
Index je spojitá, celočíselná a užitečná funkce. Index vzroste o jedničku, pokud přeskočíme přes křivku „zprava doleva“.

(J.Mařík)



Obrázek 7.3.10: Index bodu ke křivce - zprava doleva přičteme jedničku.

7.4 Základní vlastnosti holomorfních funkcí

7.4.1 Věta (Integrální vyjádření holomorfní funkce)

K funkci f holomorfní na dvojkovém kruhu U platí na jednotkovém kruhu D rovnost

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\ ,\ |z|<1\ .$$

(A.L.Cauchy $\sim$ 1930)

Důkaz: Funkce F definovaná pro pevné $z\in D$ na U předpisem

$$F(z)=f'(z)\ ,\ F(w)=\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

je spojitá v U a holomorfní v $U\setminus\{z\}$. Použijeme pro ni větu o integraci okolo trojúhelníku a dostaneme

$$0=\int_{\varphi}F(w)\,dw\ =\ \int_{\varphi}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw\ =\ \int_{\varphi}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-f(z)\,\mathrm{ind}(z,\varphi)\ .$$

■

Podobný výsledek dostaneme i pro jiné množiny a křivky. Toto tvrzení má široké použití.

7.4.2 Věta (Omezená celá funkce je konstantní)

Holomorfní omezená funkce na $\mathbb{C}$ je konstantní.

(J.Liouville $\sim$ 1840)

Důkaz: Použijeme integrální vyjádření holomorfní funkce a odhadneme $f(a) - f(b)$ jako integrál přes kruh o poloměru R. Při $R \to \infty$ dostaneme $f(a) = f(b)$. ■

Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celá**.

7.4.3 Věta (Základní věta algebry)

Polynom kladného stupně má v $\mathbb{C}$ kořen.

Důkaz: Jinak by funkce $1/P(z)$ byla holomorfní a omezená, tedy podle předchozí věty konstantní. ■

7.4.4 Věta (Princip maxima modulu)

Funkce holomorfní f na dvojkovém kruhu U nabývá na jednotkovém kruhu D maxima absolutní hodnoty na jednotkové kružnici.

Důkaz: Použijeme integrální vyjádření holomorfní funkce f^n a odhadneme

$$|f^n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f^n(w)}{w - z} \, dw \right| \le M^n \frac{R}{R - z} ,$$

tedy

$$|f(z)| \le M \sqrt[n]{\frac{R}{R - z}} \to M \, , \; n \to \infty \, ,$$

kde M je odhad $|f|$ na jednotkové kružnici. ■

Tvrzení platí v obecnější podobě. Za ním stojí důležitá „vlastnost průměru“ u holomorfních funkcí.

7.4.5 Věta (Zápis holomorfní funkce mocninnou řadou)

Nechť funkce f je holomorfní na dvojkovém kruhu U. Pak pro $|z| < 1$ platí rovnost

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{w - z} \, dw = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \, ,$$

kde koeficienty c_n u mocninné řady jdou určeny vztahem

$$c^n = \int_\varphi \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw$$

a křivka φ je kladně orientovaná jednotková kružnice.

Intelektuální pochopení nepomáhá učení: inteligence je zde na překážku.
(Gattegno)

Důkaz: Jde o rozvoj

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$$

a stejnoměrnou konvergenci řady, která dovolí prohodit řadu a integrál. ■

Takto lze rozvést v mocninnou řadu každá holomorfní funkce na každém kruhu, na kterém je holomorfní. Konvergence příslušné mocninné řady je lokálně stejnoměrná, řady konvergují až k hranici „množiny holomorfnosti“ zadané funkce.

Podobně rozvedeme funkci holomorfní na otevřené množině U obsahující mezikruží $r \le |z| \le R$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \; - \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \; = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \,,$$

řada zde vystupující se nazývá **zobecněná mocninná řada** a konverguje na $r < |z| < R$.

(P.A.Laurent 1843)

Pro takové řady zavádíme následující pojmy

- O funkci, která má v takovém zápise nenulové pouze koeficienty u kladných mocnin říkáme, že má v počátku **nulový bod** (příslušné násobnosti). Například funkce $z^2 - z^3$ má v počátku nulový bod násobnosti 2.

- O funkci holomorfní na prstencovém okolí počátku, která má v takovém zápise pouze konečně mnoho nenulových koeficientů u záporných mocnin říkáme, že má v počátku **pól** (příslušné násobnosti). Například funkce $1/z^3 + 1/z$ má v počátku pól násobnosti 3.

- O funkci holomorfní na prstencovém okolí počátku, která má v takovém zápise nekonečně mnoho nenulových koeficientů u záporných mocnin říkáme, že má v počátku **podstatnou singularitu**. Například funkce $\exp(1/z)$ má v počátku podstatnou singularitu.

- Pro funkci f holomorfní na prstencovém okolí počátku se koeficient u $1/z$ nazývá **reziduum** a označuje $\operatorname{rez}(f, 0)$. Například funkce $\operatorname{rez}(1/z, 0) = 1$.

Podobně se tyto pojmy používají pro rozvoje v okolí libovolného bodu.

7.4.6 Věta (O podstatné singularitě)

Funkce, která má v počátku podstatnou singularitu, zobrazuje každé prstencové okolí počátku na celou komplexní rovinu s možnou výjimkou jednoho bodu. Například $\exp(1/z)$ mine počátek.

(C.É.Picard 1879)

Kdyby lidé věděli, kolik práce mi dalo osvojit si své mistrovství, nezdálo by se jim to nijak nádherné.
(Michelangelo Buonarroti ~ 1520)

Obrázek 7.4.6: V matematice i jinde. K velikému dílu je třeba veliké úsilí.

Je to dřina, ale ta sláva potom …

7.4.7 Věta (Derivace a integrace mocninných řad)

Řady tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

lze derivovat člen po členu. Primitivní funkci lze počítat také člen po členu, pokud chybí člen s $1/z$.

7.4.8 Věta (Reziduová věta)

Nechť je funkce f holomorfní v dvojkovém kruhu až na konečně mnoho bodů uvnitř jednotkového kruhu, ve kterých má póly. Pak platí

$$\int_\varphi f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \sum_z \operatorname{rez}\left(f(z), 0\right)\,,$$

kde φ je kladně orientovaná jednotková kružnice a kde se sčítá přes body z, ve kterých jsou póly (konečný součet).

Prostě tu funkci vyjádříme řadou, tu integrujeme člen po členu a pouze integrace funkcí $1/z$ dá zrovna ta rezidua.

7.4.9 Příklad na reziduovou větu

Reálný integrál aproximujeme komplexním křivkovým integrálem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \int_{\varphi_1} \frac{1}{1+z^2}\,dz\,,$$

kde $\varphi_1(t) = t$, $t \in [-R, R]$. Odhadneme pomocný křivkový integrál přes polokružnici

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi_2} \frac{1}{1+z^2}\,dz \;=\; 0\,,$$

kde $\varphi_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Použijeme reziduovou větu

$$\int_\varphi \frac{1}{1+z^2}\,dz \;=\; 2\pi i \operatorname{rez}\left(\frac{1}{1+z^2}, 0\right) \;=\; \pi\,,$$

kde φ vznikne napojením φ_1 a φ_2. Výsledek je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \pi\,.$$

To samé spočítá funkce arctg.

7.4.10 Věta (Stejnoměrná limita holomorfních funkcí)

Stejnoměrně konvergentní posloupnost holomorfních funkcí na otevřené množině konverguje k holomorfní funkci.

(K.Weierstrass $\sim$ 1869)

Důkaz: Jde o limitní přechod v integrálním vyjádření holomorfních funkcí pomocí křivkového integrálu. ■

7.4.11 Aproximace racionálními funkcemi

Nechť K je kompaktní podmnožina komplexní roviny $\mathbb{C}$. Zvolme množinu $\Omega \subset \mathbb{C}$ disjuntní s K tak, aby Ω protnula každou komponentu $\mathbb{C} \setminus K$. Je-li funkce f holomorfní na okolí množiny K, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje racionální funkce g s póly v Ω tak, že $|f - g| < \varepsilon$ na K.

(C.Runge 1885)

Prostě se to udělá tak, aby v každé té díře byla nějaký pól, který akorát odpovídá chování zadané funkce.

7.4.12 Aproximace polynomy

Nechť K je kompaktní podmnožina komplexní roviny $\mathbb{C}$. Je-li funkce f holomorfní na K, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje polynom $p(x, y)$ dvou proměnných tak, že $|f(z) - g(z, \bar{z})| < \varepsilon$ pro všechna $z \in K$.

7.4.13 Věta (O jednoznačnosti holomorfních funkcí)

Je-li funkce f holomorfní na jednotkovém kruhu a množina nulových bodů funkce f má hromadný bod v počátku, pak je funkce f nulová na jednotkovém kruhu.

To je pro holomorfní funkce typické. Jsou (jejich aproximační řady) určeny jednoznačně v okolí jednoho bodu. Když je známe na $\mathbb{R}$, známe je v $\mathbb{C}$.

Důkaz: Množina hromadných bodů nulových bodů funkce f je neprázdná (díky předpokladům), uzavřená (díky spojitosti funkce) i otevřená (díky rozvoji v mocninnou řadu) v jednotkovém kruhu. ■

7.4.14 Věta (O otevřeném zobrazení)

Je-li funkce f holomorfní na jednotkovém kruhu a derivace v počátku je nenulová, pak existuje okolí U počátku, na kterém je funkce f prostá, množina $V = f(U)$ je otevřená a příslušná inverzní funkce je holomorfní na V.

Holomorfní funkce lokálně bijektivně transformuje $\mathbb{C}$.

Důkaz: Holomorfní funkce $f(z) = f(x+iy) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$ jde reprezentovat jako regulární zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ předpisem $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. ■

7.4.15 Věta (O jezírkách bez ostrůvků)

Nechť U je otevřená souvislá množina v $\mathbb{C}$, jejíž doplněk v rozšířené komplexní rovině S je také souvislý (jezírko bez ostrůvku). Pak existuje prosté holomorfní zobrazení U na otevřený jednotkový kruh.

(B.Riemann $\sim$ 1850)

Prostě není problém kvadratura kruhu a naopak :-)

Důkaz: Nechť $0 \in U$. Alespoň jednu prostou holomorfní funkci f z U do jednotkového kruhu najdeme. Pak zkusíme najít maximální z hlediska $f'(0)$. Tato existuje a zobrazuje na jednotkový kruh. ■

Prostou holomorfní funkci budeme nazývat **konformní**. Má vždy nenulovou derivaci, proto zachovává úhly. Hodí se k transformacím lokálních pravoúhlých souřadnic na množině, převádí rovinné proudění tekutiny v zadané oblasti na proudění v jednotkovém kruhu (nebo vně) například v hydromechanice, při proudění vzduchu, …

Například funkce z^2 zobrazuje kvadrant na polorovinu. Pokud známe proudění vody v polorovině, po odmocnění dostaneme proudění v „rohu“ prvního kvadrantu.

7.4.16 Věta (O membránách)

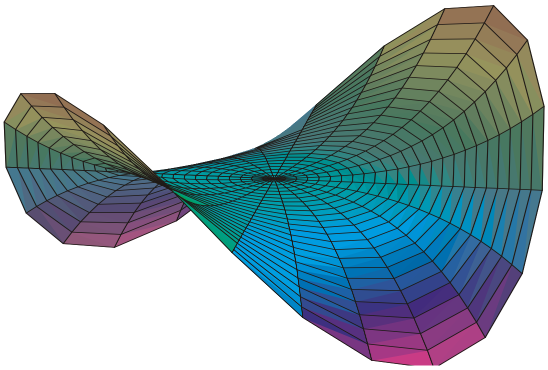
Reálná část i imaginární část holomorfní funkce splňuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Důkaz: Platí díky holomorfním podmínkám a hladkosti holomorfních funkcí. ■

Rovnici ve větě se říká **rovnice membrány** a funkce, které jí vyhovují se nazývají **harmonické**.

Můžeme se na ně dívat jako na funkce popisující pružné membrány, protože rovnice membrány nedovolí „kopeček“. Pokud totiž je funkce ve směru osy x konvexní (a má druhou derivaci kladnou), musí být ve směru osy y konkávní (a mít druhou derivaci zápornou). Tím získáme „sedlo“, nikdy „kopeček“.



Obrázek 7.4.16: Prohnutí v jednom směru se musí u membrány projevit prohnutím ve druhém směru. Je tam sedlový bod.

7.5 Analytické funkce

7.5.1 Víceznačné funkce

Viděli jsme, že je holomorfní funkci možno lokálně rozvést v mocninnou řadu konvergující vždy na nějakém kruhu konvergence. Takovéto kruhy konvergence se mohou překrývat a postupně vyplňovat definiční obor funkce.

Provedeme to na příkladu primitivní funkce k funkci $f(z) = 1/z$. Lokálně lze funkci f rozvést v mocninnou řadu v okolí bodu 1. Tam najdeme lokálně primitivní funkci k f, kterou nazveme F (zvolíme $F(1) = 0$). Vezmeme si libovolnou křivku v rovině vycházející z bodu 1 neprocházející počátkem. Podél této křivky jde funkci f i její primitivní funkci F lokálně navazovat pomocí kruhů konvergence příslušných mocninných řad.

Co dostaneme, pokud budeme prodlužovat F podél jednotkové kružnice, můžeme spočítat jako primitivní funkci pomocí křivkového integrálu z bodu 1 do bodu 1

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it}\, dt = 2\pi i\ ,$$

což není hodnota F v bodě 1. Po jednom oběhu počátku jsme získali pro primitivní funkci F hodnotu $2\pi i$. Takto jde pokračovat a vidíme, že dostaneme vlastně nekonečně mnoho „hodnot“ pro primitivní funkci v bodě 1.

Milý komplexní logaritmus je primitivní funkce k $1/z$.

Další způsob získání „víceznačných funkcí“ je rozšíření pojmu „inverzní zobrazení“. Takto jde snadno získat řada „víceznačných funkcí“.

Milý komplexní logaritmus je inverzní funkce k exponenciále.

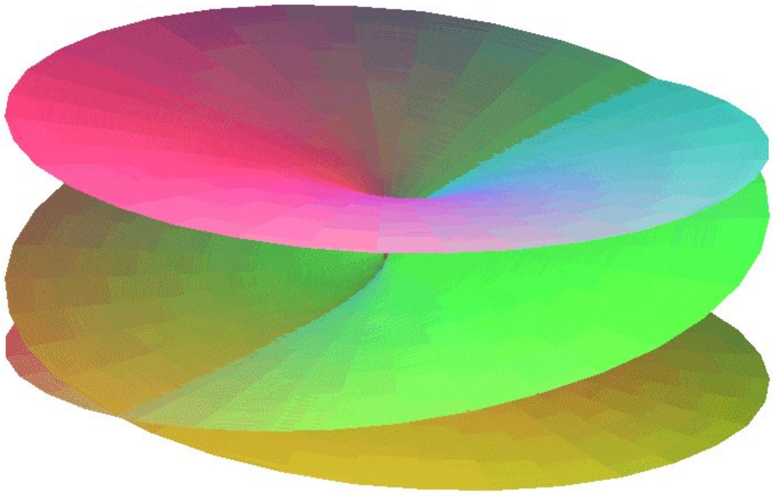
Obrázek 7.5.1: Reálná a imaginární část logaritmu je jednou z nejkrásnějších partií komplexní analýzy.

7.5.2 Analytický element a analytická funkce

Holomorfní funkci na otevřeném kruhu budeme nazývat **analytický element**, tedy se jedná o dvojici (funkce, kruh). Analytický element D_2 je **analytické pokračování** analytického elementu D_1, pokud se jejich funkce rovnají na neprázdném průniku jejich kruhů, píšeme $D_1 \triangleright D_2$. Konečná posloupnost analytických elementů $D_1 \triangleright D_2 \triangleright \cdots \triangleright D_n$ se nazývá **větev** analytického elementu D_1. Analytický element spolu se všemi jeho větvemi se nazývá **analytická funkce**.

Hodnotou analytické funkce v bodě chápeme množinu všech hodnot, které v daném bodě nabývají analytické elementy přítomné v analytické funkci. Pokud jde v každém bodě o jednobodovou množinu, říkáme, že je analytická funkce **jednoznačná**.

Při znázornění analytických funkcí jde o znázornění konečných posloupností holomorfních funkcí. Opět použijeme buď transformace komplexní roviny nebo znázornění reálné a imaginární složky jako dvě plochy.



Obrázek 7.5.2: Analytické elementy si vynucují lokální chování funkce. Tady si reálná část třetí komplexní odmocniny vynucuje analytickou funkci se třemi „plochami“.

7.5.3 Analytické funkce - funkce na ploše

Holomorfní funkce jsou definované na podmnožinách komplexní roviny. Analytickou funkci můžeme chápat jako funkci definovanou na jakési ploše „startující“ z komplexní roviny. Tak vznikne v některých případech velmi komplikovaná plocha, která zachycuje analytickou funkci. Abychom si podrželi informaci o „značnosti“ analytické funkce, je zvykem definiční plochu slepit v těch místech, kde jsou na jejich analytických elementech identické hodnoty. Takto vytvořená plocha se nazývá **víceznačná plocha** analytické funkce. Tak si například druhá odmocnina zachová svoji maximální „dvojznačnost“. Víceznačná plocha se někdy „nevejde“ do $\mathbb{R}^3$ bez "křížení, které vlastně nesmí existovat. Jde pouze o to, že víceznačná plocha někdy nejde vnořit do prostoru.

(B.Riemann ∼ 1850)

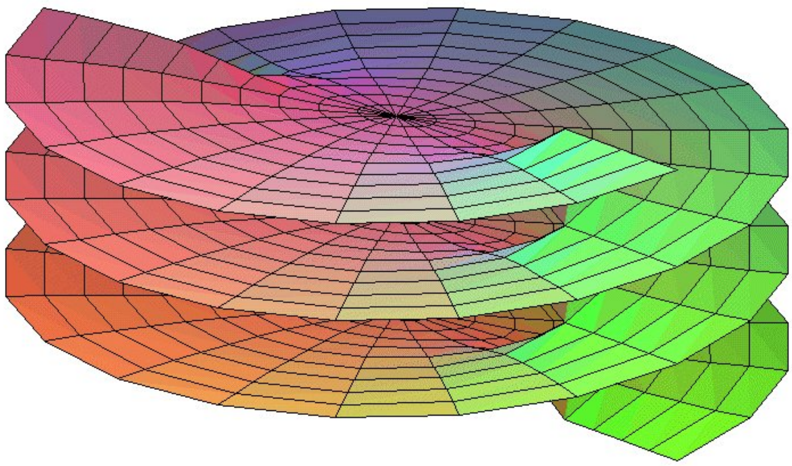
7.5.4 Věta (Jednoznačnost analytické funkce na kruhu)

Analytická funkce v jednoduše souvislé oblasti je jednoznačná.

Důkaz: Jde o křivkový integrál a primitivní funkci. ■
Věta se též nazývá **věta o monodromii**.

Myslím, že nejlepší je znát pro všechno vysvětlení - proč to vzniká, proč to pomíjí, proč to je.

(Sókratés ∼ -410)



Obrázek 7.5.2: Analytické elementy si vynucují lokální chování funkce. Tady si reálná část funkce arkustangens vynucuje analytickou funkci se nekonečně mnoha „plochami“.

Kapitola 8

Funkce více komplexních proměnných

Tato kapitola ukazuje možnosti a nemožnosti, které obsahuje vícerozměrný komplexní svět.

8.1 Základní vlastnosti

8.1.1 Definice

Funkce $f(z_1, \ldots, z_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ se nazývá **holomorfní funkce**, pokud je holomorfní v každé složce zvlášť. Množinu funkcí holomorfních v množině $D \subset \mathbb{C}^n$ budeme značit $\mathcal{O}(D)$.

8.1.2 Oblast holomorfnosti

Není pravda, že

- Funkce $z \mapsto 1/z$ je holomorfní mimo počátek.
- Existuje funkce holomorfní až na počátek.

A to je pravda ;-)

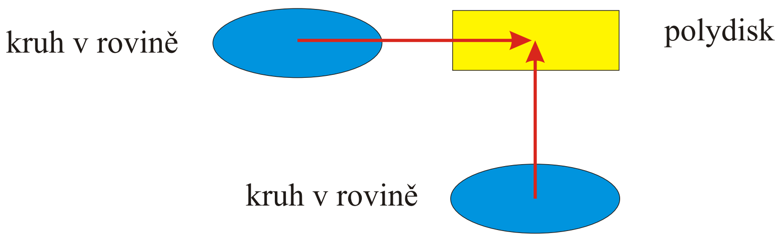
8.1.3 Polydisk

Součin jednotkových koulí v $\mathbb{C}$ nazveme **polydisk** v $\mathbb{C}^n$ a budeme značit pro $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ a $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$

$$P(a, r) = \prod_{j=1}^{n} B(a_j, r_j) .$$

Pro funkci f holomorfní na $P(a, r)$ a spojitou na $\overline{P(a, r)}$ platí

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_n} \cdots \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)} \, d\zeta_1 \ldots \zeta_n$$



Obrázek 8.1.3: Součin kruhů je ve skutečnosti (v $\mathbb{R}^4$) trochu jako míč na ragby.

pro $z \in P(a, r)$ a $\Gamma_j = \{\zeta_j \in \mathbb{C} \,:\, |\zeta_j - a_j| = r_j\}$, $1 \leq j \leq n$.

8.1.4 Rozšiřování holomorfních funkcí

Nechť D je omezená oblast v $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ a K nechť je kompaktní podmnožina D taková, že $D \subset K$ je souvislá. Pak každá funkce holomorfní v $D \setminus K$ lze holomorfně rozšířit na D.

(F.Hartogs $\sim$ 1930)

8.1.5 Zobrazení polydisku na kouli

Pro $n \geq 2$ neexistuje holomorfní bijekce polydisku na kouli, které má holomorfní inverzi.

(H.J.Poincaré $\sim$ 1910)

No, není pochyb, že tu jsou pěkné výsledky. A jsou k tomu i reálné aplikace :-)

Kapitola 9

Obecné prostory

Trochu snění nikomu neuškodí. Zkusíme si zrušit v reálném světě některé (nepodstatné?) vlastnosti. Sestrojíme nové světy, kde platí pouze některé z obyčejných vlastností obyčejného prostoru.

V podstatě si kromě hraní zkusíme, z kterých vlastností plynou které vlastnosti. To není podstatné. Důležité je, že se některé věci budou dokazovat pouze jednou v jisté obecné situaci, kteroužto věc pak v pohodě použijeme kdekoliv to půjde. Čas jsou peníze.

9.1 Topologické prostory

Topologie je kouzelná partie matematiky a nabízí řadu pěkných témat. Za zmínku stojí problém barvení, uzlování, souvislost, zkoumání křivek, ploch a těles, dimenze prostoru, ...

9.1.1 Definice (Topologický prostor)

Soubor τ podmnožin množiny T nazveme **topologie** na množině T pokud

(i) τ obsahuje prázdnou množinu a T,

(ii) konečný průnik prvků τ je opět prvkem τ,

(iii) libovolné sjednocení prvků τ je opět prvkem τ.

Prvky souboru τ nazýváme **otevřené množiny**. Množinu T s topologií τ nazýváme **topologický prostor**, někdy zapisujeme jako dvojici (T, τ).

> Představivost je důležitější než znalost.
> (A.Einstein $\sim$ 1950)

Základními příklady topologických prostorů jsou reálná osa nebo rovina, kde za topologii pokládáme systém všech otevřených množin (vytvořené pomocí okolí ...).

> Topologické prostory jsou kouzelné světy, kde se jejich lokální struktura (topologie) určí podle našich přání a pak tyto prostory žijí svůj život pro naši radost :-)

9.1.2 Základní pojmy

Množina $A \subset T$ se nazývá **uzavřená**, pokud její **doplněk** $T \setminus A$ je otevřená množina. Průnik systému všech uzavřených množin obsahujících množinu A se nazývá **uzávěr** množiny A, značíme $\bar{A}$. Sjednocení systému všech otevřených množin obsažených v množině A se nazývá **vnitřek** množiny A, značíme $\operatorname{int} A$. Každou množinu obsahující ve svém vnitřku daný bod t nazýváme **okolí** bodu t. Množina bodů, které mají v každém svém okolí bod množiny A i bod jejího doplňku se nazývá **hranice** množiny A a značí ∂A.

> Kde kdysi byly hranice vědy, tam je teď její střed.
> (G.Ch.Lichtenberg $\sim$ 1770)

Množina bodů $A \subset T$ se nazývá **hustá** v T, pokud její uzávěr je roven T. Prostor T se nazývá **seperabilní**, pokud má spočetnou hustou podmnožinu. Množina β podmnožin prostoru T se nazývá **báze**, pokud je každá otevřená množina sjednocením některých prvků β.

> Výhodou zavedení topologického prostoru je to, že nepotřebujeme zavádět vzdálenost, stačí nám pouze informace o okolích bodů. Z těchto okolí se sjednocením vytvoří libovolné otevřené množiny v topologickém prostoru.

9.1.3 Definice (Zobecněná posloupnost)

Nechť je $(\Gamma, <)$ částečně uspořádaná množina. Pokud ke každé dvojici $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ existuje $\gamma_3 \in S$ splňující $\gamma_1 < \gamma_3$ a $\gamma_2 < \gamma_3$, říkáme $(\Gamma, <)$ **usměrněná množina**. Libovolné zobrazení z nějaké usměrněné množiny do množiny T nazýváme **zobecněná posloupnost** v T. Je-li $(\Gamma, <)$ částečně uspořádaná množina a $t : \Gamma \to T$ zobecněná posloupnost píšeme t_γ místo $t(\gamma)$ a $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ místo $t : \Gamma \to T$.

Jde o to, že na rozdíl od obyčejné posloupnosti pracujeme místo s přirozenými indexy s indexy v usměrněné množině.

Zobecněná posloupnost $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se nazve **zobecněná podposloupnost** zobecněné posloupnosti $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ v T, pokud existuje funkce $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ taková, že

(i) $v_\lambda = t_{\varphi(\lambda)}$ (jde o vybrání některých prvků z původních),

(ii) φ je rostoucí, t.j. $\lambda_1 < \lambda_2 \implies \varphi(\lambda_1) < \varphi(\lambda_2)$ (uspořádání nemusí být stejné, ale platí tato "monotonie"),

(iii) ke každému $\gamma \in \Gamma$ existuje $\lambda \in \Lambda$ tak, že $\gamma < \varphi(\lambda)$ (dosáhne se libovolně daleko).

Někdy totiž v topologickém prostoru nestačí posloupnosti obyčejné, například dostat se k hraničnímu bodu pomocí posloupnosti nemusí vždy jít . . . (opravdu?)

9.1.4 Definice (Konvergence)

(Zobecněná) posloupnost $\{t_\gamma\}$ prvků topologického **konverguje** k prvku t, pokud pro každou otevřenou množinu U existuje index γ_0, od kterého jsou prvky posloupnosti v U, tedy $t_\gamma \in U$ pro každé $\gamma > \gamma_0$.

Píšeme

$$\lim t_\gamma = t\ , \quad \text{nebo} \;\; t_\gamma \to t,\ \gamma \in \Gamma\ .$$

9.1.5 Filtrování

K zachycení konvergence v topologickém prostoru jsme použili zobecněné posloupnosti, nahrazují známé posloupnosti reálných čísel. Jiná možnost je pracovat se vhodnou sestavou neprázdných množin, která obsahuje průnik každých dvou svých množin a s každou množinou obsahuje všechny její nadmnožiny, takové soustavě říkáme **filtr**.

Nyní jde zkoumat konvergence v topologických prostorech pomocí filtrů podobně jako pomocí zobecněných posloupností. Záleží na volbě. Jak jsme v usměrněné posloupnosti daleko, tak jsme ve filtru hluboko uvnitř.

9.1.6 Definice (Spojitost)

Zobrazení mezi topologickými prostory (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) se nazývá **spojité**, pokud vzor každé otevřené množiny v T_2 je otevřená množina v T_1.

9.1.7 Věta (Charakterizace spojitosti)

Zobrazení f mezi topologickými prostory (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) je spojité právě tehdy, když

$$t_\gamma \to t \implies f(t_\gamma) \to f(t) \ .$$

Spojitost se pozná pomocí zobecněných posloupností.

9.1.8 Definice (Oddělovací axiomy)

Topologický prostor T se nazývá

- **oddělený**, pokud mají každé dva různé body disjunktní okolí (jdou otevřeně oddělit),

(Hausdorff $\sim$ 1930)

Takové prostory jsou šikovné, pokud toto neplatí, jsou zde jakési „slepené“ body a je to nepříjemnost :-(

- **regulární**, pokud jde otevřeně oddělit každý bod a uzavřená množina,
- **úplně regulární**, pokud pro každý bod t a uzavřenou množinu F existuje spojitá funkce f na T tak, že $f(t) = 0$ a $f = 1$ na F,
- **normální**, pokud jde otevřeně oddělit každé dvě disjunkní uzavřené množiny.

9.1.9 Definice (Kompaktní topologický prostor)

Topologický prostor T se nazývá **kompaktní**, pokud má každé pokrytí prostoru T otevřenými množinami konečné podpokrytí.
Podobně mluvíme i o kompaktních množinách (nebo stručně o kompaktech) v topologickém prostoru.

Jde o topologickou verzi pojmu „uzavřená a omezená podmnožina reálné osy". Podle plážového lemmatu o slunečnících je jednotkový interval kompaktní.

Topologický prostor se nazývá **sekvenciálně kompaktní**, pokud z každé posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Topologický prostor T se nazývá **spočetně kompaktní**, pokud má každé spočetné pokrytí prostoru T otevřenými množinami konečné podpokrytí.

Topologický prostor se nazývá **lokálně kompaktní**, pokud má každý bod kompaktní okolí. Topologický prostor se nazývá σ-**kompaktní**, pokud je spočetným sjednocením svých kompaktních podmnožin.

9.1.10 Věta (Charakterizace kompaktnosti)

Topologický prostor T je kompaktní právě když každá zobecněná posloupnost v T má zobecněnou podposloupnost konvergující v T.

9.1.11 Věta (O průniku kompaktů)

Průnik klesající posloupnosti neprázdných kompaktů je neprázdný.

(G.Cantor $\sim$ 1910)

Pro uzavřené intervaly je to dávno známé :-)

9.1.12 Definice (Kompaktifikace)

Kompaktní topologický prostor $\mathcal{T}$ se nazývá **kompaktifikace** prostoru T, pokud je T hustá podmnožina $\mathcal{T}$.

Nechť topologický prostor T je nekompaktní oddělený lokálně kompaktní prostor. Vytvoříme prostor přidáním nového prvku ∞ a na prostoru $T_\infty = T \cup \{\infty\}$ definujeme topologii tak, že k otevřeným množinám T přidáme ještě doplňky v T_∞ kompaktních množin v T. Prostor T_∞ se nazývá **jednobodová kompaktifikace** T.

Jednobodovou kompaktifikací komplexní roviny $\mathbb{C}$ dostaneme rozšířenou komplexní rovinu $\mathbb{S}$. Jednobodovou kompaktifikací reálné osy $\mathbb{R}$ dostaneme kružnici :-)

Jednobodová kompaktifikace je nejmenší možnou kompaktifikací. Největší možnou kompaktifikací prostoru T je **spojitá kompaktifikace** βT s vlastností, že každé spojité zobrazení z T jde rozšířit na spojité zobrazení z βT.

(Stone, Čech)

9.1.13 Definice (Souvislý topologický prostor)

Topologický prostor T se nazývá **souvislý prostor**, pokud jsou $\emptyset$ a T jediné dvě zároveň otevřené a uzavřené množiny v T.

Jde o vlastnost „být v jednom kuse“.

Spojitý obraz intervalu $[0,1]$ se nazývá **oblouk**. Topologický prostor T se nazývá **obloukově souvislý**, pokud jsou každé dva body T spojeny v T obloukem. T.

Podobně definujeme i pro podmnožiny topologického prostoru.

9.1.14 Definice (Maximální souvislé množiny)

Maximální souvislá množina v topologickém prostoru T obsahující daný prvek t se nazývá **komponenta**, značíme C_t.

9.1.15 Věta (Vlastnosti souvislých množin)

Uzávěr souvislé množiny je souvislý.
Sjednocení spouvislých množin s neprázdným průnikem je souvislé.
Každá komponenta je uzavřená.

9.1.16 Věta (Topologická pozorování)

- Spojitý obraz kompaktu je kompakt.
- Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý prostor.
- Spojitý zobrazení kompaktního prostoru na oddělený prostor zobrazuje uzavřené množiny na uzavřené množiny.
- Spojitý bijektivní obraz kompaktního prostoru na oddělený prostor je homeomorfismus.

- Kompaktní oddělený prostor je normální.

Jak vidíme, kompaktnost a souvislost si dobře rozumí se spojitými zobrazeními.

9.1.17 Definice (Homeomorfní topologické prostory)

Bijekce mezi topologickými prostory (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) se nazývá **homeomorfismus**, pokud vzory i obrazy otevřených množin jsou otevřené množiny.
O topologických prostorech (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) pak říkáme, že jsou **homeomorfní**.

Z topologického pohledu jsou homeomorfní prostory totožné, říká se, že jsou stejné až na homeomorfismus.

Velmi důležité je poznat, kdy jsou dva topologické prostory homeomorfní. Budeme postupně zavádět řadu vlastností topologií a topologických prostorů. Homeomorfní prostory takové vlastnosti mají zároveň.

Tak můžeme poznat, kdy nejsou dva prostory homeomorfní.

9.1.18 Definice (Slabší a silnější topologie)

O topologii τ na množině T říkáme, že je **silnější** (nebo **jemnější**) než topologie σ na množině T, pokud $\sigma \subset \tau$, o topologii σ pak říkáme, že je **slabší** než τ.

Silnější topologie má víc otevřených množin, nejsilnější pak všechny. Nejslabší jen dvě (nebo jednu).

9.1.19 Definice (Slabá topologie)

Nechť je $f : X \to Y$ zobrazení množiny X do topologického prostoru Y. Nejslabší topologie na prostoru X, ve které je zobrazení f spojité, se nazývá **slabá topologie** generovaná zobrazením f. Otevřené množiny ve slabé topologii v X jsou (v podstatě) vzory otevřených množin v Y.
Podobně pro více prostorů a zobrazení $(Y_\gamma, f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$.

9.1.20 Definice (Součin topologických prostorů)

Nechť $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je soubor topologických prostorů. Definujeme **součin** X těchto prostorů jako množinu

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma = \{f : \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma,\ f(\gamma) \in X_\gamma \text{ pro každé } \gamma \in \Gamma\}\ .$$

Uvažujeme pro každé γ projekci prostoru X na jednotlivé složky X_γ danou předpisem $p(\gamma) = f(\gamma)$. Slabá topologie určená souborem všech těchto projekcí se nazývá **součinová topologie**.

Například pokud je $X_\gamma = \mathbb{R}$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, je X množina všech reálných funkcí na Γ s topologií bodové konvergence.

9.1.21 Věta (Součin kompaktů je kompakt)

Součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní.

(N.Tichonov 1935)

Jde o tvrzení ekvivalentní axiomu výběru.

(J.L.Kelley 1950)

Takže si vyber: součin kompaktů je kompakt, nebo ne ;-)

9.1.22 Definice (Silná topologie)

Nechť je $f : Y \to X$ zobrazení topologického prostoru Y do množiny X. Nejsilnější topologie na prostoru X, ve které je zobrazení f spojité, se nazývá **silná topologie** generovaná zobrazením f. Otevřené množiny ve slabé topologii v X jsou množiny v X s otevřeným obrazem v Y.

Podobně pro více prostorů a zobrazení $(Y_\gamma, f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.

Pokud je zobrazení $f : Y \to X$ na, říkáme silné topologii **topologie kvocientu**. Například zobrazení $f : [0,1] \to [0,1)$ definované předpisem $f(1) = 0$, $f(x) = x$ jindy, vytvoří kvocient homeomorfní s jednotkovou kružnicí.

Tak se ze čtverečku dá udělat prstýnek, překřížený pásek, anuloid nebo kouzelná láhev :-)

9.1.23 Věta (Oddělování pomocí funkce a normalita)

Nechť je X normální topologický prostor, A a B dvě disjunktní uzavřené množiny v X. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ tak, že $f = 1$ na A a $f = 0$ na B.

(P.S.Urysohn $\sim$ 1923)

Důkaz: Pomocí normality definujeme posloupnost funkcí konvergující k hledané funkci. ■

> Vložili jsme spojitou funkci mezi dvě „skokové“ funkce (jaké?). Podobně můžeme vložit spojitou funkce mezi každé dvě polospojité funkce.

9.1.24 Věta (Rozšiřování spojité funkce a normalita)

Nechť je X normální topologický prostor, A uzavřená množina v X a $f_0 : A \longrightarrow [a,b]$ spojitá funkce . Pak existuje spojitá funkce $f : X \longrightarrow [a,b]$ tak, že $f = f_0$ na A.

(H.F.F.Tietze, P.S.Urysohn $\sim$ 1923)

9.1.25 Metrizační věty

Platí

- Nechť je X kompaktní oddělený topologický prostor se spočetnou bází. Pak X je metrizovatelný.

(P.S.Urysohn $\sim$ 1923)

- Nechť je X kompaktní oddělený topologický prostor a na X existuje spočetná množina spojitých reálných funkcí oddělující body. Pak X je metrizovatelný.

> Těch metrizačních vět je jako máku. Říkají, kdy není topologický prostor nádherný a tajemný, ale je prostinký jako kostka nebo žebřík …

9.1.26 O kategoriích hustých a řídkých množin

Množina se nazývá **řídká**, pokud její uzávěr nemá vnitřní body.
Množina se nazývá **1. kategorie**, pokud je spočetným sjednocením řídkých množin.
Množina se nazývá **2. kategorie**, pokud není 1. kategorie.
Množina se nazývá **reziduální**, pokud její doplněk je 1. kategorie.
Topologický prostor se nazývá **hutný**, pokud průnik každé posloupnosti hustých otevřených množin je hustý.

(R.L.Baire $\sim$ 1920)

Například $\mathbb{R}$ je hutný.

9.1.27 Věta (O kategoriích)

Nechť je X kompaktní oddělený topologický prostor. Pak spočetný průnik otevřených hustých podmnožin je hustý.

(R.L.Baire $\sim$ 1920)

Ta vlastnost se vždycky vynoří jako ruka zákona. Mockrát jsem chtěl mít ten průnik prázdný, ale houbeles.

9.1.28 O průnicích otevřených množin

Množina se nazývá **typu** G_δ, nebo někdy G_δ **množinou**, pokud je průnikem spočetně mnoha otevřených množin.
Množina se nazývá **typu** F_σ, nebo někdy F_σ **množinou**, pokud je sjednocením spočetně mnoha uzavřených množin.
Podobně se pokračuje dál, například množina typu $F_{\sigma\delta}$ je spočetným průnikem F_σ množin.

9.1.29 Definice (Malá induktivní dimenze)

Definujeme:

- Prázdná množina má dimenzi -1
- Pokud má každý bod prostoru libovolně malé okolí, jehož hranice má dimenzi menší než n, pak má prostor dimenzi menší nebo rovnu n. Pokud navíc nemá dimenzi menší než n, pak má dimenzi n.
- Pokud nemá konečnou dimenzi, má dimenzi ∞.

Tři kolmé přímky stačí pro měření těla.
(Claudius Ptolemaius)

Dimenze topologických prostorů je opravdu pěkně vystavená teorie. A dokonce souhlasí s běžným pozorováním :-)

9.2 Metrické prostory

9.2.1 Definice (Metrický prostor)

Nechť X je libovolná množina. Zobrazení d , které každé dvojici bodů X přiřadí reálné číslo se nazývá **vzdálenost** (nebo též **metrika**) na X, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí

(i) $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**trojúhelníková nerovnost**).

Množinu X s metrikou d nazýváme **metrický prostor**, někdy zapisujeme jako dvojici (X, d).

> Do podsvětí je odevšad stejně daleko.
> (Cicero)

9.2.2 O vzdálenosti, okolí a topologii

Pro bod $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ definujeme (úplné) ε-ové **okolí** bodu x jako množinu $\{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ a značíme $U_\varepsilon(x)$.
V metrických prostorech je známa obecně jediná informace a tou je vzdálenost pro každou dvojici prvků prostoru. Pomocí této vzdálenosti dovedeme definovat okolí bodu a zkoumat otevřené množiny. Tím máme k dispozici na metrickém prostoru topologii a používáme tedy celý aparát topologických prostorů (konvergence, spojitost, kompaktnost, souvislost, ...).

9.2.3 Definice (Ekvivalentní metriky)

Dvě metriky jsou **ekvivalentní**, pokud generují stejnou topologii.

9.2.4 Věta (Univerzální separabilní metrický prostor)

Každý separabilní metrický prostor je izometricky izomorfní prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$.

(S.Banach ∼ 1925, K.Mazur)

> To je ovšem perla. Tu větu si někdy nechám zarámovat :-)

9.2.5 Úplnost prostoru

O posloupnosti $\{x_n\}_1^{+\infty}$ říkáme, že je **ustálená**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n, m > n_0$ platí $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Pokud je každá ustálená posloupnost konvergentní, říkáme prostoru **úplný**.

9.2.6 Věta (O kategoriích)

Nechť je X úplný metrický prostor. Pak průnik otevřených hustých podmnožin je hustý.

(R.L.Baire $\sim$ 1920)

Jak jsem už jednou řekl, jeden je proti takové síle úplně bezbranný.

Matematika je hledání struktur a vzorů, které přinášejí řád a jednoduchost do našeho světa.

(Grifith 2000)

9.2.7 Věta (Kompaktnost v metrických prostorech)

Metrický prostor T je kompaktní právě když každá posloupnost v T má podposloupnost konvergující v T.

Kompaktnost v topologických prostorech se dělá jinak. V metrických prostorech to jde pomocí posloupností.

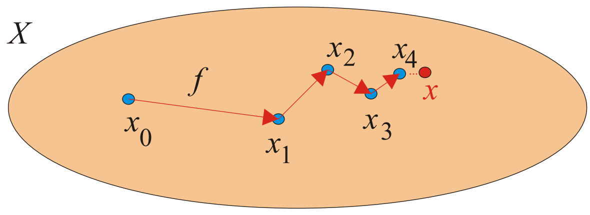
Množina M v metrickém prostoru se nazývá **prekompaktní**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-**síť**, což znamená konečná množina bodů $x_1, \ldots, x_n \in M$ tak, že $M \subset \cup_{i=1}^{n} U_\varepsilon(x_i)$. Množina M v metrickém prostoru se nazývá **relativně kompaktní**, pokud její uzávěr je kompakt.

9.2.8 Věta (O pevném bodu kontraktivního zobrazení)

Nechť je X úplný metrický prostor. Nechť zobrazení $f : X \to X$ je **kontraktivní**, t.j. existuje $q < 1$ tak, že $d(f(x), f(y)) < qd(x, y)$ pro každé $x, y \in X$. Pak existuje **pevný bod** zobrazení f, tedy $f(x) = x$ pro jistý bod $x \in X$.

(S.Banach $\sim$ 1925)

Je neuvěřitelné, jaké všechny mořné aplikace tato věta má. Ten fix-punkt dovede ta věta i přímo najít pomocí aproximací. Ta věta je kanón na fix-punkty.



Obrázek 9.2.8: Zvolíme libovolný startovací bod. Skončíme v pevném bodu.

Důkaz: Zvolíme libovolně bod x_0, jeho postupným zobrazováním vytvoříme konvergentní posloupnost s limitou v pevném bodě. ■

Zde ožila geometrická řada. Ta kontrakce s ní byla hlídaná.

9.3 Vektorové prostory

Vektorové prostory jsou zpravidla vymyšleny na nějaký problém. Zpravidla jde o prostor řešení nějaké rovnice. V jeho podstatě musí být však jakási linearita, jinak „sorry“.

9.3.1 Definice (Vektorový prostor)

Nechť V je neprázdná množina se dvěma operacemi, součet dvou prvků $x + y$ a násobek αx prvku x číslem α splňující následující podmínky

- součet je komutativní a asociadivní,
- existuje nulový (0) a opačný prvek $(-x)$ pro sčítání,
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $1x = x$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Množinu V nazýváme **vektorový prostor** (někdy též **lineární prostor**). Prvek V nazýváme **vektor** (někdy též **bod**), číslo pak nazýváme **skalár**. Pokud jsou čísla reálná nebo komplexní, jde o reálný nebo komplexní vektorový prostor (obecně je vektorový prostor "nad tělesem").

Množina $W \subset V$ obsahující lineární kombinace svých prvků se nazývá **podprostor** vektorového prostoru V.

9.3.2 O zobrazeních

Zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory se nazývá **lineární**, pokud zachovává operace součet a násobek. Dva vektorové prostory se nazývají **izomorfní**, pokud mezi nimi existuje lineární bijekce. Zobrazení prostoru do sebe se nazývá **operátor**, zobrazení prostoru do tělesa ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) se nazývá **funkcionál** či **lineární forma**.

Množinu nulových bodů lineárního zobrazení L nazveme **jádro** zobrazení a značíme $\ker L$. Množinu hodnot lineárního zobrazení L nazveme **obor hodnot** zobrazení a značíme $\operatorname{range} L$

Prostě ta linearita láká svou jednoduchostí. Prostě jenom zobecňujeme přímky a roviny v $\mathbb{R}^3$.

9.3.3 Definice (Algebraický duál)

Vektorový prostor všech funkcionálů na vektorovém prostoru V se nazývá **algebraický duál**, značíme $V^\#$.

S těma duálama se dají dělat docela nebezpečné věci. Pozor na ně.

9.3.4 Konvexní funkcionály a pseudonormy

Nechť je V je vektorový prostor. Reálná funkce p na V se nazývá **konvexní funkcionál**, pokud platí

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pro každé $x \in V$, $\lambda \geq 0$,

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in V$.

Konvexní funkcionál se nazývá **pseudonorma**, pokud platí $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pro každé $x \in V$ a každé λ.

9.3.5 Věta (Rozšiřování majorizovaných lineárních forem)

Nechť l je lineární forma na lineárním podprostoru W vektorového prostoru V, která je majorizovaná na podprostoru W daným konvexním funkcionálem p na V (t.j. $l \leq p$ na W). Pak existuje lineární forma L rozšiřující l na celý prostor V, majorizace dál platí (t.j. $L \leq p$ na V).

(H.Hahn, S.Banach $\sim$ 1929, E.Helly 1912)

> Veškeré vlastnosti obecných prostorů jsou průhledné. Pokud platí v obecných prostorech, platí zpravidla i v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{R}^2$.
> Tak si vlastně tyto vlastnosti lze dát do definice daného prostoru.
> Sice tím pádem nebude definice minimální, ale bude o důkaz méně ;-)

Důkaz: Uvažujeme podprostory mezi W a V, na nichž takové rozšíření existuje a hledáme maximální takový podprostor M. Použijeme dále Zornovo lemma (ve skutečnosti axiom výběru). Pokud maximální M není rovno V, pak přidáme k M další prvek x a definujeme na $M \cup \{x\}$ funkcionál s požadovanými podmínkami. Zde se při hledání tohoto funkcionálu použije konvexita p. To je ve sporu s maximalitou M, tedy $M = V$. ■

Této slavné větě se říká **algebraická rozšiřovací věta**.

> Jde prostě o to, že funkci $x \mapsto x$ na reálné ose rozšíříme například na funkci $(x, y) \mapsto x + y$ v rovině. Toto rozšiřování jde dělat ad libitum. Já bych nejdýl po třech krocích raději přestal.

9.3.6 Nezávislost a báze

Konečná množina prvků V se nazývá **lineárně nezávislá množina**, pokud konečná lineární kombinace jejích prvků je rovna nulovému vektoru pouze v triviálním případě.

Množina prvků V se nazývá **(algebraická) báze** prostoru V, pokud její konečné množiny jsou lineárně nezávislé a každý prvek V jde napsat konečnou lineární kombinací prvků báze. Podle počtu prvků báze se určuje **dimenze** V ($\dim V = 0, n, \infty$).

> Teď se ta lineární jednoduchost zakuklí. Už tomu nebude rozumět. Ale jednoduché to bude pořád.

9.3.7 Definice (Faktorové prostory)

Nechť je W podprostor vektorového prostoru V. Uvažujme na V ekvivalenci $x \approx y$, pokud $x - y \in W$. Třídy ekvivalence pak jsou ve tvaru $x + W$ a jejich operace určují vektorový prostor, který označíme V/W a nazýváme **faktorový prostor**, jeho dimenzi nazveme **kodimenze prostoru** W ve V. Například rovina v prostoru $\mathbb{R}^3$, která prochází počátkem, má kodimenzi 1.

9.3.8 Definice (Nadrovina)

W je maximální vlastní podprostor vektorového prostoru V. Pro vektor $v \in V$ množinu $N = v + W$ nazveme **nadrovina**.

Podle věty o jádrech funkcionálů je nadrovina rovna $\{v \in V : L(v) = \alpha\}$ pro vhodný funkcionál L.

Dotýká-li se v reálném vektorovém prostoru V množina A nadroviny $N = \{v \in V : L(v) = \alpha\}$ a množina A celá leží na jedné straně (např. $A \subset \{v \in V : L(v) \leq \alpha\}$), říkáme N **opěrná nadrovina** k množině A.

9.3.9 Věta (O jádrech funkcionálů)

W je maximální vlastní podprostor vektorového prostoru V (a má tedy kodimenzi 1) právě tehdy, když existuje nenulový lineární funkcionál nulující se právě na W.

Důkaz: Je-li W vlastní maximální podprostor, zvolme $x \notin W$ a položme $L(x) = 1$, $L = 0$ na W. Naopak, označme $W = \ker L$ a zvolme $x \notin W$. Pak pro $v \in V$ máme $(v - \frac{L(v)}{L(x)}x) \in W$. Lineární obal $(W, \{x\})$ tvoří celý prostor V. ■

9.3.10 Věta (Základní lemma o jádrech)

Lineární funkcionál L je lineární kombinací lineárních funkcionálů $L_1, \dots, L_n$ právě když jádro L obsahuje průnik jader $L_1, \dots, L_n$.

Uf, to je opravdu podezřelé. Proč se to tak formálně komplikuje?

9.4 Topologické vektorové prostory

9.4.1 Definice (Topologický vektorový prostor)

Vektorový prostor s topologií, při níž jsou operace sčítání vektorů a násobení skalárem spojité, se nazývá **topologický vektorový prostor**. Topologii, při které je vektorový prostor topologickým vektorovým prostorem, nazveme **lineární topologie**.

9.4.2 Definice (Topologický duál)

Vektorový prostor všech spojitých funkcionálů na topologickém vektorovém prostoru V se nazývá (topologický) **duál**, značíme V^*.

9.4.3 Množiny poblíž nuly

Topologii stačí zadat pouze určením (např. filtru) okolí nuly (díky spojitosti se okolí jiných bodů dostane posunutím okolí nuly). Ve vektorových prostorech nenáme příliš informací o kompaktnosti, konvexitě množin, omezenosti, ...

Proto zavádíme pojmy, které nenápadně sondují okolí nuly.

Množina M (topologického) vektorového prostoru V se nazývá

- **pohlcující množina**, pokud pro každý prvek x existuje $\varepsilon > 0$ tak, že M obsahuje úsečku $[0, \varepsilon x]$,
- **vyvážená množina**, pokud se svým každým prvkem x obsahuje celou úsečku $[-x, x]$,
- **absolutně konvexní množina**, pokud je konvexní a vyvážená,
- **barelem**, pokud je pohlcující, absolutně konvexní a uzavřená,
- **omezená množina**, jestliže je obsažena ve vhodném násobku každého okolí nuly.

(J.v.Neumann 1935)

9.4.4 Věta (Regularita lineární topologie)

V topologickém vektorovém prostoru platí

- Každé okolí nuly je pohlcující.
- Existuje báze okolí nuly tvořená vyváženými množinami.
- V každém okolí U nuly najdeme okolí V nuly tak, že $V + V \subset U$.
- Každá lineární topologie je regulární.

(J.v.Neumann $\sim$ 1940)

To chování u nuly je klíčové.

Důkaz: (iii) ze spojitosti, pro (iv) hledáme filtr okolí nuly tvořený uzavřenými množinami, podle (iii) uzávěr V leží v U. ■

9.4.5 Věta (O bipoláře)

Pro množinu $A \subset V$ vektorového prostoru V nazveme množinu

$$A^\circ = \{v^* \in V^* : |v^*(a)| \leq 1 \ \text{ pro } a \in A\}$$

polára množiny A. Pro množinu $B \subset V^*$ nazveme množinu

$$^\circ B = \{v \in V : |b(v)| \leq 1 \ \text{ pro } b \in B\}$$

polára množiny B. Navíc množinu $^\circ(A^\circ)$ nazveme **bipolára** množiny A.
Bipolára množiny A je rovna slabému uzávěru absolutně konvexního obalu A.

Polára a bipolára jsou nástroje k tomu, aby se prostor bavil se svým duálem.

9.5 Lokálně konvexní prostory

9.5.1 Definice (Lokálně konvexní prostor)

Topologický vektorový prostor, jehož filtr okolí nuly má bázi tvořenou konvexními množinami, se nazývá **lokálně konvexní prostor**.

V té definici je obsaženo přiznání, že řada prostorů má okolí nuly pěkně pitomé. Tak se budeme spíš zajímat o ty lokálne konvexní prostory.

9.5.2 Definice (Konvexní obal)

Průnik všech ((uzavřených resp. absolutně)) konvexních množin obsahující množinu M ve vektorovém prostoru se nazývá **(uzavřený resp. absolutně) konvexní obal množiny**, značíme $\operatorname{co} M$ ($\overline{\operatorname{co}}\, M$ resp. αM).

Nechť U je konvexní množina. Řekneme, že $u \in U$ je **extremální bod množiny** U, pokud $U \setminus \{u\}$ je konvexní. Množinu extremálních bodů množiny U značíme $\operatorname{ext} U$.

9.5.3 Věta (Barely v lokálně konvexním prostoru)

Nechť V je lokálně konvexní prostor. Pak platí

- Existuje báze filtru tvořená barely.
- Je-li prostor V 2. kategorie, pak je každý jeho barel okolím nuly.

9.5.4 Věta (Spojitost konvexních funkcionálů)

Nechť je p konvexní funkcionál na topologickém vektorovém prostoru. Pak je ekvivalentní

(i) p je spojitý.

(ii) p je spojitý v nule.

(iii) $\{v \in V : p(v) < 1\}$ je otevřená.

(iv) $\{v \in V : p(v) < 1\}$ je okolím nuly.

9.5.5 Věta (Normovatelnost)

Lokálně konvexní prostor je normovatelný, právě když je oddělený a existuje v něm omezené okolí nuly.

(Kolmogorov)

9.5.6 Věta (O pseudonormách)

Konvexní funkcionál se nazývá **pseudonorma**, pokud platí $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pro každé $x \in V$ a každé λ.

Topologie je lokálně konvexní, právě když je generovaná nějakým souborem pseudonorem.

9.5.7 Věta (Spojitost lineárních funkcionálů)

Nechť je f lineární funkcionál na topologickém vektorovém prostoru. Pak je ekvivalentní

(i) f je spojitý.

(ii) f je spojitý v nule.

(iii) Jádro $\ker f$ je uzavřená množina.

(iv) Zobrazení $x \mapsto |f(x)|$ je spojitá pseudonorma.

(v) Existuje okolí bodu nula, na němž je $|f(x)| \leq 1$.

9.5.8 Věta (O oddělování)

(i) Nechť je V oddělený lokálně konvexní prostor. Pak každé dva různé body jdou oddělit spojitým lineárním funkcionálem.

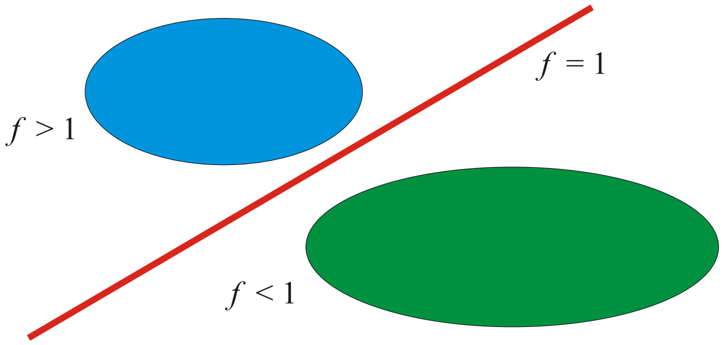
(H.Hahn, S.Banach $\sim$ 1929)

(ii) Nechť M je uzavřená konvexní množina reálného lokálně konvexního prostoru, která obsahuje nulu. Pak jde každý bod mimo M oddělit od M spojitým lineárním funkcionálem.

(S.Mazur)

(iii) Dvě disjunktní otevřené a konvexní podmnožiny lokálně konvexního prostoru jdou oddělit spojitým lineárním funkcionálem.

Je to jemná hodinářská práce. To oddělování se dá dokazovat i v rovině a není to legrace ...



Obrázek 9.5.8: Dvě vhodné množiny jdou oddělit.

9.5.9 Věta (Metrizovatelnost)

Nechť je V oddělený lokálně konvexní prostor. Pak je ekvivalentní

(i) V je metrizovatelný.

(ii) Existuje spočetná báze okolí nuly.

(iii) Topologie je generovaná spočetným souborem pseudonorem.

9.5.10 Slabé topologie

Nechť je V lokálně konvexní prostor. Pro každý spojitý lineární funkcionál $\varphi \in V^*$ definujeme pseudonormu p_φ na V předpisem

$$p_\varphi : v \mapsto |\varphi(v)| \, , v \in V \, .$$

Lokálně konvexní topologii generovanou systémem pseudonorem $\{p_\varphi\}_{\varphi \in V^*}$ nazveme **slabá topologie** na V a označíme $\sigma(V, V^*)$, někdy mluvíme o w-topologii. Tedy $v_n \stackrel{w}{\to} v$ pokud $\varphi(v_n) \to \varphi(v)$ pro každý spojitý lineární funkcionál $\varphi \in V^*$.

Teď jsme se dostali k magickému středobodu zkoumání vektorových prostorů. Prostě nám to tvoří přijatelnou slabou topologii, ve které se dobře pracuje.

Pro každý prvek $v \in V$ definujeme pseudonormu p_v na V^* předpisem

$$p_v : \varphi \mapsto |\varphi(v)| \, , \varphi \in V^* \, .$$

Lokálně konvexní topologii generovanou systémem pseudonorem $\{p_v\}_{v \in V}$ nazveme **slabá topologie** na V^* a označíme $\sigma(V^*, V)$, někdy mluvíme o w^*-topologii.

9.5.11 Věty o slabé topologii

Platí

- Na vektorovém prostoru V uvažujeme všechny lokálně konvexní topologie, při kterých jsou všechny funkcionály z V^* spojité. Mejmenší mezi nimi je slabá topologie $\sigma(V, V^*)$. Největší taková topologie také existuje (v normovaném prostoru se rovná normové topologii). Všechny uvažované topologie mají stejné omezené množiny.

(G.Mackey, R.Arens)

- Nechť U je okolí nuly v lokálně konvexním prostoru V. Potom jeho polára U° je slabě kompaktní podmnožina V^*.

(L.Alaoglu, N.Bourbaki $\sim$ 1932)

Jak jsem řekl. Ta slabá topologie není vůbec slabá.

9.5.12 Silná topologie

Nechť je X vektorový prostor a M podprostor algebraického duálu $X^\#$. Pro každou $\sigma(M, X)$ omezenou množinu $D \subset M$ uvažujeme pseudonormu p_D na X definovanou

$$p_D : x \mapsto \sup\{|f(x)| : f \in D\} \,.$$

Topologie definovaná na X tímto systémem pseudonorem se nazývá **silná topologie** a značí $\beta(X, M)$.

Je-li X lokálně konvexní prostor, je silná topologie $\beta(X^*, X)$ ta pravá topologie, platí totiž

- Je-li X normovaný prostor, splývá $\beta(X^*, X)$ s normovou topologií.

9.5.13 Věta (Princip minima)

Nechť je U kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Potom každá konvexní shora polospojitá funkce na U nabývá maxima na množině $\operatorname{ext} U$.

(H.Bauer)

Hledání extrémů nepotřebuje spojitost ...

9.5.14 Věta (O obalu extremálních bodů)

Nechť je U kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Potom $U = \overline{\text{co}}\,\text{ext}\,U$.

(Krein, Milman)

Prostě, vrcholy trojúhelníka ničím nenahradíš.

9.5.15 Věta (O integrální reprezentaci)

Nechť je U kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru V a $u_0 \in U$. Potom existuje topologická pravděpodobnostní míra μ na uzávěru extremálních bodů $\overline{\text{ext}\,U}$ taková, že

$$f(u_0) = \int_{\overline{\text{ext}\,U}} f(u) d\mu(u)$$

pro každý spojitý lineární funkcionál $f \in V^*$.

V tom případě nazýváme bod u_0 **těžiště** míry μ.

Je-li navíc množina U metrizovatelná, je možné najít takovou míru pouze na množině extremálních bodů.

Pokud taková míra existuje právě jedna, říkáme množině U **(zobecněný) simplex**.

(Choquet)

Jsem intuitivní typ a jsem geometr.
(G.Choquet $\sim$ 1990)

Prostě, vrcholy trojúhelníka ničím nenahradíš. A potřebuješ je. Je to tak.

9.6 Úplné normované lineární prostory

9.6.1 Normované lineární prostory

Nechť je V je vektorový prostor nat tělesem T. Reálná funkce $||.||$ na V se nazývá **norma**, pokud platí

(i) $||x|| \geq 0$, přičemž $||x|| = 0$ právě pro $x = 0$,

(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$,

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (**trojúhelníková nerovnost**)

pro každé $x, y \in V$, $\lambda \in T$. Vektorový prostor s normou se nazývá **normovaný lineární prostor**.
Na normovaném lineárním prostoru máme vždy metriku odvozenou z normy vztahem $d(x, y) = ||x - y||$. Pokud v této metrice je prostor úplný, nazýváme jej **úplný normovaný prostor**.

(S.Banach $\sim$ 1922)

Úplný normovaný prostor má nenápadnou definici, ale ve funkcionální analýze ho nelze přehlédnout. On je to skoro náš klasický $\mathbb{R}^3$. Takže se dobré vlastnosti počítají na tucty.

9.6.2 Izometricky izomorfní prostory

Pokud existuje mezi normovanými lineárními prostory bijekce, která je izomorfismem a zachovává normu, říkáme těmto prostorům **izometricky izomorfní prostory**.

9.6.3 O koulích

Všimněme si, že lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory je spojité, právě když zobrazuje omezené množiny na omezené množiny (takovému zobrazení říkáme **omezené zobrazení**). Navíc zřejmě omezené množiny jsou právě množiny s omezenou normou. Množině $\{v \in V : ||v|| \leq 0\}$ říkáme **jednotková koule**.

Takže kostky (teda koule) jsou rozdány. Svojí koulí je prostor určen. Musí se zkoumat, jak je opravdu kulatá či hranatá.

9.6.4 Definice (Projekce)

Spojitý lineární operátor $P : X \to X$ na normovaném lineárním prostoru nazýváme **projekce**, pokud $P^2 = P$.

9.6.5 Definice (Topologický součet prostorů)

Normovaný lineární prostor Z je **topologický součet** podprostorů X a Y, pokud

(i) $X \cap Y = \emptyset$,

(ii) $X + Y = Z$ (prostor Z obsahuje právě prvky tvaru $x + y$),

(iii) projekce P_X a P_Y jsou spojité.

Pak značíme $Z = X \oplus_t Y$. Pak nazýváme podprostor Y **topologický doplněk** podprostoru X, značíme $Y = X^d$.

9.6.6 Prostor lineárních zobrazení

Je-li $L : V \to W$ omezené lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory V a W, definujeme jeho normu vztahem

$$||L|| = \sup\{||L(v)||_W : ||v||_V \leq 1\} \ ,$$

t.j. jako „suprémum na jednotkové kouli“. Prostor těchto zobrazení značíme $\mathcal{L}(V, W)$, kde uvažujeme prostor s uvedenou normou. Jedná se o normovaný lineární prostor. Prostor $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ tvoří nejenom normovaný lineární prostor, ale spolu s operací skládání dokonce algebru. Budeme jí říkat **algebra operátorů** na vektorovém prostoru V.

Je-li W tělesem reálných či komplexních čísel, píšeme místo $\mathcal{L}(V, W)$ jenom V^* a tento prostor nazýváme **(topologický) duál** prostoru V. Platí

- Pro W úplný normovaný je $\mathcal{L}(V, W)$ úplný normovaný.
- Topologický duál je vždy úplný normovaný prostor.
- $||Lv||_W \leq ||L|| \ ||v||_V$.
- Při skládání platí odhad $||T \circ L|| \leq ||T|| \ ||L||$.
- Lineární funkcionál na normovaném vektorovém prostoru konečné dimenze je spojitý.

Takže koule, k ní duální koule, k ní zase duální koule, ...

9.6.7 Definice (Spektrum operátoru)

Pro operátor $L \in \mathcal{L}(V)$ se (komplexní) číslo λ nazývá **vlastní hodnota** operátoru L, pokud existuje nenulový prvek $v \in V$ tak, že $Lv = \lambda v$. Množina všech vlastních hodnot operátoru L se nazývá **bodové spektrum** operátoru L, značíme $\sigma_p(L)$.

Pro operátor $L \in \mathcal{L}(V)$ se množina všech λ, pro něž $L - \lambda I$ není prostý nebo není na, nazývá **spektrum** operátoru L, značíme $\sigma(L)$.

Prostě se někomu u zobrazení $x \mapsto 3x$ líbila ta trojka.

9.6.8 Věta (O spektru operátoru)

Nechť V je úplný normovaný prostor a $L \in \mathcal{L}(V)$. Potom spektrum $\sigma(L)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{C}$.

Všechno souvisí se vším. Když jsou totiž všude samá čísla, tak se nedivte.

9.6.9 Definice (Adjungované zobrazení)

Pro $T \in \mathcal{L}(V, W)$ definujeme (úplně normovaně) **adjungované zobrazení** $T' \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ předpisem $T'w^*(v) = w^*(Tv)$ pro $w^* \in W^*$ a $v \in V$.

Jde jenom o malé algebraické kouzlo. Na první pohled to vypadá komicky.

9.6.10 Věta (Rozšiřování spojitých lineárních forem)

Nechť l je spojitá lineární forma na podprostoru W normovaného prostoru V. Pak existuje spojitá lineární forma L rozšiřující l na celý prostor V, navíc $||L||_V = ||l||_W$.

(H.Hahn, S.Banach $\sim$ 1925)

Důkaz: Položme $p(x) = ||l||_W ||x||$ a použijeme algebraickou rozšiřovací větu. ■
Této slavné větě budeme říkat **spojitá rozšiřovací věta**. Má řadu aplikací a důsledků:

- Je-li v nenulový prvek normovaného prostoru V, pak existuje spojitý lineární funkcionál L tak, že $||L|| = 1$, $L(v) = 1$.
- Je-li W uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru V a $v \in V \setminus W$, pak existuje spojitý lineární funkcionál L tak, že $L = 0$ na W, $L(v) = 1$.
- Je-li U otevřená konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru V a $v \in V \setminus U$, pak existuje uzavřená nadrovina $H \subset L$ procházející v a disjunktní s U.

(K.Mazur)

- Jsou-li A, B jsou neprázdné disjunktní konvexní podmnožiny (reálného) normovaného lineárního prostoru V, pak existuje spojitý lineární funkcionál L a reálné α tak, že $L > \alpha$ na A, $L < \alpha$ na B. (**Geometrická oddělovací věta**).
- Konečně dimenzionální podprostor úplně normovaného prostoru má topologický doplněk.

V rovině by nás asi žádná z těch vlastností neohromila. Je pěkné, že ty vlastnosti stačí dokázat v této obecné situaci a používat i v rovině.

9.6.11 Věta (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť V je úplný normovaný prostor, W je normovaný lineární prostor a $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(V, W)$. Následující výroky jsou ekvivalentní

(i) $\sup\{||L|| : L \in \mathcal{G}\} < +\infty$.

(ii) $\sup\{||Lv|| : L \in \mathcal{G}\} < +\infty$ pro každé $v \in V$.

Navíc bodová limita posloupnosti spojitých lineárních forem je spojitá lineární forma.

(S.Banach $\sim$ 1929, H.Steinhaus)

Důkaz: Množiny

$$F_n = \bigcap_{L \in \mathcal{G}} \{v \in V : ||Lv|| \leq n\}$$

pro přirozená n jsou uzavřené a jejich sjednocení je prostor V. Podle věty o kategoriích má některá z nich neprázdný vnitřek, otevřenou množinu U. Nyní omezenost všech $l \in \mathcal{G}$ na U dává omezenost jejich norem. ■

Prostě ta úplnost je v úplných normovaných prostorech potřeba.

9.6.12 Věta (O otevřeném zobrazení)

Nechť V, W jsou úplné normované prostory. Spojité lineární zobrazení V na W je otevřené.

(S.Banach $\sim$ 1929)

V $\mathbb{R}^n$ jsou lineární zobrazení známá, dimenzi buď zachovávají, nebo ruší (a pak nejsou na). Je neuvěřitelné, že se to děje i v nekonečně-dimenzionálních prostorech. Je to strašidelné. Hůůůůůůůůů !!!

Důkaz: Pomocí věty o kategoriích je obraz jednotkové koule okolím nuly. ■

No, vlastně ty prostory se svými koulemi buď dost podobají, nebo nic. BTW, ten důkaz je COOL.

9.6.13 Věta (O inverzním zobrazení)

Nechť V, W jsou úplné normované prostory. Prosté lineární zobrazení V na W má spojitou inverzi.

9.6.14 Věta (O uzavřeném grafu)

Nechť V, W jsou úplné normované prostory. Uzavřené lineární zobrazení V do W je spojité.

9.6.15 Věta (O projekci)

Podprostor M úplného normovaného prostoru V má topologický doplněk, právě když existuje projekce V na M.

(F.J.Muray 1937)

9.6.16 Věta (O skoro-kolmici)

Nechť je W vlastní uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru V. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje na jednotkové sféře V prvek vzdálený od Y alespoň $1 - \varepsilon$.

(F.Riesz $\sim$ 1918)

Teď nastal ten okamžik. Vše, co bylo vidět, se dokázalo. Teď se jde na neviditelné předivo duálů duálů.

9.6.17 Kanonické vnoření do biduálu

Je-li V normovaný lineární prostor, označíme V^{**} duál k V^*, jde tedy o spojité lineární formy na V^*. Prostoru V^{**} budeme říkat **biduál** prostoru V. Pro každý $v \in V$ takový prvek ve V^{**} dovedeme napsat, je to $\varepsilon_v : L \to L(v)$. Zobrazení $v \mapsto \varepsilon_v$ z prostoru V do V^{**} takto sestrojené se nazývá **kanonické vnoření** V do V^{**}. Lze ukázat, že jde o izometrické izomorfní zobrazení V na $\varepsilon V \subset V^{**}$. Pokud $\varepsilon V = V^{**}$, nazývá se prostor V **reflexivní**.

Obecně se v takové situaci mluví o vnoření nebo o kopii.

A tak si můžeme dělat co chceme, třeba dvojbiduál.

9.6.18 Slabá konvergence

Řekneme, že posloupnost prvků x_n normovaného lineárního prostoru V **konverguje slabě** k prvku x, pokud pro každou spojitou lineární formu $L \in V^*$ platí $Lx_n \to Lx$ pro $n \to \infty$. Budeme to zapisovat $x_n \xrightarrow{w} x$. Mluvíme o slabé, popřípadě w-konvergenci.

POZOR: V úplném normovaném prostoru nekonečné dimenze existuje posloupnost slabě konvergující k nule, jejíž členy mají normu jedna.

Řekneme, že posloupnost prvků L_n normovaného lineárního prostoru V^* je w^*-**konvergentní** k prvku L, pokud pro každý prvek $v \in V$ platí $L_n v \to Lv$ pro $n \to \infty$. Budeme to zapisovat $L_n \xrightarrow{w^*} L$. Mluvíme o slabé*, popřípadě w^*-konvergenci.

9.6.19 Věty (O slabé konvergenci)

Platí

- Nechť je $\{x_n\}$ slabě konvergentní posloupnost v normovaném lineárním prostoru V. Pak $\{||x_n||\}$ je omezená.
- Z každé omezené posloupnosti v reflexivním úplném normovaném prostoru lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.
- Nechť V je normovaný lineární prostor, pak jednotková koule v V^* je slabě kompaktní.

  (L.Alaoglu)

- Úplný normovaný prostor je reflexivní, právě když je jeho jednotková koule slabě kompaktní.

  (S. Banach $\sim$ 1929, N.Bourbaki)

- Pro slabou topologii na úplném normovaném prostoru pojmy kompaktní, spočetně kompaktní a sekvenciálně kompaktní množiny splývají.

  (F.Eberlein, W.L.Šmuljan)

- Úplný normovaný prostor je reflexivní, právě když z každé jeho omezené posloupnosti jde vybrat slabě konvergentní podposloupnost.

  (F.Eberlein, W.L.Šmuljan)

- Slabý uzávěr jednotkové sféry normovaného lineárního prostoru nekonečné dimenze je jednotková koule.

9.6.20 Striktně a uniformně konvexní prostory

Řekneme, že úplný normovaný prostor je **striktně konvexní**, pokud je každý bod jednotkové sféry S_X jejím extremálním bodem, tedy pokud $S_X = \mathrm{ext}\, S_X$.
Řekneme, že úplný normovaný prostor je **uniformně konvexní**, pokud ke každému $\varepsilon \in (0, 2]$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud x a y leží na jednotkové sféře S_X a $||x - y|| \geq \varepsilon$, potom $||\frac{1}{2}(x + y)|| \leq 1 - \delta$.

Platí

- Každý uniformě konvexní úplný normovaný prostor je reflexivní.

Zase je poptávána skoro kulatá koule. A tu reflexivitu to pak jistí.

9.6.21 Metrická projekce

Nechť je M podmnožina úplně normovaného prostoru X. Pro prvek $x \in X$ označme

$$\mathcal{P}_M(x) = \{m \in M : ||x - m|| = \mathrm{dist}\,(x, M)\} \,.$$

Pokud je tato množina jednobodová pro každé $x \in X$, nazveme $x \mapsto \mathcal{P}_m$ **metrická projekce** na M.
Platí

- Na uzavřenou konvexní podmnožinu striktně konvexního reflexivního úplného normovaného prostoru existuje metrická projekce.
- Na kompaktní konvexní podmnožinu striktně konvexního úplného normovaného prostoru existuje spojitá metrická projekce.

9.6.22 Hladké prostory

Úplný normovaný prostor X se nazývá **hladký v bodě** x jednotkové sféry S_X, pokud existuje právě jeden spojitý lineární funkcionál $\varphi \in X^*$ tak, že $||\varphi|| = 1$ a $\varphi(x) = 1$. Úplný normovaný prostor X se nazývá **hladký**, pokud je hladký v každém bodě jednotkové sféry S_X. Platí

- Úplný normovaný prostor X je hladký v bodě x jednotkové sféry S_X, právě když norma $t \mapsto ||t||$ je slabě diferencovatelná v x.

(W.L.Šmuljan)

- Buď X úplný normovaný prostor. Je-li duál X^* striktně konvexní, pak je X hladký. Je-li duál X^* hladký, pak je X striktně konvexní.

(V.Klee)

9.6.23 Renormace

Pokud není norma na daném prostoru tak pěkná, jak potřebujeme, § můžeme ji trochu pozměnit a získat prostor s hezčí normou, která bude ekvivalentní s původní normou.

Renormace je hezký způsob, jak si udělat prostor hezčím. Místo $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ lze vzít $(x, y) \mapsto |x| + |y|$. A už nebude hloupě kulatý, ale hezky hranatý.

Například můžeme definovat

$$|||x||| = ||x||_X + ||\varphi(x)||_X$$

pro vhodnou $\varphi \in X^*$.
Platí

- Na každém separabilním úplném normovaném prostoru existuje ekvivalentní striktně konvexní norma.

(J.A.Clarkson)

- Nechť X je úplný normovaný prostor. Jestliže existuje prostý lineární operátor zobrazující prostor X na striktně konvexní úplný normovaný prostor Y, Potom na X existuje striktně konvexní ekvivalentní norma.

(V.Klee)

9.6.24 Nabývání normy

Platí

- Nechť je X (reálný) úplný normovaný prostor. Potom množina

$$\{f \in X^* : f \text{ nabývá své normy } \}$$

je hustá v X^*.

(E.Bishop, R.Phelps)

- Nechť X a Y jsou úplné normované prostory, X reflexivní. Potom množina všech $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nabývajících své normy je hustá v $\mathcal{L}(X, Y)$.

(J.Lindenstrass)

9.6.25 Nekonečné součty

Máme-li v normovaném lineárním prostoru množinu $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$, definujeme její součet

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$$

jako prvek x, pro který ke každému danému ε najdeme konečnou podmnožinu $F_0 \subset A$ takovou, že

$$||x - x_F|| < \varepsilon$$

pro každou konečnou množinu $F \supset F_0$, kde x_F je součet množiny $\{x_\alpha : \alpha \in F\}$.

Součet je, když zobecněná posloupnost $\{x_F : F$ konečná podmnožina $A\}$ konverguje.

Konvergencí samozřejmě rozumíme konvergenci podle normy. Pro běžnou řadu $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ pracujeme s obvyklou limitou posloupnosti částečných součtů.
Řekneme, že řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud konverguje řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||v_n||$.

Řekneme, že řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ je **bezpodmínečně konvergentní**, pokud konverguje řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_{\pi(n)}$ pro každou permutaci π přirozených čísel.

POZOR: V úplném normovaném prostoru nekonečné dimenze existuje bezpodmínečně konvergentní řada, která není absolutně konvergentní (A.Dvoretzky, O.A.Rogers 1950).

9.7 Úplné prostory se skalárním součinem

9.7.1 Prostory se skalárním součinem

Nechť je V je vektorový prostor nad tělesem T (těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$). Funkce z $V \times V$, která každým dvěma prvkům $x, y \in V$ přiřadí (x, y) splňující

(i) $(x, x) \geq 0$, přičemž $(x, x) = 0$ právě pro $x = 0$,

(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

(iii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

(iv) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$

pro každé $x, y, z \in V$, $\lambda \in T$, se nazývá **skalární součin**. Vektorový prostor se skalárním součinem se nazývá **prostor se skalárním součinem**.
Na prostoru se skalárním součinem máme vždy normu odvozenou ze skalárního součinu vztahem $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. Pokud v této normě je prostor úplný, nazýváme jej **úplný součinový prostor**.

(D.Hilbert $\sim$ 1920)

9.7.2 Kolmost

Dva prvky úplného součinového prostoru H nazveme **kolmé** (nebo **ortogonální**), pokud je jejich skalární součin nulový. Značíme $x \perp y$. Podobně zkoumáme kolmost dvou podmnožin. Je-li $M \subset H$, nazveme **ortogonální doplněk** množiny M symbolem $M^\perp$.

9.7.3 Věta (Existence nejbližšího prvku)

Nechť je v úplném součinovém prostoru dán uzavřený podprostor M a bod x. Pak má bod x v M právě jeden nejbližší bod m (a jde o bod na "kolmici", $x - m \perp M$).
Zobrazení, které přiřazuje takový nejbližší bod, nazýváme **projekce** H na M, značíme P_M.

Podobně jde promítat na konvexní množiny úplného součinového prostoru.

9.7.4 Věta (Existence ortomormální báze)

V úplném součinovém prostoru existuje maximální soustava prvků s normou rovnou 1, které jsou navzájem kolmé. Takovou soustavu nazýváme **ortonormální báze**.

Důkaz její existence spočívá na axiomu výběru.

9.7.5 Věta (O velikosti úhlopříčky)

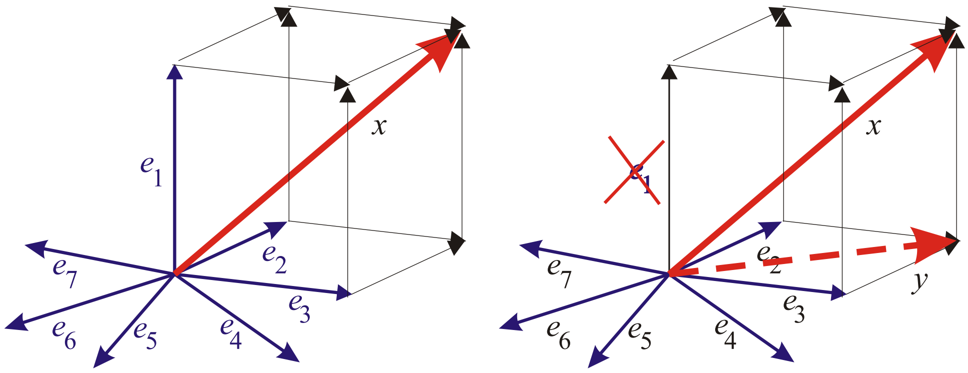
Je-li $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ortonormální soustava v úplném součinovém prostoru H a $x \in H$, pak

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \le ||x||^2 \, .$$

(F.Bessel)

V té řadě jde o velikost tělesové úhlopříčky v úplném součinovém prostoru. Vskutku (x, e_α) jsou velikosti "projekcí"prvku x na "souřadnice"e_α. Nerovnost platí, protože možná některé "souřadnice"v soustavě $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ chybí. Rovnost platí právě když je soustava $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ báze prostoru H.

(Pýthagorás ze Samu $\sim$ -550, M.A.Parseval 1799)



Obrázek 9.7.5: Pokud v soustavě $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ nic nechybí, zjistíme s její pomocí skutečnou velikost prvku x. Pokud například prvek e_1 v soustavě chybí, zjistíme pouze délku prvku y, který je průmětem prvku x do prostoru s takto ochuzenou bází.

9.7.6 Věta (O spočetné ortonormální bázi)

Úplný součinový prostor je separabilní, právě když v něm existuje spočetná ortonormální báze.

9.7.7 Věta (O izometrickém izomorfismu s $l^2(A)$)

Úplný součinový prostor s ortonormální bází je izometricky izomorfní prostoru $l^2(A)$, což je úplný součinový prostor funkcí f na A nenulových pouze na spočetné množině a pro něž

$$\sum_{\alpha\in A} |f(\alpha)|^2 < +\infty ,$$

uvažovaný se skalárním součinem

$$(f,g) = \sum_{\alpha\in A} f(\alpha)g(\alpha) .$$

(F.Riesz, E.S.Fischer 1907)

> Lidi je třeba učit, jak mají myslet, a ne to, co si mají myslet.
> (G.Ch.Lichtenberg $\sim$ 1770)

9.7.8 Věta (Reprezentace spojité lineární formy)

Nechť L je spojitá lineární forma na úplném součinovém prostoru H. Pak existuje právě jeden prvek $a \in H$ tak, že $L(x) = (x,a)$ pro každé $x \in H$. Zobrazení $L \leftrightarrow a$ zachovává normu a identifikuje H s jeho duálem H^* (jsou izometricky izomorfní).

(M.Fréchet, F.Riesz)

Úplný součinový prostor je tedy reflexivní.

9.7.9 Spočetný součin reálné osy

Úplný součinový prostor je homeomorfní spočetnému součinu reálné osy.

(R.D.Anderson 1966)

9.8 Prostory s mírou

9.8.1 Prostor měr na kompaktu

Nechť S je σ-algebra podmnožin kompaktu K. Nezápornou množinovou funkci μ definovanou na S nazýváme **(topologická) míra**, pokud platí

(i) $\mu(K) < +\infty$,

(ii) $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : B \subset U,\ U$ otevřená $\}$
pro každou topologickou množinu $B \subset K$,

(iii) $\mu(U) = \sup\{\mu(T) : T \subset U,\ T$ je kompakt $\}$
pro každou otevřenou množinu $U \subset K$,

(iv) μ je σ-aditivní.

Rozdíly (topologických) měr nazýváme **(znaménková) (topologická) míra**. Pro znaménkovou (topologickou) míru μ definujeme dvě (topologické) míry μ^+ a μ^- pro topologickou $M \in S$ předpisem

$$\mu^+(M) = \sup\{\mu(B) : B \subset M,\ B \text{ topologická }\}$$

$$\mu^-(M) = \sup\{-\mu(B) : B \subset M,\ B \text{ topologická }\}$$

a položíme $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Pak je $|\mu|$ nezáporná topologická míra nazývaná **totální variace míry** μ. Dále **(komplexní) (topologická) míra** je komplexní množinová funkce na S, jejíž reálná i imaginární část jsou (znaménkové) topologické míry.

Trojici (K, S, μ) nazýváme **prostor s mírou**. Prostor všech topologických měr na kompaktu K značíme $\mathcal{M}(K)$. S normou $||\mu|| = |\mu|$ tvoří úplný normovaný prostor.

(J.Radon)

9.8.2 Prostor měřitelných funkcí

Nechť je (K, S, μ) prostor s mírou. Symbolem $\mathcal{M}$ značíme prostor všech (tříd) měřitelných funkcí s metrikou

$$\rho(f, g) = \int_K \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu \,,$$

jde o úplný metrický lineární prostor. Konvergence v tomto prostoru se nazývá **konvergence v míře**.

Ta míra hlídá, jak rychle se funkce k sobě blíží. Ten jmenovatel je pro ozdobu (normalizace).

Kapitola 10

Základní prostory

Teď nadešel čas k tomu, abychom si zkusili obecné vlastnosti obecných prostorů na nejznámějších situacích.

Tak si prohlédneme rovinu, prostor a kdoví co ještě.

10.1 Reálná osa

10.1.1 Základní vlastnosti

Základní vlastnosti reálné osy jako prostoru:

- separabilní metrický a topologický prostor
- úplně uspořádaná množina
- diferencovatelná topologická varieta dimenze 1
- lokálně kompaktní topologický prostor
- úplný normovaný prostor
- úplný součinový prostor
- úplné reálné těleso
- hutný prostor (průnik spočetně mnoha otevřených hustých podmnožin je hustý)
- souvislý topologický prostor
- bez libovolného bodu je nesouvislý

10.1.2 Pórovitost

Typická kompaktní množina $K \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ je **oboustranně silně pórovitá množina**, to znamená, že pro každé $x \in K$ platí

$$\limsup_{h \to \pm 0} \frac{l(x,h)}{h} = 1 \ ,$$

kde $l(x,h)$ je délka nejdelšího intervalu v $[x, x \pm h] \setminus K$.

(L.Larson 1987)

10.2 Rovina

10.2.1 Věta (O roztínání roviny)

Kružnice (nebo její topologická kopie) roztíná rovinu na dvě otevřené disjunktní množiny, jejichž společnou hranicí je daná kružnice.

(C.Jordan $\sim$ 1870)

To se lehce řekne, ale důkaz topologické verze je těžkopádný.

10.2.2 Věta (O téčkách)

V rovině jde umístit nejvýše spočetně mnoho disjunktních topologických kopií písmena T.

10.3 Prostor

10.3.1 $\mathbb{R}^n$

Prostor $\mathbb{R}^n$ (popřípadě $\mathbb{C}^n$) je tvořen všemi n-ticemi reálných (komplexních) čísel s normou přiřazující n-tici $x = (x_1, \ldots, x_n)$ její normu předpisem

$$||x|| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \ .$$

(Eukleidés z Alexandrie $\sim$ -330)

Navíc definujeme na prostoru $\mathbb{R}^n$ skalární součin

$$(x,y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ .$$

Množina n-tic s normou

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

se označuje l_n^1.
Množina n-tic s normou

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

se označuje l_n^∞.

10.3.2 Hranice mezi prostorem a časoprostorem

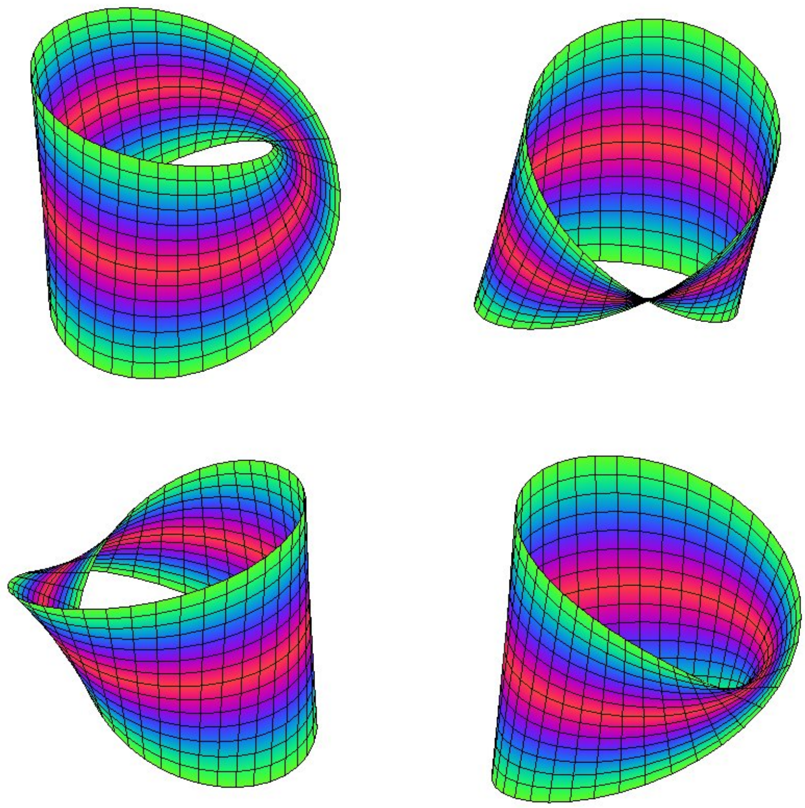
Uvažujme čtverec, ve kterém identifikujeme (prohlásíme za totožné) body dvou protilehlých stran.

Získáme povrch válečku, prstýnek.

Pokud přitom budou protilehlé strany identifikovány "v protisměru", dostaneme **překřížený pásek**

(A.F.Mőbius $\sim$ 1850)

To je na tom pásku nepříjemnost, nicméně, má za to jenom jednu stranu. Je prostě neorientovatelný, nejde obléct špatně.



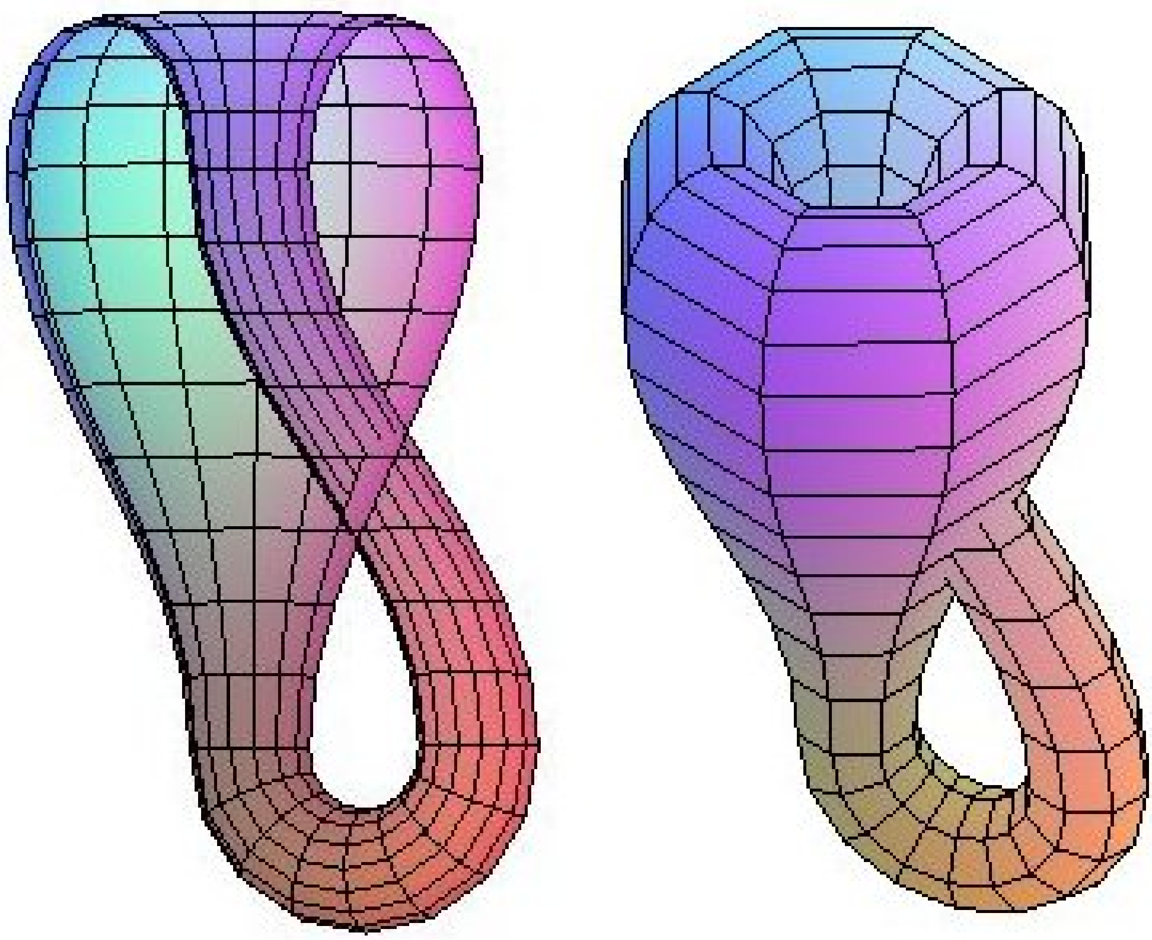
Obrázek 10.3.2: To je ale pásek.

Pokud budeme ve čtverci identifikovat body protilehlých stran (všech čtyř, najednou či postupně, ale "ve stejném směru"), dostaneme obruč (anuloid).

Je to prostě preclík. Nicméně jeho život není ohrožen obyvateli jinak dimenzionálních světů.

Pokud právě jedna z identifikací (například druhá) bude udělána "proti směru", nedostaneme obruč, ale zvláštní objekt, kterému se říká **kouzelná láhev**.

(F.Klein $\sim$ 1870)

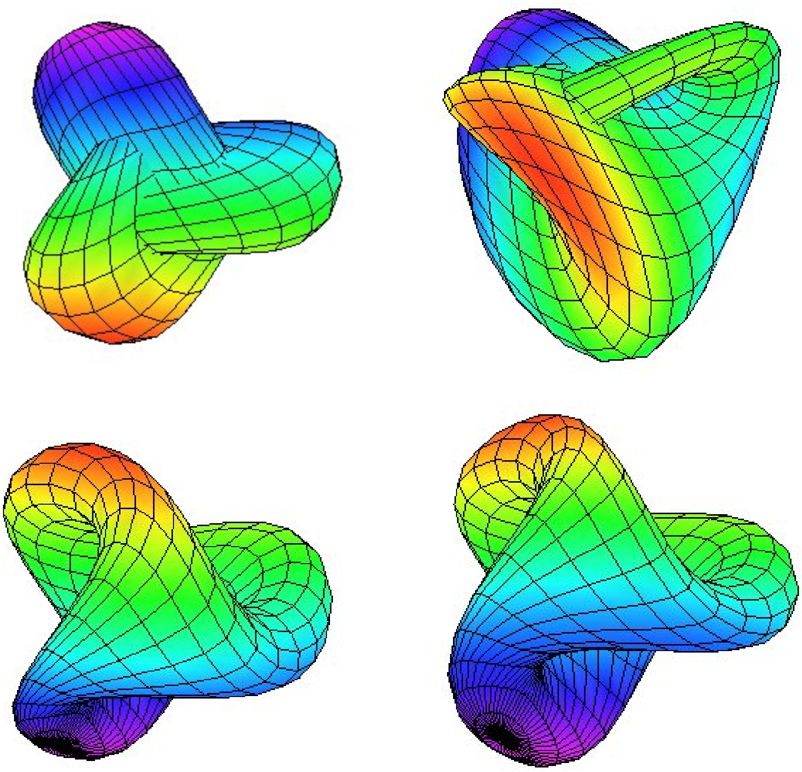


Obrázek 10.3.2: To je kouzelná láhev a řez kouzelnou láhví.

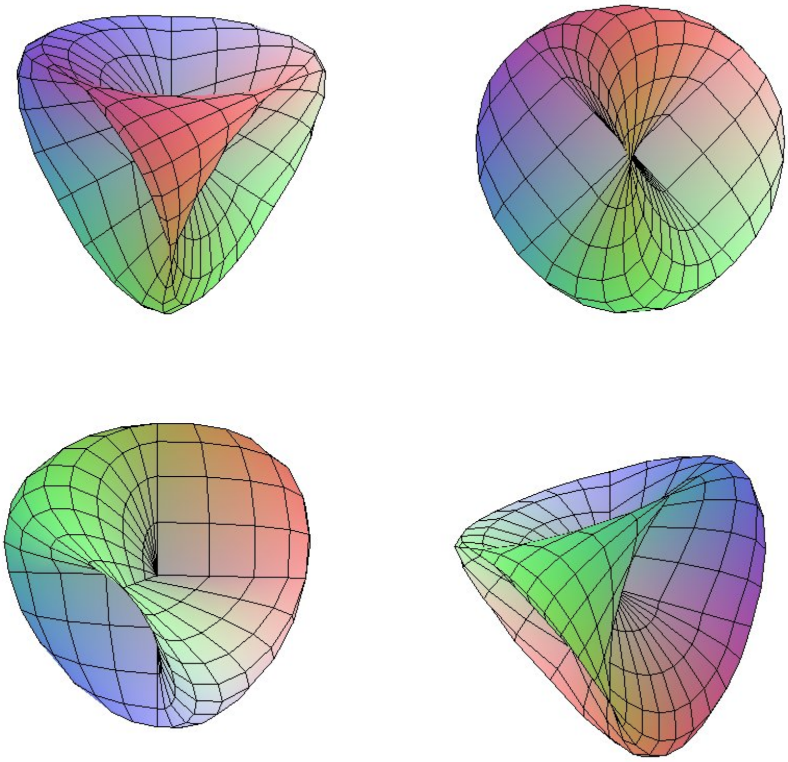
Nemá to vnitřek, prostě nic moc. V prostoru $\mathbb{R}^3$ ji nenajdete. Musíte si ji představit v $\mathbb{R}^4$. To znamená, že se zaměříme očima jenom na kousek té láhve v $\mathbb{R}^3$ a jak se budeme pohybovat s očima po láhvi, tak nám utíká čtvrtý rozmět (čas), takže v okamžiku, kdy by bylo třeba překřížit již prohlédnutý kus láhve, tak ona tam již v nynějším čase v našem časoprostoru prostě není. Ještě je třeba trochu začarovat s časem, abychom se vrátili do minulosti v okamžiku, kdy se s očima dostaneme zase na začátek láhve.

Pokud obě dvě identifikace budou udělány "proti směru", nedostaneme láhev, ale zvláštní objekt, kterému se říká **projektivní rovina**.

Je to zase jenom v $\mathbb{R}^4$. Pro opravdové šílence nabízím několik „domestikací“ této potvory v $\mathbb{R}^3$. Jde přitom o ten samý objekt v $\mathbb{R}^4$.



Obrázek 10.3.2: Projektivní rovina zobrazená jako trojručka.



Obrázek 10.3.2: Projektivní rovina zobrazená jako čtyřstěn.

10.4 Prostory posloupností

10.4.1 l^∞

Prostor l^∞ je tvořen všemi omezenými posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných (komplexních) čísel s normou přiřazující posloupnosti $\{x_n\}$ její normu předpisem

$$||x||_\infty = \sup_n |x_n| \ .$$

Této normě se říká **suprémová norma**.

10.4.2 c a c_0

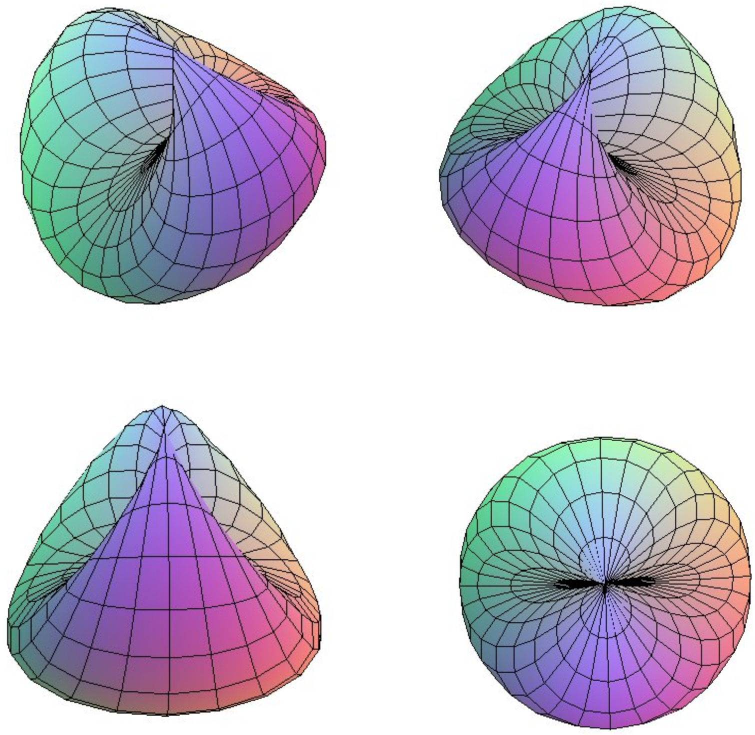
Prostor c (resp. c_0) je tvořen všemi konvergentními (resp. k nule konvergentními) posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných či komplexních čísel s normou přiřazující posloupnosti $\{x_n\}$ její normu předpisem

$$||x|| = \sup_n |x_n| \ .$$

Podprostor c_{00} prostoru c_0 je tvořen posloupnostmi od určitého indexu nulovými.

Platí

- Prostory c a c_0 jsou úplné normované prostory.
- Duál k c_0 je izometricky – izomorfní l^1.



Obrázek 10.3.2: Projektivní rovina zobrazená jako košík.

- Prostor c_0 není reflexivní a neplatí v něm základní věta analýzy.
- Prostor c_0 nemá topologický doplněk v l^∞.

(R.S.Philips 1940)

10.4.3 Prostor všech posloupností

Prostor s je tvořen všemi posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných (komplexních) čísel, norma je definována

$$||x|| = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \, .$$

Platí

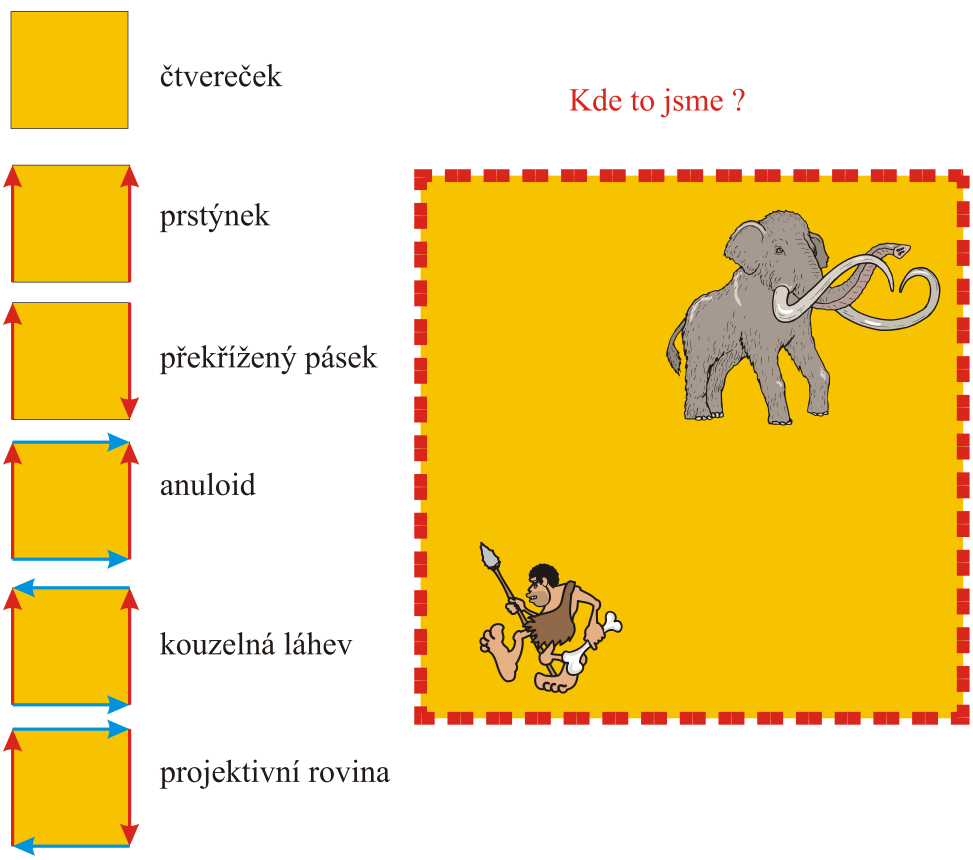
- Duál k s je c_{00}.

10.4.4 l^p pro $1 \leq p < \infty$

Prostor l^p je tvořen všemi posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných (komplexních) čísel pro něž je norma

$$||x||_p = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

konečná. Této normě se říká **elpéčková norma**.



Obrázek 10.3.2: Když žijeme v placatém světě, je netriviální problém, kudy jít lovit mamuta (nebo před ním utíkat).

Podprostor l^1_{00} prostoru l^1 je tvořen posloupnostmi od určitého indexu nulovými.
Platí

- Prostor l^p pro $1 \le p < \infty$ je úplný normovaný.
- Prostor l^2 je úplný součinový se skalárním součinem
$$(x, y) = \sum_n x_n \overline{y_n} \,.$$
- Duál k l^1 je l^∞.
- Duál k l^p je $l^{p/(p-1)}$ pro $p \in (1, \infty)$, speciálně jde o reflexivní prostory, slabá konvergence je konvergence "po složkách".
- Duál k l^∞ je prostor omezených konečně aditivních měr.
- Prostor $l^1(\mathbb{Z})$ posloupností $\{x_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ s násobením
$$\{x_n\} * \{y_n\} = \left\{ \sum_n x_{m-n} y_n \right\} \,.$$
je úplnou normovanou algebrou s jednotkou. Její spektrum je homeomorfní s jednotkovou kružnicí.

10.4.5 Prostor posloupností konečné variace

Prostor posloupností konečné variace l^{bv} je tvořen všemi posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných čísel pro něž je norma

$$||x||_{bv} = |x_1| + \sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1} - x_j|$$

konečná. Této normě se říká **norma konečné variace**.

Platí

- ✏ Prostor l^{bv} je izometricky izomorfní l^1.

Kapitola 11

Základní prostory funkcí

Tato kapitola přináší přehled o základních prostorech funkcí. Zde jsou uvedeny prostory krásné a užitečné.

Uvažme, že každá [redacted] rovnice má svůj prostor funkcí, ve kterém hledáme řešení.

11.1 Prostory spojitých funkcí

11.1.1 Prostory spojitých funkcí

Prostor $\mathcal{C}([0,1])$ je tvořen všemi spojitými funkcemi na intervalu $[0,1]$ s normou

$$||f|| = \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\} ,$$

kterou budeme nazývat **max norma**.

Podobně definujeme $\mathcal{C}(K)$ pro kompaktní topologický prostor K.

Platí

- Uzavřená jednotková koule prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ má pouze dva extremální body (konstantní funkce -1 a 1).
- Duál k $\mathcal{C}([0,1])$ lze stotožnit s prostorem zprava spojitých funkcí konečné variace nulujících se v bodě 0.
- $\mathcal{C}([0,1])$ je nereflexivní úplný normovaný prostor.
- V $\mathcal{C}([0,1])$ neplatí základní věta analýzy.
- Prostor $\mathcal{C}(K)$ s operací násobení tvoří komutativní úplnou normovanou algebru s jednotkou, spektrum této algebry je homeomorfní s prostorem K.
- Duál k $\mathcal{C}(K)$ lze stotožnit s prostorem topologických měr na K.

Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ lze zavést i normu

$$||f||_i = \int_0^1 |f(t)|dt \ ,$$

říkáme jí **integrální norma**.

11.1.2 O prostoru spojitých funkcí

Nechť $\mathcal{A}$ je podprostor prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}(K)$ na kompaktu K. Nechť platí

(i) $\mathcal{A}$ tvoří buď algebru (obsahuje součiny svých prvků) nebo svaz (obsahuje minimum a maximum pro každé své dva prvky),

(ii) $\mathcal{A}$ odděluje body K, t.j. ke každé dvojici $x, y \in K$, $x \neq y$ existuje $f \in \mathcal{A}$ tak, že $f(x) \neq f(y)$,

(iii) $\mathcal{A}$ obsahuje konstanty,

(iv) je-li $f \in \mathcal{A}$, je komplexně sdružená funkce $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Pak $\mathcal{A}$ je hustý v $\mathcal{C}(K)$.

(M.H.Stone 1937, K.Weierstrass $\sim$ 1869)

Tak se aproximují spojité funkce pomocí polynomů.

11.1.3 Prostor $\mathcal{C}([0,1])$ s konvergencí v míře

Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ definujeme metriku

$$\rho(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 : |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon \ \text{pro} \ : t \in [0,1] \setminus B, \ \ \text{kde} \ \lambda B = \varepsilon\} \ ,$$

kde λ je (poctivá) míra na $[0,1]$. Konvergenci v tomto prostoru nazýváme **konvergence v míře**.

Platí

- Prostor $\mathcal{C}([0,1])$ s konvergencí v míře je metrický lineární prostor s triviálním duálem.

11.1.4 Prostor $\mathcal{C}^k([0,1])$

Vektorový prostor $\mathcal{C}^k([0,1])$ spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$, které jsou spojitě derivovatelné až do řádu k uvažujeme s normou

$$||f|| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \cdots + \max_{t\in[0,1]} |f^{(k)}(t)| \ .$$

Platí

- $\mathcal{C}^k([0,1])$ je úplný normovaný prostor.
- $\mathcal{C}^1([0,1])$ s operací násobení je úplná normovaná algebra.

11.1.5 Absolutně spojité funkce

Do prostoru $AC([0, \pi/2])$ všech absolutně spojitých funkcí na $[0, \pi/2]$ zavedeme normu

$$||f|| = \left(\int_0^{\pi/2} (x|f|^2 + 2|f'(x)|^2)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Získáme úplný součinový prostor.

11.2 Polospojité funkce

11.2.1 Definice (Polospojité funkce)

Nechť f je reálná funkce na topologickém prostoru T. Řekneme, že f je **polospojitá zdola**, pokud $\{t \in T : f(t) > \alpha\}$ je otevřená pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Podobně shora.

11.3 Aproximativně spojité funkce

11.3.1 Definice (Bod hustoty)

Nechť λ označuje (poctivou) míru na $\mathbb{R}$ a $M \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina. Řekneme, že bod x je **bod bustoty** množiny M, pokud

$$\lim_{r \to 0} \frac{\lambda(M \cap [x - r, x + r])}{\lambda([x - r, x + r])} = 1 .$$

11.3.2 Věta (O bodech hustoty)

Skoro každý bod měřitelné množiny M je bodem hustoty množiny M.

(H.Lebesgue 1904)

11.3.3 Definice (Hustotní topologie)

Řekneme, že měřitelná množina je **hustotně otevřená množina**, pokud je každý bod M jejím bodem hustoty. Systém hustotně otevřených množin tvoří topologii na reálné ose. Tuto topologii budeme nazývat **hustotní topologie** a funkci spojitou v této topologii budeme nazývat **hustotně spojitá funkce**, někdy též **aproximativně spojitá funkce**.

Úžasně elegantní a sexy.

11.3.4 Věta (O hustotní spojitosti)

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je měřitelná, právě když je hustotně spojitá skoro všude.

(A.Denjoy 1915)

Hustotně spojitá funkce má v daném bodě x množinu U_x, která má bod x za bod hustoty, a funkce má limitu vzhledem k množině U_x. Funkce je tedy spojitá jako zobrazení z $(\mathbb{R}, d)$ do $(\mathbb{R}, \rho)$, kde ρ je obyčejná topologie na $\mathbb{R}$. Taky to mohla být jiná kombinace!

11.4 Mocninné řady

11.4.1 Definice (Mocninné řady)

Mocninná řada bude pro nás znamenat řada

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \, .$$

Řada konverguje pro $z = 0$. Pokud konverguje pro w, konverguje absolutně i pro z splňující $|z| < |w|$. Konvergence je pro každé $\varepsilon > 0$ stejnoměrná na množině

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < |w| - \varepsilon\} \, .$$

To vede přirozeně ke zkoumání supréma takových absolutních hodnot. Označíme suprémum těchto čísel **poloměr konvergence**.

11.4.2 Věta (Derivace a integrace mocninných řad)

Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

s poloměrem konvergence R lze derivovat a integrovat člen po členu na množině

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \, .$$

11.4.3 Věta (O radiální limitě)

Pokud řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

konverguje pro $z = R$, je spojitá na intervalu $[0, R]$.

(N.H.Abel $\sim$ 1824)

Tak,jak jsou jednoduché mocninné řady uvnitř kruhu konvergence, tak jsou komlikované na jeho hranici. Toto limitní chování je tajemné a trvalo dlouho, než se alespoň elementárně zvládlo (jde vlastně o konvergenci frekvenčních řad).

11.5 Prostory integrovatelných funkcí

11.5.1 L^∞

Nechť (X, S, μ) je prostor s mírou. Označíme $\mathcal{L}^\infty$ množinu všech μ-měřitelných funkcí na X, pro které existuje konstanta M tak, že $|f(x)| \leq M$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. Nejmenší taková konstanta definuje normu $||f||_\infty$ funkce f. Prostor L^∞ tvoří třídy ekvivalence množiny $\mathcal{L}^\infty$ podle ekvivalence $f \sim g$ pokud $f = g$ μ-skoro všude.

Platí

- Duál k L^∞ je prostor všech omezených konečně aditivních měr na S.
- Prostor L^∞ je duálem k L^1.

Takže se jde takhle: L^1 má duál L^∞, a to má duál aproximativně spojité míry (L^1) „doplněné“ o singulární míry.

11.5.2 L^p

Nechť (X, S, μ) je prostor s mírou. Označíme $\mathcal{L}^p$ množinu všech μ-měřitelných funkcí na X, pro které je konečná norma

$$||f||_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Prostor L^p tvoří třídy ekvivalence množiny $\mathcal{L}^p$ podle ekvivalence $f \sim g$ pokud $f = g$ μ-skoro všude.

Platí

- Prostor L^p pro $1 \leq p < \infty$ je úplný normovaný.
- Prostor L^2 je úplný součinový se skalárním součinem

$$(f, g) = \int_S f\overline{g} \, d\mu .$$

- Trigonometrický systém tvořený systémem

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}$$

je ortonormální báze v L^2.

- Duál k L^1 je L^∞.

- Duál k L^p je $L^{p/(p-1)}$ pro $p \in (1,\infty)$, speciálně jde o uniformně konvexní reflexivní prostory.

- Prostor L^2 je 1. kategorie v L^1.

- Prostor $L^1(\mathbb{R}^n)$ s násobením

$$(f * g) :\ x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}_n} f(x-y)g(y)\,dy$$

je úplnou normovanou algebrou bez jednotky. V $L^1([0,1])$ jde o známou konvoluci

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt\ .$$

- V prostoru $L^1([0,1])$ neplatí základní věta analýzy.

- Na úplném normovaném prostoru $L^p([0,+\infty)$, kde $p \in [1,+\infty)$, uvažujeme silně spojitou semigrupu operátorů T_t

$$T_t f(s) = f(s+t) \ \text{ pro } \ t \geq 0, s \geq 0\ .$$

Její generátor je operátor derivování $f \mapsto f'$ s definičním oborem $\{f \in L^p([0,+\infty)) :$ f je absolutně spojitá na $[0,n]$ pro $n \in \mathbb{N}\}$.

11.6 Prostory integrovatelných distribucí

Integrovatelné distribuce? Proč ne. Tím se jenom zvýší šance, že najdu pro tu distribuci pěkného reprezentanta, například hladkou funkci. Kdo věří na spojitý svět, který není rozbit na „nic“ a „hmotu“, ten pomocí integrovatelných distribucí hledá funkce.

11.6.1 Definice prostoru

Nechť je Ω otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$ označme vektorový prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí majících kompaktní nosič v Ω a $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ prostor všech lokálně integrovatelných funkcí na Ω.

Jestliže pro $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ existuje $g^i \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ tak, že

$$\int_\Omega g^i \varphi = - \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

pro každou "testovací"funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, nazveme funkci g^i (parciální) **distributivní derivace** (prvního řádu) funkce f podle i-té proměnné a značíme tuto derivaci g^i symbolem $D^i f$.

Prostor funkcí z $\mathcal{L}^p(\Omega)$, jejichž všechny parciální distributivní derivace prvního řádu leží v $\mathcal{L}^p(\Omega)$, značíme $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$. Prostor $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ budeme nazývat **prostor integrovatelných distribucí**.

Příslušná norma se definuje předpisem

$$||f||_{1,p} = \left(\int_\omega (|f|^p + |\nabla f|^p) \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

a

$$||f||_{1,\infty} = \max(||f||_\infty, ||\nabla f||_\infty) \ ,$$

kde $\nabla f = (D^1 f, \ldots, D^n f)$.

Opět se musí pracovat se třídami ekvivalence rovnosti skoro všude. Podobně se definují prostory $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, přičemž se požaduje, aby parciální distributivní derivace až do řádu k včetně patřily do $\mathcal{L}^k(\Omega)$. Příslušným způsobem se upraví též definice normy.

Prostor $C^k(\Omega)$ s normou

$$|u|_{k,p} = \sum_{|\beta| \le k} |D^\beta u|^p$$

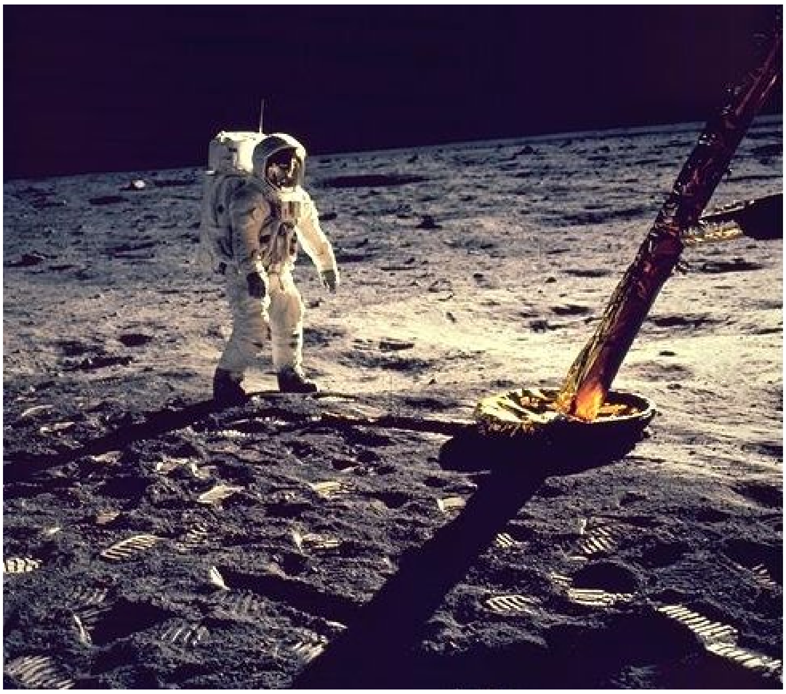
není úplný. Jeho zúplněním získáme prostor $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$. Jeho prvky jsou funkce z $L^p(\Omega)$, jejichž distributivní derivace až do řádu k jsou opět prvky $L^p(\Omega)$.

Jedná se o ty distribuce, které jsou reprezentovány funkcí z $L^p(\Omega)$, a to až do k-tých distributivních derivací. Čili jde o specifickým způsobem integrovatelné distribuce. Prostor $W^{k,p}(\Omega)$ budeme nazývat **prostor integrovatelných distribucí**.

(S.Sobolev $\sim$ 1935)

Distribuce jsou perla mezi abstrakcemi. COOL.

Prostor $W^{k,p}_0(\Omega)$ vznikne z $C^k_0(\Omega)$ stejným způsobem jako $W^{k,p}(\Omega)$ vznikne z $C^k(\Omega)$.



Obrázek 11.6.2: Stopa je někdy to jediné, co o funkci víme. Stopy mohou být zajímavé.

11.6.2 Stopa(ř) na hranici

Nechť je hranice oblasti Ω pěkná, například sublineární. Existuje právě jeden spojitý lineární operátor T který každé funkci $W^{1,p}(\Omega)$ přiřazuje funkci $Tu \in L^p(\Omega)$, který funkcím $C^\infty(\Omega)$ přiřazuje její hodnotu na hranici. Tedy

$$Tu = u \restriction_{\partial\Omega} \ .$$

Funkci Tu budeme nazývat **stopa funkce** u.

Takhle často my o neznámé funkci nevíme skoro nic.

11.6.3 Věty o vnoření

Platí

- Prostory $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ jsou úplné normované prostory pro $p \in [1, \infty]$.
- Funkce ve $\mathbf{W}^{k,p}(a, b)$ mají absolutně spojitého reprezentanta na intervalu $[a, b]$.
- Funkce ve $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ mají spojitého reprezentanta pokud $p > n$.

Nechť má oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sublineární hranici, $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Pak

- Je-li $kp < n$ a $1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$, je $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.
- Je-li $kp = n$ a $r \geq 1$, je $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$.

✏ Je-li $kp > n$, je $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) \subset C^0(\Omega)$.

Osobně si myslím, že existuje nespočetně mnoho vět o vnoření ;-)

11.6.4 Duál k prostoru integrovatelných distribucí

Nechť $1 \le p < \infty$. Každý spojitý lineární funkcionál L na prostoru $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ lze psát ve tvaru

$$L(f) = \int_\Omega g_0 f + \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega g_i \partial_i f$$

pro funkce $g_0, g_1, \ldots, g_n$ v prostoru L^q, $1/p + 1/q = 1$.

Spojíme-li pojmy a věci, které se zřídkakdy setkají, nebo díváme-li se na obyčejné věci s nezvyklou pozorností a pozorovatelským nadáním, může nás to přivést na myšlenku.

(G.Ch.Lichtenberg $\sim$ 1770)

Kapitola 12

Základní funkcionály

Tato kapitola ukáže nejběžnější způsoby, jak z funkce dělat jinou funkci.

Integrování a derivování jsou profláknuté, alespoň že jsou tu ty distribuce.

12.1 Integrál jako lineární funkcionál

12.1.1 Jak na to

Viděli jsme, že základní vlastnosti plochy pod grafem funkce jsou jednoduché. Sestrojit funkcionál, který spojité funkci přiřadí její integrál podle dělení, je snadné. Nyní můžeme tento funkcionál rozšířit na větší prostor.

Zpravidla dostaneme známé integrování na známých prostorech, nicméně je to pěkný postup. Není však zcela průhledný jako integrování podle míry.

12.2 Distribuce

12.2.1 Základní prostor

Nechť je Ω otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Zvolme posloupnost kompaktních podmnožin $\{K_m\}$ množiny Ω splňující

$$K_0 = \emptyset \ , \quad K_m \subset \int K_{m+1} \ , \quad \cup_m K_m = \Omega \ .$$

Takovouto posloupnost nazveme **vyčerpání množiny** Ω.

Symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$ označme vektorový prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí majících kompaktní nosič v Ω.

Pokud $\{K_m\}$ je vyčerpáním Ω a $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ je posloupnost celých nezáporných čísel, označme p_α pseudonormu na $\mathcal{D}(\Omega)$ definovanou pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ předpisem

$$p_\alpha(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sup\{\, |D^j\varphi(x)| \;: |j| \leq \alpha_m,\; x \in K_m \setminus K_{m-1}\} \,.$$

Zde D^j je diferenciální operátor derivování podle multiindexu $j = (j_1, \ldots, j_n)$ s výškou $|j| = j_1 + \cdots + j_n$

$$\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} \,.$$

Psoudonorma p_α hlídá chování derivací funkce φ až do výšky α_n na "proužku"$K_n \setminus K_{n-1}$. Pro danou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ jde vždy o konečnou sumu.

Platí

- Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je reflexivní lokálně konvexní prostor. Jeho omezené uzavřené podmnožiny jsou kompaktní.

Spojité lineární formy na základním prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ se nazývají **distribuce**.

> … pokrok poslední stovky let umožnil v abstraktním a sterilizovaném světě elegantně vykládat základní pojmy a věty **ab ovo**, a to způsobem rychlým a přesným, zbaveným odkazu na zkušenost a geometrickou intuici.
>
> (G.Choquet $\sim$ 1990)

Prostor všech distribucí $\mathcal{D}^*(\Omega)$ uvažujeme se silnou topologií $\beta = \beta(\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$,

> Distribuce jsou jako děj, který se odehrává, ale my vidíme pouze jeho projevy. Distribuce jsou jako černá skříňka, která danému vstupu (testovací funkci) přiřadí výstup (hodnotu). Je to jako když vážíme nějaký kus prostoru a dostaneme nulu, když tam není žádný atom (bodový náboj) nebo jedničku, když tam atom je.

12.2.2 Regulární a singulární distribuce

Prostor všech distribucí $\mathcal{D}^*(\Omega)$ obsahuje kopii základního prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ při vnoření přiřazujícím funkci $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ distribuci

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi \,.$$

Tato kopie je hustá v $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Stejně můžeme v prostoru distribucí najít obraz každé lokálně integrovatelné funkce. Distribuce takto vzniklé budeme nazývat **regulární distribuce**, ostatní pak **singulární distribuce**.

> ... příliš formalizovaný výklad určité teorie neposkytuje žádnou představu o zdrojích duševní činnosti matematika, jako jsou pozorování, matematizace, řešení problému v rámci vytvořeného modelu, návrat k původnímu nápadu, zobecnění a aplikace.
> (G.Choquet $\sim$ 1990)

Příkladem singulární distribuce je δ-**funkce** definovaná předpisem $\varphi \mapsto \varphi(0)$. Říkáme jí **bodový náboj**.

(P.A.M.Dirac $\sim$ 1933)

> Všechno by se mělo udělat tak jednoduše, jak je možné, ale ne jednodušeji.
> (A.Einstein $\sim$ 1950)

12.2.3 Věta (Kladné distribuce jsou míry)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Nechť $T \in D^*(\Omega)$. Řekneme, že T je **nezáporná distribuce**, pokud $T(\varphi) \geq 0$ pro každou nezápornou testovací funkci $\varphi \in D(\Omega)$.

Distribuce T je nezáporná právě tehdy, když existuje (právě jedna) nezáporná (regulární topologická) topologická míra μ konečná na kompaktních podmnožinách Ω taková, že

$$T(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu$$

pro každou testovací funkci φ.

> Distribuce sice vyjdou jako míry, ale jejich abstraktní formulace je COOL.

12.2.4 Jiný základní prostor a jiná definice

Podobně lze pracovat se základním prostorem tvořeným hladkými funkcemi na $\mathbb{R}^n$, s komplexními funkcemi, je možné pracovat pouze s funkcemi definovanými na kružnici a podobně.

Jestliže pro funkci f existuje $R > 0$ takové, že $f(x) = 0$ pokud $|x| > R$, budeme této funkci říkat **finitní funkce**. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které jsou finitní a mají všechny parciální derivace všech řádů, budeme nazývat **testovací funkce**. Prostor všech testovacích funkcí označíme $D(\mathbb{R}^n)$.

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_k\}$ testovacích funkcí má v prostoru $D(\mathbb{R}^n)$ limitu φ, když existuje koule $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$, mimo níž jsou všechny φ_k nulové, a pokud všechny parciální derivace funkcí φ_k konvergují stejnoměrně k parciálním derivacím funkce φ.

Každý spojitý lineární funkcionál na $D(\mathbb{R}^n)$ se nazývá **distribuce**. Prostor všech distribucí budeme značit $D'(\mathbb{R}^n)$, nebo jen D'. Pro distribuci T a testovací funkci φ budeme funkční hodnotu $T(\varphi)$ značit (T, φ). Například pro distribuci bodového náboje píšeme $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$.

Dalším příkladem distribuce je

$$(T_{\frac{1}{x}}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right) .$$

Distribuce jsou pekné zboží.

Kapitola 13

Operátorový počet

Tato kapitola se zabývá diferenciálním a integrálním počtem pro operátory mezi obecnými prostory.

To, že jdou věci jako středová symetrie derivovat a integrovat, to je teda silný kafe ...

13.1 Diferenciální počet

13.1.1 Definice (Slabá a silná derivace)

Nechť X a Y jsou úplné normované prostory a f je zobrazení definované na otevřené množině $G \subset X$ s hodnotami v Y. Je-li $x \in G$, zkoumáme pro $h \in X$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} \, .$$

Pokud tato limita existuje, říkáme jí **derivace ve směru** h a značíme $D_h f(x)$.
V případě, že f má derivace v každém směru $h \in X$ a $h \mapsto D_h f(x)$ je spojité lineární zobrazení z X do Y, nazveme toto zobrazení **slabá derivace** f v bodě x, značíme $df(x)$.
Existuje-li spojité lineární zobrazení $L : X \to Y$ tak, aby

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - L(h)}{||h||} = 0 \, ,$$

říkáme zobrazení L **silná derivace**.

Jdou i derivace vyšších řádů.

13.1.2 Konvexní funkce

Reálná funkce f definovaná na konvexní podmnožině D (reálného) vektorového prostoru V se nazývá **konvexní**, pokud je f konvexní na každé úsečce spojující dva body D.

Platí:

- Je-li reálná konvexní funkce f na otevřené konvexní množině D spojitá v bodě $x_0 \in D$, pak je sublineární na jistém okolí $U(x_0, \delta)$. Tedy existuje konstanta K tak, že
$$|f(x) - f(y)| \leq K||x - y||$$
na jistém $U(x_0, \delta)$.

- Nechť f je reálná konvexní funkce na otevřené konvexní podmnožině D (reálného) úplného normovaného prostoru X. Potom pravostranná slabá derivace existuje v každém bodě D a zobrazení
$$h \mapsto \lim_{\lambda \to 0_+} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}$$
je konvexní funkcionál na X.

- Je-li reálná konvexní funkce f na otevřené konvexní podmnožině D (reálného) úplného normovaného prostoru X spojitá v bodě $x \in X$ a v tomto bodě má derivace ve všech směrech, pak má v bodě x slabou derivaci.

- V separabilním úplném normovaném prostoru je každá spojitá konvexní funkce definovaná na konvexní otevřené podmnožině slabě derivovatelná na husté G_δ množině.

(K.Mazur)

- Nechť v úplném normovaném prostoru X má každá spojitá konvexní funkce definovaná na otevřené konvexní podmnožině $U \subset X$ silnou derivaci na husté podmnožině U. Pak má každá reálná sublineární funkce f definovaná na otevřené podmnožině $G \subset X$ silnou derivaci na husté podmnožině G.

(D.Preiss 1990)

13.2 Integrální počet

13.2.1 Vektorové míry

Nechť je S daná σ-algebra podmnožin množiny Ω, (Ω, S) měřitelný prostor a X je úplný normovaný prostor. Zobrazení $F : S \to X$, které je σ-aditivní a splňuje $F(\emptyset) = 0$, nazveme **vektorová míra** na S.

Pro vektorovou míru F zkoumáme množinovou funkci $|F|$ na S
$$|F(A)| = \sup\{\sum_{j=1}^{k} ||F(A_j)|| : A_1, \ldots, A_k \in S \text{ jsou po dvou disjunktní a } \cup_{j=1}^{k} A_j = A\}$$
a tuto funkci nazveme **totální variace** zobrazení F. Pokud je totální variace konečná funkce na Ω, říkáme, že F má **konečnou variaci**.

Nechť (Ω, S, μ) je prostor s konečnou mírou a $F : \Omega \to X$ je vektorová míra. Řekneme, že míra F je **absolutně spojitá** vzhledem k míře μ, pokud je nezáporná míra $|F|$ absolutně spojitá vzhledem k μ, tedy $\mu(E) = 0 \Rightarrow F(E) = 0$ pro každou podmnožinu $E \in S$.

13.2.2 Vektorová integrace

Nechť (Ω, S, μ) je prostor s konečnou mírou, $\mu(\Omega) = 1$, X je úplný normovaný prostor a $F : \Omega \to X$ je vektorová funkce.

O funkci F říkáme, že je

- **jednoduchá**, pokud má tvar

$$F = \sum_{j=1}^{n} x_j c_{E_j} ,$$

kde c_{E_j} jsou charakteristické funkce po dvou disjunktních množin $E_j \in S$, $x_j \in X$. Pro jednoduchou funkci definujeme integrál jednoduše

$$\int_\Omega F \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} x_j \mu(E_j) .$$

- **měřitelná**, pokud je rovna μ-skoro všude limitě posloupnosti jednoduchých funkcí.

- **integrovatelná**, pokud existuje posloupnost $\{F_n\}$ jednoduchých funkcí tak, že

$$\int_\Omega ||F - F_n|| \, d\mu = 0 .$$

Pak definujeme integrál jednoduše

$$\int_E F \, d\mu = \lim \int_E F_n \, d\mu$$

pro každou množinu $E \in S$.

13.2.3 Prostory se základní větou analýzy

Nechť je X úplný normovaný prostor. Následující podmínky jdou ekvivalentní

(i) Je-li $F : [a, b] \to X$ absolutně spojitá funkce, pak je F diferencovatelná skoro všude a platí

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) .$$

(ii) Každé sublineární zobrazení $F : [a, b] \to X$ je diferencovatelné skoro všude.

(iii) Každá onezená podmnožina X je **zářezová**, tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje x_ε tak, že $x_\varepsilon \notin \overline{\text{co}}\,(D \setminus U(x_\varepsilon, \varepsilon))$.

(iv) Každá omezená podmnožina X má **plátek** libovolně malého průměru, kde plátkem rozumíme průnik množiny nějakým uzavřeným „poloprostorem“, tedy například průnik množiny M a poloprostoru $\{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ pro vhodná $\varphi \in X^*$ a $\lambda \in \mathbb{R}$.

(v) Je-li $\Omega, S, \mu)$ prostor s konečnou mírou a $F : S \to X$ vektorová míra konečné variace, která je absolutně spojitá vzhledem k μ, existuje integrovatelná funkce $G : \Omega \to X$ tak, že

$$F(E) = \int_E G \, d\mu \;\text{ pro } E \in S .$$

Místo (Ω, S, μ) lze vzít (poctivou) míru na $[0, 1]$.

(S.Bochner a A.E.Taylor 1938)

O úplném normovaném prostoru, ve kterém platí předchozí ekvivaletní podmínky, říkáme, že v něm platí **základní věta analýzy**.

(J.Radon, O.Nykodým 1930)

Tuto vlastnost mají úplné součinové prostory (J.v.Neumann 1932), reflexivní (R.S. Philips 1940) a uniformně konvexní prostory (J.A. Clarkson 1936).

Tam je matematickým analytikům dobře.

13.3 Funkční počet

Pro názornost si můžeme představit zobrazení jako matici. Pak následující kouzlení připadá průhledné.

13.3.1 Počítání s operátory

Pro operátory z lineárního prostoru X do lineárního prostoru X budeme chtít doplnit základní počítání (sčítání a násobení) s operátory o další funkce. Tak budeme zkoušet věci jako

$$\exp(T) = 1 + \frac{T}{1!} + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \cdots ,$$

kde chápeme T^2 jako skládání zobrazení $T(T)$. Půjde o konvergenci posloupnosti částečných součtů, někdy budeme potřebovat cosi jako komutativitu.

Základní výsledky budou vypadat podobně jako komplexní integrace:

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi f(\lambda) \left(\frac{I}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2} + \frac{T^2}{\lambda^3} + \cdots \right) \, d\lambda ,$$

tedy např.

$$\exp(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots \right) \left(\frac{I}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2} + \frac{T^2}{\lambda^3} + \cdots \right) \, d\lambda .$$

13.3.2 Algebry operátorů

Pro studium operátorů budeme používat strukturu nazývanou **algebra** $\mathcal{A}$ nad tělesem F, což je vektorový prostor nad tělesem F s další operací vnitřního násobení$(a, b) \mapsto ab \in \mathcal{A}$, které je asociativní, distributivní vůči sčítání a splňující $\lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$ pro $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in F$.

Při vnitřním násobení jde o cosi jako skládání zobrazení.

Pokud je $\mathcal{A}$ navíc úplný normovaný prostor s normou splňující $||ab|| \leq ||a|| \, ||b||$, nazýváme ji **úplná normovaná algebra**.

Při vnitřním násobení jde o cosi jako skládání zobrazení.

Zpravidla budeme požadovat existenci jednotkového prvku operace násobení $e \in \mathcal{A}$ s jednotkovou normou.

13.3.3 Definice(Algebry s involucí)

Úplná normovaná algebra s operací $x \mapsto x^*$ splňující

$$||xx^*|| = ||x||^2, \ (x^*)^* = x, \ (xy)^* = y^* x^*, \ (x + y)^* = x^* + y^*, \ (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$$

se nazývá $\mathcal{C}^*-$ **algebra** a operace $x \mapsto x^*$ se nazývá **involuce**. Zobrazení mezi $\mathcal{C}^*-$ algebrami zachovávající všechny operace nazýváme $\mathcal{C}^*-$ **homomorfismus**.

Prvek x se nazývá **normální**, pokud $xx^* = x^*x$, pokud $x = x^*$, říkáme mu **samoadjungovaný**.

(Ch.Hermite)

Pokud je samoadjungovaný prvek reprezentován maticí, jde o (anti)symetrickou matici ($t_{i,i} = \overline{t_{j,i}}$).

13.3.4 Invertibilní prvky

Řekneme, že prvek $x \in \mathcal{A}$ je **invertibilní**, pokud existuje takové $y \in \mathcal{A}$, že $xy = yx = e$. Toto y pak značíme x^{-1} a nazýváme **inverze** prvku x. Množinu invertibilních prvků algebry $\mathcal{A}$ označíme U.

13.3.5 Věta (Vztah inverze a geometrické řady)

Je-li prvek $x \in \mathcal{A}$ a $||x|| < 1$, je prvek $e - x$ invertibilní a platí

$$(e - x)^{-1} = e + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

13.3.6 Definice (Spektrum a rezolventa)

Pro prvek $x \in \mathcal{A}$ nazýváme **rezolventa** $\rho(x)$ množinu těch (komplexních) čísel λ, pro něž prvek $\lambda e - x$ je invertibilní. Doplněk (v $\mathbb{C}$) nazýváme **spektrum** prvku x a značíme $\sigma(x)$. Číslo $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ nazveme **spektrální poloměr** prvku x.

13.3.7 Věta (O rezolventní funkci)

Funkci $\lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1} = \sum \lambda^{-n-1} x^n$ nazveme **rezolventní funkce**, značíme $R_\lambda(x)$.

Rezolventní funkce je **slabě holomorfní** na rezolventní množině, t.j. pro $L \in \mathcal{A}^*$ je funkce $\lambda \mapsto L(R_\lambda(x))$ holomorfní na $\rho(x)$.

13.3.8 Věta (O spektru)

Spektrum libovolného prvku úplné normované algebry je neprázdná kompaktní podmnožina $\mathbb{C}$.

(I.Gelfand)

13.3.9 Reprezentace algeber

Prostor nenulových multiplikativních lineárních funkcionálů na úplné normované algebře $\mathcal{A}$ nazveme **spektrum úplné normované algebry** $\mathcal{A}$, značíme jej $\Omega(\mathcal{A})$ (jde o w^*-kompaktní podprostor $\mathcal{A}^*$). Bude nás zajímat prostor $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ spojitých funkcí na $\Omega(\mathcal{A})$.

Platí následující

- ✏ Úplná normovaná algebra $\mathcal{A}$ je homomorfní jisté podalgebře $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ (základní homorfismus $a \mapsto (L \mapsto L(x))$ se nazývá **spektrální transformace** a značívá se Ψ).

(I.Gelfand)

- ✏ Spektrální transformace komutativní algebry $\mathcal{A}$ je izometrie, pokud platí $||x^2|| = ||x||^2$ pro všechna $x \in \mathcal{A}$.
- ✏ Spektrální transformace komutativní $\mathcal{C}^*-$ algebry $\mathcal{A}$ je izometrickým *-izomorfismem.

(I.Gelfand, M.Naimark)

Poznamenejme, že pro $\mathcal{C}^*-$ algebru $\mathcal{A}$ jsou její spektrum $\Omega(\mathcal{A})$ a spektrum $\sigma(a)$ libovolného jejího normálního prvku a homeomorfní.

13.3.10 Funkční kalkulus

Buď $\mathcal{C}^*-$ algebru $\mathcal{A}$ s jednotkou e. Zvolme pevně $a \in \mathcal{A}$. Nechť $\mathcal{H}$ je $\mathcal{C}^*-$ algebra komplexních funkcí holomorfních na spektru $\sigma(a)$. Zobrazení $\Psi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ nazveme **funkční kalkulus**, pokud platí

(i) Ψ je $*$-homomorfismus,

(ii) spektrum $\Psi(f)$ je rovno $f(\sigma(a))$,

(iii) $(t \mapsto 1) \mapsto e$,

(iv) $(t \mapsto t) \mapsto a$,

(v) $(t \mapsto c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n) \mapsto c_0 + c_1 a + \cdots + c_n a^n$.

Značíme zpravidla $f(a)$ místo $\Psi(f)$.

13.3.11 Analytický funkční kalkulus

Buď $\mathcal{C}^*-$ algebru $\mathcal{A}$ s jednotkou e. Zvolme pevně $a \in \mathcal{A}$. Nechť $\mathcal{H}$ je $\mathcal{C}^*-$ algebra komplexních funkcí holomorfních na otevřeném okolí G spektra $\sigma(a)$. Zobrazení $\Psi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ definované předpisem

$$f \;\mapsto\; \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^3} + \cdots \right) d\lambda \,,$$

kde Γ je kladně orientovaný cyklus s $\sigma(a) \subset \operatorname{ins}\Gamma$ a $(\mathbb{C} \setminus G) \subset \operatorname{out}\Gamma$, je funkční kalkulus, nazývaný **analytický funkční kalkulus**.

(Dunford)

Podivné ...

Tedy například

$$\exp(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots \right) \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^3} + \cdots \right) d\lambda \,.$$

... ale hezounké.

13.3.12 Spojitý funkční kalkulus

Buď $\mathcal{C}^*-$ algebru $\mathcal{A}$ s jednotkou e. Zvolme pevně samoadjungovaný prvek $a \in \mathcal{A}$. Pak existuje právě jeden funkční kalkulus $\mathcal{C}(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ zachovávající polymomy. Tento kalkulus zachovává normu a $f(a)$ je vždy normální.

(F.Riesz)

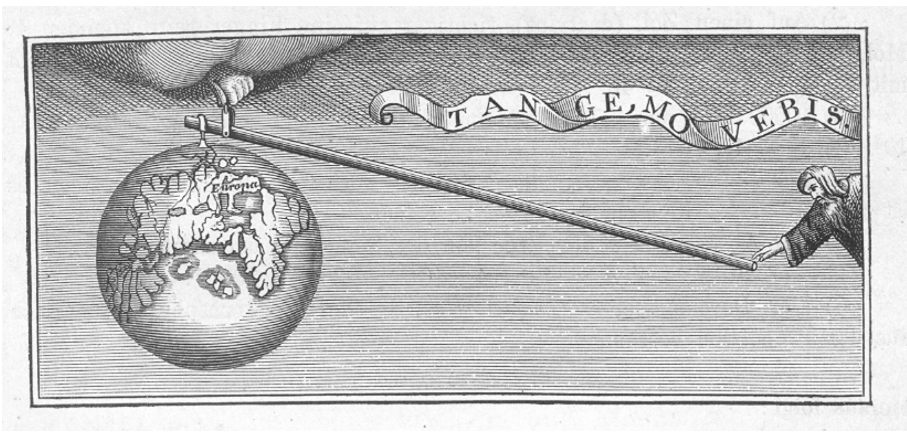
Kdyby nebyly obecné prostory a znali bychom pouze matice, pak bychom se při delších zápisech umaticovali.

13.4 Pevný bod zobrazení

13.4.1 Pevný bod

Obecnou rovnici $F(x) = y$ pro zobrazení $F : X \to Y$ je možné často přeformulovat na úlohu $f(t) = t$ pro zobrazení $f : T \to T$. Bod $t \in T$ nazveme **pevný bod** zobrazení f, pokud $f(t) = t$.

K nalezení pevného bodu je často potřeba hodně práce ...



Obrázek 13.4.1: Pevný bod je užitečný.

Dejte mi pevný bod a pohnu Zemí.
(Archimédés ze Syrákús $\sim$ -250)

Řekneme, že topologický prostor T má **vlastnost pevného bodu**, krátce **FPP**, pokud každé spojité zobrazení T do T má pevný bod.

13.4.2 Věty o pevném bodu

Platí

- Každá kontrakce na úplném metrickém prostoru má právě jeden pevný bod.
- Každá kompaktní konvexní podmnožina úplného normovaného prostoru konečné dimenze má vlastnost pevného bodu.
- Nechť C je uzavřená konvexní podmnožina úplného normovaného prostoru a $K \subset C$ kompaktní. Pak každé spojité zobrazení z C do K má pevný bod.

(J.P.Schauder $\sim$ 1922)

- Nechť C je uzavřená omezená konvexní podmnožina úplného normovaného prostoru. Pak každé kompaktní zobrazení z C do C má pevný bod.

Pokud to narafičíme tak, že řešení zadané rovnice je pevným bodem nějaké hračky, tak jsou ty věty o fix-punktu docela fajn.

13.5 Operátory v akci

13.5.1 Dynamické děje

Uvažujme úlohu popsat nějaký plynulý děj v úplném normovaném prostoru X (například plynulé otáčení bodů roviny okolo počátku). Její řešení bude zobrazení z časové osy do prostoru operátorů na prostoru X. Tedy jde o zobrazení $T : t \to T(t)$, kde $t \in [0, +\infty)$, kde $T(0)$ je identita na X a kde platí neúprosná logika času : za dobu $s + t$ se dostaneme tam, kam se dostaneme za čas s složeno s tím, kam se dostaneme za čas t. Tedy $T(s + t) = T(s) \circ T(t)$.

Ve skutečnosti jde o to najít zobrazení z $[0, +\infty)$ do množiny operátorů na X, které převádí součet kladných reálných čísel na složení jejich obrazů.

13.5.2 Definice (Semigrupa operátorů)

Sestava $\{T_t\}_{t\geq 0}$ omezených operátorů na úplném normovaném prostoru X (zkráceně $\{T_t\}_t$) se nazývá (jednoparametrická) **semigrupa operátorů** (na X), pokud

(i) T_0 je identita na X,

(ii) $T_{s+t} = T_s T_t$ pro $s, t, \in [0, +\infty)$.

Jde tedy o homomorfní obraz aditivní pologrupy kladných reálných čísel v prostoru $\mathcal{L}(X)$.

Například zobrazení $t \mapsto (z \mapsto ze^{it})$ přiřazuje kladnému reálnému číslu t otočení bodů roviny o úhel t okolo počátku, vytváří semigrupu.

13.5.3 Spojitost semigrupy

Semigrupa $\{T_t\}_t)$ se nazývá

- **silně spojitá**, pokud $\lim_{t\to 0_+} T_t(x) = x$ pro každé $x \in X$,
- **stejnoměrně spojitá**, pokud $\lim_{t\to 0_+} ||T - I|| = 0$,
- **neexpanzivní**, pokud $||T_t|| \leq 1$.

13.5.4 Generátor semigrupy

Pravostranná derivace zobrazení $t \mapsto T_t$ v nule se nazývá **generátor** semigrupy $\{T_t\}_t$. Jde o lineární operátor na lineárním podprostoru X.

Například operátor $z \mapsto iz$ je generátor semigrupy otočení bodů roviny o úhel t okolo počátku.

Pro semigrupy na úplném normovaném prostoru platí

- Mají-li dvě silně spojité semigrupy operátorů stejné generátory, jde o stejné semigrupy.
- Generátor A silně spojité semigrupy operátorů $\{T_t\}$ je omezený právě když je semigrupa $\{T_t\}$ stejnoměrně spojitá. V tom případě platí $T_t = e^{tA}$.

13.5.5 Abstraktní dynamická úloha

Nechť X je úplný normovaný prostor, $A : D_A \subset X \to X$ uzavřený lineární operátor a $x \in X$. Řešením úlohy

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) \ \text{ pro } \ t \geq 0\,, \\ u(t) &= x \ \text{ pro } \ t = 0 \end{aligned}$$

rozumíme každé zobrazení $u : [0, +\infty) \to X$ splňující

$$u(0) = x\ ,\ u(t) \in D_A\ ,\ \dot{u}(t) = Au(t) \ \text{ pro každé } t \geq 0\ .$$

Je-li A uzavřený lineární operátor na úplném normovaném prostoru X a existuje-li silně spojitá semigrupa $\{T_t\}$, jejímž je A generátorem, pak pro každé $x \in D_A$ existuje právě jedno řešení uvedené úlohy a $u(t) = T_t$ pro každé $t \in [0, +\infty)$.

Kapitola 14

Základní typy operátorů

Tato kapitola ukáže známé operátory a jejich vlastnosti.

Řešení rovnice je často vlastně hledání jádra nějakého hloupého operátoru.

14.1 Kompaktní operátory

14.1.1 Definice (Kompaktní operátor)

Je-li $L : V \to W$ omezené lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory V a W a zobrazuje-li omezené množiny V na množiny relativně kompaktní ve W, budeme mu říkat **kompaktní operátor** na vektorovém prostoru V. Množinu všech kompaktních operátorů značíme $\mathcal{L}_c(V,W)$, popřípadě $\mathcal{L}_c(V) = \mathcal{L}_c(V,V)$.
Řekneme, že operátor $L \in \mathcal{L}(V,W)$je **konečně dimenzionální operátor**, pokud je obor jeho hodnot množina konečné dimenze ve W. Značíme $\mathcal{L}_f(V,W)$, popřípadě $\mathcal{L}_f(V) = \mathcal{L}_f(V,V)$.

14.1.2 Věta (O kompaktních operátorech)

Buďte U, V a W normované lineární prostory, X úplný normovaný. Pak

- Konečně dimenzionální je kompaktní, kompaktní je spojitý.
- $\mathcal{L}_f(V,W) \subset\subset \mathcal{L}_c(V,W) \subset\subset \mathcal{L}(V,W)$.
- $\mathcal{L}_c(V,W)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(V,W)$.
- Je-li $L \in \mathcal{L}(U,V)$ a $K \in \mathcal{L}(V,W)$, pak $K \circ L$ je kompaktní, pokud je K či L kompaktní.
- Pro $T \in \mathcal{L}_c(V,W)$ je dimenze $\ker(I-T)$ konečná.
- 0 leží ve spektru kompaktního operátoru na nekonečně dimenzionálním normovaném prostoru.

- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ je kompaktní právě když adjungovaný operátor T' je kompaktní.
- Kompaktní operátor $\mathcal{L}_c(V, W)$ převádí slabě konvergentní posloupnost na konvergentní.

(J.P.Schauder $\sim$ 1922)

14.1.3 Věta (O spektru kompaktního operátoru)

Nechť je L kompaktní operátor na úplném normovaném prostoru X a $\lambda \neq 0$. Pak platí

- Operátor $L - \lambda I$ je prostý, právě když je na.
- Platí pěkné vzorečky o kolmicích, např. $\mathrm{range}\,(L' - \lambda I') = (\ker(L - \lambda I))^{\perp}$.
- Dimenze $\ker(L - \lambda I))$ je konečná.
- Každý nenulový prvek spektra je vlastním číslem konečné násobnosti, $\sigma(L) \subset \{0\} \cup \sigma_p(L)$.
- Nenulových vlastních čísel je nejvýše spočetně, jejich hromadný bod může být pouze 0.

(E.I.Fredholm)

Tedy $L(x) - \lambda x = y$ má řešení pro každou pravou stranu y, právě když $L(x) - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení. To znám.

14.2 Samoadjungované operátory

14.2.1 Definice (Samoadjungované operátory)

Nechť $L \in \mathcal{L}(U, W)$, kde V a W jsou úplné součinové prostory. Definujeme **adjungované zobrazení** $L^* \in \mathcal{L}(W, V)$ předpisem $(Lx, y) = (x, L^*y)$ pro $x \in V$, $y \in W$.
Operátor L na úplném součinovém prostoru V se nazývá **samoadjungovaný**, jestliže pro každou dvojici $x, y \in V$ platí $(Lx, y) = (x, Ly)$, čili $L = L^*$. Operátor L na úplném součinovém prostoru V se nazývá **normální**, jestliže platí $LL^* = L^*L$.

Jde o algebraické kouzlo.

14.2.2 Věta (Spektrum samoadjungovaného operátoru)

Samoadjungovaný operátor L na úplném součinovém prostoru V má reálné spektrum. Platí $\sigma(L) \subset [m_L, M_L]$, kde

$$m_L = \inf\{(Lv, v) : ||v|| = 1\} \ , \ M_L = \sup\{(Lv, v) : ||v|| = 1\} \ .$$

14.2.3 Věta (Měřitelný funkční kalkulus)

Nechť L je samoadjungovaný operátor na úplném součinovém prostoru V, zvolme prvek $v \in V$. Označme Ψ spojitý funkční kalkulus. Pak zobrazení

$$f \mapsto (\Psi(f)v, v)$$

z prostoru $\mathcal{C}(\sigma(L))$ do $\mathbb{R}$ je lineární nezáporné a jde reprezentovat nezápornou topologickou mírou na $\sigma(L)$, označme tuto míru E_v. Pak zobrazení

$$g \mapsto \int_{\sigma(L)} g \, dE_v$$

je funkční kalkulus algebry omezených topologických funkcí na $\sigma(L)$. Tento kalkulus nazýváme **topologický měřitelný funkční kalkulus**.

(É.Borel $\sim$ 1920)

14.2.4 Kompaktní samoadjungované operátory

Buď L kompaktní samoadjungovaný operátor na úplném součinovém prostoru V. Pak

- $V = \mathcal{M} \oplus \ker L$, kde $\mathcal{M}$ je uzavřený lineární prostor generovaný všemi vlastními vektory operátoru L příslušnými k nenulovým vlastním číslům.

- Existuje ortonormální báze $\{u_n\}$ podprostoru $(\ker L)^\perp$ tak, že

  $$L(v) = \sum_n \lambda_n (v, u_n) u_n$$

  pro každé $v \in V$.

- Označme P_n ortogonální projekce V na $\ker(L - \lambda_n I)$. Pak platí

  $$L = \sum_n \lambda_n P_n$$

  a

  $$f(L) = \sum_n f(\lambda_n) P_n$$

  je funkční kalkulus pro omezené komplexní funkce definované na spektru $\sigma(L)$.

Tak jde operátor vyjádřit řadou.

14.3 Další třídy operátorů

14.3.1 Operátory konečného typu

Pokud pro operátor L na úplném normovaném prostoru V platí, že dimenze jádra $\ker L$ a kodimenze oboru hodnot $\operatorname{range} L$ jsou konečné, říkáme L **operátor konečného typu**.

(E.I.Fredholm)

Platí

- Je-li K kompaktní a $\lambda \neq 0$, je $K - \lambda I$ operátor konečného typu.
- Operátor L je operátor konečného typu, právě když existuje operátor $M \in \mathcal{L}(V)$ tak, že operátory $LM - I$ a $ML - I$ jso kompaktní.

(E.Noether)

14.3.2 Operátory typu l^2

Pokud pro operátor L na úplném součinovém prostoru V existuje ortonormální báze $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ prostoru V taková že

$$\sum_{\alpha \in A} ||L(e_\alpha)||^2 < +\infty ,$$

pak je operátor L kompaktní.

(D.Hilbert $\sim$ 1920, E.Schmidt)

14.3.3 Nukleární operátory

Pokud pro operátor L na úplném součinovém prostoru V existují posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ prostoru V takové že

$$Lv = \sum (v, x_n) y_n ,$$

nazveme operátor L **nukleární**.
Platí

- Každý nuklární operátor je kompaktní.

14.3.4 Uzavřené operátory

Pokud má operátor L na úplném normovaném prostoru V uzavřený graf, nazveme operátor L **uzavřený**.
Platí

- Každý uzavřený lineární operátor L má spektrum $\sigma(L)$ uzavřenou podmnožinu $\mathbb{C}$ a funkce $\lambda \mapsto (L - \lambda I)^{-1}$ je analytická na doplňku spektra $\sigma(L)$.

Zkoumání obecných operátorů dalo nový pohled na partikulární příklady a jejich vlastnosti.

Kapitola 15

Základní operátory

Tato kapitola ukáže, že je možné operátory najít všude kolem nás.

> Reálnou funkci lze rozložit na komplexní frekvence, to je trochu silný kafe.

15.1 Obecné operátory

> Operátory? To je trochu filosofická otázka. Proč by se měla jedna funkce měnit za druhou? Qui bono?

15.1.1 Prostor operátorů

Prostor $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ všech lineárních omezených operátorů s operací skládání tvoří úplnou normovanou algebru.

Prostor $\mathcal{L}_c(V)$ všech kompaktních lineárních omezených operátorů s operací skládání tvoří uzavřenou úplnou normovanou podalgebru algebry $\mathcal{L}(\mathcal{V})$.

Pokud je dimenze prostoru V rovna konečná a rovná n, můžeme $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ chápat jako prostor všech čtvercových matic s n řádky a sloupci, značíme tuto algebru $M_n(\mathbb{R})$ popřípadě $M_n(\mathbb{C})$.

Platí

- Duál prostoru $\mathcal{L}_c(V)$ všech kompaktních lineárních omezených operátorů na úplném součinovém prostoru H je prostor $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ všech nukleárních operátorů na V.

15.1.2 Disková algebra

Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompakt, Množina $\mathcal{A}(K) = \{f \in \mathcal{C}(K) : \ f \ \text{je analytická na} \ \int K\}$ s normou prostoru $\mathcal{C}(K)$ a násobením funkcí je úplná normovaná algebra. V případě jednotkového kruhu $\triangle$ nazýváme $\mathcal{A}(\triangle)$ **disková algebra**.

Platí

- Spektrum diskové algebry $\mathcal{A}(\triangle)$ je homeomorfní $\triangle$.

15.1.3 Algebra $H^\infty(U)$

Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Množina $H^\infty(U)$ je algebra omezených holomorfních funkcí na U. Množina U jde vnořit do spektra $H^\infty(U)$, přesnější vztah těchto množin zkoumá **problém korony**.

15.1.4 Příklady semigrup

Platí

- Na úplném normovaném prostoru $V = \mathbb{R}$ uvažujeme semigrupu operátorů T_t
$$T_t = e^t \ .$$
- Na úplném normovaném prostoru $L^p([0, +\infty)$, kde $p \in [1, +\infty)$, uvažujeme silně spojitou semigrupu operátorů T_t
$$T_t f(s) = f(s+t) \ \ \text{pro} \ \ t \geq 0, s \geq 0 \ .$$
Její generátor je operátor derivování $f \mapsto f'$ s definičním oborem $\{f \in L^p([0, +\infty)) : f \ \text{je absolutně spojitá na} \ [0, n] \ \text{pro} \ n \in \mathbb{N}\}$.

15.1.5 Operátor derivování

Uvažujme prostor $V = \mathcal{C}([0, 1])$ a **operátor derivování** $f \mapsto f'$ definovaný na husté podmnožině prostoru V tvořené spojitými funkcemi se spojitou derivací.

Platí

- Operátor derivování je lineární uzavřený, ale není omezený.

15.2 Kompaktní operátory

15.2.1 Příklady kompaktních operátorů

Nechť je k spojitá funkce na $[0, 1] \times [0, 1]$. Často se používají spojité lineární operátory na prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}([0, 1])$

$$f \mapsto F(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) \, dt$$

(E.I.Fredholm)

a

$$f \mapsto F(s) = \int_0^s k(s,t) f(t)\, dt \; .$$

(V.Voltera)

Takto zapsaný operátory nazýváme **integrální operátor**, funkci k nazýváme **jádro integrálního operátoru**.

> Tak, už to je vidět. Ony ty operátory budou od přírody integrální. A mají rozumné jádro.

15.3 Exponenciální transformace

15.3.1 Definice

Pro funkci $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zkusíme definovat funkci F předpisem

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \; .$$

Tento operátor $L : f \mapsto F$ budeme nazývat **exponenciální transformace**.

(P.Laplace)

> Exponenciální transformace je kouzlo, kterým se dají diferenciální rovnice převést na obyčejné rovnice. Viz dále.

Operátor L je definován pro funkce, které nerostou příliš rychle. Jeho fungování vidíme na příkladu

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \; , \; s > a \; .$$

Pro funkci $f(t)$ nanejvýš exponenciálního růstu je její exponenciální transformace definována pro dostatečně velká s (v komplexní rovině s dostatečně velkou reálnou částí). Toto zobrazení je prosté a jeho inverze je dána podobným vzorcem.

> Něco raději zatajím. Ať je klid.

Ze zápisu

$$e^{-st} = 1 - st + \frac{(st)^2}{2!} - \frac{(st)^3}{3!} + \cdots$$

usuzujeme, že pokud přiřadíme proměnné t význam času a měříme jej v sekundách, pak proměnné s budeme říkat **komplexní frekvence**.

To, že tady je ve vzduchu reálný čas a komplexní frekvence, je COOL :-)

15.3.2 Zde se kouzlí

Užitečnost exponenciální transformace pro řešení různých úloh spočívá v tom, že dovede transformovat rovnici do nového tvaru. Základní předností je, že transformace derivace funkce jde spočítat pomocí transformace funkce. Podobně pro primitivní funkce. Tak se řada problémů ve tvaru diferenciálních, integrálních nebo smíšených rovnic transformuje do obyčejných rovnic s exponenciální transformací hledané funkce. Pokud jde takto transformovaná rovnice spočítat, stačí pak k nalezení hledané funkce použít inverzní exponenciální transformaci.

Vzorečky jsou zde

$$\begin{aligned} Ly' &= sLy - y(0) \\ Ly'' &= sLy - y'(0) = s^2 Ly - sy(0) - y'(0) \\ L\int_0^t f(u)\,du &= \frac{Lf}{s} \end{aligned}$$

Derivování odpovídá násobení, integrování odpovídá dělení. Prostě svět dovede být jednoduchý.

Podobně se dá postupovat při soustavách rovnic.

Neodmítám oběd jenom proto, že nerozumím procesu trávení.

(O.Heaviside)

15.3.3 Skoková funkce

Funkci

$$h(t) = 0 \ \text{ pro } t < 0\,, h(t) = 1 \ \text{ pro } t \geq 0$$

budeme nazývat **skoková funkce**.

(O.Heaviside)

Exponenciální transformace delta-funkce $\delta(t)$ je rovna jedničce. Podobně $L(\delta(t-c)) = e^{-sc}$.

15.3.4 Konvoluce

Jestliže na nějaké prostředí působil v čase t nějaký impus $f(t)$, můžeme jeho vliv na budoucnost v čase T zachytit výrazem

$$\int_0^T f(t)g(T-t)\,dt\,.$$

Faktor g popisuje slábnoucí vliv impulsu f (slábnutí závisí na uplynulém čase $T-t$).

Můžeme definovat operaci, která dvěma funkcím f a g přiřazuje $f*g$ předpisem

$$(f*g)(T)=\int_0^T f(t)g(T-t)\,dt\,.$$

Tuto operaci budeme nazývat **konvoluce funkcí** f a g.

Exponenciální transformace převádí konvoluci na součin

$$L(f*g)=LfLg\,.$$

Konvoluce je jakýsi propletenec dvou funkcí.

15.3.5 Kde se hodí konvoluce

Uvažujeme klidová řešení rovnic s vhodným (např. diferenciálním) operátorem) T

$$Ty=f(t)\,,\quad Tk=\delta(t)\,.$$

Použijeme exponenciální transformaci a dostaneme $P(s)Ly = Lf$ a $P(s)Lk = 1$, z toho spočítáme

$$Ly=\frac{1}{P(s)}Lf=(Lk)(Lf)=L(k*f)\,.$$

Tedy $y=k*f$. Řešení první rovnice je konvoluce pravé strany (f) a řešení druhé rovnice (k).

Tedy se k řešení diferenciální rovnice dopracujeme pouze konvolucí. Pozor! V praxi je však potřeba spočítat ty exponenciální transformace. To může být samozřejmě problém.

15.4 Frekvenční řady a transformace

Frekvenční řada je užitečný postup, jak ze spojitého udělat jednoduchým postupem diskrétní. Z funkce se udělá řada jen to fikne. Podobně jde někdy funkce napsat do aproximační řady.

15.4.1 Frekvenční řada

Budeme se zabývat otázkou, zda lze funkci f aproximovat pomocí konečných součtů funkcí známých, například polynomů nebo trigonometrických funkcí. Aproximace polynomy vede k vyjádření funkce pomocí mocninné řady. Pokud zvolíme vyjádření

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots ,$$

dostaneme v mnoha případech schopnou aproximaci. Ze zápisu je vidět, že příslušná řada je určena pouze lokálním chováním funkce f v počátku. Pracovali jsme vlastně s vektorovým prostorem spojitých funkcí a zvolili jsme si "bázi"tvořenou funkcemi $1, x, x^2, x^3, \ldots$.

Taková aproximace se příliš nehodí k analýze funkcí, které jsou ve své podstatě periodické, které vznikly složením harmonických kmitů a podobně. Nechť máme funkci f ve tvaru součtu

$$f(x) = c + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + \mathbf{b}_2 \cos 2x .$$

Spočítáme koeficient $\mathbf{b}_2$ pomocí integrace

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos 2x \, dx \ = \ \pi \mathbf{b}_2 .$$

Budeme pracovat s funkcemi $1, \sin nx, \cos nx$. Tyto tvoří "ortogonální bázi", přičemž budeme "kolmost"dvou funkcí f a g měřit "skalárním součinem"

$$\int_0^{2\pi} f(x) g(x) \, dx .$$

Tedy například

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx \ = \ 0 .$$

Pro funkci f integrovatelnou na intervalu $(0, 2\pi)$ vytvoříme formální řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ,$$

kde koeficienty a_n a b_n jsou definovány vztahem

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx , \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx , \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Tuto řadu budeme nazývat **frekvenční řada** funkce f, značit F_f a budeme psát

$$f(x) \ \sim \ \frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

(J.Fourier)

Sherlock Holmes: „Z kapky vody by logik mohl předpovědět Atlantik nebo Niagaru.“

(Sir A.C. Doyle 1929)

Obrázek 15.4.1: Atlantik a Niagara.

Je to jako brnkat na luku o tětivu a slyšet Mozarta.

15.4.2 O součtu frekvenční řady

Označíme částečný součet frekvenční řady

$$s_n(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\;.$$

Dosadíme si výrazy pro koeficienty a_k a b_k a dostaneme po úpravě

$$s_n(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt\;,$$

kde

$$D_n(t) = 1/2 + \cos t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}\;.$$

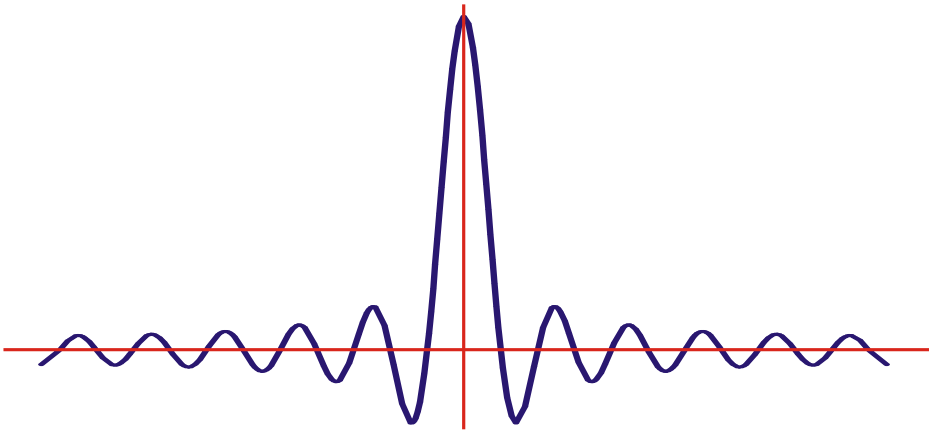
Tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t} tD_n(t)\,dt \;=\; 0$$

pro $\delta = \pi$. Tvrzení platí i pro libovolné $\delta > 0$, protože integrály přes interval (δ, π) konvergují k nule vždy. Podstatnou měrou přitom používáme následující limitu

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(t)\sin\lambda t\,dt \;=\; 0$$

platnou pro libovolnou integrovatelnou funkci g.



Obrázek 15.4.2: Jádro D_{11} ukazuje, že hodnota v sledovaném bodě bude dominovat.

(B.Riemann $\sim$ 1850 a H.Lebesgue)

15.4.3 Konvergence frekvenční řady

Konvergence frekvenční řady je tedy zaručena pokud existuje konečný

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t}\,dt\ .$$

To je splněno například při existenci jednostraných derivací funkce f v každém bodě. Pokud je funkce f sublineární, její frekvenční řada je konvergentní k funkci f.

(U.Dini)

Pokud má funkce f konečnou variaci na intervalu $[a,b]$, konverguje frekvenční řada k $(f(x+)+f(x-))/2$ v každém bodě $x \in (a,b)$. Je-li navíc funkce f spojitá v (a,b), konvergence je lokálně stejnoměrná.

(C.Jordan $\sim$ 1870 a G.P.L.Dirichlet 1840)

Každá spojitá funkce, obecněji každá $f \in L^2(0,2\pi)$, je součtem své frekvenční řady skoro všude.

(L.Carleson 1966)

Spousta se o tom vědělo od pradávna, ale až v roce 1966 se ukázalo, že toho už o mnoho víc nebude.

15.4.4 Průměrované součty frekvenční řady

Budeme nyní zkoumat průměry častečných součtů frekvenční řady. Označíme

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(s_0(x) + \cdots + s_n(x)\right)$$

(E.Cesaro)

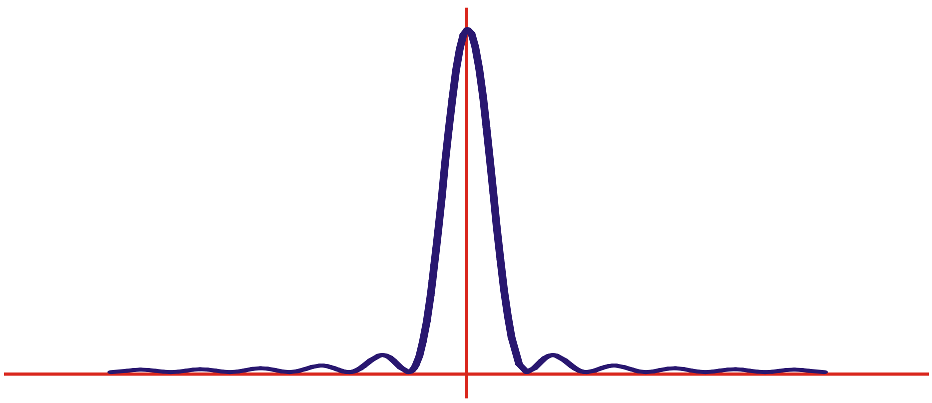
Postup vytvoření frekvenční řady zopakujeme "v průměru", dostaneme podobné vzorečky. Například

$$\sigma_n(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t) + f(x-t)\right)K_n(t)\,dt\;,$$

kde

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(D_0(x) + \cdots + D_n(x)\right)$$

Funkce K_n mají oproti funkcím D_n výhodu nezápornosti. Proto některé kroky důkazů konvergence projdou lépe.



Obrázek 15.4.4: Jádro K_{11} - opět dominuje hodnota v sledovaném bodě.

15.4.5 Aplikace průměrovaných součtů

Pokud má funkce f konečné jednostranné limity v bodě x, konverguje zprůměrovaná frekvenční řada k $(f(x+) + f(x-))/2$. Je-li navíc funkce f spojitá v (a, b), konvergence je lokálně stejnoměrná.

(L.Fejér)

To je přesná trefa. Ta průměrovaná konvergence je lepší, pokud si na ni zvykneme ;-)

Pokud konverguje frekvenční řada, pak konverguje i zprůměrovaná frekvenční řada. Tedy jediný možný součet frekvenční řady pro spojitou funkci je její funkční hodnota.

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[0,1]$. Pak jde libovolně přesně aproximovat pomocí (trigonometrického) polynomu.

(K.Weierstrass 1885)

15.4.6 Frekvenční řady a L^2

Jde dokázat, že funkce 1, $\sin nx$ a $\cos nx$ tvoří v prostoru L^2 úplný ortogonální systém. To nám dovoluje lépe pochopit frekvenční řady v prostoru spojitých funkcí. Frekvenční řady nikdy nebudou dobře aproximovat všechny spojité funkce.

Jejich součty budou určovat funkci v L^2, jejich součet bude rozumný „skoro všude“. Frekvenční součty funkce f konvergují k funkci f v prostoru L^2.

Nechť $f \in L^2(0,2\pi)$ a $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ její frekvenční koeficienty. Pak

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

v prostoru L^2. Navíc

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \, .$$

(M.A.Parseval)

Pokud jsou konstanty $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ dány a

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty \, ,$$

pak existuje právě jedna funkce v $L^2(0,2\pi)$, jejíž frekvenční řada je těmito konstantami určena.

(F.Riesz a E.S.Fischer)

15.4.7 Komplexní tvar frekvenční řady

Položíme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \; c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k), \; c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k), \quad k \in \mathbb{N} \, .$$

Pak

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \, .$$

Komplexní tvar frekvenční řady pak vypadá takto

$$f(x) \sim \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \,,$$

kde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \,.$$

15.4.8 O diskrétních a spojitých frekvencích

Pokud jde 2π periodická funkce napsat jako frekvenční řada, podařilo se nám jí rozložit na součet funkcí určitých frekvencí ($\sin nx$ a $\cos nx$).
Pokusíme se o spojitou analogii. Rozložit funkci na spojité spektrum "frekvencí". Budeme hledat vyjádření

$$f(x) = \int_0^\infty (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)\, d\omega \,.$$

Tomuto zápisu budeme říkat **frekvenční integrál** funkce f. Funkce hrající roli v tomto zápisu najdeme vzorečkem

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\, dt \,, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\, dt \,.$$

Ty spojité frekvence jsou hezky jemná matematika.

15.4.9 Kdy je funkce rovna frekvenčnímu integrálu?

S integrály budeme zacházet opatrně. Označíme

$$I_\eta(x) = \int_0^\eta (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)\, d\omega \,.$$

Po úpravě se odvodí vztah

$$I_\eta(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\eta t}{t}\, dt \,.$$

Konvergence frekvenčního integrálu funkce f je zaručena pokud pro nějaké $\delta > 0$ existuje konečný

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t}\, dt \,.$$

Pak

$$\lim_{\eta\to\infty} I_\eta(x) = s \,.$$

To je splněno například při existenci jednostraných derivací v každém bodě. Pokud je funkce f sublineární, její frekvenční integrál je konvergentní k funkci f.

(U.Dini)

15.4.10 O komplexních frekvencích

Přejdeme ke komplexnímu tvaru. Položíme

$$I_\eta(x) = \int_{-\eta}^{\eta} c(\omega) e^{i\omega t}\, dt\ ,$$

kde

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt\ .$$

Pak

$$f(x)\ \sim\ \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega\ .$$

Takto sestrojená funkce $c(\omega)$ je jakási frekvenční struktura funkce f. Aby byly vzorečky mezi f a c symetričtější, změníme koeficient před integračním znamením.

15.4.11 Frekvenční transformace

Frekvenční transformace je kouzlo, kterým se dají diferenciální rovnice převést na obyčejné rovnice.

Pro (komplexní) integrovatelnou funkci $f \in L(\mathbb{R})$ položíme

$$f^\wedge(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx\ .$$

Funkci $f^\wedge$ nazýváme **frekvenční obraz** funkce f. Operátor $F^\wedge\ :\ f\ \mapsto\ f^\wedge$ budeme nazývat **frekvenční transformace**.
Pro (komplexní) integrovatelnou funkci $f \in L(\mathbb{R})$ položíme

$$f^\vee(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega\ .$$

Funkci $f^\vee$ nazýváme **inverzní frekvenční obraz** funkce f. Operátor $F^\vee\ :\ f\ \mapsto\ f^\vee$ budeme nazývat **inverzní frekvenční transformace**.

15.4.12 Vlastnosti frekvenční transformace

Platí

- Frekvenční obrazy jsou spojité.
- Frekvenční obrazy mají v $\pm\infty$ nulovou limitu.
- Nechť má funkce $f \in L(\mathbb{R})$ spojitou derivaci $f' \in L(\mathbb{R})$. Pak

$$(f')^\wedge(\omega)\ =\ i\omega f^\wedge(\omega)\ .$$

(J.Fourier)

Místo derivování se násobí. To je moc dobře ;-)

✏ Pro $f(x) = e^{-x^2/2}$ je $f^\wedge(\omega) = e^{-\omega^2/2}$.

Některé funkce si s tím rozumějí.

15.4.13 Frekvenční transformace v L^2

Rozšíříme frekvenční transformaci díky hustotě spojitých a integrovatelných funkcí v prostoru L^2 na celý prostor L^2. Frekvenční transformace je izomorfismus prostoru L^2 na sebe.

(M.Plancherel)

15.4.14 Frekvenční transformace (temperovaných) distribucí

Označme $S(\mathbb{R}^n)$ množinu funkcí $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ majících parciální derivace všech řádů a konvergujících k nule pro $|x| \to \infty$ rychleji než libovolná mocnina funkce $1/x$. Přesněji vyjádřeno nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{D^\alpha \varphi(x)}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n} = 0 \, .$$

Funkcím v $S(\mathbb{R}^n)$ budeme říkat **testovací funkce** (například $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R}^n)$).
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_k\}$ testovacích funkcí má v prostoru $S(\mathbb{R}^n)$ limitu φ, když pro každé multiindexy α, β platí na $\mathbb{R}^n$

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows x^\beta D^\alpha \varphi(x) \, .$$

Každý spojitý lineární funkcionál na $S(\mathbb{R}^n)$ se nazývá **temperovaná distribuce**. Prostor všech temperovaných distribucí budeme značit $S'(\mathbb{R}^n)$, nebo jen S'. Na S' budeme uvažovat slabou topologii, t.j. $f_k \to f$ v prostoru S' pokud pro každé $\varphi \in S$ platí $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$.
Pro $\varphi \in S$ se **frekvenční transformace** $F[\varphi]$ definuje předpisem

$$F[\varphi](\zeta) = \int \varphi(x) e^{i(\zeta,x)} \, dx \, ,$$

kde $(\zeta, x) = \zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n$. Nyní pro temperovanou distribuci f definici rozšíříme

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]) \, .$$

Pro $f \in S'$ se **inverzní frekvenční transformace** definuje vzorečkem

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)] \, .$$

Platí

- Frekvenční transformace je prostá (slabě) spojitá lineární transformace S na S'.
- Frekvenční transformace jednotkového náboje je

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\zeta, x_0)} .$$

- Derivace frekvenční transformace

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f] .$$

- Frekvenční transformace derivace

$$F[D^\alpha f] = (-i\zeta)^\alpha F[f] .$$

- Frekvenční transformace konvoluce (pro g finitní)

$$F[f * g] = F[f]F[g] .$$

- Derivace temperované distribuce je temperovaná distribuce.

15.5 Operace s distribucemi

15.5.1 Součin funkce a distribuce

Uvažujeme situaci $\Omega = \mathbb{R}$. Funkci $f \in \mathcal{C}^\infty$ a distribuci $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ přiřadíme součin fT předpisem

$$\varphi \mapsto T(f\varphi) .$$

Funkci $f \in \mathcal{C}^\infty$ přiřazujeme distribuci

$$\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi f \, d\mu .$$

Topologické míře λ na Ω přiřazujeme distribuci

$$\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi \, d\lambda .$$

15.5.2 Distributivní derivace

Uvažujeme situaci $\Omega = \mathbb{R}$. Derivaci $\frac{dT}{dx}$ distribuce T v prostoru $\mathcal{D}^*(\Omega)$ definujeme předpisem $\varphi \mapsto -T(\varphi')$ pro funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Derivace distribuce je opět spojitý lineární funkcionál na základním prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$, tedy jde o distribuci, prvek $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Distribuce jsou tudíž nekonečně derivovatelné. Například derivace skokové funkce je bodový náboj

$$h'(x) = \delta(x) ,$$

derivace jednotkového náboje je **dipól** $\delta'(x)$, …

Co je dokazatelné v matematice by nemělo být věřeno bez důkazu.
(R.Dedekind ∼ 1899)

Líbí se mi sekvence sign $\mapsto \delta \mapsto$ dipól.

Operátor z $\mathcal{D}^*(\Omega)$ do $\mathcal{D}^*(\Omega)$, přiřazující distribuci její derivaci nazveme **distributivní derivace**.
Distributivní derivace neklesající funkce na $\mathbb{R}$ je topologická míra.
Derivaci distribuce T na prostoru $\mathbb{R}^n$ podle multiindexu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ definujeme

$$(D^\alpha T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(T, D^\alpha \varphi) \; .$$

Například parciální derivace distribuce T v případě $\mathbb{R}^n$ se definuje

$$\frac{\partial^3 T(x,y)}{\partial x^2 \partial y} \; : \; \varphi \; \mapsto \; (-1)^3 T\left(\frac{\partial^3 \varphi(x,y)}{\partial x^2 \partial y}\right) \; .$$

15.5.3 Distributivní primitivní funkce v $\mathbb{R}$

Uvažujeme situaci $\Omega = \mathbb{R}$. Pro každou distribuci T má rovnice $y' = T$ právě jedno řešení ve třídě distribucí, toto řešení nazveme **distributivní primitivní funkce**.

15.5.4 Konvoluce distribucí v $\mathbb{R}$

Vzorečkem

$$(f * g, \varphi) = (f(\xi), (g(x), \varphi(x+\xi)))$$

(pokud výrazy existují, například jedna z distribucí je finitní) se definuje **konvoluce distribucí**.

15.5.5 Vztah klasické a distributivní derivace

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Nechť $T \in D'(\Omega)$. Označme pro $i = 1, 2, \dots, n$ parciální distributivní derivace $G_i = \partial_i T \in D'(\Omega)$. Pak je ekvivalentní

(i) T je funkce $f \in C^1(\Omega)$.

(ii) pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je G_i funkce $g_i \in C^0(\Omega)$.

V obou případech je g_i klasickou parciální derivací $\partial f / \partial x_i$ funkce f. Speciálně distribuce s nulovou derivací jsou konstanty.

Co bývaly hříchy, jsou dnes dobré mravy.
(Seneca)

Kapitola 16

Obecné metody řešení problémů

Tato kapitola se zabývá obecným pohledem na různé techniky řešení problémů.

> Intelektuálové řeší problémy, géniové jim zabraňují.
>
> (A.Einstein)

16.1 Obecně o problémech

16.1.1 Původ problémů

Jde o problémy vznikající v životě (tedy i v matematice, fyzice, technice, ekonomii, . . .).

> Pokud se matematická disciplína vzdaluje od myšlenek inspirovaných "realitou"a není budována s vyjímečným vkusem, stává se více a více pouhým "uměním pro umění". Největší hrozba je, že se matematika bude vyvíjet cestou nejmenšího odporu, rozdělí se na množství nedůležitých odvětví a stane se neorganizovaným souborem detailů.
>
> (J.v.Neumann $\sim$ 1940)

> Například když hledáme všechny prostory jehož duál řádu 10^6 je homeomorfní s reálnou osou . . .

16.1.2 Formulace problémů

Jedná se o rovnice, nerovnice, extrémy funkcionálů, můžeme zkoumat soustavy rovnic, mohou být zadány okrajové podmínky, můžeme hledat pouze řešení z jistého prostoru . . .

Jsou to tak různorodé problémy, že se nám z toho může až zatočit hlava ;-)

16.1.3 Základní otázky

Zajímají nás důležité otázky:

- Má smysl řešit tuto úlohu?
- Má smysl hledat přesné řešení?
- Má úloha alespoň jedno řešení?
- Kolik má úloha řešení?
- Jaké má řešení vlastnosti?
- Jak se mění řešení v závislosti na parametrech úlohy?

Pevně věřím, že problémy jsou jádrem matematiky, a doufám, že je budeme prosazovat stále více a více jako učitelé v učebnách, na seminářích, v knihách a článcích a že vypěstujeme z našich studentů lepší autory a řešitele problémů, než jsme my sami.

(P.R.Halmos 1980)

16.2 Obecně o metodách

Představivost je důležitější než znalosti, neboť znalosti jsou omezené, zatímco představivost obepíná vše na světě.

(A.Einstein $\sim$ 1930)

16.2.1 Obecné a zobecněné řešení

Řešení budeme hledat tam, kde máme. Pokud to nepůjde, tak i v obecnějších prostorech. Tak budeme například hledat distributivní řešení, slabé řešení a podobně.

16.2.2 Problém zkoumáme i z praktického pohledu

Někdy můžeme zkoumat

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \ .$$

Zaměněníme role x a t, považujeme x za nezávisle proměnnou a t za závisle proměnnou. Pak řešíme

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t, x)}$$

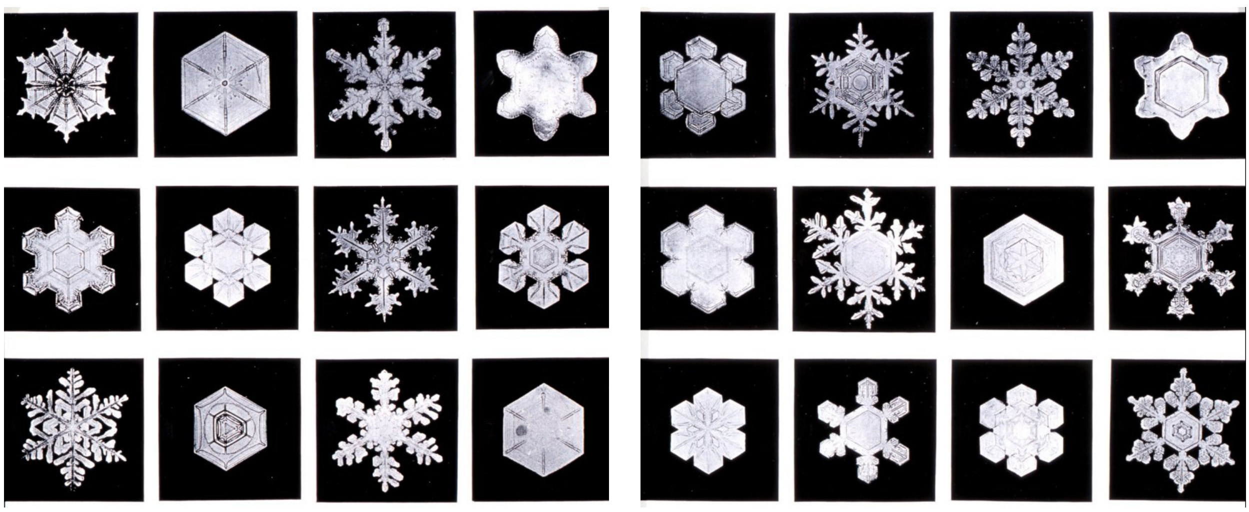
pro neznámou funkci $t = t(x)$.

Někdy je totiž samotný řešený problém „nezávislý na volbě souřadnic“. Když si lehnu, vidím svět vzhůru nohama a je vše v pohodě.

16.2.3 Symetrie

Má-li problém nějakou symetrii, bude ji mít též řešení, popřípadě množina všech řešení.

(Curie)



Obrázek 16.2.3: Tvorba vloček probíhá v rotačně symetrickém prostředí, proto jsou tak symetrické.

16.2.4 Formalismus

Nahrazení zadané formulace formálním zápisem nám dovolí pracovat rychleji.

16.2.5 Elementární pozorování

Budeme pozorní. Například rovnice

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$$

má řešení, o němž bezpečně víme, že bude někde rostoucí, někde klesající, že budou existovat konstantní řešení ...

16.2.6 Rozložení problému na jednodušší

Místo úlohy

$$y'(x) = e^x + 1\,,\ y(0) = 1$$

lze řešit dvě úlohy

$$y_1'(x) = e^x\,,\ y_1(0) = 1$$

a

$$y_2'(x) = 1\,,\ y_2(0) = 0$$

a hledané řešení je $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. Tím jsme si díky linearitě operátoru $L : y \to y'$ mohli úlohu rozdělit na dvě jednodušší.

16.2.7 Linearita a nelinearita

Obecně lze předpokládat v mnoha aplikacích, že naše úloha zachycuje pouze základní (lineární) vazbu mezi objekty a že lze očekávat, že úloha má přesnější formulaci obsahující další (nelineární) vazby. Jde například o zanedbání tření a jiných vnějších vlivů.

Pokud například řešíme úlohu $y'(x) = y^2(x) + x$ a zajímá nás řešení v blízkosti bodu $(x, y) = (1, 3)$ můžeme studovat lineární přiblížení, tedy úlohu $y'(x) = 3^2 + x$.

16.2.8 Pokud to půjde, vyřešíme vše, co půjde ...

Řešení se snažíme najít co nejhezčí, na největším oboru a podobně.

Někdy to však „nepůjde“, $x' = 1 + x^2$ vede na funkci tangens :-)

16.2.9 Substituce

V rovnici

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

pro neznámou funkci $x(t)$ a konstantu k provedeme substituci $x = e^y$, čili chceme vyjádřit rovnici v nové funkci $y(t)$. Píšeme tedy (po zderivování složené funkce)

$$e^y \frac{dy}{dt} = ke^y\,,$$

Tedy řešíme

$$\frac{dy}{dt} = k \ ,$$

což vede k řešení $y(t) = kt+C$, kde C je konstanta. Nakonec $x(t) = e^{kt+C} = ce^{kt}$ s nezápornou konstantou c.

Použili jsme zde postup, kterému se říká **substituční metoda**.

Jde o nejkouzelnější území. Zázračnou substituci musíme vymyslet sami. Hodně štěstí :-)

16.2.10 Implicitní tvar řešení

Někdy zjistíme řešení v implicitním tvaru, například $x^2 + y^2 = 1$.

Dál se tím nezabýváme. Je to jasně kulaté :-)

16.2.11 Hledání řešení v určitém tvaru

Někdy hledáme řešení v určitém tvaru. Například zkusíme dosadit obecnou mocninnou řadu ...

Uhodni (tvar) řešení a dobře se ti povede.

16.3 Metody prostorů funkcí

Použijeme kouzla teorie funkcí, uniformní konvexitu biduálu, ...

16.4 Přeformulování úlohy

Úloha s diferenciální rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \ , \ x(t_0) = x_0$$

je ekvivalentní úloze s integrální rovnicí

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau) \, d\tau \ .$$

To koukám. Obě jsou lahůdky. Nicméně … alespoň něco.

Pokud označíme pravou stranu v předchozí rovnosti jako Ax, kde A je příslušný operátor, je rovnice přepsatelná na tvar $x = Ax$. Tedy hledáme pevný bod operátoru. Často funguje (lze dokázat konvergenci) rekurentní posloupnost x_0, $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1, \ldots, x_{n+1} = Ax_n$.
Pro rovnici $x' = x$, $x(0) = 1$) jsou postupné aproximace $1, 1+x, 1+x+x^2/2!, 1+x+x^2/2!+x^3/3!, \ldots$.

(É.Picard ∼ 1900, G.Peano ∼ 1900)

16.4.1 Variační metody

Extrémy odpovídají nulové derivaci a naopak. To vede ke zkoumání malých odchylek funkce a pozorování diferenčního podílu. Těmto odchylkám se říká **variace**.

Totálně omezený řešitel variační úlohy: Nechť je N největší přirozené číslo. Vzhledem k tomu, že $N^2 \geq N$ a N je největší přirozené číslo, platí $N^2 = N$ a tedy $N = 1$.

16.4.2 Pravděpodobnostní a statistické metody

Použijeme kouzla z teorie pravděpodobnosti a statistiky. Modelujeme procesy a zkoumáme jejich chování.

Například zjistíme, že s pravděpodobností 1 má úloha řešení.

16.4.3 Topologické metody

Použijeme topologických kouzel. Použijeme kompaktnost, konvexitu, projekce, …
Například najdeme řešení problému jako pevný bod jistého zobrazení.

16.4.4 Numerické metody

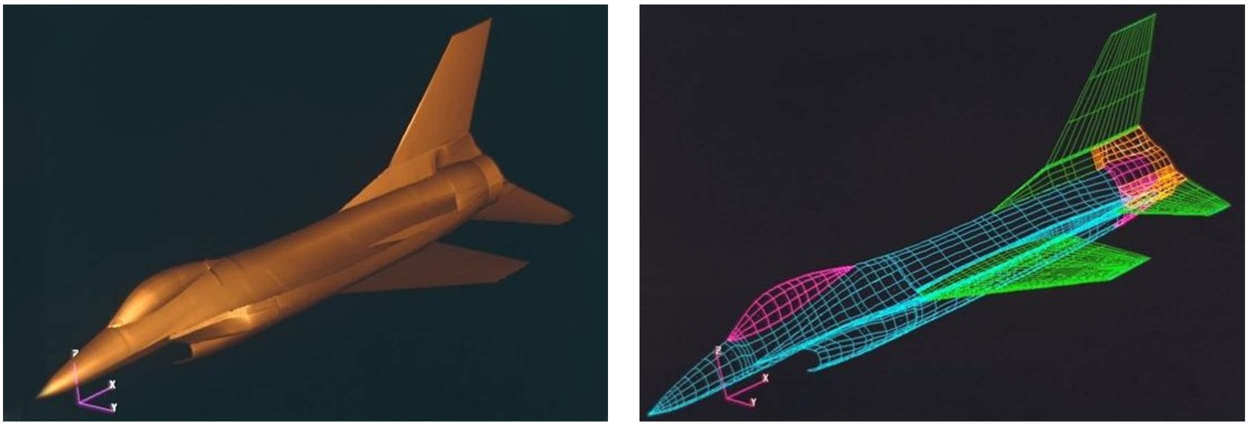
Budeme hledat řešení pomocí aproximací. Stejně skoro všechny úlohy vedou na pracné výpočty a přesné řešení nikdy nezískáme. Nabízí se řada možných aproximací.
Například při hledání minima funkcionálu F na množině $W^{1,2}(\Omega)$ rozdělíme množinu Ω na n jednoduchých množin, například trojúhelníků. Prvek tohoto dělení budeme nazývat **konečný**

prvek. Metoda konečných prvků spočívá v nahrazení $W^{1,2}(\Omega)$ prostorem X_n funkcí, které jsou hladké na jednotlivých konečných prvcích.

V prostoru X_n najdeme prvek u_n tak, aby

$$F(u_n) = \inf_{u \in X_n} F(u) \ .$$

Pak zkoumáme, kdy má posloupnost $\{u_n\}$ limitu (a jakou).



Obrázek 16.4.4: Použití metody konečných prvků (konečné sítě bodů vedou na diskrétní problém).

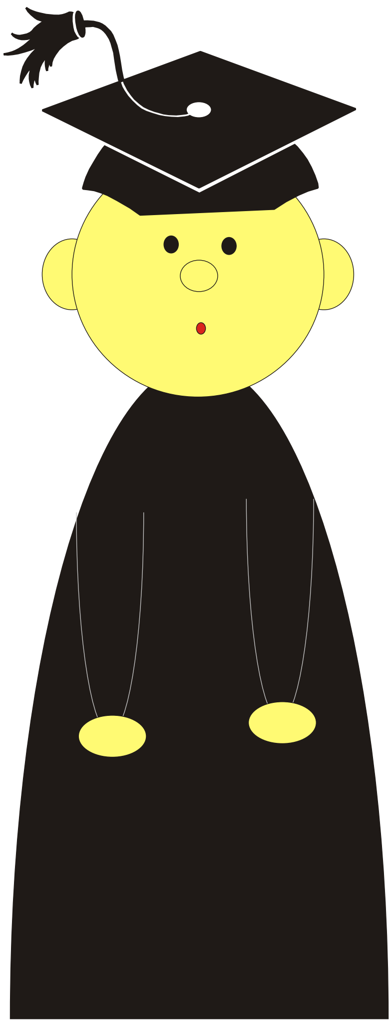
Počítání takzvaných "crash testů"pomocí metody konečných prvků je velmi užitečné a opravdu se dělá.

Obrázek 16.4.4: Škoda na autě - počítání crash-testů zachraňuje životy.

Kapitola 17

Problémy pro bakaláře

To nejkrásnější na matematice je řešení problémů.



Obrázek 17.0.0: Bakalář je takový malý človíček.

Matematika je místo, kde "Problém"není špatná věc.
(Grifith 2000)

17.1 Pokladnice kouzel

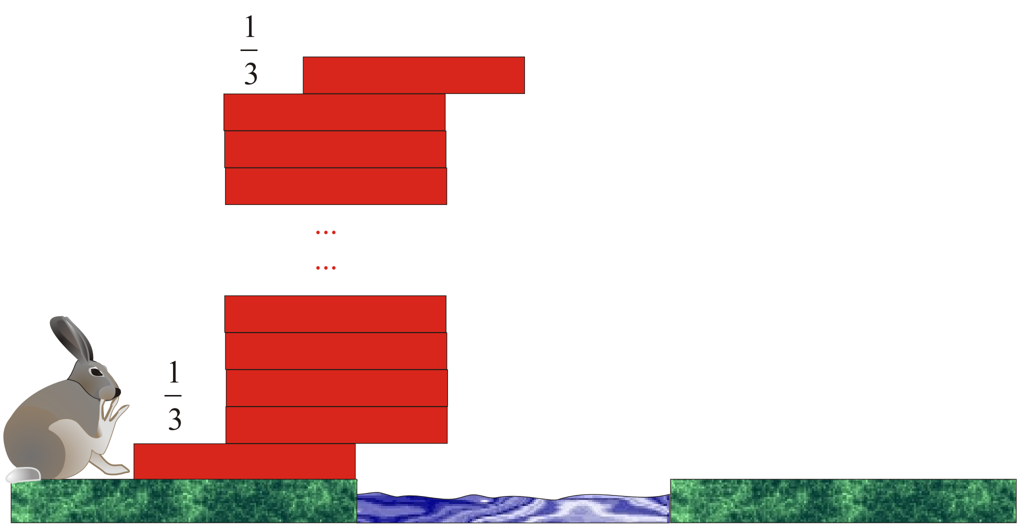
17.1.1 Příklad (Vysoká stavba)

Králíci se potřebují dostat přes řeku. Na břehu jsou na sobě postaveny cihly (tvoří vysoký komín s podstavou jedné cihly). Šikovný králík do každé z nich trochu strčil, vylezl nahoru a spustil se po provaze na druhou stranu řeky. Je to možné ? ANO.

Studentům chybí ocenění důležitosti a bohatosti matematiky.
(Griffith 2000)

Důkaz: Nejvyšší cihla se posune o $1/3$, pak se dalších 1000 cihel nechá bez posunu, až "horních"1001 cihel má těžiště "téměř uprostřed 1001-ní cihly odshora. Pak cihlu 1002-hou posuneme o $1/3$. Nyní necháme milion cihel bez posunu ...

Duší vtipu je stručnost.
(W.Shakespeare $\sim$ 1590)

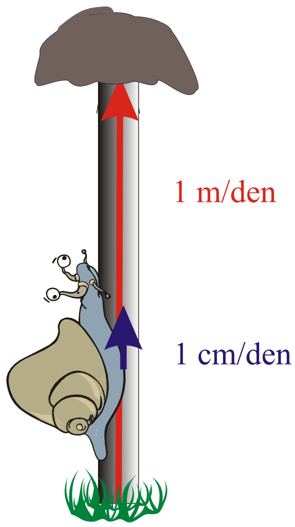


Obrázek 17.1.1: Králík staví komín.

Nasbíráme-li dost "třetin", dostaneme se kamkoliv. ■

17.2 Příklad (Pomalý šnek)

Představme si pomalého šneka, který leze po rychle rostoucí houbě. Doleze na vršek?



Obrázek 17.2.0: Houba rovnoměrně roste do výšky. Doleze šnek na vršek?

Důkaz: Jestli houba roste 100 krát rychleji než šnek leze, tak první den šnek popoleze o jednu setinu výšky houby. Druhý den o jednu dvousetinu a tak dál. Celkem takto sbírá části odpovídající harmonické řadě, která diverguje. Když součet těchto částí překročí jedničku, dosáhne na vršek houby. ■

> Praxe je nejlepší učitelka.
>
> (Cicero)

17.3 Od kdy do kdy a co za to

17.3.1 Exponenciální banka

Banka vyhlásila, že bude poskytovat 100 % roční úrok. Pokud vložíš do banky jednu zlatku, dostaneš za rok dvě zlatky. Ženuška hned rozhodla, že pošle svého mužíčka do banky po půl roce, nechá jej vyzvednout jeden a půl zlatku a hned ji tam zase na půl roku vloží. Tak místo dvou zlatek dostane

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 .$$

Pak jí napadlo, že by tam mohl mužíček jít ještě častěji …Nakonec tam stál mužíček od rána do večera, vkládal a vybíral a bankéř rozhodl, že s tím něco udělá.

Řekl si, že označí $x(t)$ stav mužíčkových peněz v čase t, přičemž $x(0) = 1$ zlatka. Pak si uvědomil, že se vlastně peníze průběžně samy množí a že čím je jich víc, tím víc jich přibývá. Tak si napsal rovnici

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \ ,$$

čímž zachytil přírůstek peněz $dx(t)$ za čas dt.

> Diferenciální rovnice jsou srdcem matematické analýzy, aplikace jsou krví.
> (G.F.Simmons 1972)

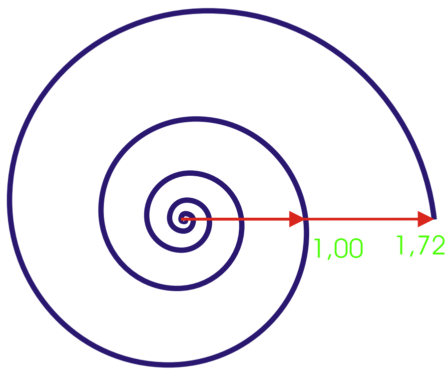
Tato rovnice dává řešení $x(t) = e^t$, tedy dal po roce mužíčkovi (ženušce) místo dvou zlatek neuvěřitelných e zlatek.

> Nelze se ubránit pocitu, že matematické vzorečky existují nezávisle na nás a že jsou chytřejší než my
> (H.Hertz)

Tak ženuška dosáhla, že banka místo 100% dávala pěkných 172%.

> Taková ženuška se prostě nedá vyvážit zlatem . . .

Obrázek 17.3.1: Mušle.



Obrázek 17.3.1: Spirála odpovídá spojitému úročení.

Závislosti, při které změna jisté veličiny odpovídá množství této veličiny, se říká **zákon exponenciálního růstu**. Podle něj se množí bakterie, rozkládají se radioaktivní látky . . .

17.3.2 Zjišťování stáří fosílií

V atmosféře se vlivem kosmického záření vytváří radioaktivní izotop uhlíku C^{14}. Tento izotop je nestálý a rozpadá se s poločasem rozpadu 5568 ± 30 roků. Tak se v atmosféře vytváří i rozpadá a ustálila se jeho rovnováha. Podobně se C^{14} rozpadá v žijícím organismu a je neustále doplňován z prostředí. Takto je v žijícím organismu jeho množství na jisté rovnovážné hladině. Pokud organismus nežije, nastává proces poklesu hladiny C^{14}, protože není doplňován.

Rovnice popisující množství C^{14} v čase t vypadá

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) \ ,$$

kde k je záporná konstanta. Řešení $x(t) = x(0)e^{kt}$ použijeme pro zjištění stáří fosílií. Známe-li množství C^{14} ve fosílii nyní a umíme-li odhadnout množství C^{14} v čase $t = 0$, zjistíme dobu, po kterou probíhalo odbourávání C^{14} v organizmu. Například $x(5568) = x(0)/2$, tak určíme konstantu k (souvisí s "poločasem rozpadu").
Takto se například zjistila doba, kdy lidstvo osídlilo Ameriku, kdy se stavěl Stonehenge (3798 ± 275)

Obrázek 17.3.2: Stonehenge.

a kdy vzniklo Velké kráterové jezero v Oregonu (6453 ± 250).

Obrázek 17.3.2: Velké kráterové jezero.

17.3.3 Metoda řešení

V rovnici

$$\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

pro neznámou funkci $x(t)$ a konstantu k provedeme trikové násobení výrazem e^{-kt}. Ten je zvolen tak, aby levá strana rovnice byla derivací nějaké funkce. Dostaneme tedy

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-kt}\right) = 0 \,.$$

To znamená, že je jistá funkce konstantní. Platí tedy

$$xe^{-kt} = c$$

pro jistou konstantu c. Pak $x(t) = ce^{kt}$ s konstantou c.

Obecně můžeme dostat vztah $F(t, x(t)) = c$, který nazveme **řešení v implicitním tvaru**.

Použili jsme zde postup, kterému se říká **metoda integračního faktoru**.

Jaký integrační faktor (to je to, čím násobíme) použít ve které situaci, může být pěkné dobrodružství.
Někdy může být integrační faktor roven 1 ;-)

17.4 Existence a jednoznačnost

17.4.1 Existence řešení

Řešíme rovnici

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \,.$$

Budeme hledat řešení pomocí aproximace. Vycházíme z bodu (t_0, x_0) a sestrojíme z tohoto bodu úsečku ve směru hledaného řešení, tedy se směrnicí $f(t_0, x_0)$. Její druhý koncový bod nazveme (t_1, x_1) a pokračujeme ve směru $f(t_1, x_1)$. Takto najdeme jakýsi polygon jako hrubý tvar řešení.

(L.Euler $\sim$ 1740)

Je-li funkce f spojitá, omezená a sublineární vzhledem k proměnné x na obdélníku R, konvergují takovéto polygony k řešení.

(É.Picard 1893)

17.4.2 Asymptotická stabilita

Řešení u rovnice $Ty = f$ nazveme **asymptoticky stabilní řešení**, pokud pro každé řešení v platí

$$\lim_{t \to \infty} |u(t) - v(t)| = 0 \,.$$

Řešení se mohou blížit k stabilnímu sedlu, mohou tvořit sedlo, spirálu.

17.4.3 Distributivní řešení

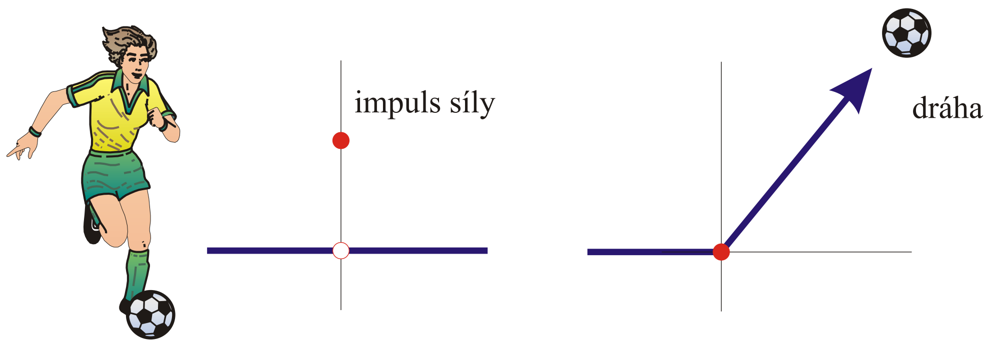
Pro $L = \frac{d}{dt} + a$, $a > 0$, fundamentální řešení rovnice

$$L\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt} + a\varepsilon = \delta(t)$$

je rovno

$$\varepsilon(t) = h(t)e^{-at} .$$

> Let do Abstraktna musí začínat a končit v Konkrétnu.
>
> (R.Courant)



Obrázek 17.4.3: Distributivní řešení nemusí mít všude derivaci, vstupy nemusí být spojité.

> Distributivní řešení je dobrý kompromis. Když nakopneš míč, tak vyletí danou rychlostí a nikoho příliš nezajímá okamžik výkopu.

17.5 Ono se to srovná

17.5.1 Kam dopluje loď

Po západu slunce přestali námořníci veslovat. Je bržděna pouze třením, nefouká vítr. Za 10 sekund doplula 30 metrů, za dalších 10 sekund doplula ještě 15 metrů. Kde se zastaví?

Označíme si m hmotnost lodi s nákladem, $v(t)$ její rychlost v čase t a nechť kladná konstanta k je odpovídá tření, které pro malé rychlosti (snad) závisí lineárně na rychlosti. Pak

$$ma(t) = m\frac{dv}{dt} = -kv$$

Obrázek 17.5.1: Loď pluje na Krétu. Na jakou rychlost musí rozjet loď, aby poslední míli na Krétu dojeli bez veslování?

vyjadřuje, že třecí síla působí na těleso a brzdí jej ($a(t)$ je zrychlení a záporné znaménko vypovídá o směru síly proti pohybu). Tedy

$$\frac{dv}{dt} = -mkv$$

má řešení $v(t) = v(0)e^{-mkt}$. Vzhledem k tomu, že je rychlost $v(t)$ derivací dráhy $s(t)$, tedy $ds/dt = v$, můžeme integrováním rychlosti získat dráhu

$$s(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau = \frac{v(0)}{mk}(1 - e^{-mkt}) \,.$$

Vidíme, že

$$s(\infty) = \lim_{t\to\infty} s(t) = \frac{v(0)}{mk} \,.$$

Víme, že $s(10) = 30$ a $s(20) = 45$. S těmito informacemi vytlačíme ze vzorečku pro $s(\infty)$ nežádoucí konstanty a dostaneme

$$s(\infty) = \frac{30^2}{60-45} = 60 \,,$$

tedy loď dopluje ještě 15 metrů, celkem bez pohonu 60 metrů.

> Nedovedu to udělat bez počítačů.
> (W.Shakespeare $\sim$ 1590)

17.5.2 Metoda variace konstant

Řešíme obecně rovnici

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) + f(t)$$

pro neznámou funkci $x(t)$, konstantu k a funkci $f(t)$. K tomu použijeme řešení rovnice

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t)$$

ve tvaru $x(t) = ce^{kt}$ s konstantou c. Nyní zkusíme do původní rovnice dosadit $x(t) = c(t)e^{kt}$, kde považujeme nyní $c(t)$ jako drobnou "variaci"konstanty c. Po dosazení dostaneme rovnici pro funkci $c(t)$ ve tvaru

$$\frac{dc(t)}{dt} = e^{-kt} f(t) \ .$$

Zintegrováním dostaneme $c(t)$ a následně máme $x(t) = c(t)e^{kt}$.

Použili jsme zde postup, kterému se říká **metoda variace konstant**.

Prostě a jednoduše – hádáme tvar řešení. Je to jako malá kapesní krádež z kapsy Osudu.

17.5.3 Populační exploze

Růst populace P závisí na přímo její velikosti. Na druhé straně je zpomalován problémy s dostatkem potravin. Pokud je maximální velikost populace rovna M, pak faktor $M - P$ brzdí přirozený růst populace. Řešíme tedy úlohu

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P) \ , \ P(0) = P_0 \ .$$

(P.Verhulst 1845)

Této rovnici se říká **logistická rovnice**. Rozkladem na parciální zlomky nebo substitucí $p = 1/P$ dostaneme řešení

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{M} + \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}\right) e^{-kMt}$$

a populace se bude blížit M.

17.5.4 Společenská mobilita

Označme $s(t)$ množství lidí ochotných se přestěhovat za prací. Do hry vstupuje jejich motivace M, dovednosti D a odpor ke změně R. Rovnice může mít tvar

$$\frac{ds}{dt} = M \cdot D - R \cdot s(t) \ .$$

17.5.5 Chemická reakce

Chemická reakce $A + B \rightarrow C$ probíhá s rychlostí závislou na součinu koncentrací látek A a B. Označme koncentrace $a = [A]$ mol/litr, $b = [B]$ mol/litr. Pak pro $x = [C]$ platí

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \ .$$

17.5.6 Znečištění jezera

Do jezera o objemu V obsahujícího škodlivé látky přitéká ročně $V/10$ čisté vody a odtéká $V/10$ průměrně (z pohledu jezera) znečištěné vody. Kdy poklesne množství škodlivých látek v jezeře na polovinu?

17.6 Když se dva perou . . .

17.6.1 Jak neprohrát válku

Do boje jdou dvě armády (například mikroorganismů). Jejich počty v čase t označíme $x(t)$ a $y(t)$. Úbytek jedné armády je přímo úměrný velikosti druhé. Tady platí vztahy

$$\frac{dx}{dt} = -ky \; , \; \frac{dy}{dt} = -kx$$

s vhodnou konstantou k (předpokládáme stejně šikovné armády). Vynásobíme první rovnici x a druhou rovnici y a odečteme:

$$x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} = 0 \; , \; \text{čili} \; \frac{d(x^2 - y^2)}{dt} = 0 \; .$$

Vidíme tedy řešení $x^2 - y^2 = c$ pro vhodnou konstantu c. Tedy pokud byly armády veliké x_0 a y_0, platí na konci války v čase T rovnost

$$x_0^2 - y_0^2 = x(T)^2 - y(T)^2 = x(T)^2 \; ,$$

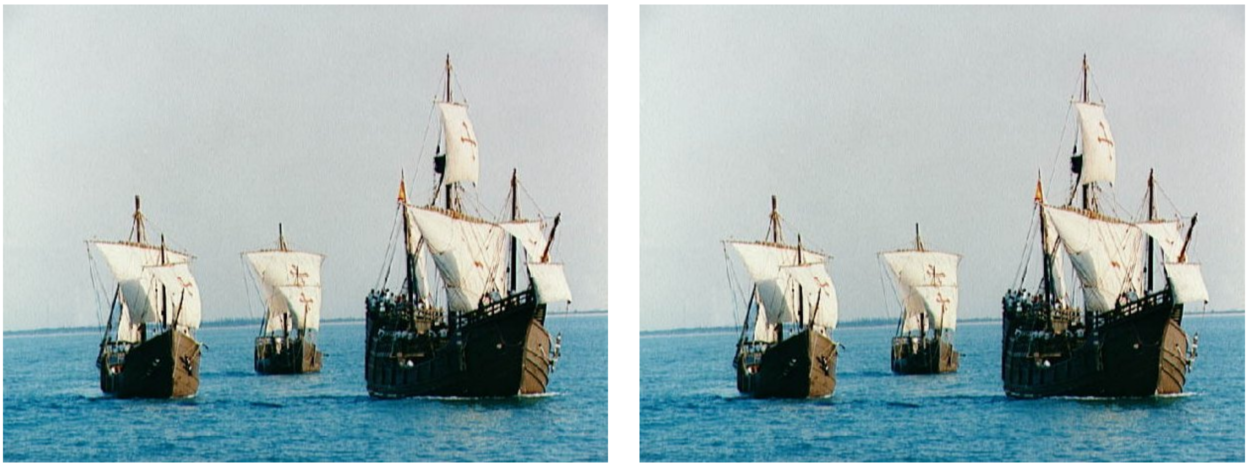
tedy zbyde armáda x o velikosti

$$x(T) = \sqrt{x_0^2 - y_0^2} \; .$$

Pokud silná armáda z bojuje postupně se dvěma armádami x a y, zůstane

$$z(T) = \sqrt{z_0^2 - x_0^2 - y_0^2} \; .$$

(F.Lanchester 1916)



Obrázek 17.6.1: V roce 1805 v bitvě u Trafalgaru admirál Nelson rozdělil loďstvo silnějšího protivníka na dvě poloviny a bojoval nejprve s jednou a pak s druhou polovinou. Vyhrál. Mohl to udělat lépe?

17.6.2 Odzbrojování

Uvažujme dva státy a jejich armády x a y. Pokud označíme A, B jejich vzájemnou nedůvěru, C, D ceny zbraní a E,F společenskou poptávku po zbrojení, lze zkoumat soustavu

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= Ay(t) - Cx(t) + E \\ \frac{dy(t)}{dt} &= Bx(t) - Dy(t) + F \, .\end{aligned}$$

Je proces odzbrojování stabilní?

17.6.3 Boj s neštovicemi

Budeme se zabývat neštovicemi, což je vysoce nakažlivá nemoc. Pokud jí však někdo nepodlehne, získá natrvalo imunitu proti dalšímu nakažení.¨

Uvažujeme pouze populaci narozenou v čase $t = 0$ a její další vývoj. Označme $x(t)$ populaci v čase t a $y(t)$ tu část populace, která ještě neměla nemoc. Z důvodu nakažení se y zmenšuje rychlostí ay, kde a je koeficient nakažení, celková populace x se z důvodu nemoci zmenšuje rychlostí aby, kde b je koeficient úmrtnosti na nemoc. Z důvodů nesouvisejících s nemocí se x i y zmenšují s rychlostí $d(t)$ závisející na čase t (roky). Rovnice popisující tyto závislosti vypadají

$$\frac{dx}{dt} = -aby - d(t)x \, , \; \frac{dy}{dt} = -ay - d(t)y \, .$$

První rovnici vynásobíme y a druhou x a odečteme. Pak

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = -aby^2 + axy \, .$$

Vynásobíme integračním faktorem $1/y^2$ a dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = -ab + a\frac{x}{y} \, .$$

Tedy pro poměr $z = x/y$ dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = -ab + az \, , \; z(0) = 1$$

s řešením $z(t) = b + (1-b)e^{at}$.

Čili pro odhad konstant $a = b = 1/8$ dostaneme hodnotu $z(20)$ přibližně rovnu 11. Tedy pouze asi 9% dvacetiletých ještě neprodělalo nemoc.

(Daniel Bernoulli 1760)

A pak Bernoulli navrhl očkování. Tím se prodlouží doba života o tři roky. . . .

17.6.4 Nákaza HIV

Uvažujeme základní model nákazy virem HIV, při kterém se viry HIV napadají buňky CD4+T, taková napadená buňka vytvoří kopie viru HIV a zanikne. V systému jsou ještě protilátky, které ničí viry HIV, nicméně jejich účinnost slábne.

Dále přistupují další okolnosti. Virus HIV dokáže mutovat, léky mohou zasáhnout do fungování celého systému.

Při modelování zkoumáme průběh infekce v čase. Počet $V(t)$ kopií viru HIV, počet $B(t)$ nenapadených buněk, počet $N(t)$ napadených buněk, množství $P(t)$ protilátek, množství léků $L(t)$, ... zkoumáme pomocí soustavy diferenciálních rovnic.

Porovnáním modelu a reality vidíme, že je výhodné kombinovat několik typů léků.

17.6.5 Společenské problémy

Podobně jako nákaza se šíří drby. Množství „informovaných" $x(t)$ v čase t vyhovuje rovnici

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)(M - x(t)) \, .$$

17.6.6 O soustavách

Soustava

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' & = & f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots & = & \dots \\ x_n' & = & f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

je šikovný zápis mnoha problémů.

Aktivisti = objevují metody k řešení vědeckých problémů
Pasivisti = analyzují myšlenky a nástroje aktivistů
(G.F.Simmons 1972)

Na tento zápis se dá převést problém

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

obsahující pouze jednu neznámou funkci pomocí převodního vztahu

$$x_1 = x, \; x_2 = x', \; \dots, \; x_n = x^{(n-1)} \, ,$$

který vede k zápisu

$$\begin{array}{rcl} x_1' &=& x_2 \\ x_2' &=& x_3 \\ \dots &=& \dots\dots \\ x_n' &=& f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \ . \end{array}$$

Je zřejmé, že periodické řešení diferenciální rovnice vede na uzavřenou trajektorii soustavy.
Pokud jsou pravé strany lineárními funkcemi

$$\begin{array}{rcl} x_1' &=& \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2' &=& \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots &=& \dots\dots\dots \\ x_n' &=& \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n \ , \end{array}$$

lze (často úspěšně) hledat řešení ve tvaru

$$(c_1e^{\lambda t}, c_2e^{\lambda t}, \dots c_ne^{\lambda t}) \ .$$

17.6.7 Fundamentální systém řešení

Řešíme rovnici $Ty = 0$ bez počátečních podmínek. Někdy jsou nalezená řešení lineárně nezávislá a tvoří bázi lineárního prostoru všech řešení rovnice $Ty = 0$.
Lineární nezávislost řešení rovnice $Ty = 0$ pro diferenciální operátor

$$T : y \mapsto p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

se lehce zjistí pomocí následujícího kritéria.
Determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

je nulový pro řešení $y_1, \dots, y_n$ rovnice $Ty = 0$ na intervalu právě když jsou daná řešení lineárně závislá.

(J.H.Wronski)

Pokud máme lineárně nezávislá řešení $y_1, \dots, y_n$ rovnice $Ty = 0$, můžeme hledat partikulární řešení rovnice $Ty = f$ variací parametrů ve tvaru

$$c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x) \ .$$

Soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= x + y, \\
y' &= 6x
\end{aligned}
$$

lze převést jednu rovnici formálním výpočtem

$$(D-1)x = y \;\; \& \;\; Dy = 6x \implies D(D-1)x = x = Dy = 6x \implies (D^2 - D - 6)x = 0\,.$$

Tak se dovedeme zbavit „libovolné“ soustavy.

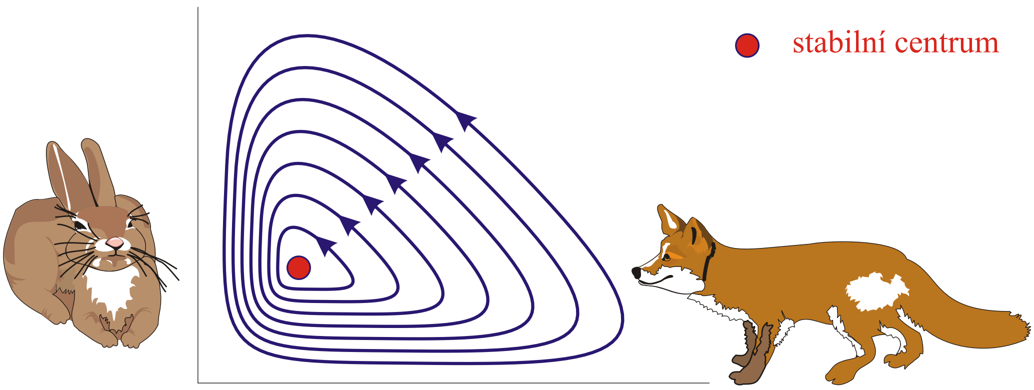
17.6.8 Dravec a kořist

Uvažujeme soustavu rovnic popisující soupeření dvou populací x a y

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -kx + bxy = x(-k + by) \\
\frac{dy}{dt} &= my - cxy = y(m - cx)\,.
\end{aligned}
$$

(A.J.Lotka 1910, V.Voltera 1926)

Stacionární řešení je $(m/c, k/b)$ je stabilní centrum.



Obrázek 17.6.8: Systém se periodicky mění ...

Když se k soustavě dravec-kořist přidá vnější vliv, například rybolov v moři, projeví se to na pravé straně členy $-\varepsilon x$, $-\varepsilon y$. Tím v podstatě modifikujeme konstanty k a m. Posune se tím hodnota stabilního řešení ve prospěch jedné (čí?) strany.

Přidáme-li samoomezující člen do rovnice dravec-kořist, dostaneme

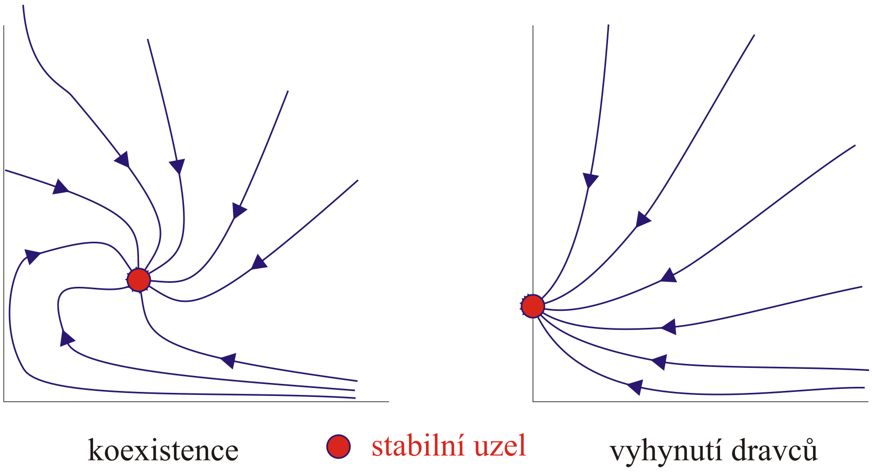
$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -kx - ax^2 + bxy = x(-k - ax + by) \\
\frac{dy}{dt} &= my - cxy - dy^2 = y(m - cx - dy)\,,
\end{aligned}
$$

Obrázek 17.6.8: Jak vzpomínají žraloci na světovou válku?

dostaneme stabilní řešení

$$x_0 = \frac{bm - dk}{ad - bc}\ , \ y_0 = \frac{am + ck}{ad + bc}\ .$$

Pak y_0 je vždy kladné, ale x_0 může být nula. To vede k vyhynutí dravců.



Obrázek 17.6.8: Dravci se musejí krotit . . .

Ach ta biodiverzita . . .

17.6.9 O fázové rovině

Budeme řešit obecně nelineární úlohy, kde

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y)\ . \end{aligned}$$

Pravá strana určuje, jak se při daném stavu $x(t)$ a $y(t)$ bude měnit funkce x a y. Pokud jednu rovnici vydělíme druhou, dostaneme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}\ , \ \text{nebo}\ \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}\ .$$

Tedy ve fázové rovině (x, y) mají trajektorie v každém bodě jasně definovanou směrnici, čímž se otevírá názorná možnost, jak se o řešení hodně dozvědět pomocí trajektorií.

Bez újmy na zajímavosti se budeme zabývat soustavou

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y)\ .\end{aligned}$$

Nulovým bodům (body (x_0, y_0), pro které se pravé strany nulují) odpovídá konstantní řešení. Jinak uvažujeme **trajektorie** $t \mapsto (x(t), y(t))$, což jsou křivky popisující pozici řešení v čase t ve fázové rovině xy.

17.6.10 Soupeřivé populace

Uvažujeme soustavu rovnic popisující soupeření dvou populací x a y

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= kx - ax^2 - bxy = x(k - ax - by)\ ,\\ \frac{dy}{dt} &= my - dy^2 - dxy = y(m - cx - dy)\ .\end{aligned}$$

Člen xy v rovnicích odpovídá vzájemné interakci obou populací. Vynulováním jednotlivých činitelů zjistíme stacionární body soustavy.

Pro určité parametry existuje stabilní uzel dovolující přežití obou populací, jindy jediné stabilní řešení vede k zániku jedné populace. Křivku oddělující oblasti vedoucí k vyhynutí jedné populace budeme nazývat **separatrix**.

17.6.11 O kritických bodech soustav

Uzavřená trajektorie soustavy

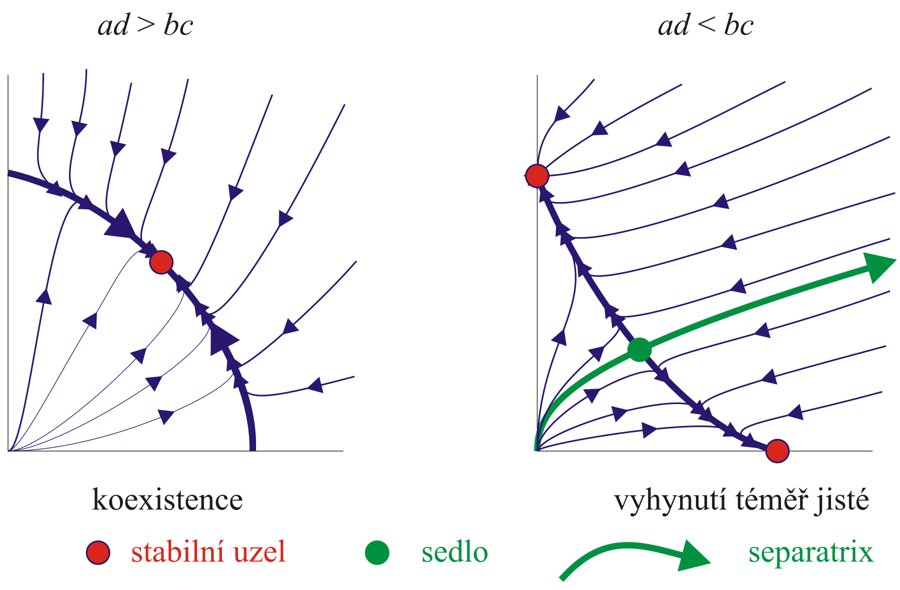
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y)\end{aligned}$$

ohraničuje vždy alespoň jeden kritický bod systému.

(H.J.Poincaré $\sim$ 1910)

Je-li všude $\partial F/\partial x + \partial G/\partial y > 0$, pak neexistují uzavřené trajektorie.

(I.O. Bendixson $\sim$ 1900)



Obrázek 17.6.10: Někdy vyhynou jedni, jindy ti druzí . . .

Jestliže se trajektorie pohybuje a zůstává v uzavřené oblasti fázové roviny (například v uzavřeném mezikruží) bez kritických bodů, pak je to uzavřená trajektorie nebo spirála aproximující uzavřenou trajektorii.

(H.J.Poincaré ∼ 1910 a I.O.Bendixson ∼ 1900)

Příkladem je nelineární soustava rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= k(1-x^2)y - x\,. \end{aligned}$$

popisující nelineární oscilátor. Tato soustava má periodické řešení.

(van der Pol 1924)

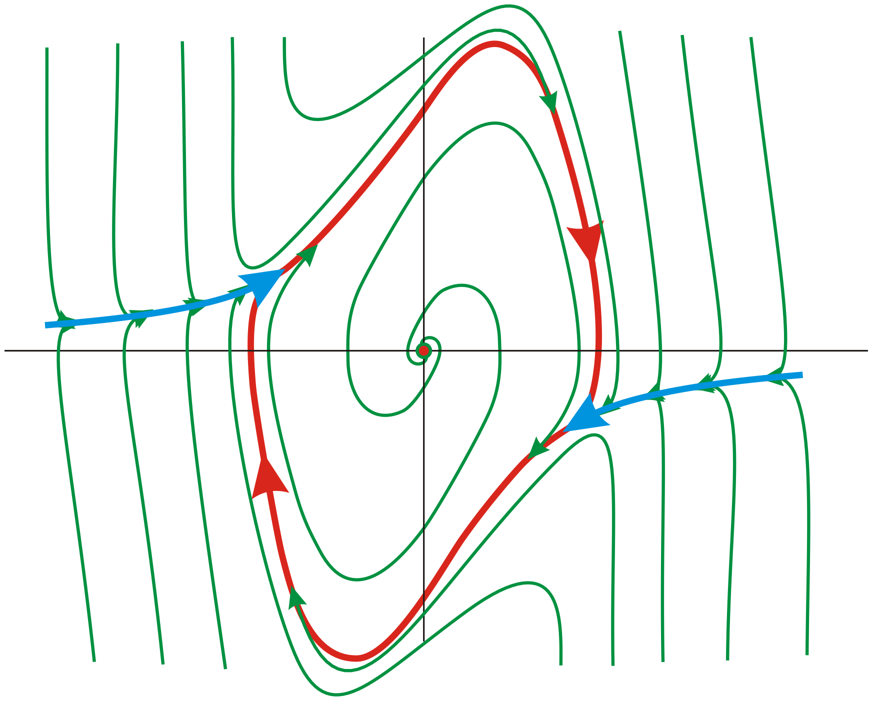
Podobný charakter mají procesy v lidském těle. Tvorba některých látek se spouští až při indikaci jejich nedostatku. Tak v těle hladiny těchto látek periodicky kolísají.

Zásobu dříví na zimu si děláte až když minulá zásoba dochází.

17.6.12 Maticový zápis a řešení

Soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2 \end{aligned}$$



Obrázek 17.6.11: Nelineární soustava může mít periodické řešení.

lze psát maticovým a vektorovým zápisem

$$X' = AX + F$$

nebo též ve tvaru $TX = F$, kde $TX = X' - AX$.

A je možné si hrát s maticemi.

Soustava

$$X' = AX \ , \ X(0) = I \ ,$$

kde I je jednotková matice, má řešení

$$X(t) = e^{At} \ ,$$

kde používáme operátorový počet $A \mapsto e^A$ (popřípadě definujeme e^A pomocí konvergentní řady $I + A/1! + A^2/2! + \cdots$).

17.7 Jak ušetřit . . .

17.7.1 Nejkratší cesta

Nejkratší křivka spojující dva body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) v rovině zkoumaná jako funkce $y = y(x)$ vede na minimalizaci integrálu

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \ .$$

17.7.2 Variační metoda

Chceme najít funkci $y = y(x)$, která minimalizuje integrál

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx\ .$$

Uvažujeme nyní funkci $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$, kde η chápeme jako odchylku od funkce y. Jde o funkci dvakrát spojitě diferencovatelnou a nulující se v bodech x_1 a x_2. Zkoumáme nyní funkci

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}')\, dx\ .$$

Pokud integrál I nabývá minimum pro funkci y, očekáváme, že funkce $I(\alpha)$ bude mít nulovou derivaci v α.

> Nerovnost je příčina všech lokálních pohybů.
>
> (L.da Vinci $\sim$ 1490)

Jedná se o slabou derivaci funkcionálu $y \mapsto I$.
Vyjádříme (derivujeme za integračním znamením)

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}')\, dx$$

a položíme rovno nule. Dostaneme

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right] dx = 0$$

a pomocí integrace po částech dostaneme

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx = 0\ .$$

Pokud se integrál nuluje pro každou uvažovanou η, musí být

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\ .$$

Vyjádříme to lépe

$$f_{y'y'}\frac{d^2y}{dx^2} + f_{y'y}\frac{dy}{dx} + (f_{y'x} - f_y) = 0\ ,$$

kde indexy odpovídají parciálním derivacím. Této diferenciální rovnici druhého řádu budeme říkat **variační rovnice**.

(L.Euler $\sim$ 1740)

Chceme najít dvě funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$, které minimalizují integrál

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z')\, dx\ .$$

Dostaneme podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0\ .$$

17.7.3 Půjdeme rovnou za nosem ...

V našem případě se variační rovnice redukuje na

$$\frac{1}{(1+(y')^2)^{3/2}}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ ,$$

proto jejím řešením jsou pouze lineární funkce.

17.7.4 Vázané extrémy

Hledáme extrém

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\, dx$$

vzhledem k podmínce

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x,y,y')\, dx \ = L \ .$$

Jde o kombinaci vázaných extrémů a metody variační. Její kritické body určíme řešením variační rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \ ,$$

kde $F = f + \lambda g$. Při řešení máme dvě integrační konstanty a multiplikátor λ. Tyto tři veličiny zjistíme po dosazení okrajových hodnot pro funkci y a použitím vazbové podmínky.

17.7.5 Jak postavit plot

Hledáme křivku délky L spojující body $(0,0)$ a $(1,0)$, která leží nad osou x a ohraničuje maximální plochu mezi osou x a grafem funkce y. Čili maximalizujeme

$$\int_0^1 y(x)\, dx$$

vzhledem k podmínce

$$\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\, dx \ = \ L \ .$$

Jedná se o vázaný extrém. Kombinací metody vázaných extrémů a metodu variační rovnice dostaneme rovnici

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) - 1 = 0 \ .$$

Po dvojím integrováním dostaneme

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2 \ .$$

Jedná se o kruhové oblouky kruhu o poloměru λ.

Pokud je L delší než příslušná polokružnice, zkusíme hledat křivku $t \mapsto (x(t), y(t))$ a maximalizovat

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (xy' - x'y)\, dt$$

vzhledem k podmínce

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt \ = L \ .$$

Zase dostaneme oblouk kružnice o poloměru λ.

Pro kružnici platí

$$\pi r^2 = \frac{(2\pi r)^2}{4} .$$

Obecně jde vyslovit vztah

$$\text{plocha} \leq \frac{(\text{ obvod })^2}{4\pi} .$$

Tomuto vztahu se říká **izoperimetrická nerovnice**.

Mám rád zakulacené tvary ;-)

17.7.6 Problém minimální plochy

Chceme najít funkci $z = z(x, y)$ na podmnožině R v rovině, která minimalizuje integrál

$$I(z) = \int f(x, y, z, z_x, z_y)\, dx\, dy .$$

Rovnice pro extremální plochu zní

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z_y}\right) = 0 .$$

Problém minimální plochy vede na minimalizaci

$$\int \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

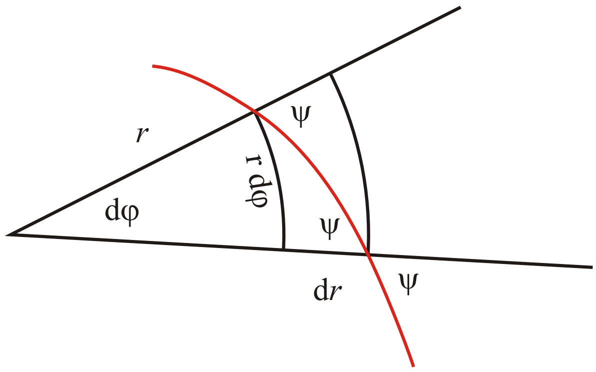
pro funkci $z = z(x, y)$ nabývající předepsaných hodnot na okraji zkoumané oblasti. Variační rovnice lze přepsat ve tvaru

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) .$$

(L.Euler $\sim$ 1740, J.L.Lagrange $\sim$ 1770, T.Radó, J.Douglas, J.Plateau)

Její řešení jsou krásné plochy s nulovou střední křivostí, všechny body jsou sedlové, plochy odpovídají mýdlovým bublinám.

Pro každou nekonvexní rovinnou oblast lze sestrojit okrajovou podmínku φ tak, že příslušný problém minimální plochy nemá klasické řešení.



Obrázek 17.8.1: Detail spirály.

17.8 Kudy kam ...

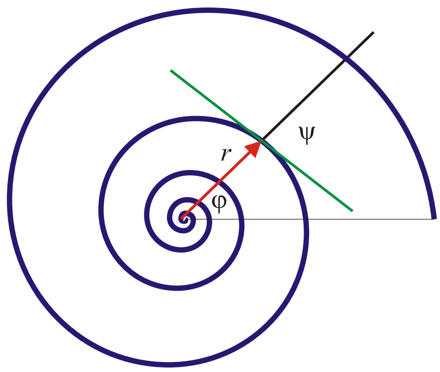
17.8.1 Jak si postavit ulitu

Nechť spirála popisující řez šnečí ulitou protíná spojnici s počátkem pod konstantním úhlem ψ. Pak z obrázku vidíme, že

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r\,d\varphi}{dr}\,,$$

tedy máme rovnici $dr/d\varphi = r/\psi$ a její řešení $r = ce^{\varphi/\operatorname{tg}\psi}$ popisuje křivku, která se nazývá **logaritmická spirála**.

Obrázek 17.8.1: Skutečná mušle má několik do sebe zamotaných spirál.



Obrázek 17.8.1: Spirála.

> Vědec nestuduje přírodu proto, že je užitečná; studuje ji proto, že mu to činí potěšení. Pokud by příroda nebyla krásná, nestála by za poznání, a kdyby nestála za poznání, život by nestál za žití.
> (H.J.Poincaré ∼ 1910)

Logaritmickou spirálu použijeme též při znázornění růstu úroků v bance.

> Na šnekovi zde vidíme zákon exponenciálního růstu ;-)

17.8.2 Ortogonální trajektorie

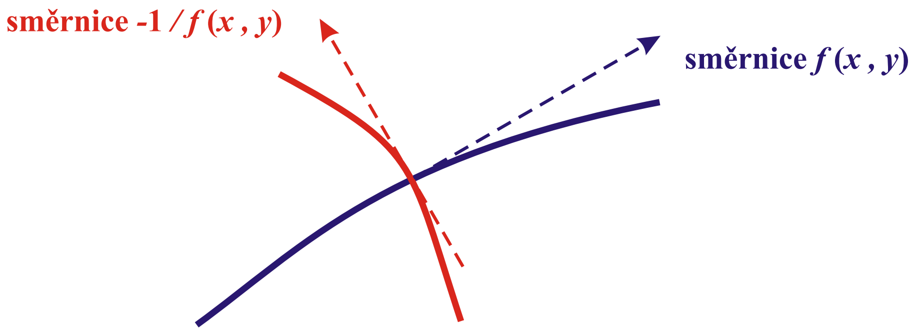
Pokud daná křivka vyhovuje v bodě vztahu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ,$$

vyhovuje v tomtéž bodě křivka k ní kolmá vztahu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} ,$$

což vidíme z obrázku.



Obrázek 17.8.2: Kolmé křivky a jejich směrnice.

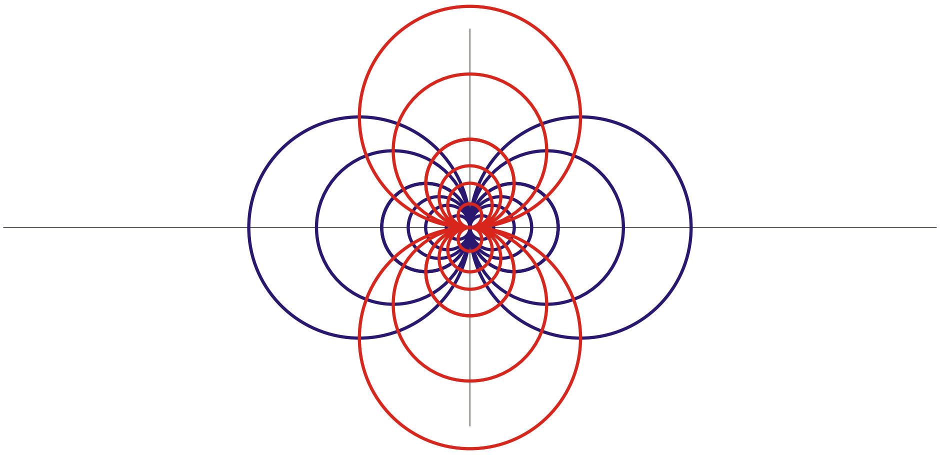
Vezmene systém křivek $x^2 + y^2 = cx$ vyhovujících diferenciální rovnici

$$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$$

a k nim kolmé křivky vyhovující vztahu

$$-2xy\frac{dx}{dy} = y^2 - x^2 ,$$

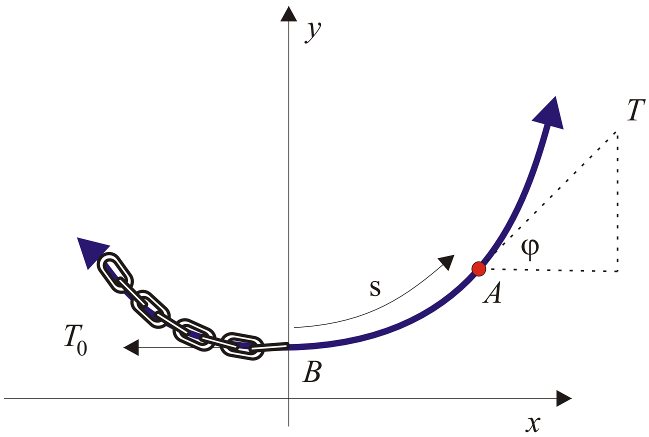
budou to křivky ze systému $x^2 + y^2 = cy$.



Obrázek 17.8.2: Křivky a křivky k nim kolmé.

17.8.3 Řetězovka

Uvažujeme na visícím řetězu obecný bod $A = (x, y)$ a nejnižší bod $B = (0, 0)$. Nechť má v bodě A křivka $y(x)$ směrnici φ. Pak vodorovná složka síly T v bodě A je rovna vodorovné síle T_0 v bodě B.



Obrázek 17.8.3: Řetězovka.

Pak

$$T_0 y' = T_0 \mathrm{tg}\, \varphi = T \sin \varphi = \int_0^s 1 \, ds = s \, .$$

Zderivujeme ještě jednou a dostaneme

$$T_0 y'' = \sqrt{1 + (y')^2} \, .$$

Substitujeme $y' = p$ a vyjádříme

$$p(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \, .$$

Pak

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

je křivka nazývaná **řetězovka**.

17.8.4 Problém lana

Máme najít tvar dokonale ohebného, neroztažitelného homogenního lana délky l, zavěšeného v bodech A a B. V rovnovážném stavu zaujme těžiště nejnižší polohu. Proto hledáme minimum statického momentu vzhledem k ose x. Budeme minimalizovat

$$\int_{x_A}^{x_B} y\sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

vzhledem k podmínce

$$\int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(y')^2}\, dx \;=\; l\ .$$

Variační rovnice vede opět na řetězovku.

17.8.5 Rotační plocha

Obrázek 17.8.5: Pokud chceme na hrnčířském kruhu vytočit hrnek, který půjde co nejlevněji pozlatit, musíme se snažit o minimální rotační plochu.

Nejmenší rotační plochou je funkce minimalizující

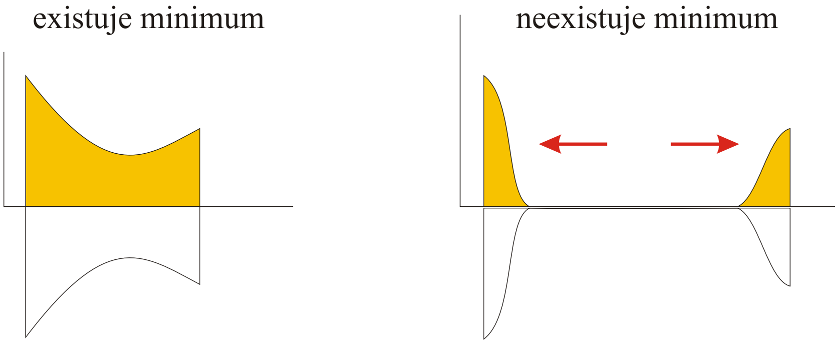
$$I = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\, dx\ .$$

Budeme řešit příslušnou variační rovnici. Její řešení je řetězovka

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

pro vhodné konstanty a, b.

Ne vždy je možné dva body spojit takovou řetězovkou. Ne vždy existuje minimální řešení v prostoru spojitých funkcí.

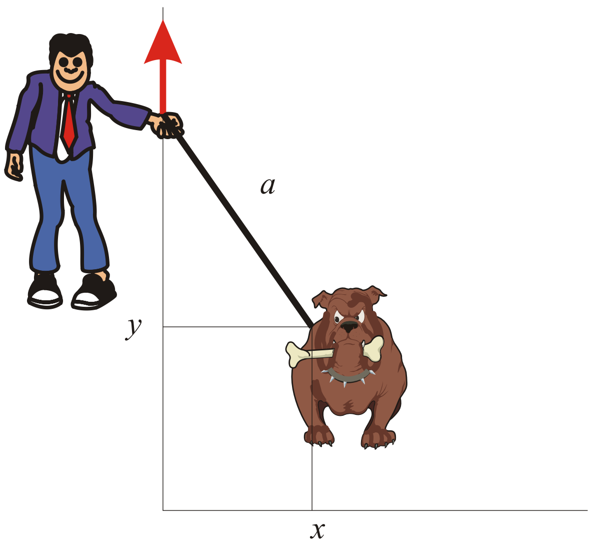


Obrázek 17.8.5: Úzký vysoký džbánek nepůjde udělat nejlevněji.

17.8.6 Na tahu

Táhneme pejska za vodítko délky a. Zjistíme, jakou křivku opíše. Rovnice je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \,.$$

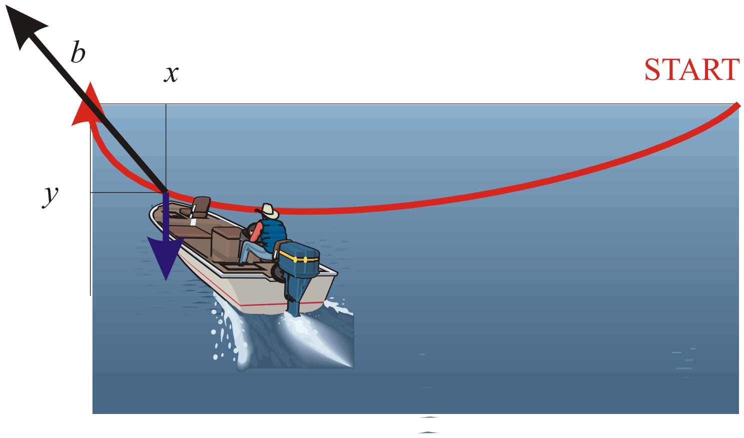


Obrázek 17.8.6: Pán táhne pejska.

17.8.7 Plavec zvítězí . . .

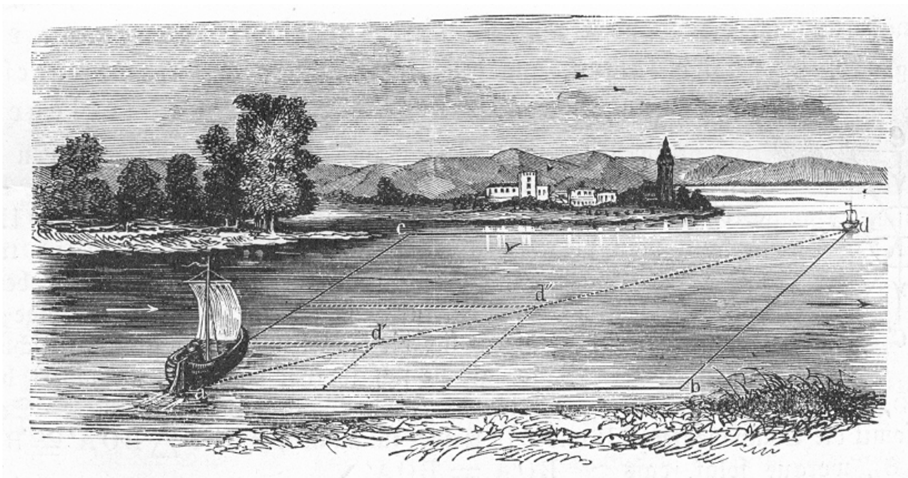
Řeku s proudem o rychlosti a chce překonat člun s rychlostí b. Stále pluje směrem k danému bodu. Jakou dráhu sleduje? Zkoumáme $t \mapsto (x(t), y(t))$ a odvodíme

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -b\cos\theta \\ \frac{dy}{dt} &= -a + b\sin\theta \,. \end{aligned}$$



Obrázek 17.8.7: Je třeba neustále korigovat směr.

Zkoumání tohoto řešení pro $a > b$ je zbytečné . . .

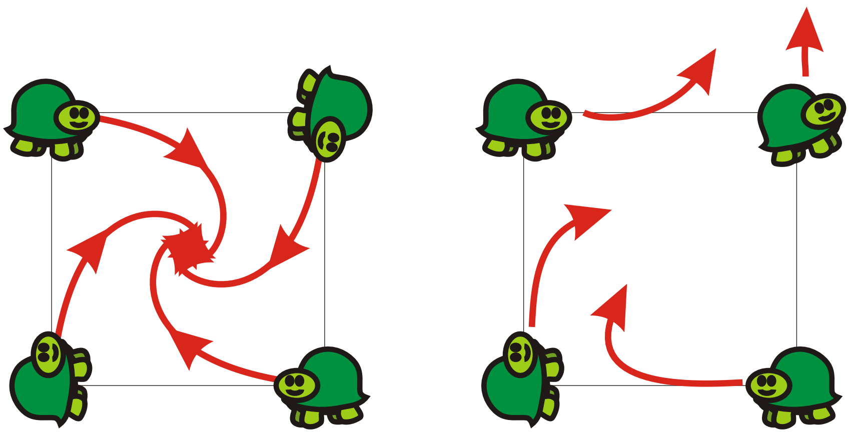


Obrázek 17.8.7: Loď unášená proudem nedorazí tam, kam chtěla.

17.8.8 Stíhací křivka

Uvažujme čtyři želvičky nacházející se v rozích čtvercového terária. V určitý okamžik se každá vydala stejnou rychlostí na kus řeči k želvičce napravo od ní. Díky symetrii jsou jejich trajektorie konečné spirály končící v prostředku terária.

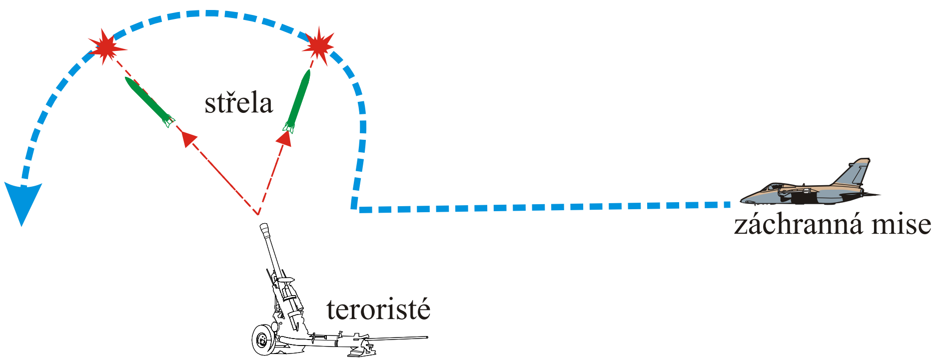
Pokud by však byly ve volné přírodě a jedna z nich by chtěla utéci co nejdále od ostatních, byly by trajektorie zcela jiné.



Obrázek 17.8.8: Jak se mohou želvičky honit.

17.8.9 Hon na neřízenou střelu

Teroristé odpálili v čase $t = 0$ z místa A střelu neznámým směrem se známou rychlostí v. Střelu nejde zachytit radarem a jde lokalizovat a zničit pouze z bezprostřední blízkosti. Po jaké křivce musí letět letadlo z místa B, pokud chce střelu zlikvidovat? Jakou potřebuje dosahovat rychlost?



Obrázek 17.8.9: Jestli se bude střela hledat po nebo proti směru hodinových ručiček je jedno.

> Naše příroda spočívá na pohybu; absolutní klid je smrt.
> (B.Pascal 1670)

17.9 Gravitace - dobrý sluha, zlý pán

17.9.1 Jistý homerun

Jakou rychlostí musí odpálit pálkar, aby mel jistý homerun?

Obrázek 17.9.1: Homerun vyžaduje sílu a rychlost.

Budeme chtít zjistit rychlost v_0 takovou, aby míč o hmotnosti m překonal zemskou přitažlivost a doletěl alespoň na Měsíc. Zanedbáme tření. Podle gravitačního zákona je míč přitahován k Zemi silou F závisející na vzdálenosti r od Země

$$F(r) = c\frac{Mm}{r^2} \, ,$$

kde M je hmotnost Země a c je konstanta. Označme R poloměr Země. Pak platí $F(R) = mg$, kde g je gravitační zrychlení. Tím se zbavíme konstanty c a máme

$$F(r) = mg\frac{R^2}{r^2} \, .$$

Pokud má míč vyletět nekonečně daleko, musí být jeho kinetická energie na počátku

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$

alespoň rovna práci, kterou na jeho brždění vykoná gravitační síla Země

$$\int_R^\infty mg\frac{R^2}{r^2}\, dr \;=\; \lim_{r\to\infty} mgR^2\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right) \;=\; mgR \, .$$

Kalkulus je nejlepší pomůcka, kterou máme pro aplikování fyzikální pravdy v nejširším slova smyslu.

(W.F.Osgoog)

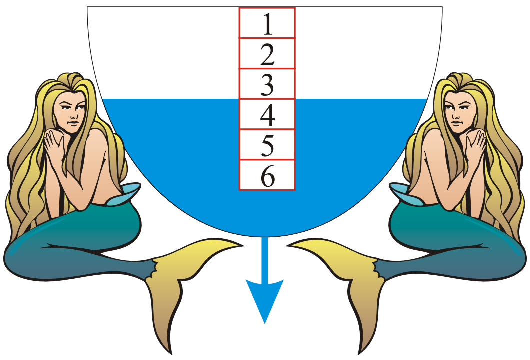
Tedy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \;=\; mgR \, , \quad \text{čili} \quad v_0 = \sqrt{2gR}$$

Přibližně dostaneme rychlost odpalu $11,2$ km/s.

17.9.2 Vodní hodiny

Budeme chtít sestrojit hodiny, které by ukazovaly hodiny pomocí hladiny vody, která vytéká z nádržky. Jedna možnost je zvolit nádržku válcovitou, ale pak bude stupnice času nepravidelná. Zkusíme najít tvar nádržky, která povede k pravidelné stupnici.



Obrázek 17.9.2: Jak se měří čas - vodní hodiny.

Voda vytéká z nádržky rychlostí v, která je rovna rychlosti, kterou by získala voda při volném pádu od hladiny ve výšce h. Tedy potenciální energie mgh je rovna kinetické energii $mv^2/2$. Tedy $v = \sqrt{2gh}$. Má-li výtok průřez a, vytéká

$$ab\sqrt{2gh}$$

vody, kde konstanta b je pro vodu přibližně 0,6. Tedy úbytek celkového objemu vody

$$\frac{dV}{dt} = -ab\sqrt{2gh}\ .$$

Pokud má nádoba ve výšce h vodorovný řez $A(h)$, dostaneme pro celkové množství vody do výšky h vzoreček (integrujeme přes řezy)

$$V(h) = \int_0^h A(z)\, dz\ .$$

Tedy podle řetízkového pravidla máme

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = A(h)\frac{dh}{dt}\ ,$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili základní větu analýzy na vztah V a A. Celkově máme

$$-ab\sqrt{2gh} = A(h)\frac{dh}{dt}\ .$$

Odsud vyjádříme dt/dh a spočteme integrací celkový čas T potřebný k vypuštění nádržky o výšce H

$$T = \int_0^T 1\, dt = \frac{1}{ab\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{A(h)}{\sqrt{h}}\, dh\ .$$

Pokud chceme sestrojit vodní hodiny, kde T závisí lineárně na výšce H, dostaneme například průřez $A(h) = \pi\sqrt{h}$, což odpovídá rotačně symetrické nádobce vzniklé rotací $y = x^4$. Tyto vodní hodiny se nazývají **klepsydra**.

> Příroda si zařídila své věci po svém a pak naučila lidi s velkou námahou porozumět části jejích tajemství
>
> (Galileo)

17.9.3 Gravitační síla

Dvě tělesa o hmotnosti m_1, m_2 ve vzdálenosti r se přitahují vzájemně gravitační silou

$$F_g = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\ ,$$

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$.
Budeme zkoumat padající těleso. Označíme $x(t)$ dráhu volného pádu bez tření a vidíme, že použití gravitační síly mg udělí tělesu zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$mg = F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}\ .$$

Použili jsme druhý pohybový zákon: síla = hmotnost * zrychlení. Tedy dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\ .$$

Její řešení jsou funkce

$$x(t) = \frac{1}{2}dt^2 + v_0 t + x_0\ ,$$

kde x_0 a v_0 udávají počáteční polohu a rychlost.
Pokud započítáme sílu tření, dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - c\frac{dx}{dt}\ .$$

Pro nulové počáteční podmínky funkce dostaneme

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct})\ ,$$

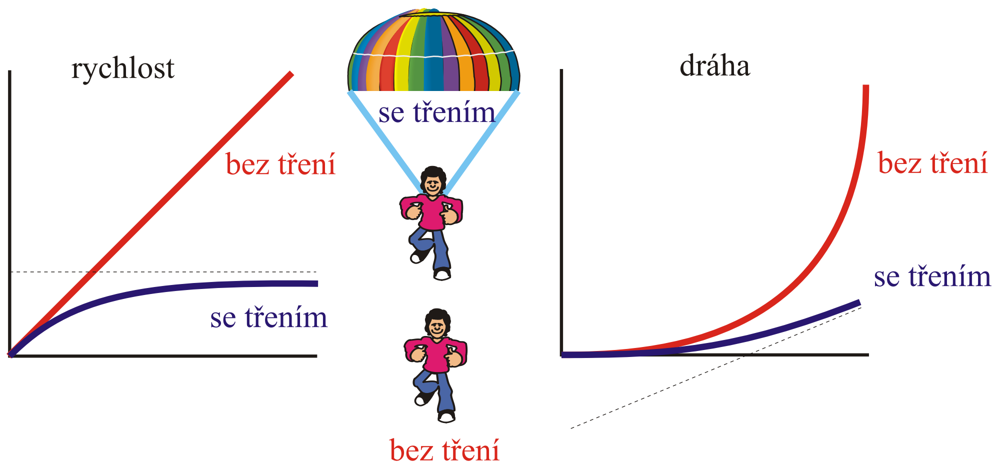
což potvrzuje známý fakt, že rychlost při volném pádu se třením neroste nade všechny meze.

17.9.4 Pohyby planet

Gravitační síla závisí úměrně na hmotnosti obou těles a nepřímo na vzdálenosti obou těles

$$F = G\frac{Mm}{r^2}\ .$$

> Hypotézy nevymýšlím.
>
> (I.Newton $\sim$ 1710)



Obrázek 17.9.3: Rychlost a dráha při volném pádu.

Z tohoto vztahu jdou jednoduše odvodit zákony pohybu planet

- Planety obíhají okolo slunce vlivem gravitační síly po eliptických drahách.
- Rychlost obíhání je proměnlivá tak, aby průvodič za jednotku času pokryl vždy stejnou plochu.
- Perioda závisí na průměrné vzdálenosti.

(J.Kepler)

Z těchto zákonů naopak odvodit vztah pro výpočet gravitační síly.

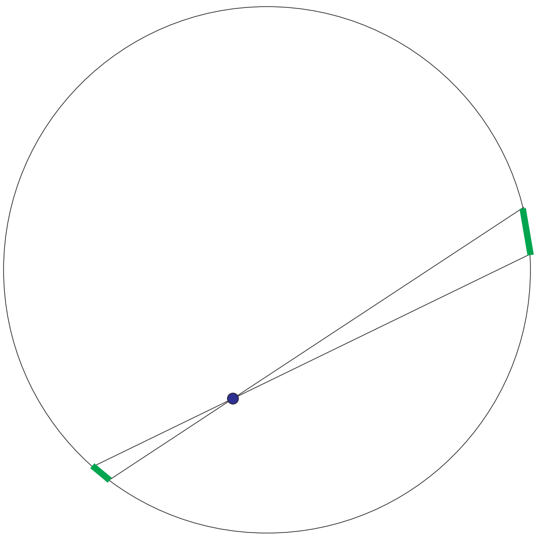
17.9.5 O tunelování

Uvnitř vytunelované Zeměkoule bude panovat stav beztíže.

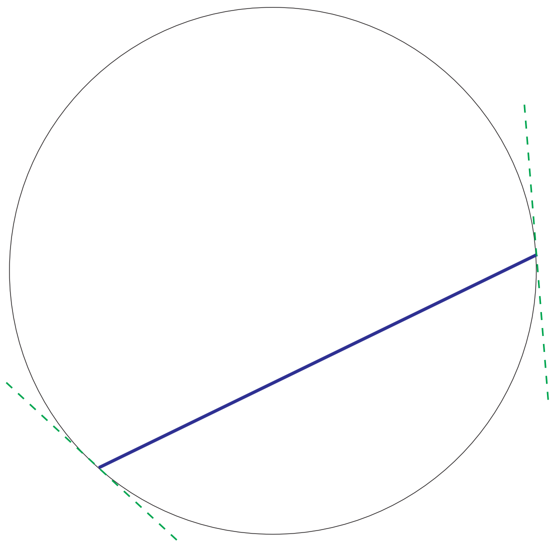
Důkaz: Zvolme bod x uvnitř Zeměkoule. Uvažujeme gravitační působení slupky S o poloměru $r > |x|$. Sestrojíme prostorový kužel K procházející bodem x. Kužel K na slupce S vykrojí dva díly, jejichž gravitační působení na bod x se ruší. Opravdu, velikost dílů závisí přímo úměrně na čtverci vzdálenosti a gravitační působení je nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti od x. Navíc se "efektivní plocha"obou dílů spočte ze skutečné plochy vynásobením týmž koeficientem, protože osa kuželu K protíná slupku S na obou koncích pod stejným úhlem. ■

Obrázek 17.9.5: Vytunelovaná zeměkoule.

Obrázek 17.9.5: Řez dutou zeměkoulí.



Obrázek 17.9.5: Ploška roste a gravitace klesá se čtvercem vzdálenosti.

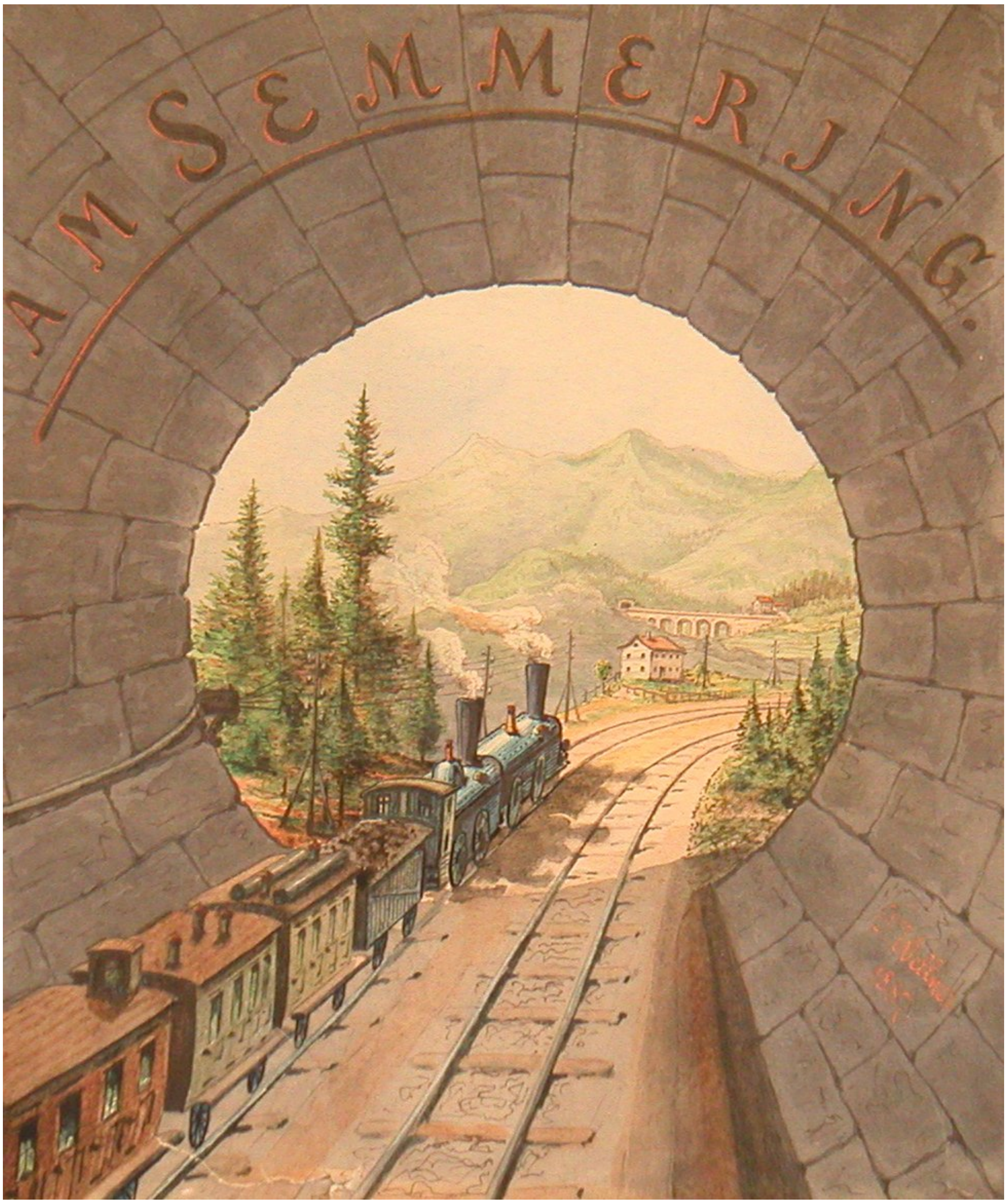


Obrázek 17.9.5: Plošky jsou na obou koncích pod stejným úhlem.

> Moje práce se vždy snažila spojit pravdivé a krásné a když jsem si musel vybrat jedno nebo druhé, obvykle jsem volil krásné.
>
> (H.Weyl ∼ 1930)

17.9.6 Proč tunelovat?

Dopravní společnost přišla s revoluční myšlenkou. Vybuduje vlakové spojení mezi důležitými městy pomocí přímého tunelu pod povrchem Země. Místo paliva bude pohyb zajišťovat gravitační síla (zanedbáme tření). Spočtěte dobu jízdy.



Obrázek 17.9.6: Vítejte u nás.

Důkaz: Na bod T bude působit vzhledem k předchozímu problému pouze ta část Zeměkoule, která leží blíž ke středu než $|T|$. Z této (s hloubkou proměnné) gravitační síly pak pouze složka gravitační síly ve směru pohybu. Dostaneme rovnici ($x(t)$ označuje vzdálenost od středu tunelu)

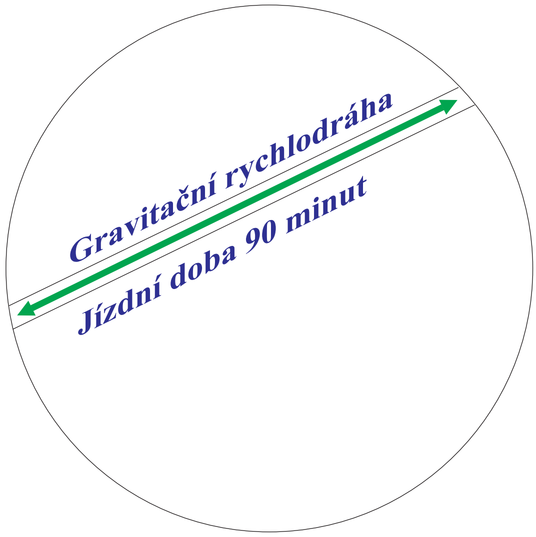
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{R^3}\, x\,,$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost Zeměkoule a R její poloměr. Řešením jsou harmonické kmity s periodou

$$2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,,$$

což dává slušný čas cca 90 minut odkudkoliv kamkoliv. ■

Obrázek 17.9.6: Gravitační cestování odkudkoliv kamkoliv?



Obrázek 17.9.6: Ekologická doprava!

17.10 Jednou jsi dole jednou nahoře . . .

17.10.1 Pružina

Pružina v klidovém stavu má délku l. Pa zavěšení závaží o hmotnosti m se prodlouží o délku d. Rovnováha nastane, pokud bude gravitační síla mg rovna síle pružiny, kterou je úměrná prodloužení. Tedy platí rovnovážný stav $kd = mg$ s vhodnou konstantou k. Pokud závaží popotáhneme ještě o x dolů, prodlouží se na celkovou délku $l + d + x$. Nyní na závaží působí síla

$$mg - k(d + x) = -kx \ .$$

Tato síla uvádí po uvolnění závaží do pohybu se zrychlením x'', Tedy musíme vyřešit rovnici

$$mx'' + kx = 0 \ .$$

Pokud chceme ještě uvažovat tření, bude rovnice s časovou proměnnou t vypadat

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = 0 \ .$$

Jedná se o volné tlumené kmity pružiny. Pokud tuto pružinu držíme v ruce a začneme jí ovlivňovat vnější silou $F(t)$, bude mít úloha ještě pravou stranu

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = F(t) \ .$$

17.10.2 Jednoznačnost řešení

Pro diferenciální operátor

$$T : y \mapsto p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

se omezenými koeficienty p_j na intervalu J a počátečními podmínkami

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots\ y(x_0)^{(n-1)} = y_{n-1}$$

má rovnice $Ty = f$ nejvýše jedno řešení na J.

17.10.3 Jak vždy "uhodnout"řešení

Diferenciální operátor

$$T : y \mapsto y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y$$

lze symbolicky zapsat pomocí operátoru derivování D ve tvaru

$$Ty = (D^n + p_{n-1}D^{n-1} + \cdots + p_1 D + p_0)y = P(D)y \ ,$$

kde P je jistý polynom.
Hledáme řešení rovnice $Ty = 0$ ve tvaru $y(t) = e^{st}$ pro vhodnou konstantu s.

Mnohdy je vhodnější zkoumat obecnější problém, nahradit konkrétní rovnici jednodušším zápisem někdy šetří čas i peníze.

Dosazením dostaneme

$$P(D)e^{st} = P(s)e^{st} \ .$$

Rovnici $P(s) = 0$ nazveme **charakteristická rovnice** a polynom $P(s)$ **charakteristický polynom**. Jde-li o polynom $P(s) = (s-6)^4$, má rovnice $Ty = 0$ řešení

$$e^{6t},\ te^{6t},\ \cdots,\ t^3 e^{6t} \ .$$

Pro komplexní kořen $a + ib$ zmodifikujeme řešení podle vzorečku $e^{a+ib} = e^a(\cos bt + i \sin bt)$.
Pokud například řešíme $Ty = (t^2+1)e^t$, lze "zkusit"tvar partikulárního řešení $y(t) = (at^2 + bt + c)e^t$.

Takto podobně lze „hádat“ kdykoliv ...

17.10.4 Harmonické kmitání

Rovnice

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

vede na řešení $x(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ s vhodnými konstantami a, b.
Pokud chceme, můžeme rovnici integrovat (použijeme rychlost $v(t) = x'(t)$) na tvar

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \ = \ E \ ,$$

kde E je konstanta odpovídající celkové energii. Samozřejmě první sčítanec odpovídá kinetické energii a druhý odpovídá práci

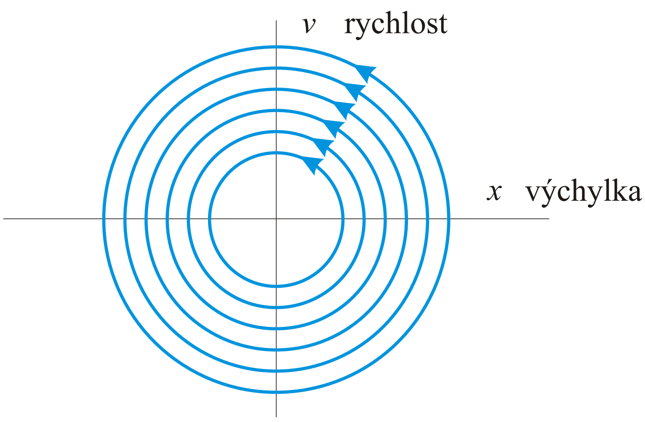
$$W = \int_0^x F\, dx \ = \int_0^x k\tilde{x}\, d\tilde{x}$$

Obrázek 17.10.4: Jak si udělat sinusovku.

potřebné k natažení pružiny o délku x, tedy se jedná o vyjádření potenciální energie.

Jde zde o zákon o zachování energie v praxi.

Pokud si znázorníme v rovině $x \times v$ polohu bodu $(x(t), v(t))$ pro různé energie E, dostaneme kruhové dráhy. Tomuto znázornění říkáme **fázová rovina**.



Obrázek 17.10.4: Fázová rovina.

17.10.5 Trajektorie a orbity

U rovnice

$$u'' + pu' + qu = 0$$

můžeme zkoumat fázovou rovinu, ve které budeme sledovat chování $(u(t), v(t))$, kde $v(t) = u'(t)$. Křivky $t \mapsto (u(t), v(t))$ budeme nazývat **trajektorie**, graf trajektorie budeme nazývat **orbita**.

Orbity

$$u'' + qu = 0$$

jsou kružnice. Na fázové rovině jsou zajímavé body, které nazýváme centrum, ohnisko, sedlo, uzel. Tyto body dělíme na stabilní a nestabilní podle toho, zda jsou limitami trajektorií (s ohledem na čas $\to \infty$). Uzly zase dělíme na regulární a degenerované.

17.10.6 Srovnání řešení

Nechť máme $x(t)$ a $y(t)$ dvě netriviální řešení rovnic

$$x'' + q(t)x = 0 \, , \; y'' + r(t)y = 0 \, ,$$

kde platí $q(t) > r(t) > 0$ pro každé t. Pak řešení y má nulový bod mezi každými dvěma nulovými body řešení x.

(CH.F.Sturm)

Pro $q(t) = 1$ lze použít jako řešení $x(t) = \sin t$.

17.10.7 Řešení pomocí mocninných řad

Jsou-li funkce $P(t)$ a $Q(t)$ rozvinutelné v mocninnou řadu o středu x_0 a poloměru r, pak existuje řešení

$$x'' + P(t)x' + q(t)x = 0$$

se stejnou vlastností.

17.10.8 Netlumené nucené kmity

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F(t) \, .$$

Pokud je vnější síla periodická, například

$$F(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

a $\omega \neq \omega_0$, lze najít řešení ve tvaru

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + b\cos\omega_0 t \, .$$

Podobně pro (nekonečný) součet

$$F(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \cdots\right)$$

(rovný $\frac{\pi}{2} - |t|$ pro $|t| \leq \pi$) dostaneme

$$x(t) = \frac{4\omega^2}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2(\omega^2 - 1^2)} + \frac{\cos 3t}{3^2(\omega^2 - 3^2)} + \frac{\cos 5t}{5^2(\omega^2 - 5^2)} + \cdots\right) .$$

Tedy je vidět, jak je užitečné napsat libovolnou vstupní funkci F jako šikovný součet sinů a cosinů.

17.10.9 Ladička a ladič . . .

Rovnice

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = (\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega_0 t$$

s počátečními podmínkami $x(0) = x'(0) = 0$ má řešení

$$x(t) = \cos\omega t - \cos\omega_0 t \;=\; 2\sin\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\,\sin\frac{\omega_0 - \omega}{2}t.$$

Pokud bude frekvence ω struny na kytaře blízko frekvence ω_0 ladičky, bude jeden sinus mít malou frekvenci $\omega_0 - \omega$ a uslyšíme znatelné pulsy v síle zvuku.

Podobně se provádí amplitudová a frekvenční modulace rádiového signálu.

17.10.10 Resonance

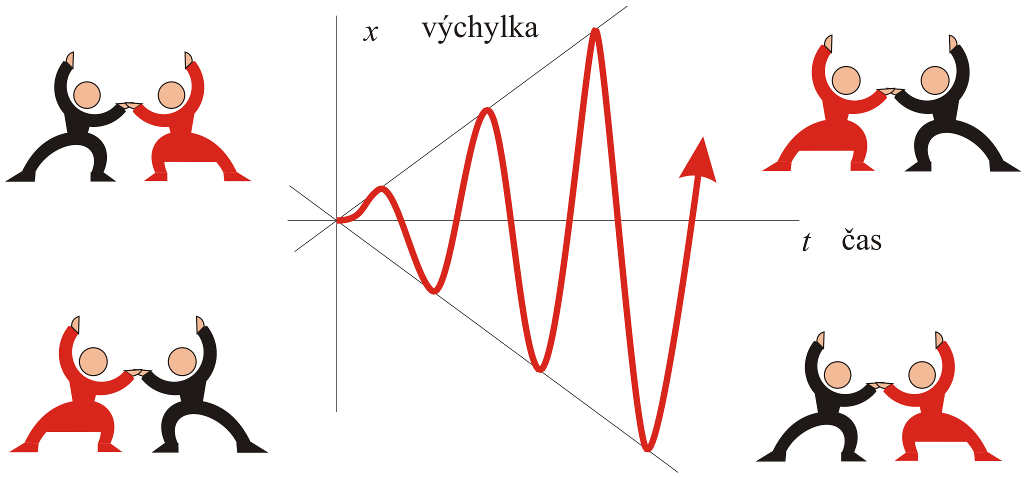
Rovnice

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = A\omega^2\cos\omega t$$

má řešení

$$x(t) = \frac{1}{2}A\omega\, t\, \sin\omega t\,.$$

Jsou známy případy, kdy tančící mládež zrušila vibracemi budovu. Proto se při konstrukci mostů, letadel, odstředivek a podobných věcí musí dávat pozor na rezonanci. A kdo má opravdu silný hlas nebo trumpetu se dostane všude, když se naladí na správnou frekvenci ;-)



Obrázek 17.10.10: Řešení v sobě kumuluje vnější impuls a při rytmických tancích se sál rozkmitá se nade všechna očekávání.

17.10.11 Vibrující mobil

Postavíme-li mobilní telefon na pružnou podložku a ta se prohne o 2 milimetry, při jakém vyzváněcím tónu začne mobil tancovat?

> Někteří lidé si myslí, že rozumné je všechno, co se dělá s vážnou tváří.
> (G.Ch.Lichtenberg $\sim$ 1770)

17.10.12 Past na piráty silnic

V běžném automobilu s řidičem je pružící systém stlačen přibližně o 15 cm. Jak hustě musíme na pěší zóně vybudovat zpomalovací retardéry, aby to pirátovi silnic při průjezdu rychlostí 100 km/h způsobilo kritickou rezonanci?

17.10.13 Tlumení

Zpravidla se nelze vyhnout tlumení způsobenému třením. V rovnici

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = 0$$

můžeme dostat při silném tření například řešení

$$2e^{-2t} - e^{-t}$$

a pružina neosciluje. Při slabém tření například řešení

$$e^{-t} \cos t$$

a pružina se bude uklidňovat do nekonečna kmitáním. Při tření „tak akorát“ (jedna speciální hodnota) bude například řešením

$$e^{-t}(1+t)\,.$$

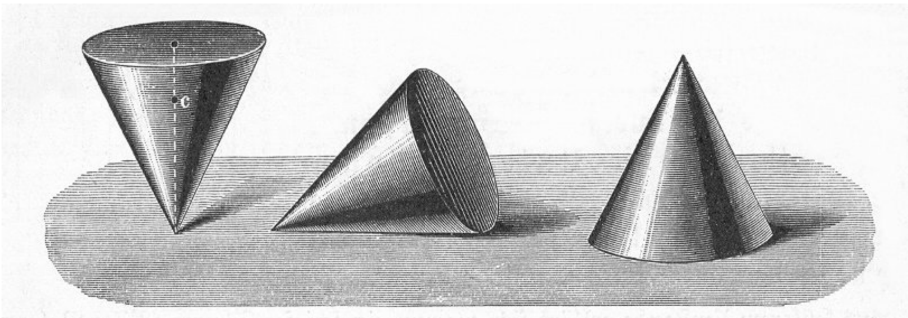
V přístroji na měření proudu chceme, aby se ručička rychle ustálila, proto musíme nastavit tření v přístroji šikovně . . .

17.10.14 Stabilita s fiktivní energií

Jestliže systém

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y)$$

popisuje nějakou fyzikální situaci, může se řešení blížit k bodu, který bude reprezentovat minimum celkové energie E. Tento bod by pak mohl být stabilním konstantním řešením.



Obrázek 17.10.14: Stabilní a nestabilní polohy.

Pokud se budeme pohybovat po křivce $t \mapsto (x(t), y(t))$, bude se energie E měnit v závislosti na čase takto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G\,.$$

Pokud budou takové výrazy vždy záporné, budeme podél dané trajektorie snižovat hodnotu energie. Tedy lze očekávat, že se blížíme k bodu minimální energie.

Použijeme tuto myšlenku pro získání stabilního řešení. Pokusíme se najít funkci E tak aby výrazy

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G\,.$$

byly záporné v okolí konstantního řešení. Pak je toto řešení asymptoticky stabilní.

(A.Ljapunov)

Například pro rovnici kmitání na pružině

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

(c je odpor prostředí, k je konstanta pružiny) dostaneme soustavu

$$\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dt} = -k\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y$$

s kritickým bodem $(0, 0)$. Celková energie E má složku kinetickou

$$\frac{1}{2}my^2$$

a potenciální, která je vytvořena prací pružiny

$$\int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2\ .$$

Je úžasné, že takový obyčejný integrál nám poví, že stlačená i roztáhnutá pružina má kladnou energii :-)

Tedy celková energie je

$$E(x, y) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}my^2\ .$$

Lehce ověříme, že

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G = kxy + my\left(-\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y\right) = -cy^2 \leq 0\ .$$

Tedy počátek je stabilní kritický bod.

17.10.15 Dvojpružina a jízda na koni

Nechť je dvojice pružin se závažími z rovnovážných pozic vychýlena tak, že horní závaží o hmotnosti m_1 je vychýleno o x a dolní závaží o hmotnosti m_2 je vychýleno o y směrem dolů. Pak řešíme soustavu

$$m_1x'' = k_2(y - x) - k_1x\ ,\ m_2y'' = k_2(y - x)\ .$$

Po dosazení z první do druhé dostaneme pro y rovnici

$$(D^4 + (a + b + c)D^2 + ab)y = 0$$

pro vhodné konstanty. Charakteristická rovnice má jednoduché komplexní kořeny, proto je řešení y i x ve tvaru

$$c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t + c_3 \cos\omega_2 t + c_4 \sin\omega_2 t\ .$$

Zde ω_1 a ω_2 jsou přirozené frekvence systému.

Proto se na koni tak divně hopsá ;-)

Obrázek 17.10.15: Jízda na koni vyžaduje zkušenost.

17.10.16 O kyvadle

Netlumené kyvadlo popisují rovnice

$$\frac{dx}{dt} = y \ , \ \frac{dy}{dt} = -k \sin x \ .$$

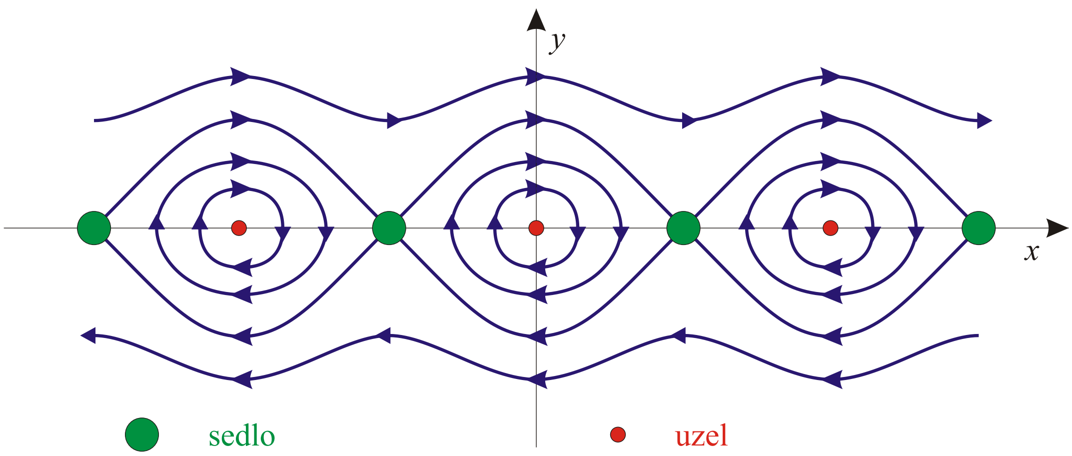
Odvodíme z nich, že

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k \sin x}{y} \ .$$

To po separaci proměnných vede na křivky implicitně vyjádřené

$$\frac{1}{2}y^2 + (k - k \cos x) = E \ .$$

Zde y odpovídá rychlosti a první sčítanec odpovídá kinetické energii, druhý sčítanec potenciální energii a součet celkové energii (konstanta nezávislá na čase).

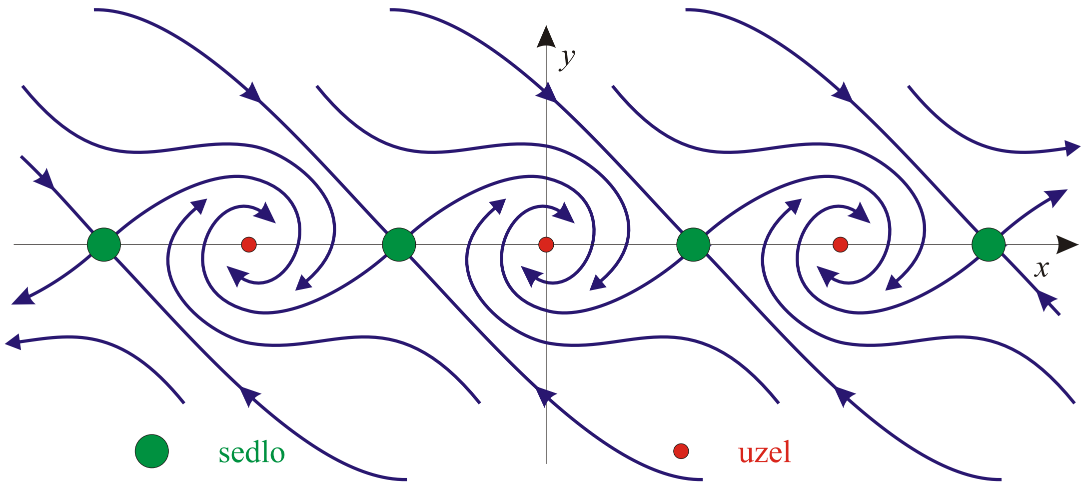


Obrázek 17.10.16: Netlumené kyvadlo.

Tlumené kyvadlo je popsáno rovnicí obsahující člen $-cy$ odpovídající tření

$$\frac{dx}{dt} = y \ , \ \frac{dy}{dt} = -k \sin x - cy \ .$$

Na obrázku vidíme nestabilní sedla a stabilní centrum spirál.



Obrázek 17.10.16: Tlumené kyvadlo.

17.10.17 Řešení v distribucích a fundamentální řešení

Nechť L je diferenciální operátor ve tvaru

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0}^{m} D^{\alpha} u \ .$$

Distribuci $u \in D'$ nazveme **řešení ve smyslu distribucí** rovnice

$$Lu = f \ , \ f \in D' \ ,$$

pokud pro libovolnou testovací funkci $\varphi \in D$ platí

$$(Lu, \varphi) = (f, \varphi) \ .$$

Důležité řešení pro daný operátor je řešení rovnice s pravou stranou rovnou bodovému impulsu.
Řešení ε rovnice

$$L\varepsilon = \delta$$

budeme nazývat **fundamentální řešení** operátoru L.
Jeho význam plyne z následujícího pozorování
Řešení u rovnice

$$Lu = f \ , \ f \in D'$$

ve smyslu distribucí je konvoluce fundamentálního řešení a pravé strany, tedy

$$u \ = \ \varepsilon * f \ .$$

Toto řešení je jediná distribuce řešící danou rovnici, které má zároveň konvoluci s pravou stranou.

17.10.18 Počáteční úloha v distribucích

Soustavu diferenciálních rovnic v maticovém zápisu

$$y' - Ay = f \ , \ f \in D'$$

s počátečními podmínkami $y(0) = (y_1, \ldots, y_n)$ budeme ve smyslu distribucí řešit nalezením distribuce Y nulové pro $t < 0$ splňující

$$Y' - AY = y(0)\delta(t) + F \ ,$$

kde F je distribuce nulová pro $t < 0$ souhlasící s f pro $t > 0$.

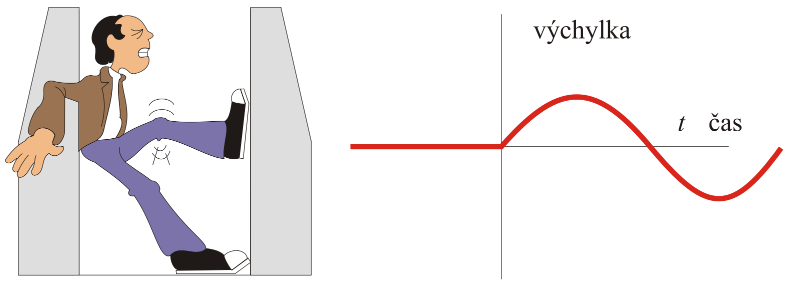
17.10.19 Rovnice kmitání v distribucích

Pro $L = \frac{d^2}{dt^2} + a^2$, $a > 0$, fundamentální řešení

$$L\varepsilon = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + a^2\varepsilon = \delta(t)$$

je rovno

$$\varepsilon(t) = h(t)\frac{\sin at}{a} \ .$$



Obrázek 17.10.19: Tak se nám roztřásla kolena, nic se neděje.

17.11 Rovnice vlnění

17.11.1 Snadné řešení vlnové rovnice

Je-li $y = F(x)$ libovolná funkce, pak funkce $u(x,t) = F(x + at)$ představuje vlnu, která se pohybuje podél x-ové osy s rychlostí a. Pokud přidáme ještě vlnu v protisměru, lze ověřit, že funkce

$$u(x,t) = F(x + at) + G(x - at)$$

vyhovuje rovnici

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ .$$

Této rovnici budeme říkat **vlnová rovnice**. Pokud máme nekonečnou strunu, vychýlíme ji do pozice popsané funkcí $f(x)$ a následně uvolníme, má vlnová rovnice řešení

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x + at) + f(x - at)\right) \ .$$

Pro lichou funkci f s hodnotami $f(0) = f(\pi) = 0$ dostaneme 2π-periodickou lichou funkci (například sinus).

(d'Alembert $\sim$ 1765)

17.11.2 Vlnová rovnice v distribucích

Pro vlnový operátor $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$, $a > 0$, fundamentální řešení

$$L\varepsilon_n = \frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2} - a^2\Delta\varepsilon_n = \delta(x,t)$$

zjistíme pomocí frekvenční transformace. Dostaneme

$$\varepsilon_n(x,t) = h(t)F_s^{-1}[\frac{\sin a|s|t}{a|s|}] \ .$$

Pro $n = 3$ dostaneme

$$\varepsilon_3(x,t) = \delta(a^2t^2 - |x|^2) \ .$$

Pro $n = 2$ dostaneme

$$\varepsilon_2(x,t) = \frac{h(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}} \ .$$

Pro $n = 1$ dostaneme

$$\varepsilon_1(x,t) = \frac{1}{2a}h(at - |x|) \ .$$

17.11.3 Distributivní řešení s počátečními podmínkami

Řešíme-li

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2} - a^2\Delta\varepsilon_n = f(x,t)$$

s počátečními podmínkami

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

přeformulujeme do řeči distribucí na tvar

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2} - a^2\Delta\varepsilon_n = f(x,t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t) \ .$$

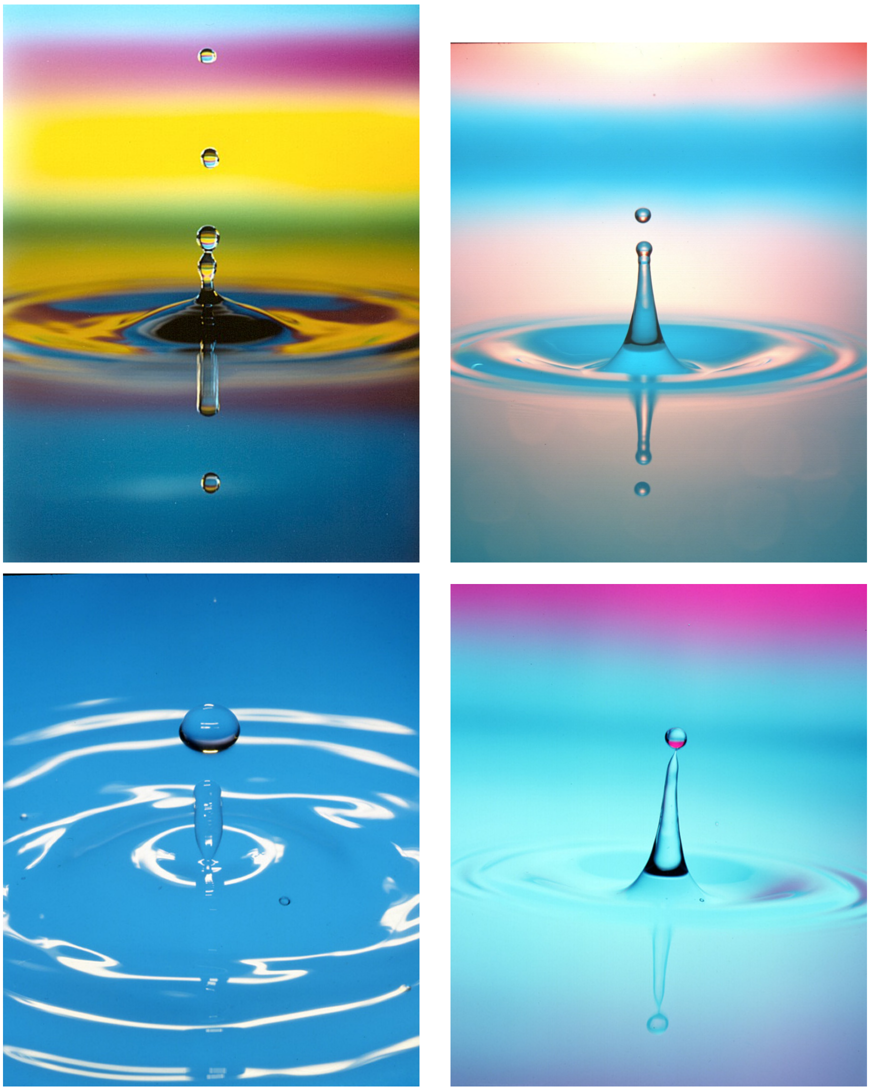
a pak dostaneme řešení v distribucích.

17.12 Je ti teplo?

17.12.1 Rovnice tepelné rovnováhy

Budeme řešit problém, jak je rozložena teplota na obdélníkové desce (reprezentujeme desku jako $[0,\pi]\times[0,\infty)$), pokud nastala rovnováha - teplota se již ustálila a nemění se v čase. Teplotu uvažujeme jako funkci $u(x,y)$ dvou proměnných, bodu $x \in [0,\pi]$ a $y \in [0,+\infty)$. Fyzikální argumenty vedou k tomu, že chceme, aby funkce $u(x,y)$ vyhovovala rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ .$$



Obrázek 17.11.2: Padající kapky představují bodový impuls. Jeho projevy jsou kouzelné.

Tuto rovnici budeme nazývat **rovnice tepelné rovnováhy**. Očekáváme, že tuto úlohu lze jednoznačně vyřešit, pokud máme zadány počáteční podmínky, které zachycují teplotu $f(x)$ desky na okraji, tedy $u(x,0) = f(x)$, $x \in [0,\pi]$. Řešíme tedy rovnici tepelné rovnováhy s podmínkami

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0\ , u(x,0) = f(x)\ .$$

Pokud $f(x) = \sin x$, nabízí se dvě řešení

$$u(x,y) = e^{y} \sin x\ , u(x,y) = e^{-y} \sin x\ .$$

První řešení se nám příliš nehodí pro svoji děsivou neomezenost. Proto přidáme ještě limitní podmínku

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \text{ stejnoměrně v } x\ .$$

Zkusíme hledat řešení ve tvaru $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Po dosazení se rovnice rozdělí na rovnici s x a druhou s y. Vyřešíme v x a dostaneme

$$X(x) = a\ \cos(\omega x) + b\ \sin(\omega x)\ .$$

Pak pro Y dostaneme řešení

$$b_n e^{ny} \sin(nx)\ ,\ b_n e^{-ny} \sin(nx)\ ,\ n = 1, 2, \cdots\ .$$

Celkově

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin(nx)\ ,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\zeta)\sin(n\zeta)\, d\zeta\ .$$

Pokud řada konverguje a pokud svítí sluníčko.

17.12.2 Problém minimalizace

Problém minimalizace

$$\int \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dx\, dy$$

pro funkci $z = z(x,y)$ vede na variační rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\ .$$

17.12.3 Fundamentální řešení

Pro operátor tepelné rovnováhy $L = \Delta$, fundamentální řešení rovnice

$$L\varepsilon_n = \Delta\varepsilon_n = \delta(x)$$

získáme pomocí frekvenční transformace distribucí ve tvaru

$$\varepsilon_n(x) = F_s^{-1}[-\frac{1}{|s|^2}]\ .$$

Pro $n = 3$ dostaneme

$$\varepsilon_3(x) = \frac{1}{4\pi|x|}\ .$$

Pro $n = 2$ dostaneme

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|\ .$$

17.13 Jen se zahřej

17.13.1 Jak rychle chladne bábovka

Na stole je čerstvě upečená bábovka, kdy se bude moci jíst?
Zákon ochlazování říká, že rychlost, s jakou se těleso ochlazuje, je přímo uměrná rozdílu teplot.

> … ze stejných principů dokáži rámec Systému světa.
>
> (I.Newton ∼ 1710)

Tedy teplota $T(t)$ v čase t vyhovuje rovnici

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T^*) \ ,$$

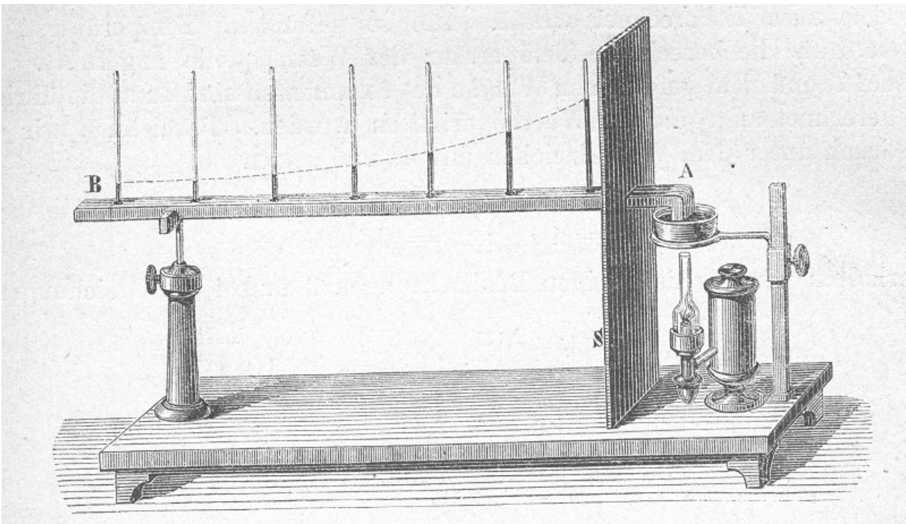
kde T^* je konstantní teplota okolí a k je konstanta. Dosadíme-li si $x(t) = T(t) - T^*$, dostaneme rovnici $dx/dt = kx$ a obvyklé exponenciální řešení.

Pro výpočet potřebujeme nějaké údaje, například za kolik minut se ochladí o kolik stupňů a jakou teplotu měla na začátku.

Podobně stanovují kriminalisté dobu činu ...

17.13.2 Vedení tepla

Budeme řešit problém, jak se chová teplota na tyči (reprezentujeme tyč jako jednorozměrný interval $[0, \pi]$).



Obrázek 17.13.2: Jak je teplo rozváděno v jedné proměnné.

Teplotu uvažujeme jako funkci $u(x, t)$ dvou proměnných, bodu $x \in [0, \pi]$ a času $t \in [0, +\infty)$. Fyzikální argumenty vedou k tomu, že chceme, aby funkce $u(x, t)$ vyhovovala rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ .$$

Tuto rovnici budeme nazývat **rovnice vedení tepla**. Očekáváme, že tuto úlohu lze jednoznačně vyřešit, pokud máme zadány počáteční podmínky, které zachycují teplotu $f(x)$ tyče na počátku.

17.13.3 Vedení tepla na tenkém drátu

Řešíme problém, jak najít funkci $u(x, t)$ reálné proměnné $x \in [0, \pi]$ a času $t \in [0, \infty)$ splňující rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

vyhovující okrajovým podmínkám

$$u(0,t) = 0\ ,\ u(\pi,t) = 0\ ,\ u(x,0) = f(x)\ .$$

Jde o funkci u popisující teplotu drátu (zde jednorozměrného intervalu proměnné x) v čase t.

> Varuj se pátrat po tom, co bude zítra.
> (Horatius)

Okrajové podmínky říkají, že oba konce drátu jsou udržovány na teplotě 0 stupňů a počáteční teplota drátu je zadaná funkcí f.

17.13.4 Tepelné jádro

Předpokládejme, že lze řešení napsat ve tvaru $u(x,t) = R(x)S(t)$. Pak se diferenciální rovnice transformuje do tvaru

$$\frac{R''}{R} = \frac{S'}{S}\ .$$

Tedy jde o jistou konstantu a můžeme řešit obě rovnice odděleně. Dostaneme řešení ve tvaru

$$R(x)S(t) = e^{-n^2 t} \sin nx$$

pro různá n přirozená. Tedy funkce $u(x,t)$ vytvořená jako nekonečný součet

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

je řešením problému, pokud funkce f jde napsat ve tvaru

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\ .$$

> ... pokud máme v batůžku kouzelný nápoj konvergence.

Vzhledem k tomu, že

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\zeta) \sin(n\zeta)\, d\zeta\ ,$$

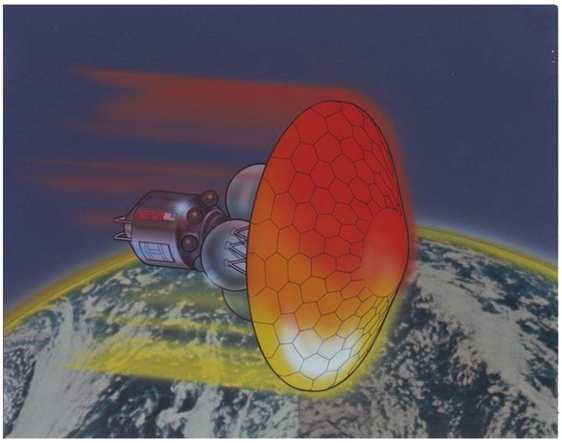
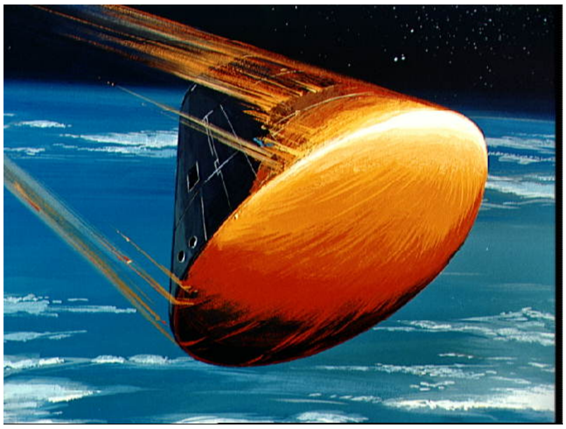
dostaneme vyjádření funkce u integrálem

$$u(x,t) = \int_0^{\pi} K(t,x,\zeta) f(\zeta)\, d\zeta\ ,$$

kde

$$K(t,x,\zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin n\zeta\ .$$

Funkci K nazýváme **tepelné jádro**. Řešení je ve tvaru integrálního operátoru.

Obrázek 17.13.4: Vedení tepla a tepelná pohoda jsou velmi důležité.

17.13.5 Distributivní řešení

Pro operátor vedení tepla $L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$, $a > 0$, fundamentální řešení

$$L\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2\Delta\varepsilon = \delta(x,t)$$

je rovno

$$\varepsilon(t) = \frac{h(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} .$$

Řešíme-li

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2\Delta\varepsilon = f(x,t)$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) = u_0(x) ,$$

přeformulujeme do řeči distribucí na tvar

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2\Delta\varepsilon = f(x,t) + u_0(x)\delta(t) .$$

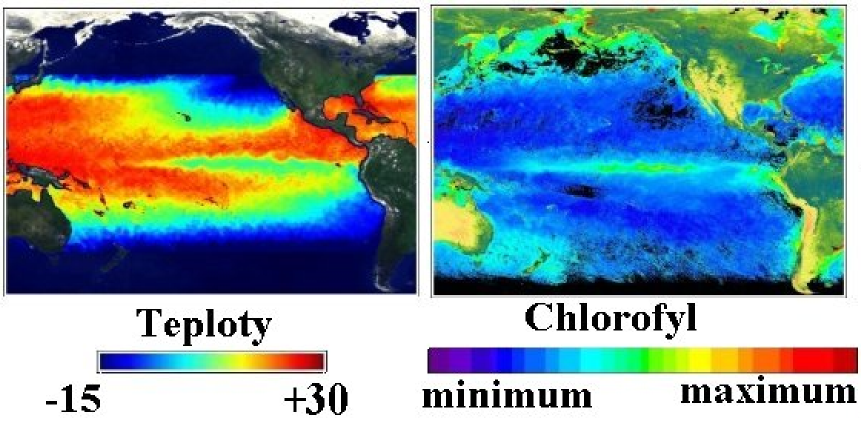
a pak dostaneme řešení v distribucích.

17.14 O lyžařích a sjezdovce

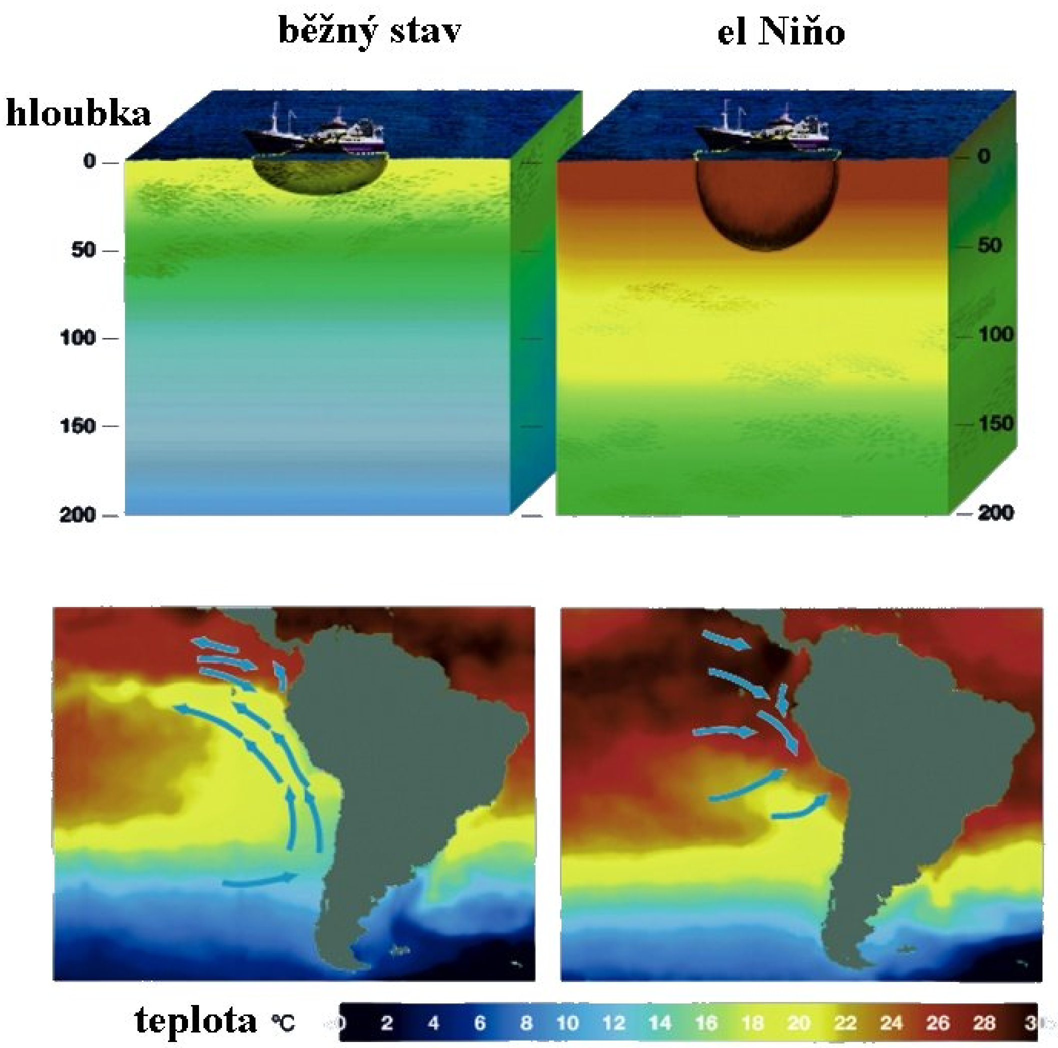
17.14.1 Brachystochrona

Chceme upravit lyžařský svah tak, abychom jej působením gravitace (zanedbáme tření) sjeli nejrychleji.

> ... zdroj veškeré velké matematiky je speciální případ, konkrétní příklad. Často v matematice pojem zdánlivě velké obecnosti je v podstatě stejný jako malý konkrétní speciální případ.
>
> (P.R.Halmos)

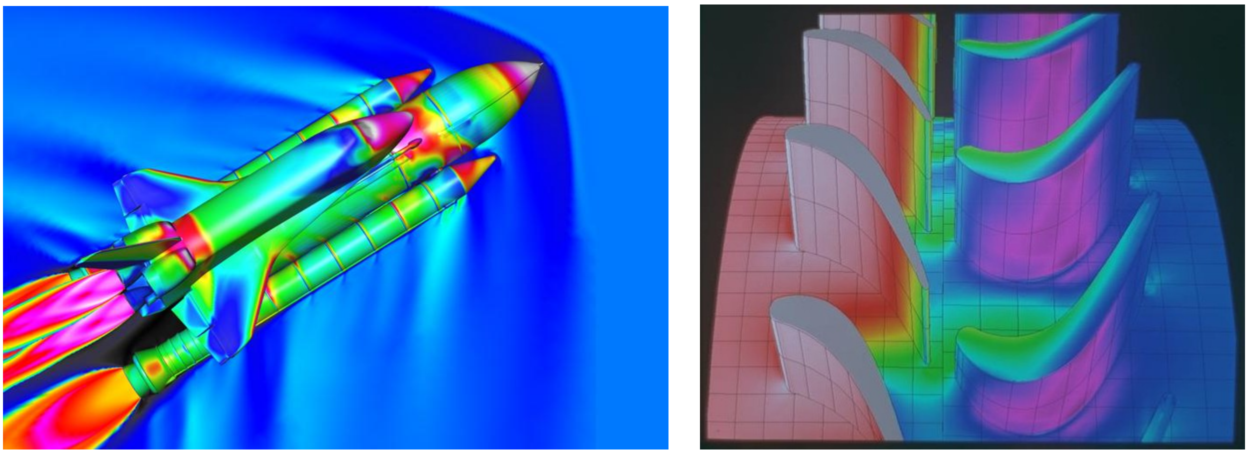


Obrázek 17.13.5: Teplota v oceánu a její vliv na plankton.



Obrázek 17.13.5: Teplota v hloubce má vliv na rybolov.

Chceme tedy najít tvar křivky z bodu A do bodu B takový, abychom minimalizovali dobu sjezdu.



Obrázek 17.13.5: Tepelná únava materiálu a jak jí předcházet.

Hledání této křivky bylo velikou motivací rozvoje matematické analýzy.

Pomůžeme si světlem. Paprsek se na rozhraní vody a vzduchu láme. Pokud budou rychlosti ve vzduchu a ve vodě veličiny v_1 a v_2, pak paprsek nejrychleji z bodu A do bodu B doletí přes bod P, ve kterém úhly α_1 a α_2 vyhovují vztahu

$$\frac{\alpha_1}{v_1} = \frac{\alpha_2}{v_2} \,.$$

To zjistíme lehce jako extrém funkce určující celkový čas

$$x \mapsto \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2} \,.$$

Podobně můžeme uvažovat více vrstev zlomu. V limitě očekáváme

$$\frac{\alpha}{v} = \text{ konstanta } \,.$$

Při sjezdu se potenciální energie mění na kinetickou, tedy známe její rychlost po snížení nadmořské výšky o y. Dostaneme $v = \sqrt{2gy}$. Tvar sjezdovky odpovídá funkci $y = y(x)$ a její sklon α vyhovuje

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \,.$$

Tedy dostaneme pro y diferenciální rovnici

$$y(1 + (y')^2) = c \,.$$

Použijeme zápis $y' = dy/dx$ a dostaneme

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c - y}}\, dy \,.$$

Po substituci nové proměnné θ vzorečkem

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{y}{c-y}}\, dy\ .$$

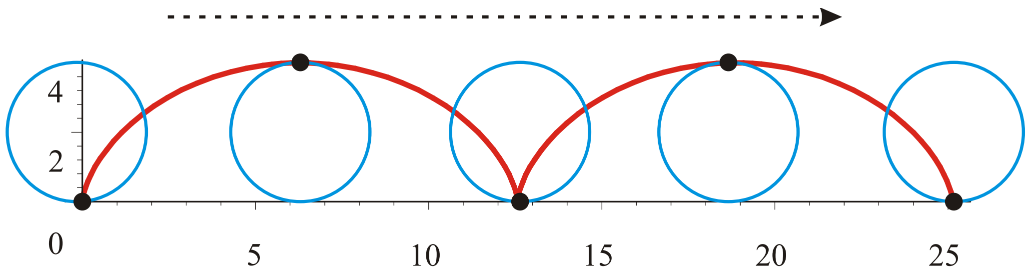
dostaneme

$$dx = c(1-\cos 2\theta)\, d\theta\ .$$

Vyřešíme a dostaneme

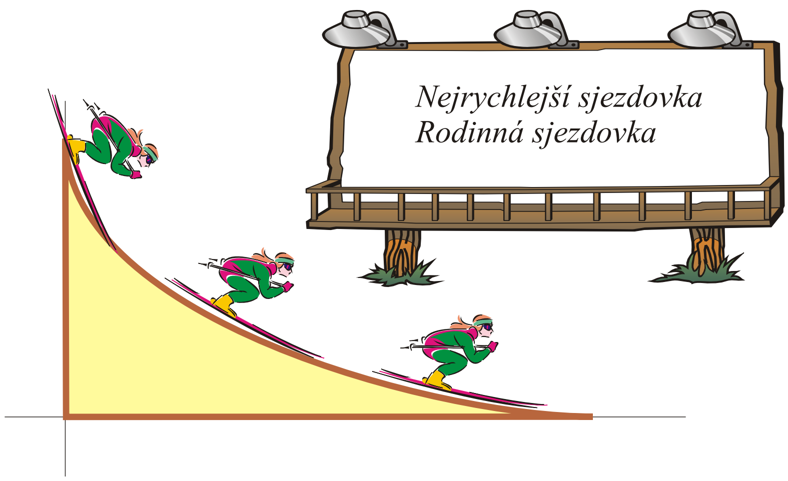
$$x = a(\theta - \sin\theta)\ ,\ y = a(1-\cos\theta)\ ,$$

kde $a = c/2$. Jedná se o parametrickou rovnici křivky, kterou opisuje bod na kružnici při valení podél osy. Nazývá se **cykloida**.



Obrázek 17.14.1: Jak vidíme hřebík na pneumatice při jízdě.

Podařilo se nám najít tvar sjezdovky, která dává nejrychlejší sjezd. Této křivce se říká **brachystochrona** (z řečtiny brachystos = nejkratší, chronos = čas). A tento čas je roven $\pi\sqrt{a/g}$. Stejný čas trvá sjezd i z libovolného jiného bodu. Tedy optimální tvar sjezdovky pro to, aby se na ní rozmístili lyžaři a dojeli do cíle najednou. Proto se této křivce říká **tautochrona** (z řečtiny tauto = stejný, chronos = čas).



Obrázek 17.14.1: Nejlepší sjezdovka.

17.14.2 Jde to i jinak ...

Křivka nejrychlejšího sjezdu minimalizuje dobu vyjádřenou integrálem

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx\ .$$

Budeme řešit příslušnou variační rovnici. Její zkoumání vede na řešení rovnice

$$y[1+(y')^2] = c$$

pro vhodnou konstantu c. Její řešení je cykloida

$$x = a(\theta - \sin\theta),\ x = a(1-\cos\theta)\ .$$

17.14.3 A ještě jinak

Máme sestrojit sjezdovku, na které bude platit kouzelné pravidlo, že z libovolného místa se lyžař dostane k lanovce za 1 minutu.

Spočteme čas $T(Y)$ odpovídající sjezdu z převýšení Y. Předpokládáme, že sjezdovka je popsána funkcí $y(x)$. Rychlost při sjezdu odpovídá kinetické energii a ta zase ztrátě potenciální energie. To vede ke vztahu v daném bodě (u,v)

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(Y-v)\ ,$$

čili

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(Y-v)}}\ .$$

Celkový čas od $v=Y$ do $v=0$ je tedy

$$T(Y) = \int_{v=y}^{v=0} 1\ dt\ = \int_0^Y \frac{ds}{\sqrt{2g(Y-v)}}\ .$$

Po substituci $s=s(v)$ dostaneme

$$T(Y) = \int_{v=y}^{v=0} 1\ dt\ = \int_0^Y \frac{s'(v)dv}{\sqrt{2g(Y-v)}}\ .$$

Označíme

$$f(v) = s'(v) = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ .$$

$$T(Y) = \int_0^Y \frac{f(v)dv}{\sqrt{2g(Y-v)}}\ .$$

Pokud $T(Y)$ je konstanta T_0, dostaneme pomocí exponenciální transformace

$$\frac{T_0}{p} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\, L(f(v))\, \sqrt{\frac{\pi}{p}}\ .$$

Používáme exponenciální transformaci (v čas, p komplexní frekvence) a pravidlo pro transformaci konvoluce. Tedy s použitím inverzní exponenciální transformace dostaneme

$$f(v) = \sqrt{\frac{b}{v}} \,,$$

kde b je vhodná konstanta. Srovnáním s definicí funkce f dostaneme rovnici (píšeme již y místo v)

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{b}{y} \,.$$

Rovnici vyřešíme separací na tvar

$$x = \int \sqrt{\frac{b-y}{y}} \, dy \,.$$

Substitucí $y = b \sin^2 \phi$ spočteme

$$x = a(\theta + \sin\theta) \,, \; y = a(1 - \cos\theta) \,,$$

s $a = b/2$, $\theta = 2\phi$. Tautochrona je cykloida.

17.15 Jestli nás váha neklame ...

17.15.1 Princip úměrnosti

Některé kulaté mikroorganismy příjímají potravu povrchem, tedy jejich růst popisuje vztah

$$\text{změna objemu} \; = k * \; \text{povrch} \;\; .$$

Pak je jejich průměr lineární funkcí času. Máme totiž rovnici

$$\frac{dar^3}{dt} = br^2$$

pro funkci $r(t)$ popisující poloměr v čase t, kde a, b jsou konstanty. Řešíme rovnici a dostaneme $r(t)$ jako lineární funkci času t.

Alespoň se biologové při koukání do mikroskopu nenudí. Je to prostě perla :-)

17.15.2 Raketa a palivo

Pohybový zákon říká

$$F = ma$$

Přesnější tvar pohybového zákona říká, že síla F působící na těleso o hmotnosti m mu uděluje moment mv, kde v je rychlost. Tedy změna momentu je způsobena silou a platí

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \,.$$

Pokud hmotnost nezávisí na čase, pak jsou obě formulace ekvivalentní. Pokud se k tělesu o hmotnosti m o rychlosti v připojuje s relativní rychlostí w další hmota s tempem dm/dt, pak celkový přírustek momentu lze psát ve tvaru

$$\frac{d}{dt}(mv) = F + (v + w)\frac{dm}{dt} \ .$$

Raketa vyletí s palivem do výšky závisející na množství paliva. Pokud má raketa bez paliva hmotnost m_1 a má m_2 paliva, pak platí při rovnoměrném spalování

$$\frac{dm}{dt} = -a \ .$$

Spočítáme, v jaké výšce bude palivo spotřebováno. Počítáme s konstantní gravitační silou mg. Vyjde $-gm_2^2/2a^2 + bm_2/a + bm_1/a \log(m_1/(m_1 + m_2))$.

17.15.3 Prší či mží . . .

Kapka padá a s rychlostí odpovídající povrchu nabírá vodní páry. Padá se zrychlením $a = g/4$. Kapka padá a sbírá kapičky na své cestě. Padá se zrychlením $a = g/7$.

17.16 Drobné si nechte (kvantová peněženka)

17.16.1 Kvantová mechanika

Uvažujeme funkci $p(x)$ popisující pravděpodobnost, že dva atomy v molekule vodíku H_2 jsou vychýleny z rovnovážné polohy o odchylku x.

> Pokud tvůj experiment potřebuje statistiku, asi jsi měl udělat lepší experiment.
> (E.Rutherford ~ 1910)

Budeme chtít, aby

$$\lim_{|x|\to\infty} p(x) = 0 \ ,$$

což znamená, že zpravidla budou atomy v rovnovážném stavu. Navíc nějaká vzdálenost vždy nastane, tedy celková pravděpodobnost je jistota

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1 \ .$$

Fyzikální důvody vedou k tomu, že pro $\psi(x) = \sqrt{p(x)}$ je splněna rovnice

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0 \ .$$

Zde E je celková energie, $\frac{1}{2}kx^2$ odpovídá potenciální energii, m je hmotnost, h univerzální konstanta. Při šikovně zvolené lineární substituci $u = ax$ lze rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \left(2p + 1 - u^2\right)\psi = 0 \ ,$$

kde a, p jsou konstanty.

(E.Schrődinger 1887 – 1961)

17.16.2 Řešení pomocí substituce a řad

Do získané rovnice

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \left(2p + 1 - u^2\right)\psi \;=\; 0$$

dosadíme novou funkci y pomocí substituce $\psi(u) = y(u)e^{-u^2/2}$ a dostaneme

$$\frac{d^2y}{du^2} + -2u\frac{dy}{du} + 2py = 0\ .$$

Pro tuto rovnici hledáme řešení ve tvaru mocninné řady. To nás vede k rekurentní formulce pro koeficienty a následně k fundamentálnímu systému řešení

$$1 - \frac{2p}{2!}u^2 + \frac{2^2p(p-2)}{4!}u^4 - \frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}u^6 + \cdots$$

a

$$u + \frac{2(p-1)}{3!}u^3 - \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}u^5 + \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}u^7 + \cdots\ .$$

Pokud je konstanta p přirozené číslo, dostaneme řešení ve tvaru polynomu a funkce ψ vyhovuje zkoumané rovnici i s omezujícími podmínkami na její růst v nekonečnu. Pokud není konstanta p přirozené číslo, je řešením řada, jejíž součtem je funkce tak rychle rostoucí nade všechny meze, že funkce ψ nekonverguje v nekonečnu k nule.

Tak nám rychlý růst v nekonečnu pro necelá čísla přinesla kvantový pohled na svět.

17.16.3 Fyzikální smysl řešení

Vrátíme-li se k původnímu značení, fyzikálně přípustné řešení existuje pouze pro určité hodnoty v rovnici vystupujících veličin. Celková energie E musí být ve tvaru

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\sqrt{\frac{k}{4\pi^2 m}}$$

pro n přirozené. To znamená, že celková energie nemůže být libovolná, ale že se může měnit pouze po malých kvantech.

(E.Schrődinger 1887 – 1961)

Příroda neříká nikdy nic jiného, než říká moudrost.

(Iuvenalis)

17.16.4 Excitované stavy

Řešení je ve tvaru

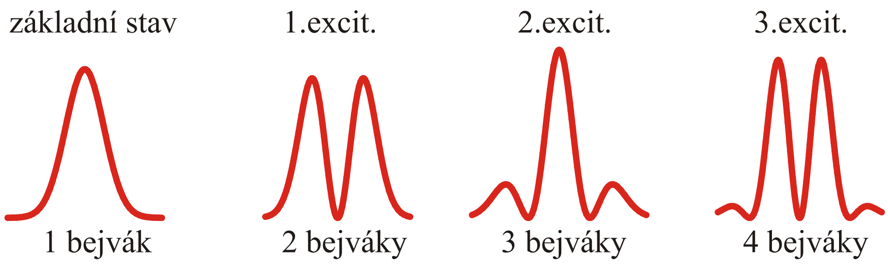
$$\psi(x) = be^{-(ax)^2/2} H_n(ax) \ ,$$

kde a, b jsou konstanty a funkce H_n jsou vhodné polynomy

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \ .$$

Polynom odpovídající základnímu stavu je $H_0(x) = 1$, další polynomy $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ a $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ odpovídají excitovaným stavům zkoumané molekuly.

(Ch.Hermite 1822 - 1901)



Obrázek 17.16.4: Základní a excitované stavy. Vlevo je základní stav. Atom je v pohodě. Vyšší energie mu poručí, aby se vyskytoval nejčastěji ve dvou (či více) pozicích.

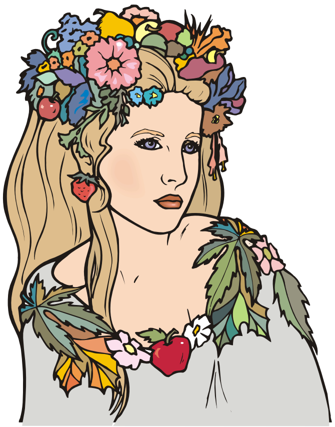
Tak jsme se dozvěděli, kde by zpravidla měl být druhý atom v molekule. Jde o základní představu. V přesnějším tvaru rovnice můžeme zkoumat prostorové uspořádání a další fajnovosti.

17.17 Příroda je geniální, neplýtvá ...

17.17.1 Nejmenší akce

Mechanický systém se řídí pravidlem "nejmenší akce". To znamená, že se systém chová tak, aby neplýtval energií.

Příroda užívá všeho tak málo, jak možno.
(J.Kepler $\sim$ 1602)



Obrázek 17.17.0: Příroda to dělá jako my, ale jde jí to lépe.

Definujeme akci A jako

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_p)\, dt \ ,$$

kde E_k je kinetická energie a E_p je potenciální energie. Pokud se částice pohybuje během času $t \in [t_1, t_2]$ z bodu P_1 do bodu P_2, pak dráha je taková, ve které nabývá akce nulové slabé derivace. To zpravidla (pro malé časové intervaly) vede na "minimální akci".

(W.R.Hamilton 1805 - 1865)

> Nejkrásnější věc, kterou můžeme objevit, je tajemství. Je to zdroj veškerého pravdivého umění a vědy.
> (A.Einstein $\sim$ 1950)

Problém nalezení nejkratších spojnic dvou bodů na ploše lze řešit pomocí variační metody nebo pomocí metody nejmenší akce. V obou postupech získáme tytéž geodetické křivky.

17.18 Ekvivalence hmoty a energie

17.18.1 Speciální teorie relativity

Základní axiomy speciální teorie relativity

(i) Fyzikální zákony platí ve všech soustavách stejně, pokud se pohybují vůči sobě konstantní rychlostí.

(ii) Rychlost světla je konstantní, značíme ji c.

> Většina základních myšlenek vědy je v podstatě jednoduchá a lze zpravidla vyjádřit jazykem srozumitelným každému.
> (A.Einstein $\sim$ 1950)

17.18.2 Transformace času

Ve vlaku jedoucím rychlostí v_1 vzhledem k nádraží změříme, jak dlouho letí paprsek světla od stropu k zemi. Urazí ve vagónu vzdálenost D za čas $t_0 = D/c$. Vlak se mezitím posune o vzdálenost s_1.

Pozorovatel na nádraží vidí dráhu paprsku delší a tím pádem naměří delší čas t_1

$$t_1 = \frac{\sqrt{s_1^2 + D^2}}{c} \,,$$

tedy

$$c^2 t_1^2 = v_1^2 t_1^2 + c^2 t_0^2 \,.$$

Čas se transformuje podle vzorečku

$$t_1 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \,.$$

Matematika je potenciální most mezi různými disciplínami ...
(S.Markus $\sim$ 2003)

17.18.3 Transformace hmotnosti

Uvažujeme souřadnice (x_0, y_0) pro pozorovatele ve vlaku, souřadnice (x_1, y_1) pro nádraží. Předmět upuštěný z vlaku na koleje má vertikální rychlost

$$\frac{dy_1}{dt_1} = \frac{dy_1/dt_0}{dt_1/dt_0} = \sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}} \frac{dy_0}{dt_0}$$

pro pozorovatele na nádraží. Tedy uvažované rychlosti u_1 a u_0 se přepočítávají podle vztahu

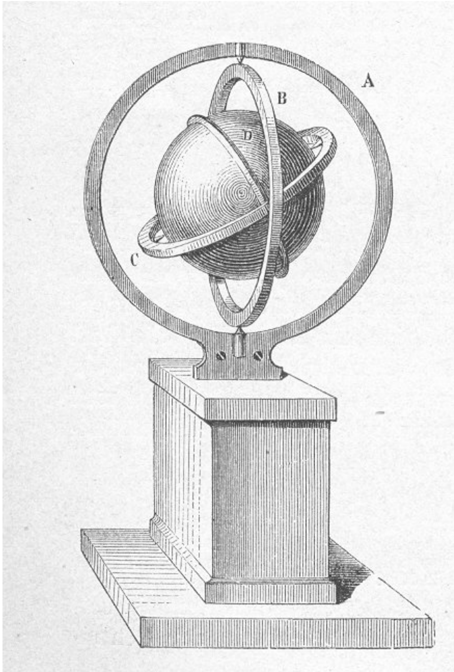
$$u_1 = \sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}} u_0 \,.$$

Fyzikální veličina moment setrvačnosti (=hmotnost x rychlost) je stejná ve všech soustavách, tedy

$$m_0 u_0 = m_1 u_1$$

čili

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}} \,.$$



Obrázek 17.18.4: Setrvačný pohyb je užitečný.

17.18.4 Hmota = Energie

Uvažujme těleso o hmotnosti m_0 umístěné v počátku v klidu. Budeme na těleso působit silou F ve směru osy x.

Energie, kterou těleso získá na dráze z 0 do x se rovná

$$E = \int_0^x F\, dx\ .$$

Síla F je odpovědná za změnu momentu hybnosti.

Tedy

$$F = \frac{d}{dt_1}(m_1 v_1) = \frac{d}{dt_1}\left(\frac{m_0 v_1}{\sqrt{1+\frac{v_1^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_0 a_1}{\left(1+\frac{v_1^2}{c^2}\right)^{3/2}}\ .$$

Tedy

$$E = \int_0^x F\, dx\ = \int_0^x \frac{m_0 a_1}{\left(1+\frac{v_1^2}{c^2}\right)^{3/2}}\, dx\ .$$

Provedeme substituci

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt_1} = \frac{dv_1}{dx}\frac{dx}{dt_1} = \frac{dv_1}{dx}v_1\ .$$

Pak

$$E = \int_0^x \frac{m_0 v_1}{\left(1+\frac{v_1^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv_1}{dx}\, dx\ .$$

Tedy

$$E = \int_0^{v_1} \frac{m_0 v_1}{\left(1+\frac{v_1^2}{c^2}\right)^{3/2}}\, dv_1\ .$$

Lehce zintegrujeme a dostaneme

$$E = c^2(m_1 - m_0) = mc^2 ,$$

kde $m = m_1 - m_0$ je změna hmotnosti.

Tady se ukázalo, že metody matematické analýzy dovedou (poté co si je vyzkoušíme ve viditelném světě) pracovat i v neviditelném světě. BTW, nečekal jsem to.

17.18.5 Délky a dálky

Pokud měříme délky paprskem světla, pak $l = ct$, tedy $l_1/t_1 = l_0/t_0$.

Není jisté, že všechno je nejisté.
(B.Pascal 1670)

17.19 Není to vidět, ale existuje to

17.19.1 Existence a neexistence řešení

Rozdělte úhel pomocí kružítka a pravítka na tři stejné úhly.

Některé úlohy v sobě mají skrytu zvláštní symetrii nebo pravidlo, které může celý problém vyřešit.

17.19.2 Ireducibilita polynomů

Nechť

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

je polynom stupně n s celočíselnými koeficienty a p je prvočíslo. Nechť

(i) p není dělitelem a_n,

(ii) p je dělitelem zbývajících koeficientů $a_0, \ldots, a_{n-1}$,

(iii) p^2 není dělitelem a_0.

Pak neexistuje polynom nižšího stupně než n s racionálními koeficienty, který je dělitelem f. Tomu říkáme, že polynom p je **ireducibilní nad tělesem racionálních čísel**.

(G.Eisenstein)

17.19.3 Rozšíření

Nechť $K \subset L$ jsou tělesa. Uvažujeme L jako vektorový prostor nad tělesem K a značíme $L : K$ a nazýváme **rozšíření**. Pokud je dimenze $L : K$ konečná, značíme jí $[L : K]$ a říkáme že L je **konečné rozšíření** K. Pro prvek $\alpha \in L \setminus K$ označme $K(\alpha)$ nejmenší podtěleso L obsahující α. Platí

- ✏ Máme-li dvě rozšíření $M : L$ a $L : K$, pak platí $[M : K] = [M : L][L : K]$.
- ✏ Je-li $[L : K]$ konečné rozšíření, pak každý prvek L je kořenem polynomu s koeficienty v K.
- ✏ Rozšíření $K(\alpha) : K$ je konečné rozšíření, právě když je α kořenem polynomu s koeficienty v K, v tom případě dimenze $[K(\alpha) : K]$ je rovna stupni minimálního polynomu α nad K.
- ✏ Je-li $[L : K]$ konečné rozšíření, pak $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

17.19.4 Konstrukce kružítkem a pravítkem

Nechť jsou dány body $P_0 = (0, 0)$ a $P_1 = (1, 0)$ v rovině. Bod P v rovině lze zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka, pokud existuje posloupnost bodů $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ ležících v rovině, kde body $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$ a $P = P_n$, přičemž pro každé $j > 0$ platí jedna podmínka z následujících tří konstrukcí

(i) P_j je průsečík dvou přímek a každá z nich prochází dvěma již zkonstruovanými body z $P_0, \ldots, P_{j-1}$.

(ii) P_j je průsečík přímky, která prochází dvěma již zkonstruovanými body z $P_0, \ldots, P_{j-1}$, a kružnice s již sestrojeným středem, která prochází již sestrojeným bodem.

(iii) P_j je průsečík dvou kružnic s již sestrojeným středem, které procházejí již sestrojeným bodem.

Pak říkáme, že P **lze sestrojit kružítkem a pravítkem**.

17.19.5 Konstrukce a rozšíření

Nechť $P = (x, y)$ lze sestrojit kružítkem a pravítkem. Pak rozšíření $[\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}] = 2^r$ pro jisté r.

Důkaz: Postupně ke $\mathbb{Q}$ přidáváme souřadnice bodů $P_2, \ldots, P_n$. Každá taková souřadnice je kořenem nejvýše kvadratické rovnice s koeficienty v předchozích rozšířeních. Tím se dimenze rozšíření $[K(\alpha) : K]$ v každém kroku rovná jedničce nebo dvojce. Tyto koeficienty se pak násobí. ■

17.19.6 Věta (Nelze roztřetit úhel)

Pomocí kružítka a pravítka nelze rozdělit obecný úhel na třetiny.

(P.L.Wantzel 1837)

Důkaz: Pokud dovedeme pomocí kružítka a pravítka rozdělit každý úhel na třetiny, pak pro $\theta = \pi/3$ dovedeme sestrojit úhel $\pi/9$ a tedy i $\cos \pi/9$. Toto číslo je vyhovuje rovnici $8a^3 - 6a - 1 = 0$. Pak dovedeme sestrojit i $\beta = 2\alpha - 1$ a β je kořenem ireducibilního polynomu $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$. Pak $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2^r$ musí být dělitelné 3. Spor. ■

Taky by se mohlo používat přeložení papíru podle přímky. Super nápad. Ten jsem někde četl ...

17.19.7 Věta (Nelze zdvojit krychli)

Pomocí kružítka a pravítka nelze sestrojit hranu krychle, která má objem 2.

Důkaz: Pokud dovedeme pomocí kružítka a pravítka sestrojit $\alpha = \sqrt[3]{2}$, pak α je kořenem ireducibilního polynomu $f(x) = x^3 - 2$. Pak $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2^r$ musí být dělitelné 3. Spor. ■

V důsledku toho nelze sestrojit pomocí kružítka a pravítka pravidelný 18-ti úhelník. To je možné právě tehdy, když $n = 2^s p_1 \dots p_t$, kde p_j jsou různá prvočísla tvaru $2^k + 1$.

(P.Fermat $\sim$ 1640)

17.19.8 Věta (Kvadratura kruhu)

Lze dokázat, že nelze pomocí kružítka a pravítka sestrojit $\sqrt{\pi}$. Tedy nejde provést kvadraturu kruhu.

(F.Lindenmann 1882)

17.19.9 Grupa rozšíření

Pro rozšíření $L : K$ uvažujeme všechny automorfismy $L \to L$, které jsou identitou na K, s operací skládání. Grupu těchto automorfismů budeme nazývat **grupa rozšíření** a značit $\Gamma(L : K)$.

Za určitých okolností existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi podgrupami $\Gamma(L : K)$ a "mezitělesy"rozšíření $L : K$.

(É.Galois)

17.19.10 Rovnice 5-tého stupně není řešitelná

Neexistuje vzoreček na kořeny ireducibilního polynomu 5-tého stupně s racionálními koeficienty.

(N.H.Abel $\sim$ 1824, É.Galois)

> Naneštěstí se málo ví, že nejužitečnější vědecké knihy jsou ty, ve kterých autor jasně říká to, co neví. Autor nejvíce zasáhne čtenáře když zatají obtížnosti.
> (E.Galois)

Důkaz: Půjde o boj komutativity a nekomutitavity. Vzoreček na spočítání spočívá v postupném sčítání, násobení, dělení a odmocňování. Pouze odmocňování nás donutí rozšířit těleso racionálních čísel. Pokud rozšiřujeme těleso, průběžně vytváříme grupu rozšíření. Vždy dostaneme komutativní grupu, protože grupa rozšíření

$$\mathbb{Q}(c^{\frac{1}{n}}, e^{\frac{2\pi i}{n}}) : \mathbb{Q}$$

je komutativní.

Přidání jednoho kořene α vytvoří mezistupeň rošíření $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ se stupněm $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$. To odpovídá tomu, že grupa rozšíření obsahuje 5-cyklus. Pokud má rovnice právě dva různé komplexně sdružené kořeny, obsahuje grupa rozšíření zobrazení $z \mapsto \bar{z}$, tedy 2-cyklus. Pokud je v grupě 2-cyklus i 5-ti cyklus, obsahuje celou grupu S_5 permutací pěti prvků. Ta obsahuje jako podgrupu grupu všech sudých permutací, která nemá rozklad na „komutativní faktory“. To jde použít například v případě polynomu $x^5 - 6x + 3$. ■

> Někde přesnost vyždímá veškerou šťávu a zbyde humus.
> (G.F.Simmons 1972)

17.19.11 O řešení rovnic

Pro lineární diferenciální rovnici s polynomiálními koeficienty uvažujeme grupu automorfismů nejmenšího tělesa funkcí obsahujícího všechna řešení zadané rovnice. Integrovatelnost rovnice závisí na „skoro komutativitě“ grupy automorfismů.

(J.J.Morales, J.P.Ramis)

17.19.12 O grupách u diferenciálních rovnic

Pro diferenciální rovnici $F(x, y, y') = 0$ je možné sestavit vhodnou grupu transformací roviny (x, y). S tou pak je možné určit vhodnou substituci, která převede danou diferenciální rovnici na lineární, což vede k řešení dané diferenciální rovnice,
Pokud je diferenciální rovnice invariantní na určité transformace, je pak na tyto transformace uzavřen i systém řešení. Tak je možné z jednoho řešení vygenerovat všechna.
To jde provést pro popsané typy diferenciálních rovnic. Pro zbývající typy jde dokázat, že řešit pomocí integrace nepůjdou.

(S.Lie 1883)

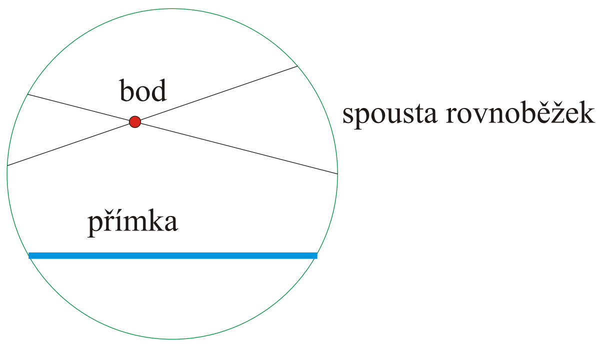
Někdy raději nepřesně, ale porozumitelně, než naopak.
(G.F.Simmons 1972)

17.20 Čísla jsme si vymysleli, prostor však je dán ...

17.20.1 Nové geometrie

Uvažujeme geometrii uvnitř jednotkového kruhu, "body"jsou body, "přímky"jsou úsečky spojující body na hranici kruhu. Pak neplatí axiom o rovnoběžkách.

(E.Beltrami 1868, F.Klein, C.F.Gauss ∼ 1800, N.I.Lobačevskij 1829, J.Bolyai 1832, F.Klein, H.J.Poincaré ∼ 1910)



Obrázek 17.20.1: Daným bodem k dané přímce ...

Z ničeho jsem vytvořil podivný nový svět.
(J.Bolyai ∼ 1830)

Konstrukce nových geometrií dokázaly nezávislost axiomu o rovnoběžkách.

Není to jednou nebo dvakrát, ale bezpočtukrát, že se objeví ve světě ta samá idea.
(Aristotelés ze Stageiry ∼ -350)

Jaký je ve skutečnosti skutečný prostor nevíme.

Tak daleko, jak se matematici zabývají realitou, tak jsou nejistí. A jak moc jsou jistí, tak se nezabývají realitou.
(A.Einstein $\sim$ 1950)

Fyzikální důvodu vedou k tomu, že má prostor dimenzi 3. Navíc je rozumné do rozměrů zahrnout i čas, tak získáme čtyřrozměrný časoprostor.

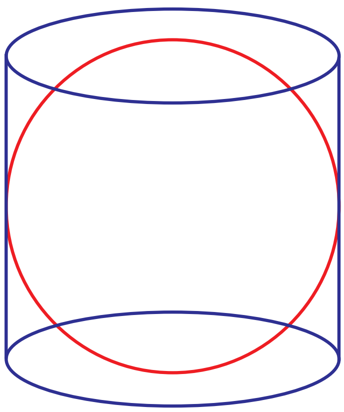
Někdy si fyzici představují, že prostor má tolik rozměrů, kolik máme prstů na rukou, někdy ještě o jedničku víc. Někteří se i s prsty na nohou dopočítají k dimenzi 26, sám nevím jak ...

17.21 Mix

17.21.1 Plášť válce a povrch koule

Válec opsaný kouli má plášť o stejné velikosti jako povrch koule.

(Archimédés ze Syrákús $\sim$ -250)



Obrázek 17.21.1: Válec opsaný kouli.

Podle tohoto obrázku poznal M.T. Cicero Archimédův náhrobek a dal jej restaurovat. Říká se, že to byl jediný podstatný příspěvek starověkého Říma k čisté matematice.

17.21.2 Není to $22/7$, lituji . . .

Nechť $\pi = a/b$ je podíl přirozených čísel a a b. Definujeme funkci

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{c_k x^k}{n!} .$$

Pozorování

- Hodnota funkce f i jejích derivací v počátku je celočíselná.
- To samé platí díky symetrii i v bodě $x = \pi = a/b$.
- Nyní integrál
$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx$$
je celočíselný, neboť
$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F(\pi) + F(0) ,$$
kde
$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) ,$$
protože
$$\frac{d}{dx}(F'(x) \sin x - F(x) \cos x) = f(x) \sin x .$$
a funkce F v bodech 0 a π je celočíselná.
- Na druhou stranu je
$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx < \pi \frac{\pi^n a^n}{n!} ,$$
Tedy pro velká n nemůže být tento integrál celočíselný. Spor.

17.21.3 A umocnil se . . .

Zvolme kladné číslo x a uvažujme posloupnost $\{x_n\}$ definovanou rekurentně

$$x_0 = x , \ x_{n+1} = x^{x_n} .$$

Posloupnost $\{x_n\}$ konverguje právě tehdy, když

$$\left(\frac{1}{e}\right)^e \le x \le e^{\left(\frac{1}{e}\right)} .$$

(L.Euler 1777)

17.21.4 Objem prostorové koule

Zkoumejme funkci

$$f(y) = \int_{||x||^2 \le y} 1 \; dx \; ,$$

která počítá v $\mathbb{R}^n$ objem koule o poloměru y. Spočítáme její exponenciální transformaci

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zy} f(y) \; dy \; .$$

Počítáme

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zy} f(y) = \int_{||x||^2 \le y} 1 \; dx \; dy \; = \; \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} \, \frac{\Gamma(1+n/2)}{z^{1+n/2}} \; .$$

Tedy lze spočítat inverzní exponenciální transformace

$$f(y) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} \, y^{n/2} \; .$$

17.21.5 Rotující hřídel

Máme rovnou hřídel o délce l rotující ve dvou úzkých ložiskách. Při rotování je průhyb y funkcí bodu x. Systém v jednoduchém modelu vyhovuje při vhodných konstantách rovnici

$$y^{(iv)}(x) = \omega^2 y(x) \; , \; y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0 \; .$$

Charakteristická rovnice má kořeny $\pm\sqrt{\omega}$, $\pm i\sqrt{\omega}$. Řešení tedy má tvar

$$y(x) = a \sinh x\sqrt{\omega} + b \sin x\sqrt{\omega}$$

a netriviální řešení existuje, pokud

$$\omega^2 = n\frac{\pi}{n}, \; n = 1, 2, 3, \dots \; .$$

Tedy pro jisté úhlové rychlosti hřídel vydává zvuky …

17.21.6 Elektrický obvod jako kalkulačka

Zapojíme k baterii o napětí V jednoduchý obvod se dvěma prvky, odporem R a cívkou s indukcí L. Pak proud I splňuje diferenciální rovnici

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V, \quad I(0) = 0 \; .$$

Pak samozřejmě $I(t) = (V/R)(1 - e^{-Rt/L})$ je řešení a případné měřidlo proudu v obvodu nám ukazuje hodnoty docela užitečné funkce …

> Také matematika ke svému obnovování potřebuje opory. Přestože je schopna sama růst v rámci formálního světa, její obnova přichází z podnětu, které jí přinášejí experimentální vědy nebo prosté kontakty s vnějším světem a se životem.
> (G.Choquet $\sim$ 1990)

17.21.7 Hračičky a diferenciální rovnice

Soustava

$$\frac{dx}{dt} = x(x+y-1)\ ,\ \frac{dy}{dt} = y(x-1+3)$$

demonstruje všechny typy specialit ve fázové rovině. Další hezké rovnice jsou

$$x'' + x = x^3\ ,\ x'' + x^3 = x$$

17.21.8 Jak snímat a prodávat

Můžeme si sejmout balíček karet a ponechat si sejmutou kartu, nebo sejmout ještě jednou a vzít si sejmutou kartu. Jak sejmout (pravděpodobně) co nejlépe?
Správný postup zná každý karbaník. Předem si řekne, že v prvním sejmutí bude spokojen s kartou alespoň průměrnou (spodek). Pokud sejme poprve hůře, riskne ještě jedno snímání.
Co v průměru sejme?

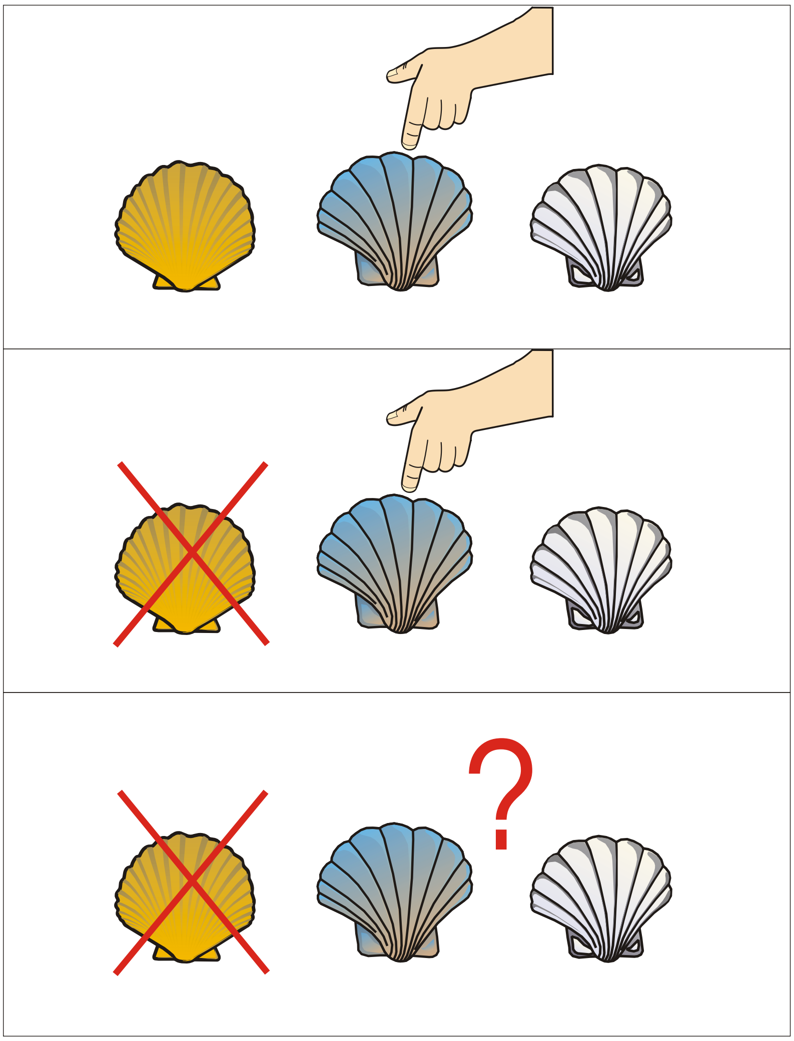
Podobně můžeme prodávat něco dvěma (nebo více) kupcům, kteří chtějí koupit vaši věc a chtějí hned odpověď na jejich nabídku.

17.21.9 O poctivém skořápkářovi

Skořápkář schová pod jednu skořápku perlu a nechá hádat, pod kterou je. Po označení dá druhou šanci. Otočí jednu ze dvou neoznačených skořápek, pod kterou není perla a my můžeme změnit naši volbu. Vyplatí se to?

ANO. Zvýšíme dvojnásobně pravděpodobnost, že vyhrajeme perlu. Je to tak.

> Když řeší úlohu někdo jiný, všechno je jasné, když řešíš sám, nic tě nenapadá.
> (L.Euler $\sim$ 1740)



Obrázek 17.21.9: Je to nečekané, ale vyplatí se změnit volbu.

17.21.10 Jak se otáčet

Otáčení bodů v rovině jde realizovat pomocí zápisu bodů roviny jako komplexních čísel $a + ib$ a vynásobením komplexní jednotkou i. Podobná situace se zvládne ve vyšších dimenzích přidáním nových čísel podobných číslu i.

Uvažujeme množinu

$$H = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, jk = i, ki = j$ a $ji = -k, kj = -i, ik = -j$. Tuto množinu nazveme **algebra kvaterniónů** nad tělesem reálných čísel (jde pracovat i nad jiným tělesem), někdy prvku této algebry říkáme **hyperkomplexní číslo**.

(H.G.Grassman 1844)

Prostě se k reálným číslům přidá místo komplexní jednotky, která otáčela v rovině, rovnou více číslek, které otáčejí v prostoru. (Jakém?)

17.21.11 O počasí

Počasí bylo každý rok "průměrné"(průměr za poslední dva roky). Zjistěte, k jakému počasí to spěje.

Označme $x_1 = A$, $x_2 = B$. Platí

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \; .$$

Nabízí se konstantní řešení $y_n = 1$. To nevyhovuje svými prvními členy. Další řešení se nabízí $z_n = (-1/2)^n$. To také nevyhovuje svými prvními členy. Najdeme konstanty α a β takové, aby $x_n = \alpha y_n + \beta z_n$ bylo hledané počasí. Jde o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$A = \alpha\, 1 + \beta\, \frac{-1}{2} \qquad (1)$$

$$B = \alpha\, 1 + \beta\, \frac{1}{4} \qquad (2)$$

(porovnáme první dva členy posloupností).

Počasí se jistě ustálí na $(A + 2B)/3$.

Pokud by to ale ve skutečnosti šlo v čase "v protisměru", to by byla nadílka.

Kapitola 18

Problémy pro magistry

Ty náročnější problémy přinášejí veliké uspokojení.

Obrázek 18.0.0: Magistr je takový malý človíček s diplomem.

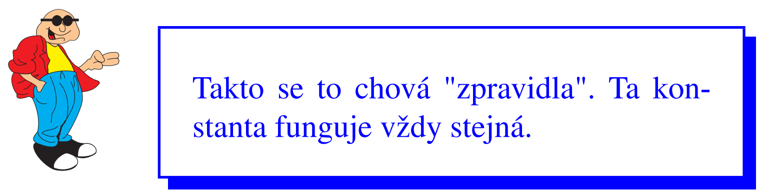
18.1 O periodických přírodních jevech

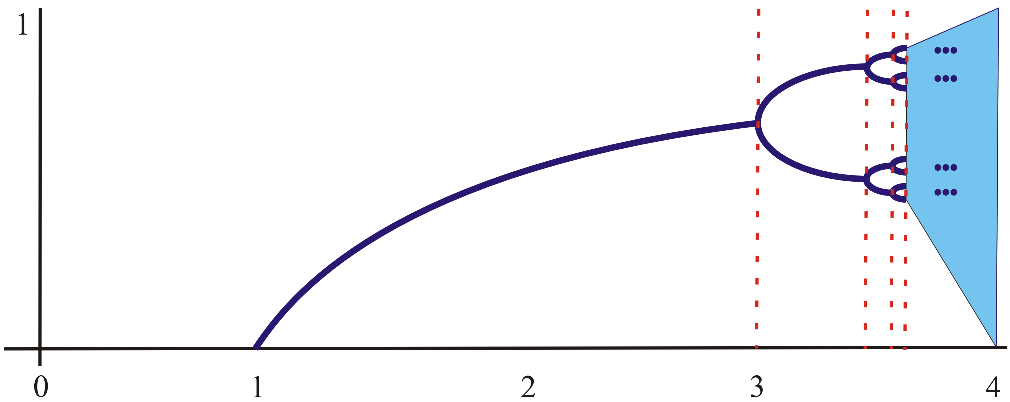
18.1.1 O jablkách

Každý druhý rok je velká úroda jablek. Podobně se některé ryby objevují ve velkém množství každý druhý rok. Můžeme si popsat tuto situaci jako diskrétní záležitost.

Zvolíme funkci f a počáteční hodnotu x dané populace. Pak $f(x), f(f(x)), \ldots$ budou odpovídat stavům za rok, za dva roky a tak dál. Zkusíme si funkci $f(x) = ke^{-x}x$. Pro $k < 1$ má iterovaná posloupnost $\{f^k(x)\}$ limitu 0. Pro $1 < k < e^2$ má posloupnost jednu kladnou limitu. Pak nastane rozvětvení a pro určitý interval parametru k jsou právě dva hromadné body. Pro rostoucí hodnotu parametru k se vždy zdvojnásobí počet hromadných bodů.
Délky intervalů mezi dvěmi následujícími hodnotami parametru, kdy nastává rozvětvení, tvoří přibližně geometrickou posloupnost s koeficientem $1/4,69\ldots$.

(M.Feigenbaum)





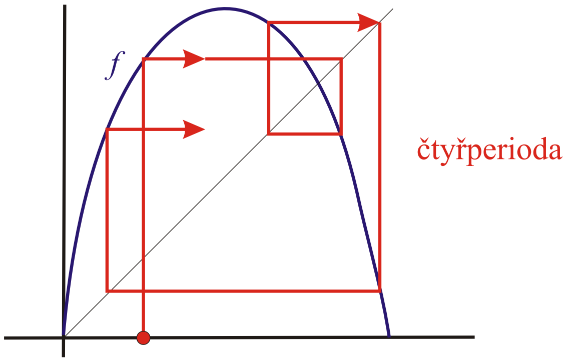
Obrázek 18.1.1: Podobné chování předvádí iterování funkce $x \mapsto kx(1-x)$. Napřed je jenom jeden limitní bod, pro parametr větší než 3 jsou dva, ...

18.1.2 O bifurkacích

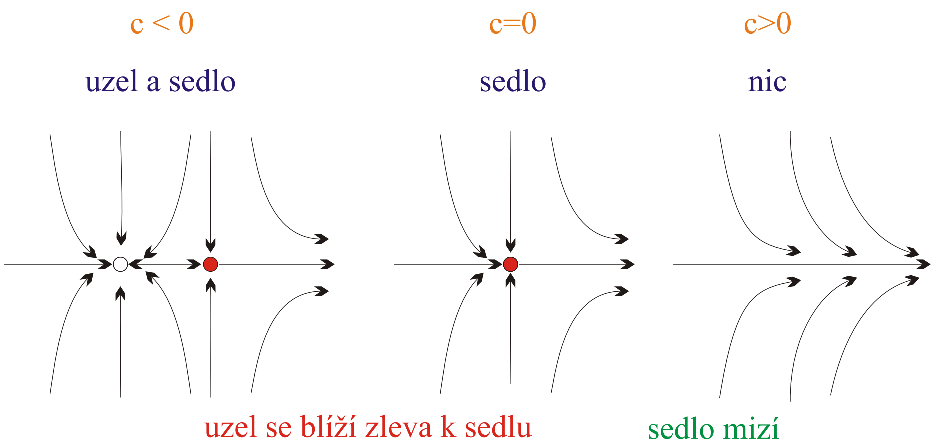
Pro systém

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + c$$
$$\frac{dy}{dt} = -y$$

pozorujeme chování trajektorií s měnící se hodnotou parametru c.



Obrázek 18.1.1: Zacyklené hledání pevného bodu.



Obrázek 18.1.2: Pro záporná c má systém jeden stabilní uzel. Pro nulu stabilní uzel ztrácí stabilitu a slepí se se sedlem. Toto sedlo pro kladné hodnoty parametru zmizí.

18.2 Pružnost a pevnost

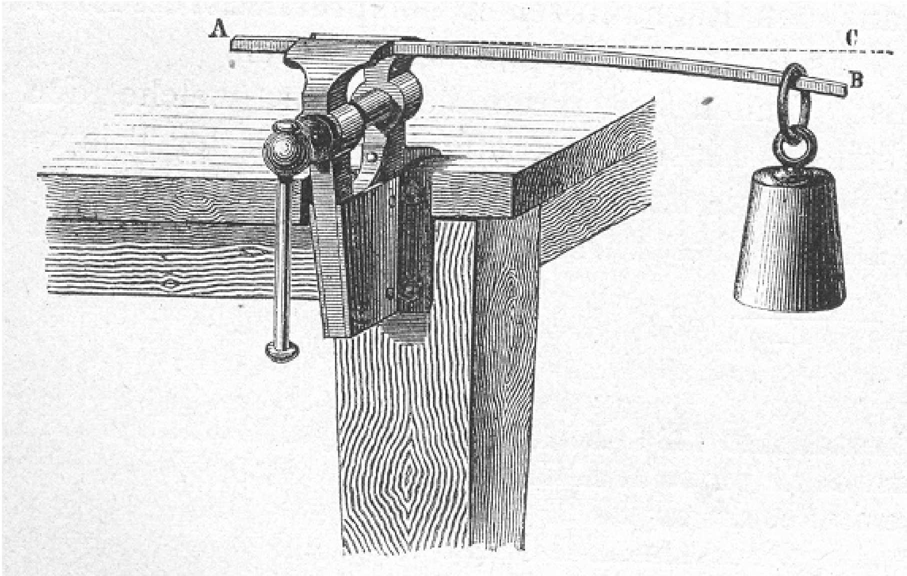
18.2.1 Rovnice prutu

Rovnici prutu délky 1 lze napsat ve tvaru

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[E(x)I(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] + Q(x)u = f(x)\ ,\ x \in (0,1)\ ,$$

kde

- E je modul pružnosti,
- I moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ohybové ose,
- Q koeficient poddajnosti podloží,
- f vertikální zatížení.



Obrázek 18.2.1: Průhyb prutu vede k počítání diferenciálních rovnic.

18.2.2 Pružná membrána (a tepelná rovnováha)

Pružná membrána (popřípadě rovnovážný stav tepla) vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \, .$$

18.2.3 Průhyb membrány (a tepelná rovnováha)

Průhyb membrány zatížené vertikálními silami (případně rozložení teploty při ustáleném vedení tepla v prostředí o konstantní tepelné vodivosti a s vnitřními zdroji tepla nezávislými na čase) vyhovuje

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y) \, ,$$

kde konstanta k odpovídá pružnosti (tepelné vodivosti).

(Poisson)

18.2.4 Průhyb tenké desky

Rovnice průhybu tenké desky je

$$\Delta^2 u = f \, .$$

18.2.5 Pružně plastická deformace

Pružně plastická deformace rovinného tělesa vyhovuje rovnici

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(m(|\mathrm{grad}\, u|^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(m(|\mathrm{grad}\, u|^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y) \, ,$$

kde m charakterizuje materiálové vlastnosti tělesa.

Pokud je

$$m(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

a $f = 0$, pak řešíme problém minimální plochy.

> Ty chceš vědět, proč jsem přerušil tvůj učený hovor, abych se ohlédl za hezkou ženou? Lituji tě můj příteli, protože to byla otázka slepce.
> (Aristotelés ze Stageiry $\sim$ -350)

Obrázek 18.2.5: A. Rodin: Polibek.

18.3 Tepelná rovnováha

18.3.1 Harmonické funkce

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Spojitá funkce $f : U \to \mathbb{R}$ se spojitými druhými parciálními derivacemi splňující rovnici tepelné rovnováhy

$$\Delta f = 0$$

se nazývá **harmonická funkce**, operátor

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

budeme nazývat **operátor tepelné rovnováhy**.

18.3.2 Okrajová úloha pro rovnici tepelné rovnováhy

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina a funkce f je spojitá na ∂U. Budeme hledat funkci u na U splňující v U rovnici

$$\Delta\, u \;=\; \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \;=\; 0$$

a vyhovující okrajové podmínce $u = f$ na ∂U. Této úloze budeme říkat **okrajová úloha pro rovnici tepelné rovnováhy**.

(G.P.L.Dirichlet $\sim$ 1840)

18.3.3 Řešení pro kouli

Existuje explicitní integrální vyjádření řešení okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy pro kouli. Pro $a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ označme

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x-a| < r\}\ ,\ S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x-a| = r\}\ .$$

Funkci funkci $f : S_r(a) \to \mathbb{R}^*$ integrovatelnou podle $(m-1)$-rozměrné míry povrchové míry σ na R^m přiřadíme funkci $Hf : B_r(a) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$Hf(x) = \frac{1}{\sigma(S_r(a))} \int_{S_r(a)} f(y)\, \frac{r^2 - |x-a|^2}{|x-y|^m}\, r^{m-2}\, d\sigma(y)\ .$$

Funkce Hf je harmonická a nekonečně derivovatelná na $B_r(a)$ a jde spojitě rozšířit na $S_r(a)$ hodnotou f v bodech spojitosti funkce f. Pro spojitou funkci f získáme tedy řešení okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy na kouli. Toto řešení je určeno jednoznačně.

(Poisson)

18.3.4 Hlavní problém

Otázka je, pro které množiny U existuje řešení okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy pro každou spojitou okrajovou podmínku f. Takovou množinu U budeme nazývat **regulární množina**, v opačném případě **iregulární množina**. Například koule je regulární množina. Ukáže se, že koule s vyjmutým středem není regulární množina.

Chování ve středu je vynucené chováním na povrchu koule.

18.3.5 Nezáporné harmonické funkce

Pro nezápornou harmonickou funkci h na $B_r(a)$ existuje právě jedna nezáporná topologická míra μ na $S_r(a)$ tak, že

$$h(x) = \frac{1}{\sigma(S_r(a))} \int_{S_r(a)} \frac{r^2 - |x-a|^2}{|x-y|^m}\, r^{m-2}\, d\mu(y)\ .$$

18.3.6 Vlastnost průměru

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce $f : U \to \mathbb{R}$ splňuje **vlastnost objemového průměru**, pokud

$$f(a) = \frac{1}{m(B_r(a))} \int_{B_r(a)} f(x)\, dm \,,$$

kde m je m-rozměrná míra na R^m, platí pro každou kouli $B_r(a) \subset U$ o poloměru r a středu a. Řekneme, že funkce $f : U \to \mathbb{R}$ splňuje **vlastnost povrchového průměru**, pokud

$$f(a) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(a))} \int_{\partial B_r(a)} f(x)\, d\sigma \,,$$

kde σ je $(m-1)$-rozměrná míra na R^m, platí pro každou kouli $B_r(a) \subset U$ o poloměru r a středu a.

18.3.7 Věta o průměru

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, funkce $f : U \to \mathbb{R}$. Následující podmínky jsou pro funkci f ekvivalentní

- Funkce má vlastnost objemového průměru.
- Funkce má vlastnost povrchového průměru.
- Funkce je harmonická.

18.3.8 Vlastnosti harmonických funkcí

Platí

- Princip minima: Harmonické funkce nenabývají ostrých extrémů ve vnitřních bodech.
- Lokálně stejnoměrná limita harmonických funkcí je harmonická.
- Monotonní limita harmonických funkcí je buď harmonická, nebo identicky rovna $\pm\infty$.

Podobně jako pro holomorfní funkci.

18.3.9 Fundamentální řešení a harmonické jádro

Označme ε_m fundamentální řešení rovnice

$$\Delta\varepsilon_m = \delta(x) \,.$$

Pro $m = 3$ dostaneme

$$\varepsilon_3(x) = \frac{1}{4\pi|x|} \,.$$

Pro $m = 2$ dostaneme

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x| \,.$$

Pro $x, y \in \mathbb{R}^m$ definujeme $N(x,y) = \varepsilon(|x-y|)$, budeme této funkci říkat **harmonické jádro**.

18.3.10 Superharmonické funkce

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Zdola polospojitá funkce $f : U \to \mathbb{R}$, která má **vlastnost povrchového nadprůměru**

$$f(a) \geq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(a))} \int_{\partial B_r(a)} f(x)\, d\sigma(x)$$

kdykoliv $\overline{B_r(a)} \subset U$, se nazývá **hyperharmonická funkce**. Pokud je v každé komponentě U bod, v němž je funkce f konečná, budeme jí říkat **superharmonická funkce**.

18.3.11 Harmonický potenciál

Pro (nezápornou) topologickou míru (konečnou na kompaktech) μ v $\mathbb{R}^m$ (v případě $m = 2$ s kompaktním nosičem) definujeme **harmonický potenciál** předpisem

$$N\mu(x) = \int N(x, y)\, d\mu(y)\ .$$

Harmonický potenciál je superharmonická funkce na $\mathbb{R}^m$ a pokud má míra μ navíc kompaktní nosič, je harmonický potenciál harmonický mimo nosič míry μ. Ve smyslu distribucí platí

$$\Delta(-N\mu) = \mu\ .$$

18.3.12 Vlastnosti superharmonických funkcí

Platí

- Superharmonické funkce jsou lokálně integrovatelné.

18.3.13 Lokální harmonická modifikace

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $V = \overline{B_r(a)} \subset U$. Funkci f hyperharmonickou na U modifikujeme na V tak, že na V najdeme řešení okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy s okrajovou podmínkou $f \restriction \partial V$. Takto upravenou funkci budeme nazývat **lokální harmonická modifikace** funkce f vzhledem k V a značit f_V. Při lokální harmonické modifikaci hodnota funkce f neporoste, vzniklá funkce bude opět hyperharmonická.

18.3.14 Regularita distributivního řešení

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a f je lokálně integrovatelné distributivní řešení rovnice tepelné rovnováhy

$$\Delta f = 0\ .$$

Pak existuje funkce h harmonická na U tak, že $h = f$ skoro všude na U.

18.3.15 Rozklad superharmonické funkce

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a u je funkce superharmonická na U. Pak existuje právě jedna topologická míra μ na U tak, že ve smyslu distribucí platí

$$\Delta(-u) = \mu\ .$$

Ke každé omezené otevřené množině V, pro niž $\overline{V} \subset U$, existuje funkce h^V harmonická na V taková, že na V platí

$$u = N(\mu \restriction V) + h^V \; .$$

Nechť $m > 2$ a funkce u je superharmonická na $\mathbb{R}^m$. Jestliže je dána funkce u harmonická na $\mathbb{R}^m$ splňující $h \leq u$, pak existuje právě jedna topologická míra μ a právě jedna nezáporná konstanta c tak, že

$$u = N\mu + h + c \; ,$$

přitom je $h + c$ největší harmonická minoranta funkce u.

18.3.16 Harmonický operátor

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina. Existuje právě jeden operátor H přiřazující funkci f spojité na ∂U funkci Hf harmonickou na U splňující

(i) H je lineární,

(ii) H je nezáporný (obraz nezáporné funkce je nezáporný),

(iii) Pokud okrajová úloha pro rovnici tepelné rovnováhy s okrajovou podmínkou f má řešení u, pak $u = Hf$.

(Keldyš)

18.3.17 Konstrukce harmonického operátoru

Nechť je $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ libovolná funkce. Říkáme, že funkce $u : U \to \mathbb{R}^*$ je **horní hunkce** k funkci f, je-li u superharmonická na U a pro body z na hranici ∂U platí

$$\liminf_{x \to z} u(x) \geq f(z) \; , \; \liminf_{x \to z} u(x) \geq -\infty \; .$$

Označme $\overline{H}f$ infimum všech horních funkcí k funkci f a nazveme jej **horní řešení** okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy. Podobně u je **dolní funkce** funkce f, pokud $-u$ je horní funkce k $-f$. Dostaneme pak $\underline{H}f$ jako suprémum všech dolních funkcí k funkci f a nazveme jej **dolní řešení** okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy.

Pro spojitou funkci platí $Hf = \overline{H}f = \underline{H}f$.

(O.Perron, N.Wiener, M.Brelot)

18.3.18 Regulární hraniční body

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast a $z \in \partial U$. Říkáme, že z je **regulární bod**, jestliže pro každou funkci f spojitou na hranici ∂U platí

$$\lim_{x \to z} Hf(x) = f(z) \; .$$

Pokud toto neplatí, jde o **iregulární bod**.

Obrázek 18.3.18: Střecha s regulárním bodem.

Dobrá matematika na jakékoliv úrovni by měla obsahovat společenský rozměr, dávat to vztahu myšlenky, motivace, vztah k jiným disciplínám, estetický, filosofický a historický aspekt.

(S.Markus $\sim$ 2003)

18.3.19 Věta (Regularita hraničního bodu)

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast a $z \in \partial U$. Bod z je regulárním bodem právě tehdy, když existuje otevřená množina V a kladná funkce u superharmonická na $U \cap V$ taková, že

$$\lim_{x \to z} u(x) = 0 \, .$$

18.3.20 Kuželový test

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast a $z \in \partial U$. Jestliže existuje kužel T protínající U v okolí bodu z pouze v bodě z, pak bod z je regulární bod. V rovině stačí úsečka.

Kužel je například množina

$$T = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \ : \ x_1 \geq 0 \,\&\, x_1^2 \geq x_2^2 + \cdots + x_m^2\} \, .$$

18.3.21 Kapacita

Mějme kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^m$. Definujeme

$$\mathrm{cap}\,(K) = \sup\{\mu(K)\}\ ,$$

kde suprémum se počítá přes všechny topologické míry s kompaktním nosičem v K, jejichž harmonický potenciál $N\mu$ je nanejvýš 1.
Pak pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}^m$ definujeme

$$\mathrm{cap}\,(M) = \sup\{\mathrm{cap}\,(K)\ :\ K \subset M\}\ .$$

18.3.22 Věta (O kapacitě)

Nechť máme kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^m$ a $\mathrm{cap}\,K > 0$. Pak existuje nenulová topologická míra s kompaktním nosičem v K taková, že harmonický potenciál $N\mu$ je spojitý.

18.3.23 Věta (Kapacita a regularita)

Množina iregulárních bodů oblasti má nulovou kapacitu.

18.4 Les metod

Prostory integrovatelných distribucí jsou nastoupeny a dobrovolně se hlásí do služby v první linii zákopové války s nelítostnými diferenciálními rovnicemi. Do útoku!!!

18.4.1 Slabé řešení

Řekneme, že funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ je **slabé řešení** diferenciální rovnice

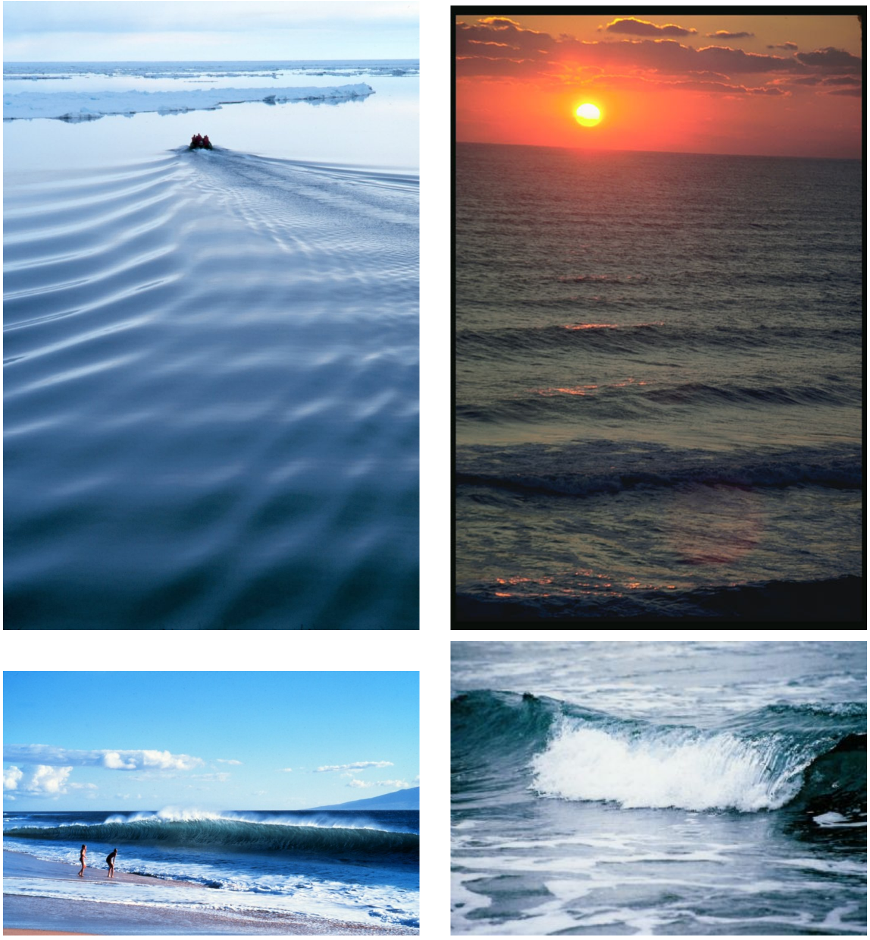
$$Au = f\ ,$$

kde f je funkcionál nad prostorem $W_0^{1,p}(\Omega)$, A operátor z $W^{1,p}(\Omega)$ do duálního prostoru $W^{1,p}(\Omega)^*$, pokud pro všechna $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ platí

$$(Au, v) = (f, v)\ .$$

Pokud je slabé řešení dostatečně hladké a diferenciální rovnice má dostatečně hladké koeficienty, existuje řešení klasické a je rovno slabému řešení.
Okrajové podmínky ve formě funkce na hranici se interpretují ve smyslu stopy řešení. Tím se zmenší prostor řešení.

Jsou možné i jiné podmínky.



Obrázek 18.4.1: Vlny v akci ...

18.4.2 Slabé řešení a variační úloha

Slabé řešení $Au = f$ můžeme hledat tak, že sestavíme úlohu na minimum jistého funkcionálu, pro nějž bude naše rovnice variační rovnicí.
Například pro funkce $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ a pro $f \in L^1(0,1)$ budeme zkoumat funkcionál

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 u^4(x)\,dx - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx\,.$$

Tento funkcionál je potenciálem okrajové úlohy

$$-u''(x) + u^3(x) = f(x)\,,\ x \in (0,1)$$

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

18.4.3 Problém - s hezkými operátory není problém

Nechť je X reflexivní úplný normovaný prostor. Nechť je $T : X \to X^*$ omezený a slabě spojitý operátor splňující

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{(Tu,u)}{|u|} = \infty$$

nazývanou **podmínka koercivity** a podmínku

$$(Tu - tv, u - v) \geq 0\,,\ u, v \in X\,,$$

nazývanou **podmínka monotonie**.
Pak má pro každé $f \in X^*$ rovnice
$$Tu = f$$
alespoň jedno řešení $u \in X$.

(Browder)

18.5 Provázanost topologie a integrování

18.5.1 Simplexy a komplexy

Konvexní obal n lineárně nezávislých bodů v $\mathbb{R}^{n+1}$ se bude nazývat n-**simplex** v $\mathbb{R}^m$. Budeme uvažovat "slepeniny"konečně mnoha simplexů a budeme je nazývat **komplex**. Navíc můžeme komplexy psát jako formální součet simplexů. Koeficienty mohou být reálná čísla.
Pokud vynecháme jeden z vrcholů n-simplexu, dostaneme $(n-1)$-simplex, který budeme nazývat **stěna simplexu**. Soubor stěn simplexu Δ budeme značit $\partial\Delta$.
Uvažujeme od nynějška simplexy odvozené od uspořádané posloupnosti vrcholů. Tím se jeho stěny a hrany stanou orientovanými. Například píšeme hranici úsečky
$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0] \ ,$$
hranice trojúhelníku
$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$
a hranice čtyřstěnu
$$\partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2] \ .$$
Hranice hranice je 0.

Pracujeme vlastně s grupami.

18.5.2 Řetězy

Označíme $\Delta_n(X)$ komutativní grupu s bází tvořenou n-simplexy v X a budeme tuto grupu nazývat Δ-**komplex prostoru** X. Prvek $\Delta_n(X)$ budeme nazývat n-**řetěz**. Označme
$$\partial : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$$
hraniční homomorfismus.

18.5.3 Řetěz komplexů

Uvažujme schéma
$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_n \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1 \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \ .$$
Budeme toto schéma nazývat **řetěz komplexů**.
Díky tomu, že hranice hranice je nulová, t.j. $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ platí, že $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$. Tedy lze vytvořit faktorovou grupu. Označme $H_n = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ a budeme tuto grupu nazývat n-tá **homologická grupa** řetězu komplexů.

18.5.4 Derivace derivace a co dál

Lze ukázat, že

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot} \ = 0 \ \ , \ \ \mathrm{rot}\,\mathrm{grad} \ = 0 \ .$$

Obecně lze ukázat, že $d^2 = 0$, kde chápeme operátor d jako operátor derivování diferenciální formy. Diferenciální 2-forma ω je například formální výraz

$$\omega = Adydz \ + \ Bdzdx \ + \ Cdxdy \ .$$

Derivace diferenciální formy ω je pak 3-forma

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) \ dxdydz \ .$$

Diferenciální 0-forma je hladká reálná funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$. Její derivace je 1-forma

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j \ .$$

Je-li $\omega = f dx_{j_1} \ldots dx_{j_k}$ diferenciální k-forma, její derivace je diferenciální $(k+1)$-forma

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\, dx_{j_1} \ldots dx_{j_k}$$

s konvencí, že $dxdx = 0$.

Diferenciální formy tvoří posloupnost komutativních grup $\{\Omega^k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ a homomorfismů $d^k : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ s $d^{k+1}d^k = 0$.

(H.J.Poincaré $\sim$ 1910)

18.5.5 Kohomologie

Vytvoříme faktorgrupu p-forem na varietě M, které mají nulovou derivaci, podle podgrupy p-forem, které jsou derivací nějaké $(p-1)$-formy na M. Získáme grupu $H^p(M)$, kterou budeme nazývat **kohomologická grupa**.

18.5.6 Věta (Dualita forem a komplexů)

Pro p-řetěz $c = a_1 s_1 + \ldots + a_n s_n$, kde a_i jsou čísla a s_i jsou simplexy, a pro p-formu ω definujeme

$$(c, \omega) = \sum_i a_i \int_{s_i} \omega \ .$$

Pak platí

$$(\partial c, \omega) = (c, d\omega) \ .$$

Málo, ale zralého.

(K.F.Gauss $\sim$ 1840)

Ona je to pořád v podstatě základní věta analýzy. Jenom je půjčená algebraikům ...

Pro kompaktní varietu M je duál homologické grupy roven kohomologické grupě. Tedy

$$(H_p(M))^* = H^p(M)$$

(de Rham)

Speciálně p-forma ω je potenciální, tedy derivací nějaké $(p-1)$-formy, právě tehdy, když

$$\int_z \omega = 0$$

pro každý p-řetěz z s nulovou hranicí.
Vidíme, že operátory d a ∂ jsou navzájem adjungované.

Jde o obecnou formu zákona zachování: "Integrál z funkce přes hranici množiny je roven integrálu z derivace funkce přes množinu."

18.6 Prvočísla a komplexní funkce

18.6.1 Prvočíselná věta

Označme $\pi(x)$ počet prvočísel menších nebo rovných x. Pak platí

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}\ , \ x \to \infty\ .$$

(J.Hadamard $\sim$ a Ch.J.V.Poussin 1900)

Používáme zápis $f(x) \sim g(x),\ x \to \infty$ pro

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\ .$$

Základní vazba, pomocí které lze počítání "přes prvočísla"převést na počítání "přes všechna čísla", dává

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{r_2,r_3,\ldots\geq 0} \left(\frac{1}{2^{r_2}3^{r_3}\ldots}\right)^s = \prod_p \left(\sum_{r\geq 0} \frac{1}{p^{rs}}\right) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\ ,$$

které platí pro komplexní s s reálnou částí větší než 1. Součty a součiny "přes prvočísla"jsou ty s p.

18.6.2 Důkaz prvočíselné věty

Zatím nejjednodušší důkaz probíhá takto

Krok A. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{s-1}$ je holomorfní pro $\Re(s) > 0$.

Krok B. $\displaystyle\frac{\sum_{p\le x} \log p}{x}$ je omezená.

Krok C. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ je nenulová pro $\Re(s) \ge 1$.

Krok D. $\displaystyle\sum_{p} \frac{\log p}{p^s} - \frac{1}{s-1}$ je holomorfní pro $\Re(s) \ge 1$.

Krok E. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sum_{p\le x} \log p - x}{x^2}$ je konvergentní integrál.

Krok F. $\displaystyle\sum_{p\le x} \log p \sim x \,,\ x \to \infty$.

Nyní

$$\pi(x)\log x \;=\; \sum_{p\le x} \log x \;\ge\; \sum_{p\le x} \log p \sim x \,.$$

Dále

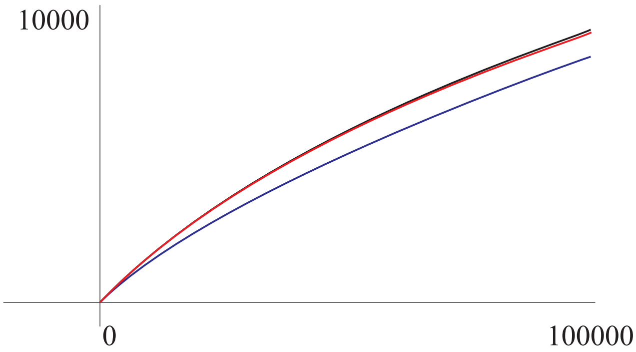
$$x \sim \sum_{p\le x} \log p \ge \sum_{x^{1-\varepsilon} p\le x} \log p \ge \sum_{x^{1-\varepsilon} p\le x} (1-\varepsilon)\log x = (1-\varepsilon)\log x \left[\pi(x) + O(x^{1-\varepsilon})\right] \,.$$

Tak vidíme, že věta platí.

Mile tě překvapí chvíle, která už neměla přijít.

(Horatius)

Když se podíváme na grafy, tak se nemůžeme divit, že ten důkaz byl těžký. Ony totiž spolu ty funkce vůbec nesouvisí.



Obrázek 18.6.2: Funkce $x/\log x$ těžce zaostává za dvojicí funkcí $\int_2^x 1/\log t\, dt$ a $\pi(x)$.

18.7 Mix

18.7.1 O pevném bodu

Každé spojité zobrazení B^n do B^n má pevný bod.

(Borsuk 1909, Hadamard 1910)

Nejde si "pořádně"zamíchat kafe.

18.7.2 Chlupatá koule

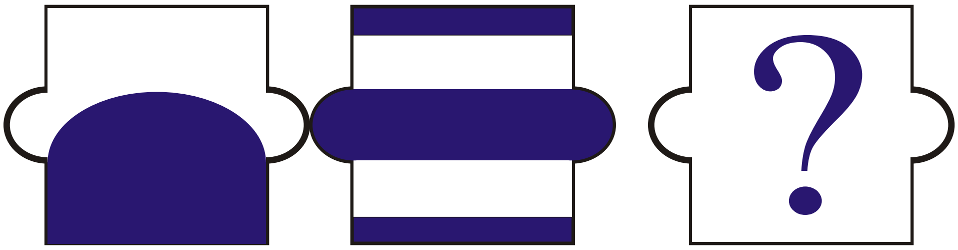
Důsledky:

- Vždy je někde bezvětří.
- Magnetická sféra na jadernou fůzi musí prosakovat.
- Polynom má komplexní kořen.

18.7.3 Superkapilára

Existuje rotačně symetrická kapilára, která připouští nespočetně mnoho rotačně symetrických hladin tekutiny.
Tato řešení jsou mechanicky nestabilní, v libovolné blízkosti se nachází hladina tekutiny, která dává menší mechanickou energii.
Existují alespoň dvě lokální minima, žádné z nich není rotačně symetrické. Vidíme, že symetrická úloha může mít nesymetrické řešení.

Stabilní řešení se objeví při pokusech ve stavu beztíže.

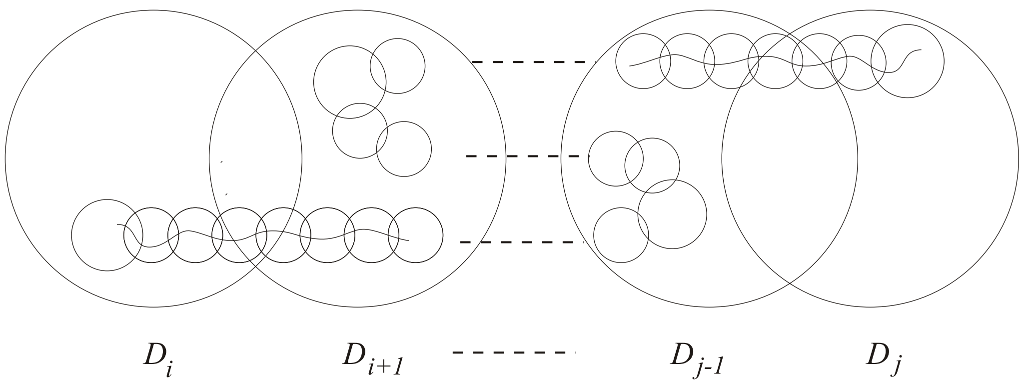


Obrázek 18.7.3: Rotačně symetrická baňka s tekutinou má ve stavu beztíže nekonečně mnoho možných klidových stavů, stabilních je asi jen pár ...

18.7.4 Neviditelný cedník

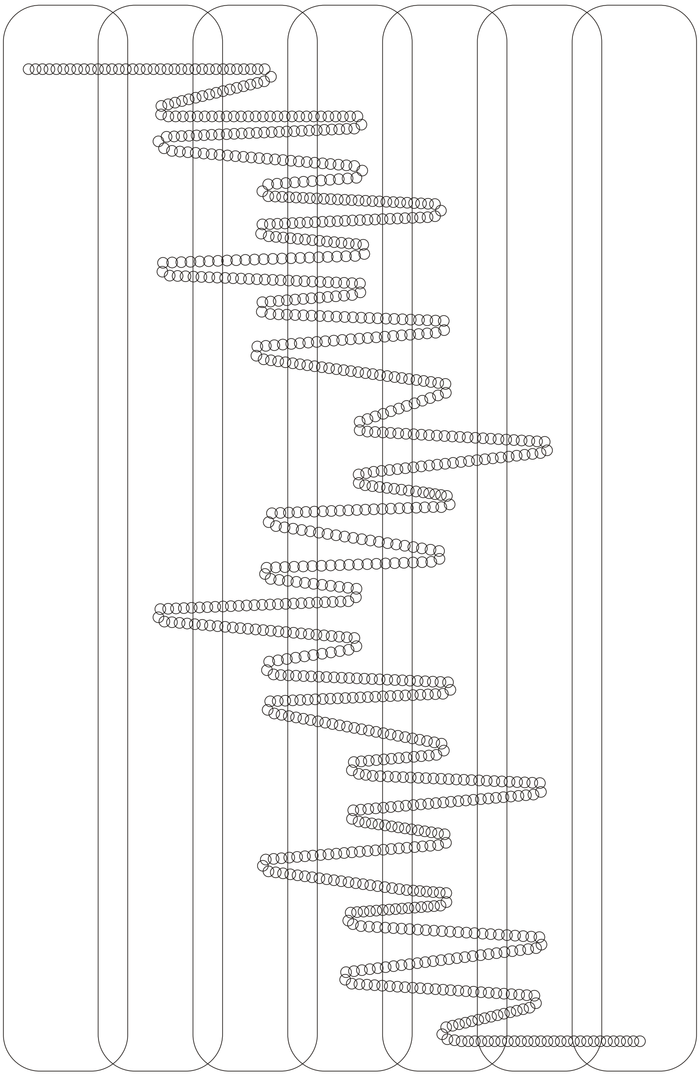
Uvažujme řetízek tvořený posloupností kruhů v rovině z bodu A do bodu B. Dva takové kruhy mají neprázdný průnik právě tehdy když jde o sousední kruhy v posloupnosti. V tomto řetízku vytvoříme podřetízek podle pravidla, že podřetízek musí cestou z kruhu D_i do kruhu D_j nejprve dosáhnout do D_{j-1}, pak do D_{i+1} a pak teprve do D_j, opět z bodu A do bodu B. Dělá prostě alespoň jednu kličku mezi každými dvěma kruhy původního řetízku. Posloupnost takto sestrojených řetízků má průnik, který je souvislý a kompaktní. Nazývá se (při splnění podmínek na velikost kruhů tvořících řetízky) **pseudooblouk**.

Jde o takové neviditelné skoro nic. Vede to od začatku na konec, nicméně neobsahuje to žádnou křivku. Prostě se to pořád jenom klikatí. Je to prostě neviditelný cedník.



Obrázek 18.7.4: Řetěz s naznačeným řetízkem.

Jde o jedinečný objekt. Každá jeho uzavřená souvislá podmnožina je s ním homeomorfní. Tuto vlastnost má také interval $[0, 1]$.



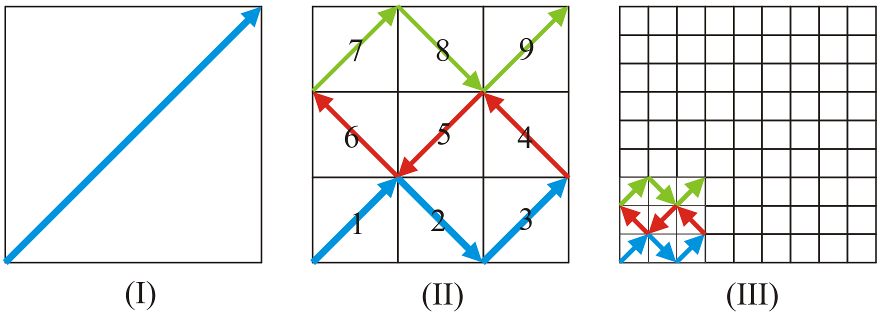
Obrázek 18.7.4: Konstrukce podřetízku v 7 "šišatých"kruzích řetízku - iterováním dostaneme pseudooblouk.

18.7.5 Prostorová křivka a dimenze v háji

Sestrojíme posloupnost zobrazení z intervalu $[0, 1]$ do jednotkového čtverce. První zobrazení proběhme úhlopříčku jednotkového čtverce. Tento čtverec rozdělíme na 9 shodných čtverců. Druhé zobrazení proběhne po úhlopříčkách 9 menších čtverců. Tento postup opakujeme a v limitě získáme spojité zobrazení úsečky na čverec.

18.7.6 Problém prosakování

Předpokládáme, že se nějaká tekutina prosakuje nějakým prostředím. V problému prosakování hledáme rozložení rychlosti $v(x, y)$, k tomu najdeme potenciál rychlosti, funkci $u(x, y)$ takovou, aby $v = -\mathrm{grad}\, u$. Funkce u vyhovuje rovnici tepelné rovnováhy v oblasti.



Obrázek 18.7.5: První dvě zobrazení úsečky do čtverce.

Pokud hledáme ropu, tak se prosakování vyplatí umět.

18.7.7 Uzavřené povrchy - koule s „ušima“ a „dírama“

Kompaktní prostor X s vlastností, že každý prvek X je obsažen v otevřené množině homeomorfní jednotkovému kruhu, nazveme **topologická uzavřená plocha**.

Příroda je nekonečná sféra, jejíž střed je všude a povrch nikde.
(B.Pascal 1670)

Každá topologická uzavřená plocha je homeomorfní právě jedné z ploch

(i) Plocha M_g pro nezáporné celé číslo g.

(ii) Plocha N_h pro celé číslo $h \geq 1$.

Není královská cesta ke geometrii.
(Eukleidés z Alexandrie $\sim$ -330)

M_0 je 2-sféra, M_g s kladným g je sféra s g dírami. N_1 je projektivní rovina, N_2 je kouzelná láhev. Obecně se prostor N_h udělá tak, že se na sféře odstraní h kruhů a k nim se přilepí svou hranicí zkřížený pásek.

18.7.8 Věta o indexu

Nechť je $P(f) = 0$ systém diferenciálních rovnic popisujících situaci na prostoru X. Analytický index systému je zhruba řečeno počet řešení daného systému. Platí

$$\text{analytický index } = \dim \ker(P) - \dim \text{ coker }(P)\ .$$

Čili analytický index je počet parametrů popisujících obecné řešení mínus počet vazeb mezi výrazy $P(f)$.

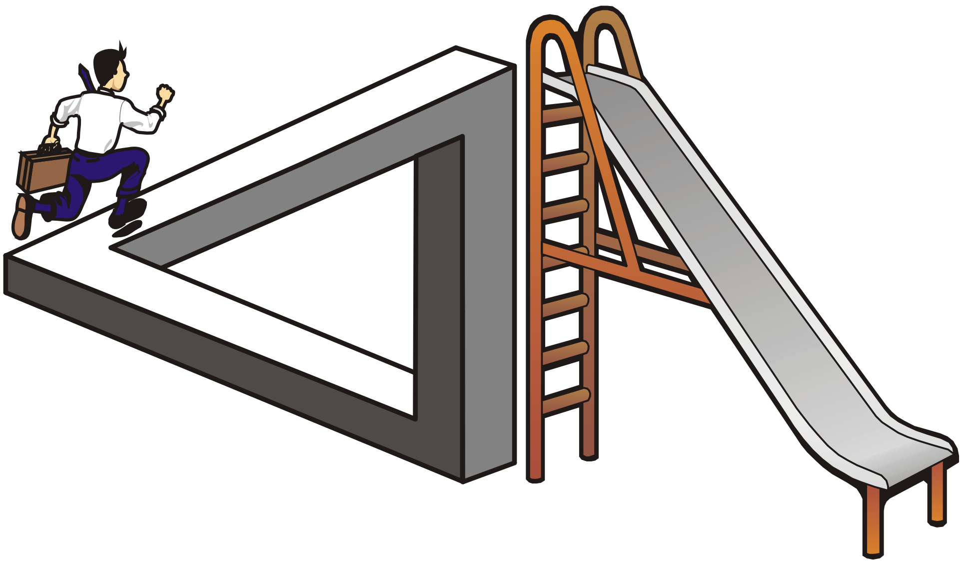
Nechť $P(f)$ je systém s jednou rovnicí $df/dx = 0$ (popřípadě $P(f) = 0$ eliptický systém parciálních diferenciálních rovnic) definovaný na kružnici (popřípadě kulové ploše, nebo obecněji na uzavřené hladké orientované n-rozměrné varietě) X. Pak

$$\text{analytický index } (P) = \text{ topologický index } (X)\ .$$

(M.F.Atiyah, I.M.Stinger)

Topologický index kružnice je roven 0. Tedy analytický index P musí být roven 0. Prostor řešení $df/dx = 0$ je jednorozměrný (jde o konstanty), tedy musí existovat jedna vazba platná pro funkce df/dx. Tou vazbou je podle základní věty analýzy vztah, že integrál z derivace přes kružnici musí být nula.

Pokud někde na kruhové dráze poklesneme, musíme někde vystoupat.



Obrázek 18.7.8: Nahoru a dolů.

Kapitola 19

Problémy pro mistry

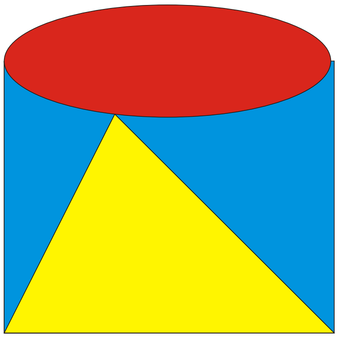
Těmi nejtěžšími problémy získáváme veliké společenské uznání.

Obrázek 19.0.0: Mistr je takový malý človíček se svými knihami.

19.1 Digitální sluneční hodiny

19.1.1 Cestovní špunt

Sestrojte cestovní špunt, který by šel použít na uzavírání lahví s kruhovým, čtvercovým i trojúhelníkovým hrdlem.



Obrázek 19.1.1: Špunt.

19.1.2 Digitální sluneční hodiny

Existují digitální sluneční hodiny? Tedy objekt, který by vrhal stín ve tvaru číslicového vyjádření času?

Existuje množina v $\mathbb{R}^3$, která má pro libovolný prostorový úhel průmět roven předepsanému průmětu (pro každý směr až na množinu míry nula).

(Falconer)

19.1.3 Tomograf

Měříme množství záření, které prochází tělesem různými směry. Chceme podle těchto údajů zjistit tvar tělesa.
Matematický problém jde formulovat takto: určete funkci $f(x, y)$ na čtverci, známe-li integrály podél všech přímek, které čtverec protínají.

Lokalizace cizího předmětu v těle například vede ke hledání charakteristické funkce množiny bodů daného tělesa.

Existuje předpis pro inverzní transformaci

(J.K.A.Radon 1917)

19.2 Gravitace

19.2.1 Satelitní problém

Uvažujeme vzájemné gravitační působení $N = 1+n$ těles v rovině. Modelová situace odpovídá Zemi a n satelitům obíhajícím Zemi.

Budeme chtít navodit situaci, kdy satelity působí na Zemi zanedbatelnou silou, ale vůči sobě navzájem silou zajímavou. Hledáme rovnovážné rozmístění satelitů na oběžné dráze. Nabízí se symetrické rozmístění, ale nemusí být jediné.

Vzájemné působení N částic v rovině s hmotnostmi $m_1, \ldots, m_N$ v souřadnicovém systému umístěném v těžišti soustavy vyjádříme rovnicí

$$Mq'' = -V_q \,,$$

kde matice M má na diagonále prvky $m_1, m_1, \ldots, m_N, m_N$ a nuly jinde, $q = (q_1, \ldots, q_N)$ jsou vektory umístění, $q_i \in \mathbb{R}^2$ a V je gravitační potenciál

$$V(q_1, \ldots, q_N) = - \sum_{1 \le i \le j \le N} \frac{m_i m_j}{||q_i - q_j||}$$

a

$$V_q = \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_N} \right) \,.$$

Hledáme řešení q s těžištěm v počátku, žádné dva satelity se nesrazí, ...

Soustava se otáčí takovou úhlovou rychlostí, aby se rušily síly přitahující k těžišti. Tedy existuje kladná konstanta λ^2 tak, že

$$M^{-1} V_q = \lambda^2 q \,.$$

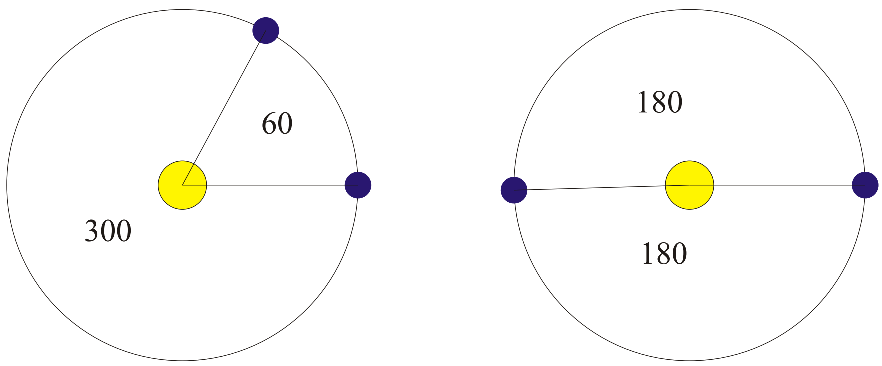
Tedy vektor zrychlení je úměrný vzdálenosti od těžiště a směřuje k těžišti. Zohledníme rotace a stejnolehlost.

Nakonec provedeme limitní přechod odpovídající zanedbatelné hmotnosti satelitů vzhledem k Zemi. Tedy zvolíme $m_0 = 1$, $m_i = \epsilon$, $i = 1, \ldots, n$, označíme $q(\epsilon) = (q_0(\epsilon), \ldots, q_N(\epsilon))$.

Vektor $q = (q_0, \ldots, q_N)$ budeme nazývat **centrální konfigurace** pokud

$$\lim_{\epsilon \to 0} q(\epsilon) = q$$

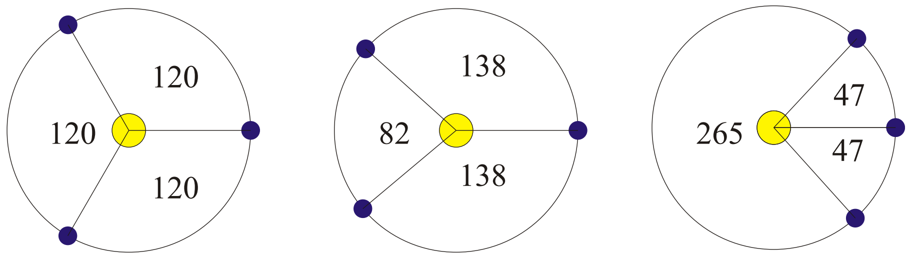
Centrální konfigurace pro rovinný problém se třemi stejnými planetami jsou právě 3.



Obrázek 19.2.1: Dvě centrální konfigurace pro dva satelity. Na levém obrázku není v realitě Zeměkoule v těžišti soustavy.

Pro $n \sim e^{73}$ začíná "regularita", t.j. existují pouze pravidelné centrální konfigurace.

(J.Casasayas, J.Llibre a A.Nunes 1994)



Obrázek 19.2.1: Tři centrální konfigurace.

Obrázek 19.2.1: Kam umístit na Saturn satelitní vysílání?

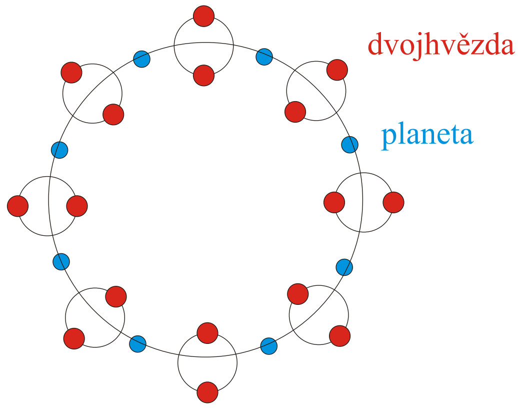
19.2.2 Velký únik

Existuje konečný systém těles, který za působení pouze vzájemné gravitace odletí do nekonečna v konečném čase.

(Gerver 1984, Z.Xia 1988)

Matematika je nejlevnější věda.
(G.Polyá $\sim$ 1970)

Důkaz: Uvažujme n dvojhvězd rotujících kolem vrcholů pravidelného n-úhelníka, kolem nichž putuje n planet. Představujeme si dvojhvězdy i planety jako hmotné body. Každá dvojhvězda rotuje tak, že při průletu planety je planeta urychlena za cenu ztráty energie vzájemné rotace



Obrázek 19.2.2: Velký únik pryč. Planety rotují mezi dvojhvězdami a celek se nekonečně rozpíná.

dvojhvězdy. Tím se zmenší vzájemná vzdálenost obou "polovin"dvojhvězdy. Navíc lze planety navigovat tak, aby se při každém průletu "mezi dvojhvězdou"zvětšil průměr základního n-úhelníka.

Při pečlivé volbě počátečních podmínek dostaneme systém, který "odletí"do nekonečna v konečném čase. ■

(J.Gerver a S.Brown 1989)

Zákony gravitace způsobí to, že se energie dvojhvězd přemění na únik. Potřebujeme "bodovost"dvojhvězd i planet. Navíc získáme rychlost větší než rychlost světla ...
HA! HA! HA!

19.2.3 Problém n těles

Chování n těles způsobené vzájemnou gravitací je problém nazývaný **problém n těles**.

(Newton)

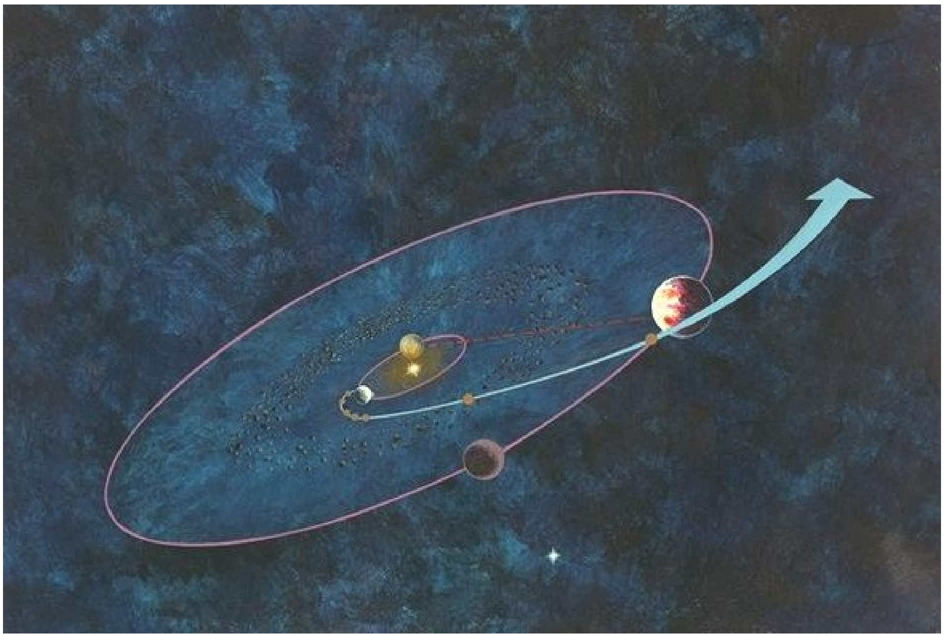
Pro $n = 2$ dostaneme v závislosti na podmínkách v soustavě umístěné na jednom tělese buď přímku, kružnici, elipsu, parabolu či hyperbolu.

(Kepler)

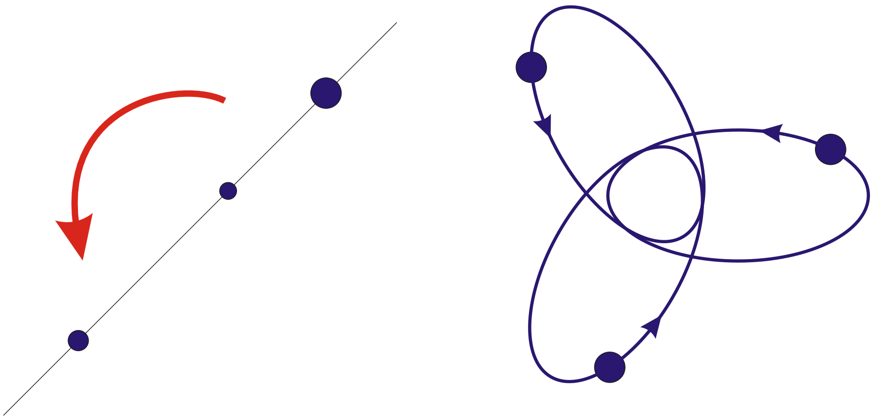
Pro $n = 3$ existují nečekaná řešení:

- ✏ Planety v lineární pozici s rotující přímkou.

(L.Euler 1767)



Obrázek 19.2.2: Při průletu se lze urychlit, dostat kinetickou energii.



Obrázek 19.2.3: Dráhy planet.

✏ Planety ve vrcholu trojúhelníku obíhají kolem "fiktivního"slunce.

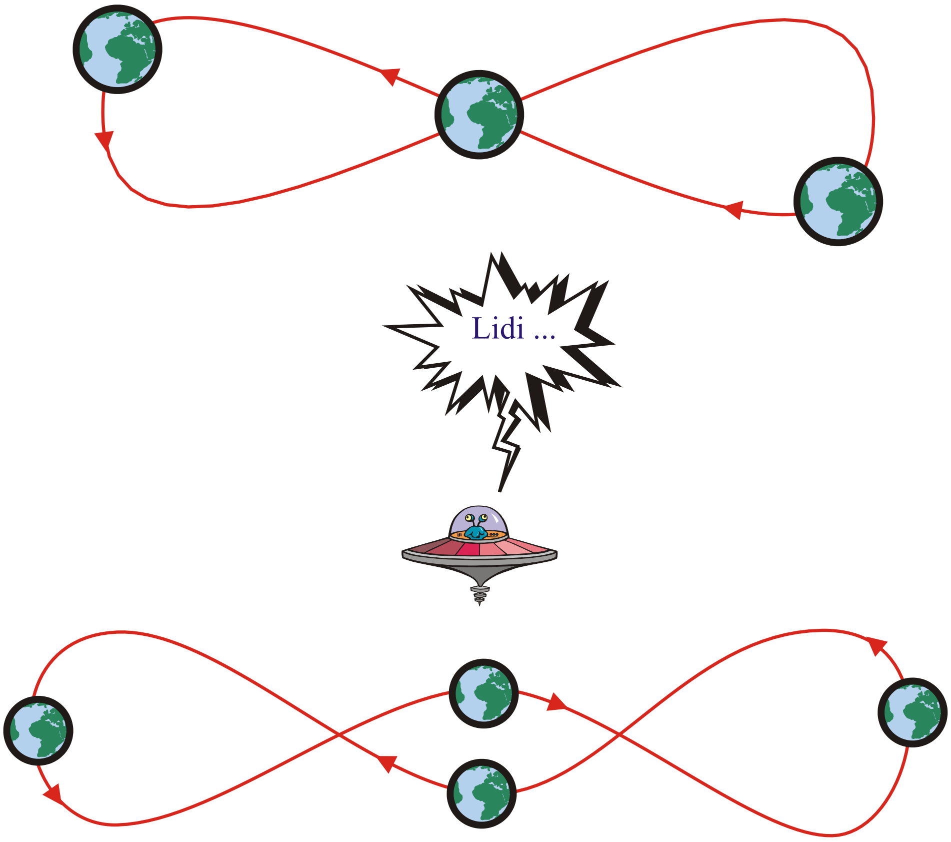
(J.L.Lagrange 1772)

✏ Planety předvádějí let včely a opisují společnou křivku ve tvaru "8".

(A.Chenciner a R.Montgomery 1999)

Lidský duch je bezesporu velkolepý, ale slabý a potřebuje opory: pozorování a experimentování.

(G.Choquet $\sim$ 1990)



Obrázek 19.2.3: Choreografie výborně.

Příroda poskytla nespočet příležitostí pro pozorování pohybujících se předmětů.

> Mechanika je ráj pro matematické vědy, protože jejími cestami se dostaneme k plodům matematiky.
> (L.da Vinci $\sim$ 1490)

Pokud probíhají planety tutéž dráhu (například tvar "8"v předchozím výčtu), říkáme tomu **jednoduchá choreografie**. Tvary takových křivek 2π-periodických křivek $x(t)$ můžeme zkoumat pomocí lokálních extrémů akce

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |x'(t)|^2 \, dt + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n-1}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|x(t) - x(t + 2\pi h/n|} \, dt \, .$$

Absolutní minimum akce nastává pro pravidelné rozmístění planet na kružnici. Existují však i jiná lokální minima odpovídající pěkným "klikaticím". Pokud přidáme k formulaci požadavek nějaké symetrie, dostaneme pěkné "umělecké kreace". Můžeme zkoumat i neinerciální případ, kdy se celá naše soustava n bodů otáčí s konstantní úhlovou rychlostí kolem nějakého slunce.

19.2.4 Relativistický pohyb

Pohyb hmotného bodu $x \in \mathbb{R}^3$ způsobený vlivem gravitačního potenciálu V je podle relativity (rychlost světla = 1) řízen rovnicí

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{1-(x')^2}}\right) = -\nabla V(x,t) \; .$$

> Od té doby, co matematici vtrhli do teorie relativity, už jí sám nerozumím
> (A.Einstein $\sim$ 1950)

19.2.5 Problém gravitace

Je pro n těles v prostoru navzájem působících gravitační silou pouze konečný počet relativních pozic?

(Wintner 1941)

19.3 Kvantová fyzika

19.3.1 Prostory řešení vlnové funkce

Prostor $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ je užitečný pro Schrődingerovu rovnici, pro její relativistické řešení je vhodný prostor $H^{1/2}(\Omega)$ s normou

$$|f|_{H^{1/2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx + \int_\Omega |\mathrm{grad}\, f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \; .$$

Ten poslední integrál se nazývá **kinetická energie**. Prostor H^1 je úplný, $C^\infty(\Omega)$ je hustý v $H^1(\Omega)$.
Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pak f patří do $H^1(\mathbb{R}^n)$ právě když funkce $k \mapsto |k| f^\wedge(k)$ je v prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pak

$$|f|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \int |f^\wedge(k)|^2 (1 + 4\pi^2 |k|^2) \, dk \; .$$

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pak f patří do $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ právě když funkce $k \mapsto |k|^{1/2} f^\wedge(k)$ je v prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pak

$$|f|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^n)} = \int |f^\wedge(k)|^2 (1 + 2\pi |k|) \, dk \; .$$

Jde o úplný součinový prostor

$$(f,g)_{H^{1/2}(\mathbb{R}^n)} = \int \overline{f^\wedge(k)} g^\wedge(k) (1 + 2\pi|k|) \, dk \; .$$

Třídimenzionální kinetická energie má tvar

$$\sqrt{p^2 + m^2}$$

kde $p^2 = -\Delta$ a m je hmotnost částice.

Obrázek 19.2.5: Planetární systém.

19.3.2 Vlnová funkce atomu

Časově nezávislá Schrődingerova rovnice pro částici pod vlivem pole způsobeného silou $F(x) = -\nabla V(x)$ má tvar

$$H(x)\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \ .$$

Pro operátor H platí $H = -\Delta$ v nerelativistickém a $H = \sqrt{-\Delta + m^2}$ v relativistickém případě.

Funkce $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá **potenciál**. Funkci $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ budeme normalizovat předpisem

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 = 1 \ .$$

Funkci ψ budeme říkat **vlnová funkce**. Funkce $p_\psi(x) = |\psi(x)|^2$ odpovídá pravděpodobnosti toho, že částici najdeme v x (odchylka od klidového stavu). Číslu E budeme říkat **vlastní číslo** a ψ budeme říkat **vlastní funkce**.

19.3.3 Variační úloha

Místo rovnice budeme řešit variační problém minimalizace funkcionálu celkové energie ε

$$\varepsilon(\psi) = T_\psi + V_\psi \ ,$$

kde

$$T_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi(x)|^2 \, dx$$

je **kinetická energie** a

$$V_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)|\psi(x)|^2\,dx$$

je **potenciální energie** za podmínky

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 = 1\ .$$

Ukáže se, že (někdy) existuje minimalizující funkce ψ_0, která vyhovuje vlnové rovnici s hodnotou $E = E_0$, kde

$$E_0 = \inf\{\varepsilon(\psi) : \int |\psi|^2 = 1\}\ .$$

Takové funkci ψ_0 se říká **základní stav** a číslu E_0 **energie základního stavu**.

BTW, nerelativistická kinetická energie je $(\psi, p^2\psi)$, relativistická kinetická energie je $(\psi, |p|\psi)$.
Uvidíme, co se s tím dá dělat.

19.3.4 Princip neurčitosti

Nechť V splňuje (NERELATIVITA)

$$L^{n/2}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)\ ,\ n \geq 3$$

$$L^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\ ,\ n = 2$$

$$L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)\ ,\ n = 1$$

nebo nechť V splňuje (RELATIVITA)

$$L^n(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)\ ,\ n \geq 2$$

$$L^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)\ ,\ n = 1\ .$$

Zde uvažujeme $H^\#(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ v klasickém případě, $H^\#(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ v relativistickém případě.
Pak pro každou $\psi \in H^\#(\mathbb{R}^n)$ platí

$$T_\psi \leq C\epsilon(\psi) + D|\psi|_2^2$$

pro vhodné konstanty C a D.

19.3.5 Existence řešení

Nechť pro každé $\lambda > 0$ platí

$$|\{x : |V(x)| > \lambda\}| < \infty \, .$$

Nechť platí

$$E_0 = \inf\{\varepsilon(\psi) : \int |\psi|^2 = 1\} < 0 \, .$$

Pak existuje funkce $\psi_0 \in H^{\#}(\mathbb{R}^n)$ taková, že $|\psi_0|_2 = 1$ a $\varepsilon(\psi_0) = E_0$.

Navíc každý minimizátor ψ_0 splňuje

$$H(x)\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

ve smyslu distribucí.

19.3.6 Excitovaný stav

Máme-li E_0 a ψ_0 jako základní stav, můžeme hledat první excitovaný stav a druhou vlastní funkci.

Budeme minimalizovat ε pro $\psi \in H^{\#}(\mathbb{R}^n)$ za podmínky kolmosti ψ_0 a ψ

$$(\psi, \psi_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x)}\psi_0(x)\, dx = 0 \, .$$

Tím získáme první excitovaný stav a jemu příslušející energii.

Rozdíl energií mezi základním a excitovaným stavem odpovídá přesně vlnové délce emitovaného záření, což dává podpůrné argumenty pro kvantovou teorii.

19.3.7 Atom vodíku

Potenciál V atomu vodíku umístěného v počátku $\mathbb{R}^3$ je roven

$$V(x) = -\frac{1}{|x|} \, .$$

Řešení vlnové rovnice je

$$\psi_0(x) = \exp^{-\frac{|x|}{2}} \, , \; E_0 = -\frac{1}{4} \, .$$

Jde o mimimum

$$\varepsilon(\psi) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi|^2 \, dx \; - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|}|\psi|^2 \, dx \, .$$

19.4 Proudění kapaliny

19.4.1 Rovnice proudění kapaliny

Nechť je Ω oblast v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Hledáme n-tici funkcí

$$u_1(x), \; \ldots, u_n(x)$$

definovaných na $\bar{\Omega}$ popisující složky rychlosti kapaliny a funkci $p(x)$ popisující tlak v kapalině tak, aby v Ω byly splněny podmínky

$$-v\Delta u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i(x) - \frac{\partial p}{\partial x_i}\ ,\ i = 1, \ldots, n$$

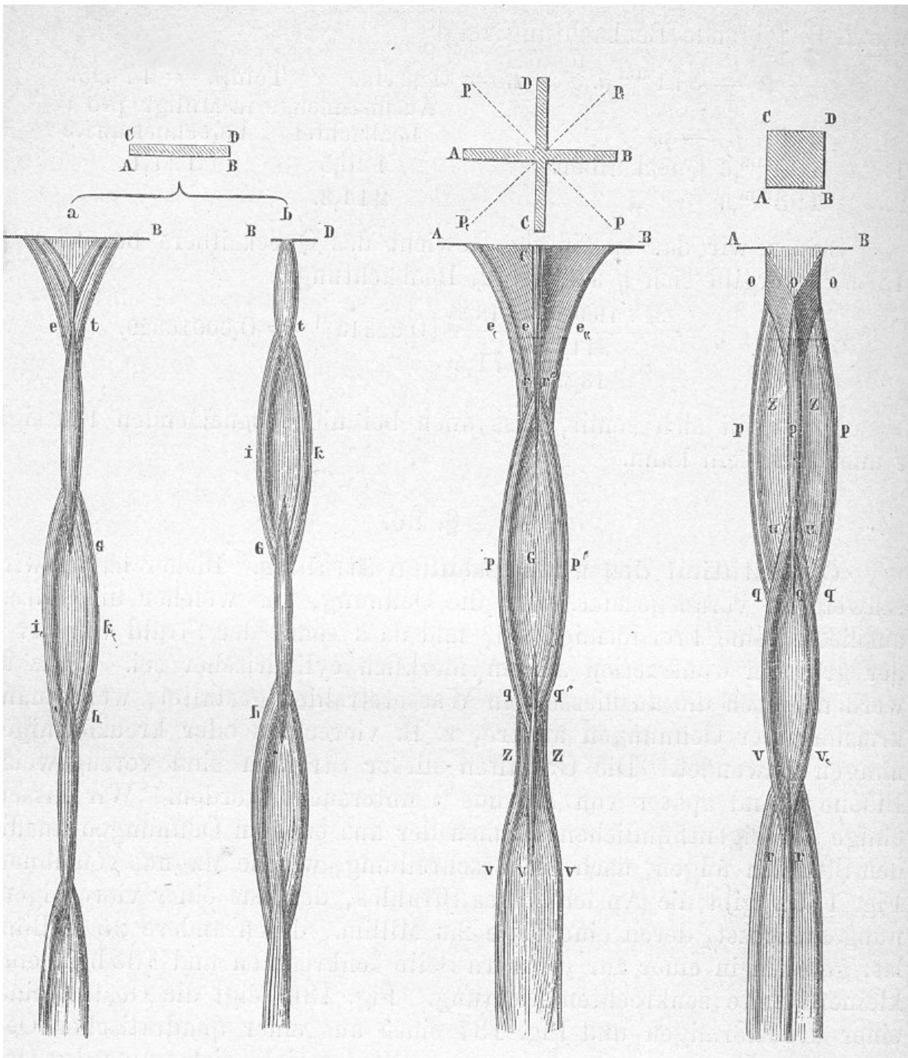
a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \ = \ 0$$

a

$$u_i(\partial\Omega) = 0\ ,\ i = 1, \ldots, n\ .$$

(Navier, Stokes)



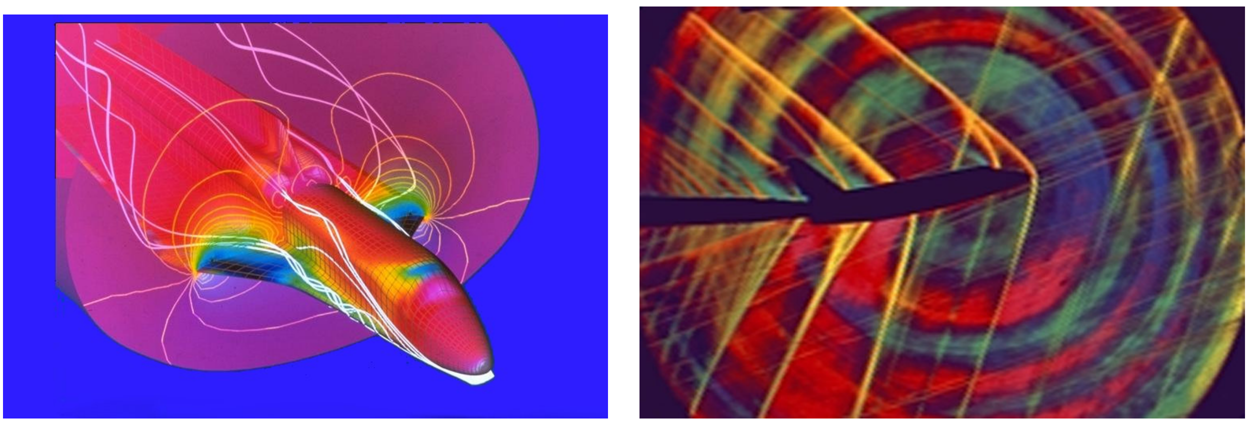
Obrázek 19.4.1: Jak teče voda různými kohoutky . . .

Když vynecháme podmínku nestlačitelnosti (kterápak to asi bude?), dostaneme rovnice pro proudění vzduchu.

Když zkoumáme proudění vzduchu numericky, dostaneme se často do potíží.

Obrázek 19.4.1: Jak se hýbe nebe.

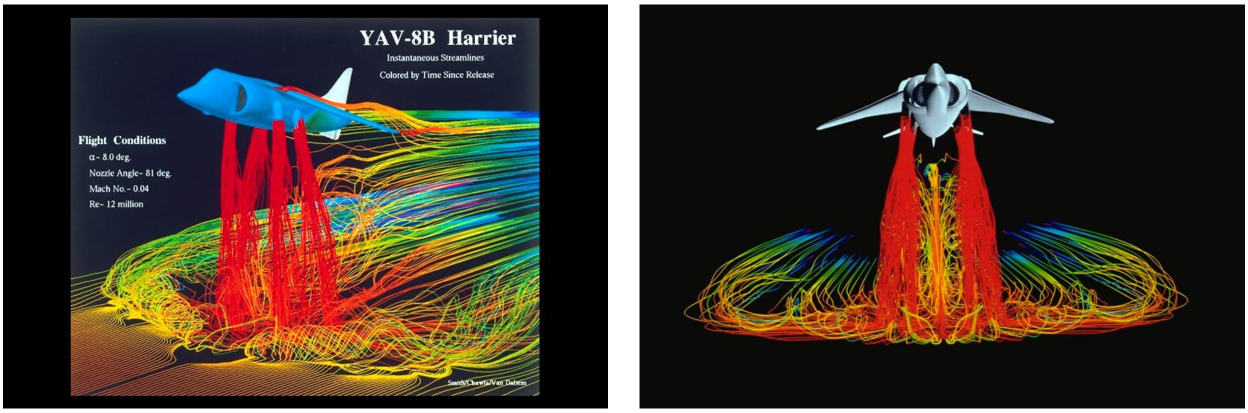
Nicméně se na takových výpočtech dá zbohatnout . . .



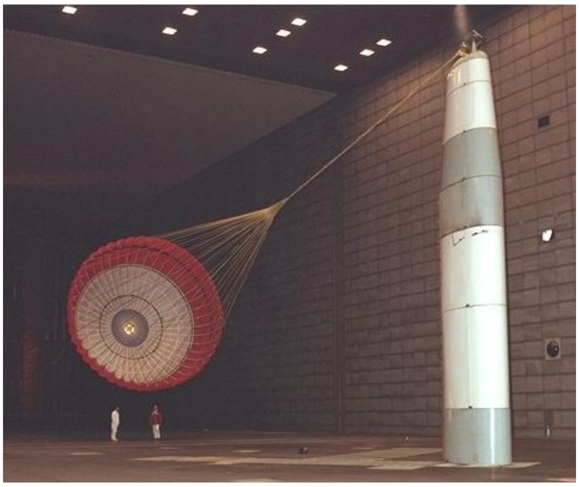
Obrázek 19.4.1: Pohyb vzduchu v blízkosti letadla.

"Výsledkem je tedy, že všechno je značně nejasné a neřešitelné, až na ten vyhazov,"řekl K.

(F.Kafka ∼ 1925)



Obrázek 19.4.1: Bojová akce.



Obrázek 19.4.1: Někdy přesto raději místo počítání simulujeme …

19.4.2 Soliton je samotná vlnka

Při pozorování vln v úzkém kanále je možné uvidět zvláštní vlnku, která se pohybuje rovnoměrným pohybem a je zcela sama. Není následována žádnou další a říká se jí **soliton**. Větší vlny se pohybují rychleji. Když dojde k "předjíždění", přežijí to obě dvě bez úhony.

Matematický popis vede na nelineární diferenciální rovnici, která má kupodivu pěkné řešení. Toto řešení je opravdu podobné solitonu a jeho vývoj v čase se realizuje rovnoměrným pohybem.

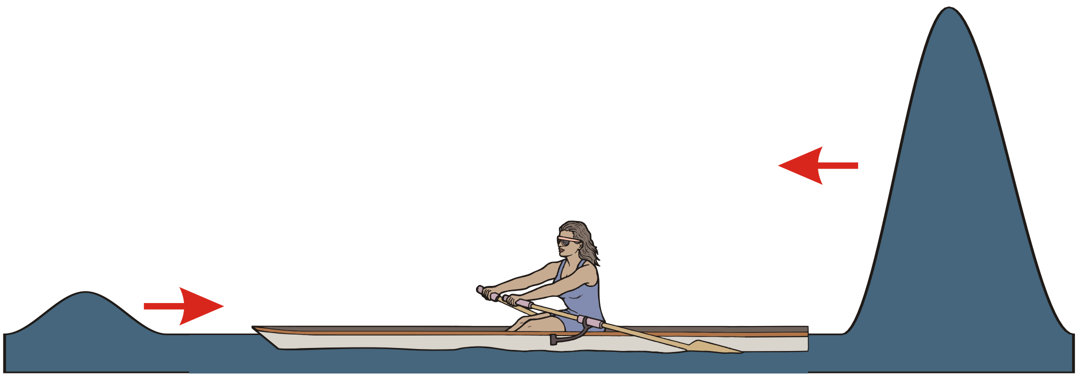
(J.S.Russel $\sim$ 1834)

Jde o rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \, ,$$

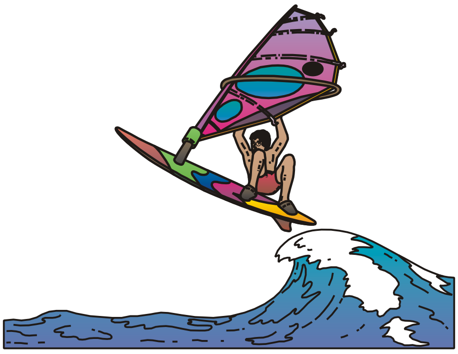
kde $u = u(x, t)$ je výška vody (oproti rovnovážnému stavu) v čase t v místě x (jednorozměrný svět).

Bez posledního (nelineárního) členu by celé vlnění zmizelo do nicoty.



Obrázek 19.4.2: Velká a malá vlnka si prostě jen vymění pozice.

Řešením je funkce $u(x,t) = a\ \mathrm{sech}^2(b(x - vt))$, kde $b = (a/12)^{1/2}$ a $v = 3a$. Konstanta a určuje výšku vlny (vyšší vlnky jsou užší). Konstanta v odpovídá rychlosti vlnky (vyšší jsou rychlejší).



Obrázek 19.4.2: Pokud by byla vlna "nesolitonová", dopadlo by to takto.

19.5 Minimální plochy

19.5.1 Izoperimetrický problém

Najděte nejmenší plochu, která v kvádru odděluje daný objem.

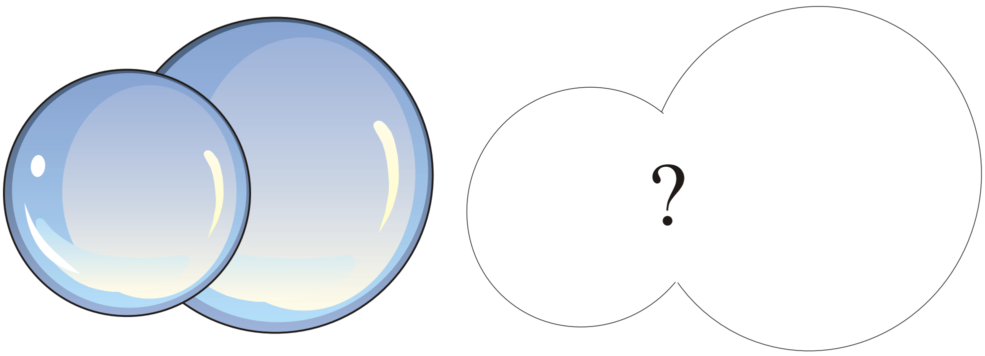
Hypotéza: Řešením jsou části kulové plochy, válcové plochy nebo roviny.

Úloha najít těleso daného objemu s nejmenším povrchem vede na kouli. Pokud přidáme okrajové podmínky, dostaneme například polokouli přilepenou k rovině.

19.5.2 Více-bublina

Najděte nejmenší plochu, která v prostoru odděluje n-zadaných objemů.

Hypotéza: Řešením jsou části kulové plochy.



Obrázek 19.5.2: Plochy omezující objem se snaží o minimalizaci.

Kdo "umí", řeší problém v $\mathbb{R}^n$.

19.5.3 Rotační plochy s konstantní křivostí

Rotační plochy s konstantní střední křivostí vzniknou rotací některé z následujících křivek: vlnka, vodorovná úsečka, klička, kružnice, řetězovka, svislá úsečka. Osa otáčení je osa x.

(Ch.Delaunay 1841)

19.6 Mix

19.6.1 O kořenech na přímce

Jsou všechny kořeny funkce

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ležící v pásu $0 \leq \Re(s) \leq 1$ soustředěny na přímce $\Re(s) = 1/2$?.

(B.Riemann $\sim$ 1850)

19.6.2 O sféře v časoprostoru

Je

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$$

jediná kompaktní trojdimenzionální varieta s vlastností, že každá kružnice lze spojitě deformovat to bodu?

(H.J.Poincaré 1904)

Ano.

(G.Perelman 2002)

To ale zajistilo docela důležitou vlastnost našich časoprostorových toulek. BTW, už jste na sobě takové kružnice pozorovali?

19.6.3 Variety

Pokud má každý bod topologického prostoru okolí homeomorfní s otevřenou koulí v $\mathbb{R}^n$, nazýváme jej n-varieta.
Jaké jsou kompaktní 3-variety ?

(H.J.Poincaré 1904)

19.6.4 Dynamické ceny

Sestrojte dynamický model pro poptávku a nabídku jednotlivých komodit na trhu, zachytit je třeba jednotlivé subjekty a dokázat existenci rovnovážných stavů, stabilitu systému, ...

Nejlepší hmotný model kočky je jiná, nejlépe však ta samá, kočka.
(A.Rosenblueth a N. Wiener 1945)

Klasická teorie jedné komodity říká, že v rovnovážném stavu se poptávka D rovná nabídce S. Pro více komodit $p = (p_1, \dots, p_n)$ uvažujeme funkci **poptávka** $D(p)$ (kolik by se prodalo kousků za cenu p), **nabídka** $S(p)$ (kolik by se nabízelo kousků za cenu p) a **převis poptávky** $Z(p) = D(p) - S(p)$. Platí

(i) $Z(\lambda p) = Z(p)$, pro nezáporné p a kladné λ. Pokud se zlevní výroba, poklesne cena.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} p_i Z_i(p) = 0$. Celková hodnota je nula. Neukojená poptávka stojí výrobce zbytečných věcí koupit si svoje výrobky.

(iii) Pokud je $p_i = 0$, je $Z_i(p) > 0$. Zboží zadarmo si koupí každý, nebo alespoň někdo.

Existuje rovnovážná cena p^* taková, že $Z(p^*) = 0$ (poptávka je rovná nabídce).

(Hopf)

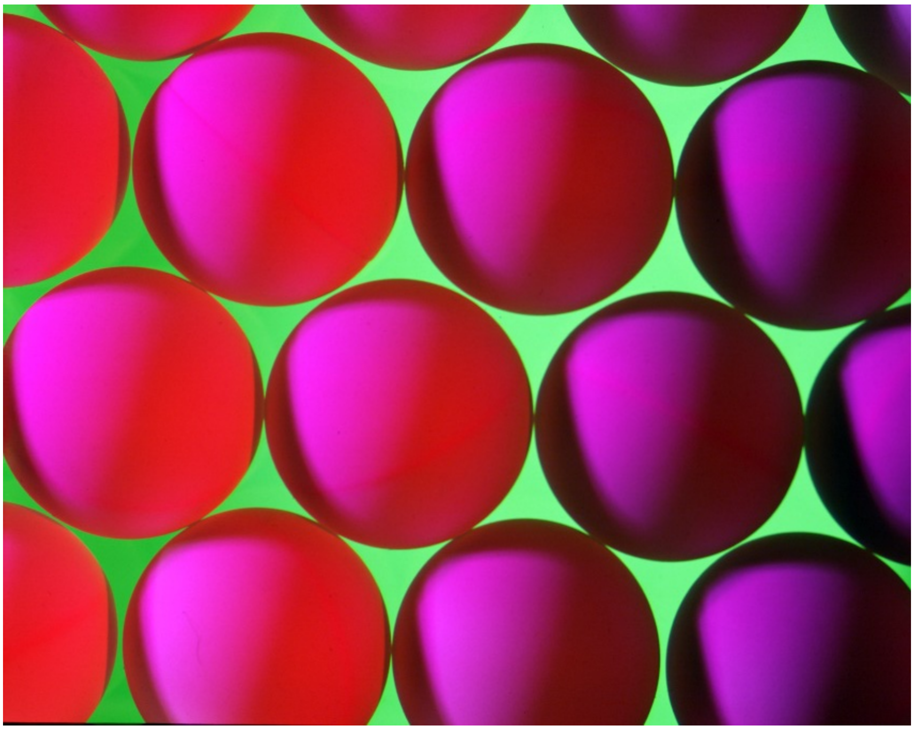
19.6.5 O pomerančích a dělových koulích

Kolik koulí do kanónu (pomerančů, jablek, ...) se vejde do lodi? Jaké nejvýhodnější uspořádání zvolit?

(J.Kepler $\sim$ 1650)

Nejlépe to jde nejjednodušeji.

(Hales)



Obrázek 19.6.5: Jak si srovnat kuličky do krabičky.

19.6.6 O fraktálech

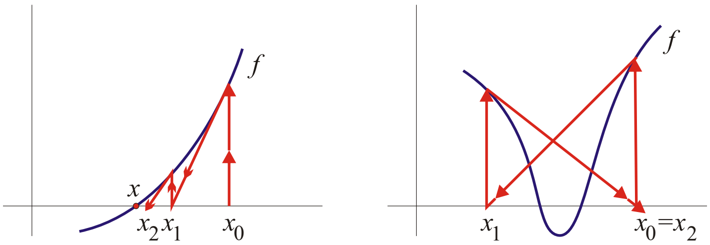
Budeme hledat řešení rovnice $f(x) = 0$ pomocí metody tečen. Zvolíme x_0 a další iterace budeme počítat vzorečkem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Zkoumání, kdy tato metoda vytvoří posloupnost konvergující k řešení rovnice $f(x) = 0$ je nesnadné, jak se lehce přesvědčíme z obrázku.

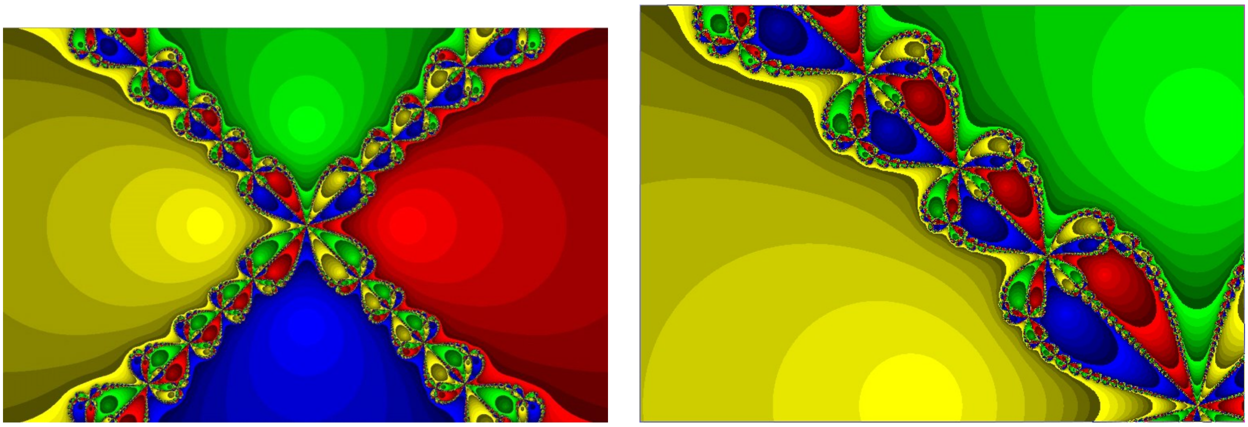
Pokud tuto metodu použijeme v rovině na hledání více kořenů rovnice $z^4 = 1$, objeví se zvláštní jev. Pokud zvolíme startovací bod mezi dvěma řešeními, často sestavená posloupnost konverguje nečekaně k jinému řešení.

Když se dva perou, třetí a čtvrtý se smějou.



Obrázek 19.6.6: Posloupnost se může zacyklit.

Struktura takovýchto sporných území je úžasná.

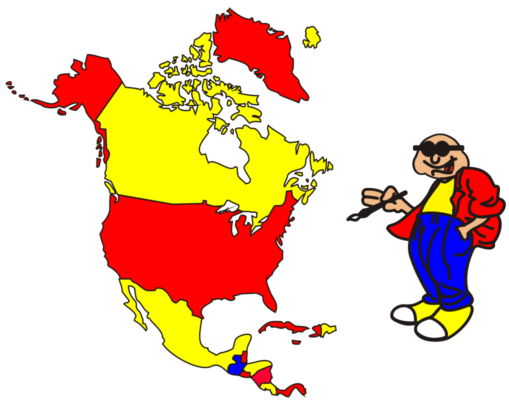


Obrázek 19.6.6: Zóny přitažlivosti jednotlivých kořenů tvoří kytičku.

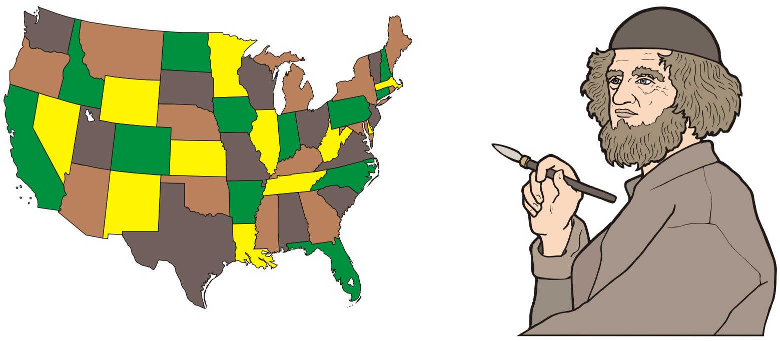
19.6.7 O barvení

Kolika barvami jde obarvit mapa? Při zřejmých omezeních stačí na rovinnou mapu 4 barvy.

(F.Guthrie 1852, A.Cayley 1879)



Obrázek 19.6.7: Jde to 4 barvami, je to jednoduché.



Obrázek 19.6.7: Jde to nanejvýš 4 barvami, i když to není jednoduché.

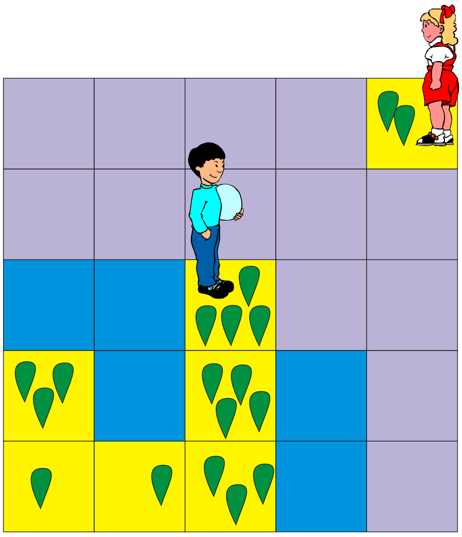
Řemeslník a čert závodili, kdo první postaví dům. Čert se do toho dal čertovskou silou. Řemeslník si napřed nabrousil nářadí a vyhrál.

(lidová moudrost)

Obrázek 19.6.7: Na prostorových objektech je třeba být obezřetný . . .

19.6.8 O suchém putování

Budeme se procházet v mlze po neznámém území složeném z vody a souše. Pro jednoduchost budeme mít území ve tvaru čtvercové sítě, kde každý čtverec je buď voda nebo souš. Na každém suchém čtverci vyrostlo tolik rostlinek, kolik ze sousedících osmi čtverců je mokrých. Tyto rostlinky uvidíme až tehdy, když na čtverec vstoupíme (je mlha). Hledání souše je půvabná zábava, která často končí ve vodě.



Obrázek 19.6.8: Setkají se ještě někdy?

Základní otázka je otázka důvěry. Můžeme věřit, že rostlinky nelžou? Je daná vegetace "možná", nebo vede ke sporu a rostlinky rostou nedovoleným způsobem?
Zkusíme zvolit v neobjevené části kombinaci souš-voda a zkontrolujeme. To bude trvat lineárně podle počtu zvolených čtverců. Pokud budeme volit všechny kombinace, bude to záviset na 2^N, kde N je počet volených čtverců. Dovedeme najít alespoň polynomiální algoritmus?

Na kladné i záporné řešení čeká milionová odměna.

19.6.9 Co je vlastně placaté

Otázka, které objekty jsou rovinné, je velmi zajímavá. Pro grafy jde dokázat, že nutná a postačující podmínka rovinnosti je to, že nesmí obsahovat dva zvláštní grafy $K_{3,3}$ nebo K_5.

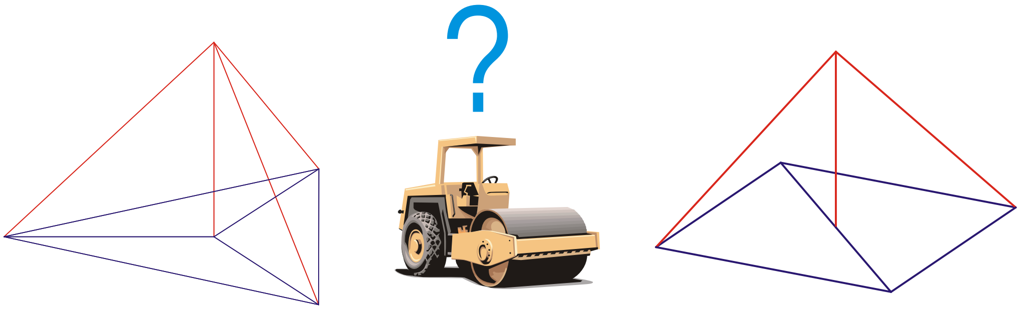
(Kuratowski 1930)

Projektivní rovina obsahuje 103 takových zlobidel.

(H.Glover, P.Huneke a C.S.Wang 1979)

Pro každou plochu existuje konečně mnoho zlobidel.

(Robertson a Seymour 1984)



Obrázek 19.6.9: Dvě zlobidla K_5 a $K_{3,3}$, která se nevejdou do roviny.

19.6.10 O racionálních řešeních

Rovnice $x^n + y^n = 1$ muže mít pro $n < 2$ pouze konečně mnoho racionálních řešení.

(L.Mordell, G.Faltings 1983, A.Willes 1993)

> Snad nejlépe mohu popsat svoji zkušenost s děláním matematiky v pojmech cesty skrz temný neprozkoumaný zámek. Vstoupíte do první komnaty zámku a je naprostá tma. Pohybujete se a narážíte do nábytku, ale v podstatě se učíte, kde je každý kus nábytku. Nakonec, po zhruba šesti měsících najdete vypínač, rozsvítíte a najednou je vše osvětlené. Vidíte přesně, kde jste. Pak přejdete do další místnosti ...
>
> (A.Willes $\sim$ 1993)

> Něco podobného jsem jednou zažil.

19.6.11 Hypotéza o komplexním kruhu

Pokud je funkce $z \mapsto z + a_1 z + \cdots$ prosté zobrazení jednotkového kruhu do sebe, pak $a_n \leq n$.

(L. de Branges 1984)

Neruš mé kruhy.
(Archimédés ze Syrákús $\sim$ -250)

19.6.12 Jemně holomorfní funkce

Existuje nejjemnější topologie v rovině, ve které jde definovat holomorfní funkce?
Jemná topologie v teorii potenciálu je jedním z dobrých kandidátů.

(B.Fuglede)

19.6.13 Lokální topologické grupy

Topologická grupa je grupa, která je zároven topologickým prostorem, přičemž jsou grupové operace (násobení a inverze) spojité. Pokud má každý bod okolí homeomorfní s otevřenou koulí v R^n a má lokální souřadnice, pak má i lokálně analytické souřadnice.

(J.v.Neumann 1933, Pontrjagin 1939, Chevalley 1941, Gleason a Yamabe 1952, Montgomery a Zippin 1953)

19.6.14 Kulečníkové trajektorie

Existují neperiodické trajektorie. Pravděpodobnost, že je zrovna koule pohybující se po neperiodické trajektorii v zadané množině, závisí pouze na velikosti (míře) zadané množiny.

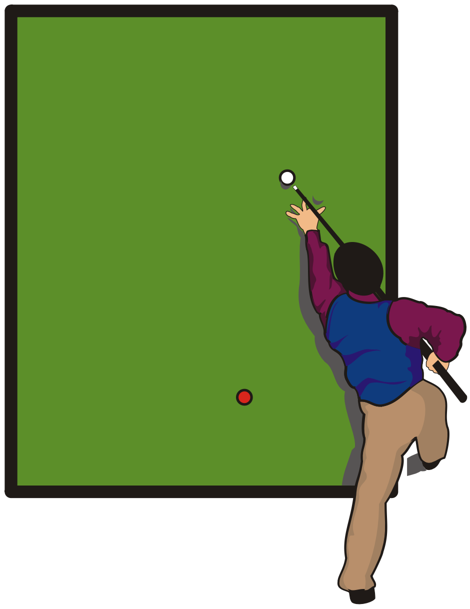
(G.D.Birkhoff 1931)

19.6.15 Paradox dvojčat

Dvojčata Andulka a Boženka se dohodli, že Boženka dojde pro zmrzlinu. Když se vrátila za 10 minut Boženka se zmrzlinou, postavili se před zrcadlo a Boženka vypadala mladší. Je to možné?
Ano. Boženka pro zmrzku vyrazila rychlostí $3/5$ rychlosti světla a vrátila se stejnou rychlostí. Časová dilatace podle teorie relativity je 80%. Andulce uplynulo 10 minut, zatímco Božence jen 8 minut. Vypadala mladší.

Čas udělal Bůh proto, aby se všechno nestalo naráz.

(anonym z Texasu (grafiti))



Obrázek 19.6.14: Není možné se netrefit. Při silné ráně po nezacyklené dráze se trefí každý.

Jak to viděla Boženka? Nejprve se rychlostí $3/5$ rychlosti světla vzdálila Andulka. Pak po 4 minutách se to stalo. Andulka mizela rychlostí $3/5$ rychlosti světla a já jí chtěla dohonit rychlostí $3/5$ rychlosti světla. Tak jsem musela nasadit rychlost $6/5$ rychlosti světla. To ale nešlo. Tak jsem ty rychlosti plus mínus $3/5$ rychlosti světla sečetla relativisticky. Tak jsem za Andulkou vyrazila rychlostí $15/17$ rychlosti světla. Za 4 minutky jsme se sešly.

> Čas jde s různými lidmi různým krokem.
> Řeknu vám, komu čas kráčí, komu cválá,
> komu letí tryskem a komu ještě stojí.
>
> (W.Shakespeare $\sim$ 1590)

19.6.16 Transcendentní císla

Pro α a β kořeny polynomu s celočíselnými koeficienty (algebraické), je α^β transcendentní.

(A.O.Gelfond a T.Schneiderem 1934)

Za sto let ode dneška budou obě věty (o barvení map a klasifikaci jednoduchých grup) pouhá cvičení pro třetí ročník univerzity, s důkazy na několika stránkách pomocí vhodných pojmů, které v té dobe budou zcela zřejmé.

(P.Halmos)

Kapitola 20

Závěrečná kapitola

Touto kapitolou se uzavírá naše putování po matematické analýze.

Bylo u jednotlivých věcí, které jsme viděli, vše jasné? T.j. proč to tak je a proč to tady je? IF TRUE $\Longrightarrow$ OK, IF FALSE $\Longrightarrow$ KO. ELSE CONTINUE.

"What else?"(poté, co si vyslechl vše, co vím)

(K.Omiljanowski $\sim$ 2000)

20.1 Historie matematické analýzy

20.1.1 Historické matematické osobnosti

Z mnoha a mnoha vynikajících matematiků vybírám obecně známá jména matematiků, kteří reprezentují rozhodující přínos k rozvoji matematiky.

Thalés z Mílétu ($\sim$ -600) - první obecná tvrzení
Pýthagorás ze Samu ($\sim$ -550) - propojení geometrie a čísel
Zénón a Eley ($\sim$ -450) - paradox s nekonečně mnoha malými kroky
Aristotelés ze Stageiry ($\sim$ -350) - logika
Eukleidés z Alexandrie ($\sim$ -330) - propojení geometrie a čísel
Archimédés ze Syrákús $\sim$ -250 ($\sim$ -) - aplikace matematiky
L.Fibonacci ($\sim$ 1212) - použití arabského číselného zápisu
J.Napier ($\sim$ 1600) - funkce logaritmus
J.Keppler ($\sim$ 1619) - pohyb planet
G.Galileo ($\sim$ 1636) - dynamika
R.Descartes ($\sim$ 1630) - analytická geometrie

P.Fermat ($\sim$ 1630) - pravděpodobnost
B.Pascal ($\sim$ 1640) - první počítací stroj
I.Newton ($\sim$ 1665) - derivace a integrál
G.W.Leibnitz ($\sim$ 1665) - derivace a integrál
A.L.Cauchy ($\sim$ 1820) - matematická analýza
L.Euler ($\sim$ 1740) - velký univerzalista, teorie čísel
C.F.Gauss ($\sim$ 1830) - korunní princ matematiky, základní věta algebry
E.Galois ($\sim$ 1830) - moderní algebra
G.Cantor ($\sim$ 1900) - různé typy nekonečna, teorie množin
D.Hilbert ($\sim$ 1900) - axiomatika a formalismus
K.Gőedel ($\sim$ 1931) - pravdivá nedokazatelná tvrzení
J.v.Neumann ($\sim$ 1940) - poslední univerzalista, teorie her, počítače

Pokrok přinášejí ti, kdo se odvažují stále měnit vše, co není v pořádku.
(B.Bolzano $\sim$ 1850)

Už pětkrát jsem zapomněl a znovu vymyslel Pythagorovu větu.

Jsi hlupák, děláš, co už bylo vykonáno.
(Plutus)

20.1.2 Cesta pokroku lidstva

Obecnější pohled na pokrok lidstva přináší poučení pro budoucí rozvoj. Dosavadní vývoj lidského poznání stojí na těchto základních kamenech:

(i) Pohyb těles.

(ii) Existence různých atomů.

(iii) Teplo je projevem pohybu atomu.

(iv) Elektřina, magnetismus a optika jsou v podstatě pole.

(v) Vývoj biologických druhů.

(vi) Jednota času, prostoru, hmotnosti a energie - teorie relativity.

(vii) Neurčitost polohy, energie, rychlosti a hybnosti - kvantová teorie.

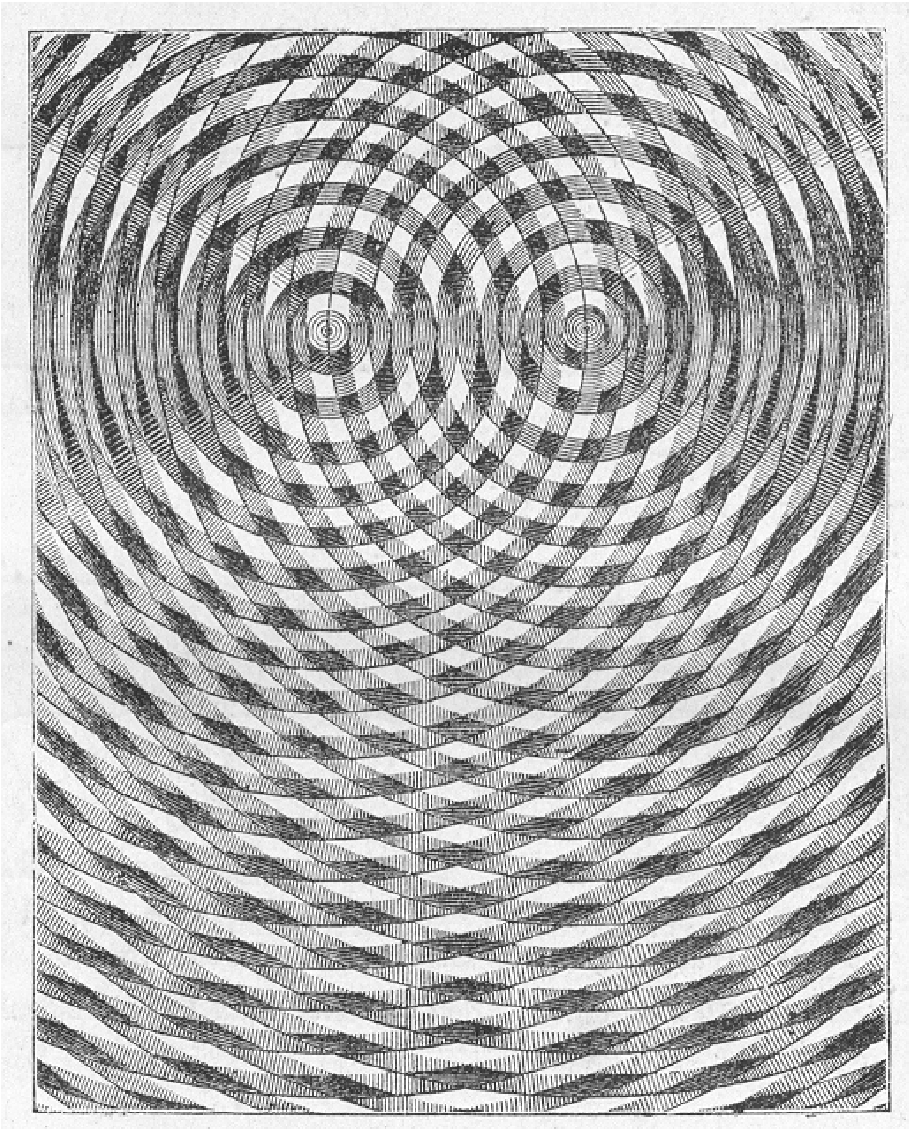
(viii) Molekulární biologie.

(ix) Posloupnost vztahu součást-celek (a jejich rozměry a energie) otevřená na obou koncích.

(x) Vesmír jako celek.

(Weisskopf)

A taky upozorňuji na klíčový fakt, že počet ponožek je zpravidla sudý.



Obrázek 20.1.2: Co je to vlastně okolo nás?

Celý pokrok lidstva se odrážel v rozvoji matematického myšlení a matematiky jako součásti univerzálního jazyka vědecké komunikace.

Připomínám, že K.Gődel měl odmala přezdívku „Herr Warrum“ („Mr. Why“).

20.2 Současnost matematiky a matematické analýzy

20.2.1 Novinky-pojmy

Poslední doba otevřela nová témata a nabídla řadu problémů k řešení. Vzhledem k překonávání hranic mezimatematickými obory jsou novými věcmi v matematice zasaženy všechny obory včetně matematické analýzy. Z nových pojmů jsou to

- Zobecněné limity a posloupnosti
- Distribuce
- Metoda Monte Carlo - nahrazení problému simulovaným experimentem a zjišťování pravděpodobnosti
- Kategorie - objekty a morfismy mezi nimi, funktory pracují nad nimi
- K-teorie - formální součty hrušek a jablek
- Rychlá frekvenční transformace - konečné součty místo numerické integrace
- Nestandardní analýza - nekonečně malé veličiny
- Katastrofy - kde má projekce plochy na jinou plochu inverzi
- Chaos - nepředvídatelnost chování systému
- Problém čtyř barev
- O racionálních bodech křivek
- Ergodická teorie - o kulečníkové trajektorii
- Transcendentní čísla - je jich až moc
- Hypotéza kontinua - není pravdivá ani nepravdivá
- Topologické grupy - lokálně analytický prostor $\mathbb{R}^n$
- Klasifikace jednoduchých grup - pokud mají pouze dvě normální podgrupy
- Věta o indexu - analytický a topologický index
- Frekvenční řady - konvergence skoro všude
- Celočíselné rovnice - neexistuje algoritmus, který u polynomiální rovnice s celočíselnými koeficienty pozná, zda má celočíselné řešení
- Aproximace kompaktních zobrazení - nestačí konečněrozměrné operátory

- Variety - křivá verze prostoru, kde jde ještě derivovat
- Hypotéza o komplexním kruhu

(Halmos)

Pro klid příštích generací jsou veškeré matematické výsledky neustále prověřovány a jsou odstraňovány případné nepřesnosti jednotlivých důkazů. Tak se matematika stává opravdu důvěryhodným zdrojem informací.

Nicméně, chybička se vždycky najde.

Jsou sestaveny formální systémy, které zachycují strojově zpracovatelnou verzi matematiky. Tak průběžně počítače ověřují platnost známých tvrzení, nacházejí slabá místa důkazů či důkazy nové. Tak, v závislosti na zadaných axiomech, se buduje svět pravdivých tvrzení.

Když ti to neprojde ručičkama a hlavičkou, na nic ti to nebude ;-)

Matematika není sbírkou vět, ale souborem myšlenek.

(P.Halmos)

20.3 Budoucnost

Matematika nachází inspiraci a aplikace v přírodních vědách jako je fyzika, biologie, či chemie, společenských vědách i v dalších oblastech lidského snažení.

Mezi úspěšné aplikace patří například obchod, finance, bezpečnost, management, teorie rozhodování, modelování komplexních systémů, ekologie, epidemiologie, šíření nemoci mezi buňkami organizmu, změna genetické výbavy, imunologie, genetika, neurologie, drogová terapie, genetické mutace viru HIV, hydrodynamika, studium povětří, klimatu, dynamické systémy, simulace letadel a aut, pravděpodobnostní řešení různých modelů a situací.

Matematika je bohatá nevěsta :-)

Problém je lidská inteligence a její plné využití. Umělá inteligence je zatím redukována na základní činnosti. Její plné rozvinutí umožní mimojiné sestavit algoritmus, který bude mít výstup, který ještě přesně neznáme (analýza grafických dat, hledání anomálií, signálu neznámých civilizací, ...).
Bude se muset hledat a hledat, přijít s novými nápady a postupy.

> …přesnost má své místo v teorii čísel a algebře, plné důkazy musejí být v publikacích, není to však jediná (matematická) hra ve městě.
> (G.F.Simmons 1972)

Jak budeme hledat a řešit nové problémy, jak ovlivníme vývoj světa, pokud to lze. Jak se stát aktivními články vesmíru. Jak si pohrát z budoucností …

20.3.1 Základní přírodní principy

Z přírodních zákonů vychází zkoumání přírodních dějů. Jejich jednoduchá formulace (pokud je správně) potěší čtenáře:

- Existuje maximální rychlost (speciální teorie relativity).
- Existuje minimální akce (kvantová teorie).
- Existuje maximální síla (obecná teorie relativity).
- Existuje nejmenší entropie (termodynamika).

Z toho se odvodí, že existuje nejmenší časový interval, největší výkon, největší velikost systému, nejmenší vzdálenost, nejmenší objem, největší křivost, největší hustota, největší hmotnost, největší energie, největší moment, nejmenší elektrický náboj, nejmenší odpor, největší elektrický proud, ….

> Takže se tedy oprávněně ptám: potřebujeme nekonečno? A když už jedno máme, není risk mít i mínus nekonečno?

20.3.2 Gravitace a hmota

Jsou známy čtyři síly:

- gravitace (graviton?),
- elektromagnetismus (foton),
- silná síla držící částice v jádru (gluon),
- slabá síla způsobuje rozpad atomového jádra některých radioaktivních prvků (W^-, W^+, Z^0).

Jaká je jejich podstata? Co je podstatou gravitace? Co je za tím vším? Lze se domnívat, že se lidstvo ještě nedostalo k základům přírodních zákonů. Tak si lze budovat vlastní teorie fungování světa. Hmotu (například částici jako elektron) si můžeme představit jako kuličku nebo jako vlnění. Může to být věc, která se chvilkami objevuje v našem světě a chvikami mizí do nám nedostupných světů.

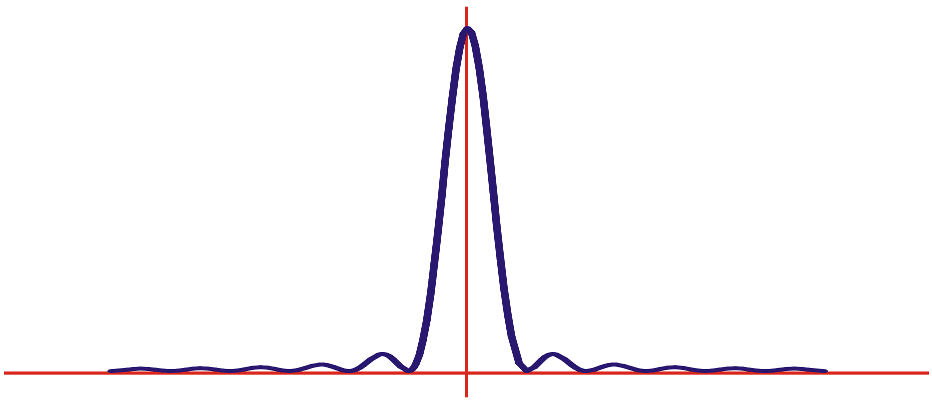
Taky se vám někdy ztrácejí věci a po čase se zase objevují? Já si myslím, že za tím stojí dosud nepojmenovaná síla. Navrhuji pojmenování sklerotická síla (částice skleroton?).

Hmota (například částice) může mít také charakter funkce. Tato funkce se dá našimi smysly lokalizovat, odpovídá zhruba charakteristické funkci nějakého intervalu. Je však možné, že každá taková funkce má graf podobný nekonečnému kopečku. Tak by se částice pohybovala společně i se svým kopečkem, který by reagoval s ostatními kopečky. Tím by se vysvětlilo, proč my víme o Zeměkouli a Zeměkoule o nás. Vzájemný pohyb a reagování těchto kopečků vytváří náš svět.

Membrány jsou jednou z fyzikálních teorií, kdy všechny částice jsou vlastně membrány (obecně d-brány pro vhodná d). Tyto membrány kmitají. My z těchto membrán vidíme pouze něco. To ostatní se odehrává v jiných dimenzích a světech.

Vzhledem k tomu, že membrány a světy, ve kterých žijí, nejsou vidět celé, teorie se nemůže mýlit.

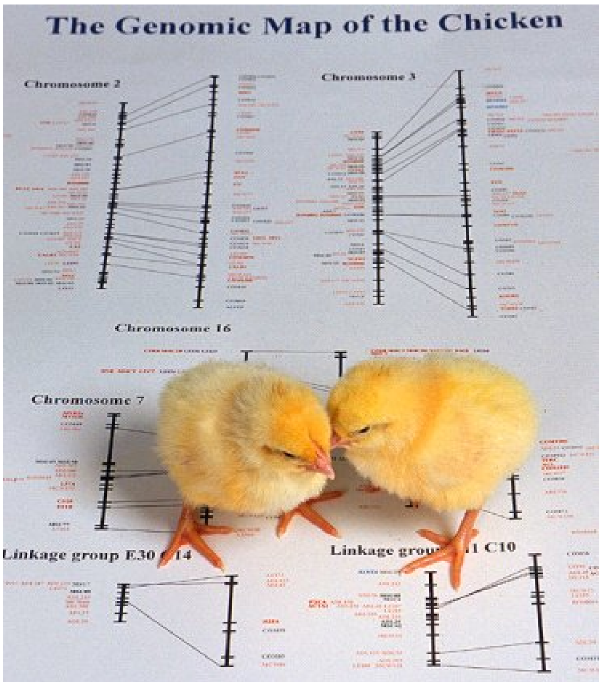
Membrány jsou velmi slibné, protože nic nepokazí.



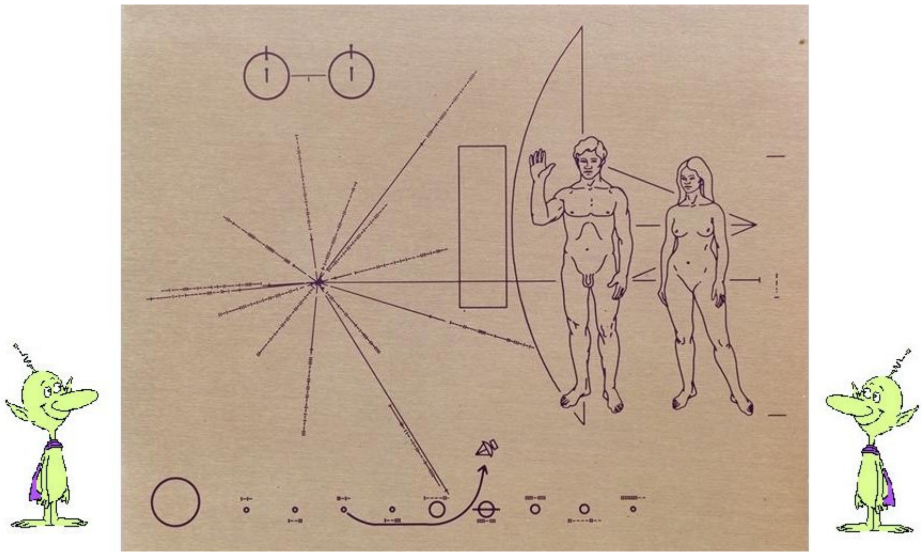
Obrázek 20.3.2: Částice a její kopeček.

Ale takové věci se sčítají? Nebo se potkávají? Nebo o sobě jenom tak ví?

20.3.3 Jak je co zakódováno



Obrázek 20.3.3: Poselství kuřatům.



Obrázek 20.3.3: Poselství do vesmíru.

20.3.4 Poděkování

Hledání skutečných zákonů světa je úloha nejvyšší důležitosti.

Ze všech zvířat archy Noemovy
a ze všeho, co můžem popsat slovy,
jen balvany a lidé mají odvahu
urvat se od skály
a padat dolů po svahu
a na světě, který se furt mění,
překonat, co překonáno není.

(P.Dobeš)

Děkuji všem, kteří došli až sem. Dík.

Jaká je cesta, takový je cíl.

(Mahátmá Gándhí)

Příloha A

Slovník pojmů

A.1 Základní nezvyklá spojení

Abelovo kritérium = druhé součinové kritérium, viz str. 104
algebraická Hahn-Banachova věta = algebraická rozšiřovací věta, viz str. 173
algebraická rozšiřovací věta = algebraická Hahn-Banachova věta, viz str. 173
axiomatická aritmetika = Peanova aritmetika, viz str. 16
Baireův prostor = hutný prostor, viz str. 169
Banachova algebra = úplná normovaná algebra, viz str. 219
Banachův prostor = úplný normovaný prostor, viz str. 180
Bieberbachova hypotéza = hypotéza o komplexním kruhu, viz str. 378
Bolzano - Cauchyova podmínka = podmínka ustálenosti, viz str. 43
Borelovská množina = topologická množina, viz str. 94
cauchyovská posloupnost = ustálená posloupnost, viz str. 43
cauchyovská = ustálená, viz str. 171
Cauchy-Riemannovy podmínky = holomorfní podmínky, viz str. 142
Dirichletova funkce = charakteristická funkce množiny racionálních čísel, viz str. 94
Dirichletova funkce = rovné racionální síto, viz str. 63
Dirichletovo kritérium = první součinové kritérium, viz str. 104
druhé součinové kritérium = Abelovo kritérium, viz str. 104
Fredholmův operátor = operátor konečného typu, viz str. 228
funkční matice = Jacobiho matice, viz str. 115
Gelfandova transformace = spektrální transformace, viz str. 220
geometrická Hahn-Banachova věta = geometrická rozšiřovací věta, viz str. 182
geometrická rozšiřovací věta = geometrická Hahn-Banachova věta, viz str. 182
Hahn-Banachova věta = spojitá rozšiřovací věta, viz str. 182
Hausdorffův prostor = oddělený prostor, viz str. 164
hermiteovský = samoadjungovaný, viz str. 219
Hilbertův prostor = úplný součinový prostor, viz str. 188
holomorfní podmínky = Cauchy-Riemannovy podmínky, viz str. 142
hutný prostor = Baireův prostor, viz str. 169
hypotéza o komplexním kruhu = Bieberbachova hypotéza, viz str. 378
charakteristická funkce množiny racionálních čísel = Dirichletova funkce, viz str. 94
Choquetův simplex = zobecněný simplex, viz str. 179
integrace per partes = integrace po částech, viz str. 102
integrace po částech = integrace per partes, viz str. 102
Jacobiho matice = funkční matice, viz str. 115
Kleinova láhev = kouzelná láhev, viz str. 196

kouzelná láhev = Kleinova láhev, viz str. 196
křivé racionální síto = Riemannova funkce, viz str. 63
Lagrangeovy multiplikátory = vázané multiplikátory, viz str. 120
Laurentova řada = zobecněná mocninná řada, viz str. 150
Lebesgueovská míra = poctivá míra, viz str. 96
Lebesgueovsky integrovatelná funkce = poctivě integrovatelná funkce, viz str. 98
Lebesgueovsky měřitelná množina = poctivě měřitelná množina, viz str. 94
Lebesgueův integrál = poctivý integrál, viz str. 97
lipschitzovská funkce = sublineární funkce, viz str. 108
Mőbiova páska = překřížený pásek, viz str. 195
nepoctivá míra = Stieltjesova míra, viz str. 96
Newtonův integrál = primitivní integrál, viz str. 101
oddělený prostor = Hausdorffův prostor, viz str. 164
operátor konečného typu = Fredholmův operátor, viz str. 228
Peanova aritmetika = axiomatická aritmetika, viz str. 16
platí základní věta analýzy = vlastnost RNP, viz str. 218
poctivá míra = Lebesgueovská míra, viz str. 96
poctivě integrovatelná funkce = Lebesgueovsky integrovatelná funkce, viz str. 98
poctivě měřitelná množina = Lebesgueovsky měřitelná množina, viz str. 94
poctivý integrál = Lebesgueův integrál, viz str. 97
podmínka ustálenosti = Bolzano - Cauchyova podmínka, viz str. 43
primitivní integrál = Newtonův integrál, viz str. 101
první součinové kritérium = Dirichletovo kritérium, viz str. 104
překřížený pásek = Mőbiova páska, viz str. 195
Radonova míra = topologická míra, viz str. 190
Riemannova funkce = křivé racionální síto, viz str. 63
rovné racionální síto = Dirichletova funkce, viz str. 63
samoadjungovaný = hermiteovský, viz str. 219
spektrální transformace = Gelfandova transformace, viz str. 220
spojitá kompaktifikace = Stone-Čechova kompaktifikace, viz str. 166
spojitá rozšiřovací věta = Hahn-Banachova věta, viz str. 182
Stieltjesova míra = nepoctivá míra, viz str. 96
Stone-Čechova kompaktifikace = spojitá kompaktifikace, viz str. 166
sublineární funkce = lipschitzovská funkce, viz str. 108
TEMNO + AC = ZFC, viz str. 22
TEMNO = ZF, viz str. 19
topologická míra = Radonova míra, viz str. 190
topologická množina = Borelovská množina, viz str. 94
úplná normovaná algebra = Banachova algebra, viz str. 219
úplný normovaný prostor = Banachův prostor, viz str. 180
úplný součinový prostor = Hilbertův prostor, viz str. 188
ustálená posloupnost = cauchyovská posloupnost, viz str. 43
ustálená = cauchyovská, viz str. 171
vázané multiplikátory = Lagrangeovy multiplikátory, viz str. 120
vlastnost RNP = platí základní věta analýzy, viz str. 218
ZF = TEMNO, viz str. 19
ZFC = TEMNO + AC, viz str. 22
zobecněná mocninná řada = Laurentova řada, viz str. 150
zobecněný simplex = Choquetův simplex, viz str. 179

Příloha B

Přehled o literatuře

B.1 Doporučená literatura ke studiu

Matematická analýza je tradiční disciplína přednášená na univerzitách studentům mnoha různých oborů. Existuje dlouhá řada vynikajících učebnic a skript. Jsou sepsány s ohledem na studenty jednotlivých oborů a nelze jednu z nich doporučit jako univerzální studijní text pro všechny.

Mám však svoje oblíbence, které neprozradím.

B.2 Použité zdroje

Základní partie o výrocích a množinách jsou podle internetových zdrojů, zvláště podle skript G.Gierze. Další základní partie matematické analýzy byly zpracovány podle paměti. Pokročilejší partie jsou inspirovány knihou L.Zajíčka. Teorii míry a integrování jsem opisoval ze skript J.Lukeše a J.Malého. Funkcionální analýzu jsem čerpal zejména ze skript J.Lukeše a knihy A.N.Kolmogorova a S.V.Fomina. Diferenciální rovnice a aplikace jsou převážně podle knih G.F.Simmonse a R.Redheffera.

Kdo je labužník, čte to, co já.

Při zpracování jsem používal obrázky dodávané s programem CorelDRAW, verze 8.0, firmy Corel ®. Při výkladu o suchém putování byla použita idea hry Hledání min, firmy Microsoft ®. Při vytváření grafů byl použit program MAPLE, firmy Maplesoft ®.

Fotografie jsou převážně z volně šiřitelných internetových zdrojů.

Všem autorům, jejichž díla jsem použil při přípravě tohoto Průvodce vyslovuji poděkování.

Pokud jsem na některé zdroje zapomněl a některého autora neuvedl, omlouvám se.

SORRY.

Definitivní integrace je podle [BeMa] str. . Zde použito na str. 109.
Obrázek měřidla je z [DHD] str. . Zde použito na str. 123.
Obrázek tornáda je z [NASA-LINDA] str. . Zde použito na str. 130.
Obrázek tornáda je z [NOA] str. . Zde použito na str. 130.
Obrázky z pólu jsou z [NOA] str. . Zde použito na str. 145.
Obrázek Davida je z [pics4learning] str. . Zde použito na str. 151.
Dimenze je podle [Pogoda] str. . Zde použito na str. 169.
Andersonovo tvrzení je z [?] str. . Zde použito na str. 189.
Pórovitost je podle [Zajíček] str. . Zde použito na str. 191.
Prostory integrovatelných distribucí je podle [Fučík] str. 82. Zde použito na str. 206.
Obrázek stopy je z [Photo Library] str. . Zde použito na str. 207.
O distribucích je podle [Lieb] str. 167. Zde použito na str. 208.
O distribucích je podle [Lieb] str. 159. Zde použito na str. 211.
O distribucí je podle [Štepánek] str. str. 55. Zde použito na str. 211.
Obrázek pevného bodu je z [Ruhlmann] str. . Zde použito na str. 220.
Exponenciální transformace [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 229.
O trávení je podle [Redheffer 1992] str. 375. Zde použito na str. 230.
O konvoluci je podle [Redheffer 1992] str. 387. Zde použito na str. 230.
Použití konvoluce na rovnice je v [Redheffer 1992] str. str. 393. Zde použito na str. 231.
Frekvenční řady a transformace je podle [Zajíček] str. 187. Zde použito na str. 231.
Obrázek Doveru je z [NOA] str. . Zde použito na str. 232.
Obrázek Niagary je z [pics4learning] str. . Zde použito na str. 232.
O frekvenční transformaci je podle [Lieb] str. 126. Zde použito na str. 238.
Frekvenční transformace distribucí je podle [Štepánek] str. str. 55. Zde použito na str. 238.
O distribucí je podle [Štepánek] str. str. 55. Zde použito na str. 239.
O distribucích je podle [Lieb] str. 167. Zde použito na str. 240.
O distribucích je podle [Lieb] str. 144. Zde použito na str. 240.
Kvalitativní vlastnosti jsou podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 242.
Obrázek vloček je z [NOA] str. . Zde použito na str. 243.
Linearita je podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 244.
O substituci je podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 244.
O metodách je podle [Simmons] str. 418. Zde použito na str. 245.
O variační úloze je podle [Lieb] str. 267. Zde použito na str. 246.
Metoda konečných prvkůje z [Fučík] str. 222. Zde použito na str. 246.
Obrázek letadla je z [NASA] str. . Zde použito na str. 247.
O fosíliích je zde podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 253.
Údaje o výpočtech roků jsou podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 253.
Obrázek Stonehenge je z [DHD] str. . Zde použito na str. 253.
Obrázek [NASA-JOHNSON] str. . Zde použito na str. 253.
Jednoznačnost [Redheffer 1992] str. 198. Zde použito na str. 254.
O distributivním řešení je podle [Štepánek] str. . Zde použito na str. 254.

O kánoi podle [Redheffer 1992] str. 15. Zde použito na str. 255.
Obrázek lodě je z [NASA] str. . Zde použito na str. 255.
Obrázek Kréty je z [NASA] str. . Zde použito na str. 255.
Populační exploze podle [Redheffer 1992] str. str. 84. Zde použito na str. 257.
Jak neprohrát válku podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 258.
Obrázek lodí je z [NASA] str. . Zde použito na str. 258.
Boj s neštovicemi je podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 259.
Soustava je podle [Simmons] str. 265. Zde použito na str. 260.
Kritéria podle [Redheffer 1992] str. 177. Zde použito na str. 261.
Diferenciální operátor podle [Redheffer 1992] str. 142. Zde použito na str. 261.
Soupeřivé populace podle [Redheffer 1992] str. str. 347, 349. Zde použito na str. 262.
Orázek žraloka je z [NOA] str. . Zde použito na str. 262.
Soustava podle [Simmons] str. 265. Zde použito na str. 263.
Soupeřivé populace podle [Redheffer 1992] str. str. 347 349. Zde použito na str. 264.
O trajektoriích [Simmons] str. 341. Zde použito na str. 264.
O van der Polově rovnici je podle [Redheffer 1992] str. 343. Zde použito na str. 265.
Matice podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 265.
O cestě podle [Simmons] str. 360. Zde použito na str. 266.
Variační počet podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 266.
Problém minimální plochy podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 269.
Problém minimální plochy podle [Fučík] str. 211. Zde použito na str. 269.
Ulita je podle [Redheffer 1992] str. str. 58. Zde použito na str. 269.
O ortogonálních trajktoriích je podle [Redheffer 1992] str. str. 62. Zde použito na str. 271.
Řetězovka je podle [Simmons] str. 54. Zde použito na str. 271.
Problém lana je podle [Elsgolc] str. 119. Zde použito na str. 272.
Tah je podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 274.
Obrázek lodi je z [Hosler] str. . Zde použito na str. 274.
Stíhací křivka je v [Grozdev] str. . Zde použito na str. 274.
Jistý homerun podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 276.
Obrázek hrište je z [pics4learning] str. . Zde použito na str. 276.
Vodní hodiny podle [Redheffer 1992] str. str. 93. Zde použito na str. 277.
Pohyby planet podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 279.
O tunelování je podle [Gladney] str. . Zde použito na str. 280.
Obrázek zeměkoule je z [NASA-NASA] str. . Zde použito na str. 280.
Obrázek tunelu je od malíře Georga Wellnera. [Wellner] str. . Zde použito na str. 281.
[NASA-NASA] str. . Zde použito na str. 281.
O pružině je z [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 282.
Jednoznačnost je podle [Redheffer 1992] str. 198. Zde použito na str. 283.
Obrázek magnetu je z [Lockyer] str. . Zde použito na str. 284.
Srovnání řešení je z [Simmons] str. 122. Zde použito na str. 285.
Řešení pomocí řad je z [Simmons] str. 155. Zde použito na str. 286.
Netlumené nucené kmity podle [Redheffer 1992] str. str 128. Zde použito na str. 286.
Netlumené nucené kmity podle [Redheffer 1992] str. str 128. Zde použito na str. 288.
Tlumení podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 288.
Stabilita podle Ljapunova v [Simmons] str. . Zde použito na str. 288.
Obrázek kuželek je z [Hosler] str. . Zde použito na str. 289.
Dvojpružina je z [Redheffer 1992] str. 162. Zde použito na str. 290.
Obrázek koní je z [USDA] str. . Zde použito na str. 290.
O kyvadle je z [Redheffer 1992] str. 336. Zde použito na str. 290.
O distribucích je z [Štepánek] str. 55. Zde použito na str. 291.

Kmitání je z [Štepánek] str. . Zde použito na str. 292.
Snadné řešení vlnové rovnice je podle [Simmons] str. 131. Zde použito na str. 293.
O distribucích je z [Štepánek] str. . Zde použito na str. 293.
Obrázek kapky je z [DHD] str. . Zde použito na str. 294.
O distribucích je z [Štepánek] str. . Zde použito na str. 294.
Rovnice tepelné rovnováhy je z [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 294.
Problém minimalizace je z [Elsgolc] str. 41. Zde použito na str. 296.
Fundamentální řešení je z [Štepánek] str. . Zde použito na str. 296.
O bábovce podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 296.
Rovnice vedení tepla [Redheffer 1992] str. 307. Zde použito na str. 297.
Obrázek zahřívání je z [Wullner 1875] str. . Zde použito na str. 297.
Obrázky kabin jsou z [NASA] str. . Zde použito na str. 298.
O distribucích je z [Štepánek] str. . Zde použito na str. 298.
Obrázky tepelných stavů jsou z [NOA] str. . Zde použito na str. 299.
Obrázek teplot je z [NASA] str. . Zde použito na str. 299.
Brachystochrona podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 299.
Tautochrona podle [Simmons] str. 141. Zde použito na str. 303.
Princip úměrnosti podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 304.
Raketa podle [Simmons] str. 63. Zde použito na str. 304.
Kvantová mechanika podle [Simmons] str. 194. Zde použito na str. 305.
Nejmenší akce podle [Simmons] str. 380. Zde použito na str. 307.
A Simple Proof That $E = mc^2$ [] str. . Zde použito na str. 308.
Obrázek koule je z [Wullner] str. . Zde použito na str. 310.
Ireducibilita podle [Wilkins] str. 13. Zde použito na str. 311.
Rozšíření podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 311.
Konstrukce podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 312.
Rozšíření podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 312.
Úhel podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 312.
Krychle podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 313.
Grupa podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 313.
Rovnice podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 313.
O řešení podle [Audin] str. . Zde použito na str. 314.
O grupách podle [Ibragimov] str. . Zde použito na str. 314.
o pi [Niven] str. . Zde použito na str. 316.
Honors Project 16 [] str. . Zde použito na str. 317.
Umocnil se podle [Talman] str. . Zde použito na str. 317.
O kouli podle [Lasserre] str. . Zde použito na str. 317.
Rotující hřídel podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 318.
Elektrický obvod jako kalkulačka [Redheffer 1992] str. str. 57. Zde použito na str. 318.
O soustavě podle [Redheffer 1992] str. 341. Zde použito na str. 319.
O snímání podle [Bruss] str. . Zde použito na str. 319.
O skořápkách podle [Gillman] str. . Zde použito na str. 319.
O otáčení podle [Hamilton] str. . Zde použito na str. 319.
O periodických jevech podle [Arnold] str. . Zde použito na str. 323.
O bifurkacích podle [Arnold] str. . Zde použito na str. 324.
O prutu podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 325.
Obrázek svěráku je z [Wullner] str. . Zde použito na str. 325.
O membráně podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 325.
O průhybu podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 326.
O slabém řešení [Fučík] str. . Zde použito na str. 333.

O lesu je podle Les Methodes [?] str. . Zde použito na str. 333.
Prostory integrovatelných distribucí podle [Fučík] str. 82. Zde použito na str. 333.
Obrázky vln jsou z [Photo Library] str. . Zde použito na str. 333.
Slabé řešení podle [Fučík] str. 218. Zde použito na str. 333.
O operátoru [Fučík] str. 230. Zde použito na str. 334.
Simplexy podle [Homolog] str. . Zde použito na str. 335.
Diferenciální formy [] str. . Zde použito na str. 336.
Prvočíselná věta [Zagier] str. . Zde použito na str. 337.
O úniku podle [?] str. . Zde použito na str. 339.
O superkapiláře podle [Finn] str. . Zde použito na str. 339.
O prosakování podle [Fučík] str. 30. Zde použito na str. 340.
O kouli podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 341.
O pochrchu podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 341.
O indexu podle [Rognes] str. . Zde použito na str. 342.
O průmětu podle [Digital] str. . Zde použito na str. 346.
O tomografu podle [PFMA1984] str. 202. Zde použito na str. 346.
O satelitech podle [Cors] str. . Zde použito na str. 346.
Obrázek Saturnu je z [NASA] str. . Zde použito na str. 347.
O úniku podle [?] str. . Zde použito na str. 347.
Obrázek vesmíru je z [NASA] str. . Zde použito na str. 349.
Problém těles podle [Diacu] str. . Zde použito na str. 349.
O choreografiích podle [?] str. . Zde použito na str. 350.
Relativita podle [Gascon] str. . Zde použito na str. 351.
O gravitaci podle [Smale] str. . Zde použito na str. 352.
Staré obrázky jsou z [NOA] str. . Zde použito na str. 352.
O kvantovce podle [Lieb] str. 171. Zde použito na str. 352.
O prostorech podle [Lieb] str. 179. Zde použito na str. 352.
O energii podle [Lieb] str. 182. Zde použito na str. 352.
O atomu podle [Lieb] str. 269 -283. Zde použito na str. 352.
O kapalině podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 355.
Obrázek vody je z [Wullner] str. . Zde použito na str. 356.
Obrázek mraků je z [NOA] str. . Zde použito na str. 357.
Obrázek cyklonu je z [NASA] str. . Zde použito na str. 357.
Obrázky proudění jsou z [NASA] str. . Zde použito na str. 357.
O solitonu podle [Griffiths] str. . Zde použito na str. 357.
O plochách podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 359.
Izoperinetrický problém podle [?] str. . Zde použito na str. 359.
O hypotéze podle [Smale] str. . Zde použito na str. 360.
O časoprostoru [Smale] str. . Zde použito na str. 360.
O dynamických cenách [Smale] str. . Zde použito na str. 361.
O koulích podle [Griffiths] str. . Zde použito na str. 361.
Obrázek kuliček je z [DHD] str. . Zde použito na str. 361.
Obrázky fraktálu připraveny pomocí programu z [www.geocities.com] str. www.geocities.com/CapeCanave
Hangar/7959/newtonapplet.html. Zde použito na str. 363.
Obrázek míčků je z [Photo Library] str. . Zde použito na str. 363.
O putování podle [Steward] str. . Zde použito na str. 363.
O rovinnosti podle [Nešetril] str. . Zde použito na str. 365.
O racionálních řešeních [Halmos] str. . Zde použito na str. 365.
O hypotéze podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 366.
O varietách podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 366.

O grupách podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 366.
O kulečníku podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 367.
O dvojčatech podle [Curiosa] str. . Zde použito na str. 367.
O číslech podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 368.
O osobnostech podle [Bailey] str. . Zde použito na str. 369.
O kamenech podle [Weisskopf] str. . Zde použito na str. 370.
Obrázek interference je z [Lockyer] str. . Zde použito na str. 370.
O pojmech podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 371.
O aplikacích podle [Griffiths] str. . Zde použito na str. 373.
O principech podle [Schiller] str. . Zde použito na str. 373.
Obrázek genů je z [USDA] str. . Zde použito na str. 375.
Obrázek poselství je z [NASA] str. . Zde použito na str. 375.

Literatura

[Appelbaum] David Appelbaum, *Dirac Operators - From Differential Calculus to the Index Theory*, March 27, 2000.

[Arnold] Vladimir Arnold, *Dynamical systems*, Development of Mathematics 1950-2000, Birhauser, Basel-Boston-Berlin 2000.

[Atiyah] M.F. Atiyah, *Co je geometrie*, PFMA 4-29-1984, s. 213.

[Audin] M. Audin, Integrability of Hamiltonian Systems, EMS December 2003, p. 9-12.

[Bailey] Evelyn C. Bailey, *A Brief History of Mathematics*.

[Balcar] Balcar, Teorie množin.

[Barotello] V. Barotello, S. Terracini, *Action minimizing orbits in the n-body problem with simple choreography constraint*.

[BeMa] H. Bendová and J. Malý, *An elementary way to introduce a Perron-like integral*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 36 (2011), 153-164.

[Bolander] Bolander, A primer to Contemporary Self-Reference.

[Bruss] F.T. Bruss, *Playing trick on uncertainty*.

[cituj.cz] cituj.cz.

[Cors] J.M. Cors, J. Llibre, M. Ollé, *On central configuration of the coorbital satellite problem*.

[Curiosa] Deneb Curiosa, *Twin Paradox*, Copyright 1996 Deneb Curiosa, http://mentock.home.mindspring.com/twins.htm.

[DHD] DHD Multimedia Gallery, Gallery at http://gallery.hd.org/.

[Diacu] F. Diacu, *Encyclopedia of Nonlinear Science, Fitzroy Dearbon, 2002*.

[Digital] Digital Sundial.

[Elsgolc] L.E. Elsgolc, *Variační počet*, SNTL, Praha 1965.

[Euler] Euler, PMFA 1-25-1980, s. 43.

[Finn] R. Finn,*Eight Remarkable Properties of Capillary Surfaces*, The Mathematical Intelligencer, 24,3 (2002), p. 21-33.

[Fučík] S. Fučík, A. Kufner, *Nelineární diferenciální rovnice*, SNTL, Praha 1978.

[Gascon] F.G. Gascon, D.Peralta-Salas, *Escape to infinity under the action of a potential and a constant electromagnetic field*, J. Phys. A: Meth. Gen. 36(2003), 6441-6445.

[Geometry] http://www.geom.uiuc.edu/zoo/toptype/pplane/boy/eqns.html, Copyright © 1995 by The Geometry Center.

[Gierz] G.Gierz, *Lecture notes*, http://ggierz.ucr.edu, MATH 132 Spring 03.

[Gillman] L.Gillman, *Tha car and the Goats*, American Mathematical Monthly, January 1992, pp. 3-7.

[Gladney] Gladney,*Physics Lecture 22 - Chaos and Nonlinear Oscilations, dept.physics.upenn.edu courses gladney, phys150 lectures lecture dec 10 1999.htm*.

[Griffiths] P.A. Griffiths, *Mathematics at the turn of the Millenium*, Monthly 107, January 2000.

[Grozdev] S. Grozdev, I. Derzhanski, E. Sendova, *For Those Who Think Mathematics Dreary*, Dnevnik 1.238 (27 December 2001), p. 8.

[Halmos] P.R. Halmos, *Jádro matematiky*, PMFA 5-27-1982.

[Halmos] P.R. Halmos, *Zpomalil se rozvoj matematiky?*, PMFA 36(1991), c. 5.

[Hamilton] W.R. Hamilton, PMFA 5-35-1990, str. 278.

[Historická cítanka] Historická čítanka z českých dějin a literatury, Fragment, Havlíčkuv Brod 1999.

[Homolog] Homolog, Chapter 4, Topology I, p. 61-73.

[Hosler] A. Hosler, E. Waik,*Naturlehre fur der unteren Klassen der Mittelschulen*,Wien 1900.

[Chen] So-Chin Chen, *Complex analysis in one and several variables*, Taiwanese Journal of Mathematics 4(4), 2000, 531-568.

[Choquet] G. Choquet, *G. Choquet: vzpomínky a názory*, s. 29 - 43.

[Ibragimov] N.H.Ibragimov, POKROKY 39,4(1994).

[Jílek] F. Jílek, Ceština je jazyk vtipný, Mladá fronta, Praha 1968.

[Kafka] F. Kafka, *Zámek*, Odeon 1989.

[Kolmogorov] A.N.Kolmogorov, S.V.Fomin, *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*, STNL, Praha 1975.

[Kutáková] E. Kutáková, V. Marek, J. Zachová, Moudrost věků, Svoboda, Praha 1988.

[Lasserre] J.B. Lasserre, *A Quick Proof for the Volume of n-Balls*.

[Lieb] E.H. Lieb, M. Loss, *Analysis, second edition*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, AMS Providence, Rhode Island 2001.

[Lichtenberg] G.Ch. Lichtenberg, Myšlenky, postrehy, nápady, Odeon, Praha 1984.

[Lockyer] J.N. Lockyer,*Studien zur Spectralanalyse*, Leipzig 1879.

[Lukeš] J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, Praha 1998.

[Lukeš] J. Lukeš, J.Malý, *Míra a integrál*, Karolinum, Praha 2002.

[Markus] Markus, EMS December 2003, p.15-17.

[Nagata] Jun-iti NAGATA, z knihy.

[Narici] Lawrence Narici, *Partners: Functional Analysis and Topology, Revised*, Topology Atlas Document zaaa-49.

[NASA] NASA, http://gimp-savvy.com/.

[NASA-JOHNSON] Earth Sciences and Image Analysis Laboratory, NASA Johnson Space Center, http://eol.jsc.nasa.gov.

[NASA-LINDA] NASA-LINDA, http://vrml.gsfc.nasa.gov/linda.

[NASA-NASA] NASA.

[Nešetril] J. Nešetril, *Historická perspektiva konečné matematiky*, PMFA 1-31-1986, str. 35.

[Netuka] I. Netuka,*Teorie potenciálu*.

[Niven] I. Niven, *A Simple Proof that* π *is Irrational*, Bulletin of the American Mathematical Society, 53 (1947), p. 509.

[NOA] US National Oceanic and Atmospheric Administration.

[Okun] , L.B. Okun, *O pojmu hmotnost*, PMFA 5-35-1990.

[Palais] B. Palais, π *Is Wrong*.

[Perelson] A.S. Perelson, P.W. Nelson, *Mathematical Analysis of HIV-1 Dynamics in Vivo*, SIAM Review 41,1 (1999), 3-44.

[Photo Library] Photo Library, http://www.ecarboot.net/photolibrary/download.asp, Photo Library Copyright Free.

[pics4learning] pics4learning, http://www.pics4learning.com.

[PMFA] PMFA, PMFA 2-25-1980, s.121; PMFA 5-35-1990, str. 280.

[PFMA1984] PFMA, PFMA 4-29-1984, s. 202.

[Pogoda] Z.Pogoda, L.M.Sokolowski, *Does Mathematics Distinguish Certain Dimensions of Spaces?*, Notices ... November.

[Redheffer 1992] R. Redheffer, *Introduction to differential equations*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.

[Ritoré] M. Ritoré, A. Ros, *Some Updates on Isoperimetric Problems*, The Mathematical Intelligencer 24,3 (2002).

[Rognes] John Rognes, *On the Atiah-Stinger theorem*, University of Oslo, March 2004.

[Ruhlmann] M.Ruhlmann,*Vortrage uber Geschichte der Technische Mechanik*, Leipzig 1885.

[Schiller] www.motionmountain.net, *36. Maximum force and minimum distance: physics in limit statements*.

[Simmons] G. F. Simmons,*Differential Equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill Book Company 1972.

[Slovník] K. Hais, B.Hodek, *Velký anglicko český slovník*, Academia, Praha 1984.

[Smale] S. Smale, *Mathematical Problems for the Next Century*, August 7, 1998.

[Steward] Ian Steward, *www.claymath.org/Popular-Lectures/Minesweeper*.

[Štepánek] J. Štepánek, *Matematika pro přírodovědce, Distribuce a diferenciální rovnice*, Karolinum, Praha 2001.

[Talman] L.A. Talman, *On* $x^{x^{x^{\cdots}}}$, Metropolitan State College of Denver.

[USDA] US Department of Agriculture, http://gimp-savvy.com/cgi-bin/.

[Wellner] G.Wellner, Kniha kreseb III.

[Weisskopf] V.F. Weisskopf, *Hranice a meze vedy*, PMFA 1 36 1991 str. 1.

[Wilkins] D.R. Wilkins, *Course 311: Hilary Term 2002, Part III: Introduction to Galois Theory*.

[Wilkins] D.R. Wilkins, *Part IV: The Topological Classification of CLosed Surfaces*, Course 421: Academic Year 1998-9.

[Wikimedia] commons.wikimedia.org/wiki/File:Rodin_ The_ Kiss.JPG

[Woodard] M.R. Woodard, *Quotes from the Mathematical Quotations Server*, Furman University.

[Wullner 1875] A. Wullner, *Lehre von der Warme*, Leipzig 1875.

[Wullner] A. Wullner, *Lehrbuch der Experimentalphysic*, Leipzig 1874.

[www.geocities.com] www.geocities.com, www.geocities.com/CapeCanaveral/, Hangar/7959/newtonapplet.html

[Zagier] D. Zagier, *Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem*, AMM **october**, (1997), x–y.

[Zajíček] L. Zajíček, *Porosity and σ-porosity*, Real Analysis Exchange 13, 314-348.

[Zajíček] L. Zajíček, *Vybrané úlohy z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, MATFYZPRESS, Praha 2003.