Matematika pro fyziky, 5. semestr
šk. rok 2004/2005

Vladimír Souček

19. ledna 2005

Kapitola 1

Distribuce

1. přednáška

1.1 Úvod.

Distribuce, nebo také zobecněné funkce, byly používány nejdříve symbolicky v teoretické fyzice. Nejznámější distribuci - delta funkci - zavedl a začal používat vynikající teoretický fyzik P. Dirac. Formálně se chovala jako Kroneckerovo delta, ale index již nebyl diskretní, ale spojitý. Analogie byla zřejmá. Pro diskrétní index má Kroneckerovo delta $\delta_{ij}; i, j = 1, \dots, n$ následující základní vlastnost: pro pevné i, $i = 1, \dots, n$ a pro libovolný vektor $v = (v_j) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\sum_j \delta_{ij} v_j = v_i.$$

Označme $\delta_0(x)$ Diracovu delta funkci v nule. Analogie předchozí formule pro spojitý index říká, že pro každou (vhodnou)funkci $f(x), x \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_0(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Potíž s touto analogií spočívá v tom, že delta funkce δ_0 musí zřejmě být (podobně jako Kroneckerovo delta) rovna nule ve všech nenulových bodech, ale pak pro žadný rozumný integrál příslušný vzorec nemůže platit, vždy na pravé straně vyjde nula. Fyzikové toto obcházeli zdvořilou poznámkou, že má delta funkce v bodě nula hodnotu rovnou nekonečnu, ale ani pak předchozí vzorec nedává žádný smysl, pokud nalevo stojí opravdu integrál.

Podstatnou inspirací pro vhodnou definici distribuce bylo pozorování, že fyzikové při používání delta funkce nikdy tuto funkci nepoužívali jako takovou. Delta funkce se vždy vyskytovala jen pod integračním znamením v symbolu

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta_0(x)\varphi(x)dx,$$

jehož hodnota se rovna číslu $\varphi(0)$. Každé 'testovací funkci' φ se tedy přiřadila hodnota $\varphi(0)$. Toto přiřazení je zřejmě lineární zobrazení z (vhodného) prostoru testovacích funkcí do reálných čísel. To vedlo k matematické definici, kde distribuce je lineární funkcionál na (nekonečně dimenzionálním) prostoru testovacích funkcí.

Netriviální součást definice byl výběr vhodného podprostoru v prostoru všech lineárních funkcionálů na prostoru testovacích funkcí. Bylo nutné přidat požadavek spojitosti ve vhodném smyslu, protože pro funkcionály na nekonečně dimenzionálních prostorech již neplatí, že jsou automaticky spojité vůči všem rozumným konvergencím na příslušném prostoru funkcí.

Obrovská výhoda distribucí, je že libovolné derivace všech řadů distribucí vždy existují. Brzy si zobecněné funkce získaly velkou popularitu a významně přispěly k rozvoji teorie parciálních (i obyčejných) diferenciálních rovnic. Dnes jsou již standardní součástí běžného matematického aparátu matematické fyziky.

1.2 Prostory testovacích funkcí

V této části si zavedeme vhodné prostory funkcí. Budeme uvažovat reálné funkce na (otevřených podmonožinách) v $\mathbb{R}^n$. Pro multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (kde α_i jsou nezáporná celá čísla) budeme používat zkrácený symbol $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ pro příslušný monomiál a symboly $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ a $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ pro příslušné parciální derivace. Číslo $|\alpha| = \sum \alpha_j$ je příslušný řád této poslední parciální derivace.

Definice 1.2.1 *Zavedeme si následující prostor testovacích funkcí:*

Prostor $\mathcal{E}(\Omega)$ je prostor všech funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, které mají (spojité) parciální derivace všech řádů ve všech bodech. Takovéto funkce budeme nazývat hladké funkce na Ω. (Někdy se tento prostor označuje také symbolem $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.)

Nosič funkce $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ je uzávěr množiny bodů, ve kterých je funkce φ různá od nuly:

$$supp\, \varphi := \overline{\{x \in \Omega | \varphi(x) \neq 0\}} \cap \Omega.$$

Základní prostor testovacích funkcí je prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ všech hladkých funkcí, které mají kompaktní nosič v Ω. Často se používá označení $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Někdy se prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ označuje $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Nalézt explicitní příklady funkcí z $\mathcal{D}$ není těžké. Funkce $\varphi(x)$ na $\mathbb{R}$ definovaná předpisem $\varphi(x) = \exp(\frac{1}{x^2-1})$ pro $|x| \leqslant 1$ a rovnající se nule jinde je jedním takovým příkladem. Funkce $\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$ nebo $\varphi(x) = \varphi(|x|)$ patří do prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Definice 1.2.2 *Prostor testovacích funkcí $\mathcal{D}(\Omega)$ je lineární vektorový prostor (nekonečné dimenze). Topologii v tomto prostoru zavedeme pomocí konvergence posloupností funkcí.*

Řekneme, že posloupnost testovacích funkcí $\varphi_j \in \mathcal{D}$ konverguje k nule v $\mathcal{D}$, pokud existuje kompaktní množina $K \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ pro všechna j a pokud pro každé α funkce $\partial^\alpha \varphi_j \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}^n$.

Řekneme, že posloupnost φ_j konverguje k φ, pokud $\varphi_j - \varphi$ konverguje k nule.

1.3 Definice

Definice 1.3.1 *Řekneme, že lineární funkcionál T na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ je spojitý, pokud pro každou posloupnost $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ s vlastností $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0$ platí $T(\varphi_j) \to 0$. Prostor distribucí $\mathcal{D}'(\Omega)$ je prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$. Často se používá označení $\mathcal{D}'$ pro $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Hodnotu $T(\varphi)$ funkcionálu T na testovací funkci φ budeme také někdy značit $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$.

Dvě distribuce jsou stejné, pokud mají stejné hodnoty na všech testovacích funkcích.

Poznámka 1.3.2 *Obrovská výhoda distribucí je snadné zacházení s nimi. Ukážeme si, že každá distribuce má všechny derivace všech řádů. Navíc, kdykoliv posloupnost distribucí T_n konverguje k distribuci T, pak automaticky derivace T_n konvergují k T. Derivace distribucí je tedy spojitá operace na prostoru všech distribucí! To má zábavné důsledky pro sčítání Fourierových řad ve smyslu distribucí, jak uvidíme později.*

Příklad 1.3.3
(1) Označme symbolem $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ množinu všech lokálně integrovatelných funkcí f, t.j. takových funkcí, že Lebesgueův integrál $\int_K f$ existuje pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$. Je-li $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak je možné definovat spojitý lineární funkcionál T_f předpisem

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tento funkcionál je evidentně lineární, jeho spojitost plyne z toho, že

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0 \Rightarrow \sup_\Omega \varphi_j \to 0,\ |T_f(\varphi)| \leqslant \left(\int_{supp\ \varphi} |f|\right) \sup_\Omega |\varphi(x)|.$$

Funkcionály tvaru $T_f, f \in L_{1,\mathrm{loc}}$ budeme nazývat regulární funkcionály.

Je-li f spojitá nebo dokonce hladká funkce, patří do $L_{1,\mathrm{loc}}$. Každá takováto funkce tedy určuje regulární distribuci. Je důležité si uvědomit, že různé

lokálně integrovatelné funkce určují různé distribuce (viz Appendix, Důsledek 4.3.3). Je tedy možné prostor $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ považovat za podprostor prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$.
(2) Slavná Diracova delta-funkce (soustředěná v bodě $a \in \mathbb{R}$) je distribuce $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definovaná následujícím způsobem.

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Pro libovolné k nezáporné celé budeme definovat podobné distribuce $T_{k,a} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ předpisem

$$T_{k,a}(\varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(a),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Přesvědčte se, že je to opravdu spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Později uvidíme, že tyto distribuce jsou derivace Diracovy delta-funkce.

Zcela analogicky se definuje Diracova delta funkce $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ v n proměnných.

Teď si popíšeme vlastnost spojitosti lineárního funkcionálu na $\mathcal{D}$ ještě jiným, ekvivalentním způsobem. Zároveň to pro nás bude inspirace pro definici řádu distribuce (řád distribuce intuitivně řečeno popisuje, kolik derivací testovací funkce potřebuji pro definici dané distribuce).

Věta 1.3.4 *Lineární forma T na $\mathcal{D}(\Omega)$ je spojitá právě když pro každou kompaktní množinu $K \subset \Omega$ existují konstanty $C \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že pro všechny testovací funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s nosičem v K platí*

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Důkaz.

Předpokládejme nejdříve, že T je distribuce na Ω, tj. že T je spojitá na $\mathcal{D}(\Omega)$. Předpokládejme sporem, že podmínka ve větě není splněná, tedy že existuje kompaktní množina K s vlastností, že nerovnost ve větě neplatí pro žádnou dvojici konstant C, k. Vezměme $C = k = j$, tedy pro každé $j \in \mathbb{N}$ existuje $\varphi_j \in \mathcal{D}$ s nosičem v K taková, že

$$|T(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha| \leqslant j} \sup_K |\partial^\alpha \varphi_j(x)|.$$

Můžeme také předpokládat, že $T(\varphi_j) = 1$ (vždy je možné funkci φ_j vynásobit konstantou, nerovnost se při tom nezmění). Pak tedy $|\partial^\alpha \varphi_j| < 1/j$ pro $j \geqslant |\alpha|$. Z toho plyne, že $\varphi_j \to 0$ v prostoru $\mathcal{D}$, ale $T(\varphi_j)$ nekonverguje k nule. To je spor.

Opačná implikace je snadná, přímo z definice. Předpokládejme, že pro lineární funkcionál T na $\mathcal{D}(\Omega)$ platí podmínka ve větě, t.j že pro každou kompaktní množinu $K \subset \Omega$ existují konstanty $C \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že pro všechny testovací funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s nosičem v K platí

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Pak chceme ukázat, že

$$\varphi_j \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow T(\varphi_j) \to 0.$$

Předpokládejme, že $\varphi_j \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0$, t.j. že existuje K takové, že pro každé j platí $supp\, \varphi_j \subset K$ a zároveň pro každé α platí $\sup_K |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \to 0$. Pro toto K použijeme podmínku z věty. S jejím použitím dostaneme ihned, že

$$C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \to 0,$$

a tedy že $T(\varphi_j) \to 0$.

Definice 1.3.5 *Řekneme, že řád distribuce $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ je menší nebo roven k, pokud v předchozí větě můžeme vzít totéž číslo k pro všechny množiny K, tj. pokud existuje nezáporné celé číslo k takové, že pro každou kompaktní množinu $K \subset \Omega$ existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ s vlastností, že*

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup |\partial^\alpha \varphi|$$

pro všechny testovací funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $supp\, \varphi \subset K$.

Nejmenší k s touto vlastností se nazývá řád distribuce T.

Příklad 1.3.6
(1) Přesvědčte se, že každá regulární distribuce má řád nula. Totéž platí pro Diracovu delta funkci.
(2) Pro libovolné k nezáporné celé jsme definovali distribuce $T_{k,a} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ předpisem

$$T_{k,a}(\varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(a),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Přesvědčte se, že řád distribuce $T_{k,a}$ je roven k.
Návod: Z definice plyne ihned, že řád $T_{k,a}$ je menší nebo roven k. Je třeba tedy ukázat, že není menší než k. Zvolte testovací funkci $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tak, aby $\psi(0) = 1$. Definujte pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ testovací funkci ϕ_n předpisem

$$\phi_n = x^k \psi(n\, x).$$

Pak $T_{k,a}(\phi_n) = k!$, ale zároveň pro $n \to \infty$ a všechna $j < k$ platí

$$\sup |\phi_n^{(j)}| \leqslant C\, n^{j-k} \to 0.$$

Poznámka 1.3.7 *Často je také užitečné uvažovat distribuce s 'komplexními hodnotami'. Komplexní distribuce T je spojité lineární zobrazení z $\mathcal{D}(\Omega)$ do $\mathbb{C}$, kde oba vektorové prostory uvažujeme jako vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Prostor všech komplexních distribucí na Ω označíme $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ (je to vektorový prostor nad $\mathbb{C}$). Zřejmě platí, že $T \in \mathcal{D}'_c(\Omega)$ právě když $T = T_1 + iT_2$; $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Bylo by velmi dobře možné definovat komplexní prostory testovacích funkcí $\mathcal{D}_c(\Omega)$. Všimněte si, že pro každé $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je možné definovat komplexní rozšíření T_c, t.j. lineární zobrazení T_c z $\mathcal{D}_c(\Omega)$ do $\mathbb{C}$ předpisem

$$T_c(\varphi_1 + i\varphi_2) = T(\varphi_1) + iT(\varphi_2).$$

Naopak, každé komplexní lineární zobrazení T_c z $\mathcal{D}_c(\Omega)$ určuje (restrikcí) prvek $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1.4 Konvergence a derivace distribucí, násobení hladkou funkcí.

Definice 1.4.1 *Prostor $\mathcal{D}'(\Omega)$ je vektorový prostor, operace v něm jsou definovány vztahem*

$$(a_1T_1 + a_2T_2)(\varphi) = a_1T_1(\varphi) + a_2T_2(\varphi);\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega), a_j \in \mathbb{R}.$$

Jsou-li T_i, T distribuce, pak řekneme, že $T_i \to T$ v prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$, pokud pro všechny $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí $T_i(\varphi) \to T(\varphi)$.

Součet řady distribucí $\sum T_j$ v příslušném prostoru se definuje jako limita odpovídající posloupnosti částečných součtů v příslušném prostoru distribucí.

Motivací pro definici derivace distribuce je případ regulárních distribucí. Je-li $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, pak také funkce $\partial_j f$ je hladká a obě tyto funkce určují regulární distribuce, pro které platí

$$T_{\partial_j f}(\varphi) = \int_\Omega (\partial_j f)\varphi dx = -\int_\Omega f(\partial_j \varphi) dx = -T_f(\partial_j\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Podobně se motivuje součin hladké funkce a distribuce (zkuste si napsat sami).

Definice 1.4.2 *Je-li $T \in \mathcal{D}(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$, pak pro libovolné $j = 1, \dots, n$ definujeme novou distribuci $\partial_j T$ předpisem*

$$[\partial_j T](\varphi) = -T(\partial_j \varphi);\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Indukcí definujeme derivace vyšších řádů.

Je-li $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, pak definujeme distribuci $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ takto:

$$[fT](\varphi) = T(f\varphi).$$

Lema 1.4.3 *Pro každý multiindex α je $\partial^\alpha T$ dobře definovaná distribuce z $\mathcal{D}'(\Omega)$. Také součin fT je dobře definovaná distribuce z $\mathcal{D}'(\Omega)$ pro každou $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ a $T \in \mathcal{D}(\Omega)$. Jejich nosič je podmnožina nosiče T. Zobrazení $T \to \partial^\alpha T$ a $T \to fT$ jsou spojité.*

Důkaz.

Stačí ověřit spojitost nově definovaných funkcionálů. To plyne ihned z příslušných definic (zkuste ověřit sami!). □

Příklad 1.4.4 *Spočítejte si, že podle definice distributivní derivace platí:*
(1) Distributivní derivace Heavisideovy funkce je Diracova delta-funkce.
(2) Pro k-tou derivaci Diracovy delta-funkce platí:

$$\delta^{(k)}(\varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

Následující podstatná informace říká, jaký je pro funkce jedné proměnné vztah mezi obyčejnou a distributivní derivací. Tento fakt se ve výpočtech často užívá.

Věta 1.4.5 *Předpokládejme, že funkce f je hladká na $\mathbb{R} - \{0\}$ a že její jednostranné derivace mají v počátku skoky*

$$A_k = f^{(k)}(0_+) - f^{(k)}(0_-),\ k = 0, 1, \dots, n-1$$

a že $f^{(n)}$ je integrovatelná v okolí nuly. Označme $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ regulární distribuci zadanou funkcí f.

Pak

$$[T_f]^{(n)} = T_{f^{(n)}} + A_{n-1}\delta + A_{n-2}\delta' + \dots + A_0\delta^{(n-1)}$$

Důkaz.

Důkaz stačí provést pro první derivaci a pak použít indukci. Výpočet pro první derivaci je

$$T_f'(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' dx = -f(0_-)\varphi(0) + \int_{-\infty}^0 f'\varphi dx + f(0_+)\varphi(0) + \int_0^\infty f'\varphi dx =$$

$$= A_0\varphi(0) + T_{f'}(\varphi).$$

□

Věta 1.4.6 *(Derivace je spojitá operace)*

Pokud posloupnost T_j konverguje k T (v příslušném prostoru distribucí), pak pro každé α konvergují derivace $\partial^\alpha T_j$ k $\partial^\alpha T$ (ve stejném prostoru).

Důkaz.

Stačí to ukázat pro některou z derivací ∂_i. Ale

$$[\partial_i T_j](\varphi) = -T_j(\partial_i\varphi) \longrightarrow -T(\partial_i\varphi) = [\partial_i T](\varphi).$$

□

Příklad 1.4.7 *(1) Funkce $f(x) = ln|x|$ na $\mathbb{R}$ je lokálně integrovatelná, a tedy definuje regulární distribuci T_f. Její derivace v klasickém smyslu je funkce $1/x$, ta však již není integrovatelná v okolí nuly. Přesto existuje její derivace ve smyslu distribucí. Pokud spočítáme podle definice jak tato distribuce vypadá, dostaneme pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$*

$$(T_f)'(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\ln|\varepsilon|(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) + \int_{|x|\geqslant\varepsilon}(\varphi(x)/x)dx\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}(\varphi(x)/x)dx.$$

Závěrečný integrál (daný limitou) se tradičně nazývá hlavní hodnota integrálu $\int_{|x|\geqslant\varepsilon}(\varphi(x)/x)dx$. My tuto distribuci označíme prostě symbolem $1/x$. Tato distribuce je zřejmě limitou regulárních distribucí.
(2) Pro každé $y > 0$ je funkce $f_y(x) = \ln(x+iy)$ hladká v proměnné x a tedy určuje regulární distribuci. Snadno se ukáže, že existuje ve všech nenulových bodech limita $\lim_{y\to 0^+} f_y(x) = \ln|x| + i\pi\theta(-x)$, kde $\theta(-x)$ je analogie Heavisideovy funkce, která má hodnoty rovné 1 pro $x < 0$, zatímco pro kladná x je rovna nule.

Pomocí základních vět o konvergenci integrálu se dá ukázat, že $\lim T_y$ pro $y \longrightarrow 0^+$ existuje ve smyslu distribucí z prostoru $\mathcal{D}'$, výslednou distribuci označíme symbolem $\ln(x + i0)$. Derivace T_y' jsou regulární distribuce definované funkcí $1/(x + iy)$, které pak tedy konvergují k distribuci, kterou označíme symbolem $1/(x + i0)$. Ze vzorce pro $\ln(x + i0)$ dostaneme ihned tzv. Sochockého formuli

$$1/(x + i0) = v.p.\, 1/x \;-\; i\pi\delta_0.$$

---

2. přednáška

---

(3) Známe již příklady distribucí, které mají řád k pro libovolné k přirozené. Otázka je, zda existují distribuce, které konečný řád nemají. Odpověď je ano.

Jeden z příkladů je možné sestrojit následujícím způsobem. Předpokládejme, že a_k je posloupnost reálných čísel, které konvergují k $+\infty$, např. $a_k = k$. Pak lze definovat distribuci $T = \sum_k \delta_{a_k}^{(k)}$ (ukažte, že tento součet existuje ve smyslu součtu řady distribucí). Každý částečný součet této řady má konečný řád, ale limitní distribuce už konečný řád nemá.
(4) Regulární distribuce, které mají za limitu δ-funkci.

Předpokládejme, že je dána posloupnost funkcí $f_n(x)$ na $\mathbb{R}$ s vlastnostmi:

(a) $\forall M > 0$ existuje konstanta C taková, že pro každé a, b, $|a| \leqslant M$, $|b| \leqslant M$ platí nerovnost

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx\right| \leqslant C.$$

(b) pro každou dvojici různých čísel a a b je limita $\lim \int_a^b f_n(x)dx$ *rovna nule, pokud* $0 \notin (a,b)$ *a je rovna jedné, pokud* $0 \in (a,b)$. *Pak lze ověřit, že distribuce* T_{F_n}, *kde* $F(n)(x) = \int_{-1}^x f_n(t)de$ *jsou primitivní funkce k* f_n, *konvergují k Heaviseadově distribuci* θ. *Pak ale distribuce* T_{f_n} *konverují k Diracově* δ*-funkci.*

Konkrétním příkladem jsou funkce $f_n(x)$, *které mají hodnotu* $2n$ *na intervalu* $< -1/n, 1/n >$ *a jsou rovny nule jinde. Takovéto funkce popisují aproximaci bodového náboje v počátku s celkovou hustotou jedna a konvergují ve smuslu distribucí k Diracově* δ*-funkci.*

Ověřte pomocí uvedeného postupu, že následující posloupnosti regulárních distribucí konvergují ve smyslu distribucí k Diracově delta funkci:

(i)

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2x^2+1},$$

(ii)

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{n\,x^2}{4}},$$

(iii)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}.$$

1.5 Fourierovy řady, Poissonova sumační formule.

Hodně toho již víte o rozkladu funkcí do Fourierových řad tvaru

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inx}.$$

Typický příklad je rozklad funkce $f(x)$, která je periodická s periodou rovnou jedné a která je lokálně integrovatelná. Koeficienty c_n jsou dány vztahem

$$c_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx.$$

Chceme si rozmyslet, jaký je vztah mezi regulární distribucí T_f a součtem regulárních distribucí, určených funkcemi $c_ne^{2\pi inx}$.

Z minulých semestrů víme, že řada primitivních funkcí

$$\sum_{-\infty}^{-1}\frac{c_n}{2\pi in}e^{2\pi inx} + c_0x + \sum_1^{\infty}\frac{c_n}{2\pi in}e^{2\pi inx}$$

je Fourierovou řadou primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$. Víme také, že $F(x)$ je (absolutně) spojitá a její Fourierova řada konverguje k F stejnoměrně. Rovnost

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{-1}\frac{c_n}{2\pi in}e^{2\pi inx} + c_0x + \sum_1^{\infty}\frac{c_n}{2\pi in}e^{2\pi inx}$$

tedy platí ve smyslu příslušných regulárních distribucí. Použijeme-li derivaci na obě strany rovnosti, dostaneme

$$T_f = \sum c_n e^{2\pi inx}$$

ve smyslu distribucí.

Například je velmi dobře znám součet řady

$$\sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi nx}{n} = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

na $(0,1)$, dál periodicky.

Pak tedy

$$2\sum_1^\infty \cos 2\pi nx = -1 + \sum_{-\infty}^\infty \delta_n,$$

$$4\pi\sum_1^\infty n\sin 2\pi nx = -\sum_{-\infty}^\infty \delta_n',$$

$$8\pi^2\sum_1^\infty n^2\cos 2\pi nx = -\sum_{-\infty}^\infty \delta_n''.$$

Podobnými úvahami lze ukázat, že libovolná řad tvaru $\sum c_n e^{2\pi inx}$ s koeficienty, které nerostou rychleji než nějaká mocnina, konverguje ve smyslu distribucí. Stačí integrovat řadu člen po členu tolikrát, až její koeficienty budou dostatečně rychle klesat a pak výsledný součet derivovat člen po členu ve smyslu distribucí.

Poissonova sumační formule

Vztah

$$2\sum_1^\infty \cos 2\pi nx = -1 + \sum_{-\infty}^\infty \delta_n,$$

se dá přepsat v jiném tvaru

$$\sum_{-\infty}^\infty e^{2\pi inx} = \sum_{-\infty}^\infty \delta_n$$

Použijeme-li Fourierovu transformaci (na testovací funkci $\varphi(x)$, tj. pokud $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-2\pi ixy}dx$), pak dostaneme použitím předchozího vztahu na testovací funkci φ rovnost

$$\sum_{-\infty}^\infty \psi(n) = \sum_{-\infty}^\infty \varphi(n),$$

který se nazýva Poissonova sumační formule.

1.6 Složení distribuce s difeomorfismem

Předpokládejme, že h je difeomorfimus otevřené podmnožiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ na jinou otevřenou podmnožinu $\tilde{\Omega}$ v $\mathbb{R}^n$. (V této přednášce slovo difeomorfismus označuje nekonečně diferencovatelné zobrazení Ω na $\tilde{\Omega}$, pro které existuje inverzní zobrazení na $\tilde{\Omega}$, které je také nekonečně diferencovatelné.) Jacobiho matice $Jh(x) := \det\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)$ je pak nenulová funkce na Ω.

Je-li $T_u \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ regulární distribuce, zadaná pomocí lokálně integrovatelné funkce $u(y), y \in \tilde{\Omega}$, pak je také složená funkce $u(h(x)$ lokálně integrovatelná na Ω a její hodnota na testovací funkci $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ je dána vzorcem (pomocí věty o substituci)

$$\int_\Omega u(h(x))\varphi(x)dx = \int_{\tilde{\Omega}} u(y)\varphi(h^{-1}(y))\frac{1}{|\det Jh(y)|}dy.$$

To vede k následující definici.

Definice 1.6.1 *Předpokládejme, že h je difeomorfimus otevřené podmnožiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ na jinou otevřenou podmnožinu $\tilde{\Omega}$ v $\mathbb{R}^n$. Pro danou distribuci $T = T(y) \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ definujeme distribuci $T(h(x)) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem*

$$\langle T(h(x)), \varphi\rangle = \langle T(y), \Phi(y)\rangle,$$

kde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ a $\Phi(y) := \frac{1}{|\det Jh(y)|}\varphi(h^{-1}(y))$.

Příklad 1.6.2 *(1) Standardní a velmi častý speciální případ je tento: předpokládejme, že $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je tzv. afinní zobrazení, tj. $y = h(x) := A \cdot x + b$, $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $x, y, b \in \mathbb{R}^n$. pak h je difeomorfismus a pro libovolnou distribuci T platí*

$$\langle T(A \cdot x + b), \varphi\rangle = \frac{1}{|\det A|}\langle T(y), \varphi(A^{-1} \cdot (y - b))\rangle.$$

Jako speciální případ dostaneme také složení distribuce s posunutím: pro $a \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\langle T(x + a), \varphi\rangle = \langle T(x), \varphi(x - a)\rangle.$$

(2) Rozmyslete si sami:

(i) Pokud $T = \delta_0$,, pak dostaneme

$$\langle \delta_0(A \cdot x), \varphi\rangle = \frac{1}{|\det A|}\langle T(y), \varphi(A^{-1} \cdot y)\rangle = \frac{1}{|\det A|}\varphi(0),$$

tedy

$$\delta_0(A \cdot x) = \frac{1}{|\det A|}\delta_0(x).$$

Všimněte si, že tedy Diracova delta funkce δ_0 je invariantní vůči libovolné lineární substituci $y = A \cdot x$ pro matice $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

(ii) Velmi užitečný je také vzorec pro složení distribuce s dilatací. Pro $a > 0$ uvažujme dilataci, tj. difeomorfismus $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$ daný vztahem $y = ax$. Pak jako speciáoní případ (1) dostaneme vztah

$$\langle T(ax), \varphi \rangle = \frac{1}{a^n} \langle T(x), \varphi(x/a) \rangle.$$

Specielně,

$$\langle \delta_0(ax), \varphi \rangle = \frac{1}{a^n} \langle \delta_0(x), \varphi(x/a) \rangle,$$

1.7 Lokalizace distribucí.

Pro distribuci nelze definovat rozumně hodnotu distribuce v bodě, lze ale definovat restrikci distribuce na otevřenou podmnožinu. Předpokládejme, že jsou dány dvě oblasti $\Omega' \subset \Omega$ v $\mathbb{R}^n$. Abychom si definovali takovouto restrikci distribuce T z Ω na Ω', ukážeme nejdříve, že je možné považovat prostor testovacích funkcí $\mathcal{D}(\Omega')$ za podprostor prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$. Je-li $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$, dodefinujeme ϕ v bodech Ω mimo Ω' nulou. Protože má ϕ kompaktní nosič v Ω' je toto rozšíření hladká funkce v Ω. Pak pro každou distribuci $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je zúžení $T|_{\Omega'}$ opravdu jen zúžení funkcionálu T na menší prostor testovacích funkcí.

Funkci f lze zadat několika předpisy na několika částech jejího definičního oboru. Pokud se tyto části definičního oboru překrývají a příslušné definice se na společném průniku shodují, je tím zřejmě funkce dobře definovaná. Analogická věta platí i pro distribuce.

Věta 1.7.1 *Je-li Ω_i libovolný systém otevřených množin a $\Omega = \cup_i \Omega_i$, pak pro každý systém distribucí $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$, který splňuje podmínku $\forall i, j$, $T_i|_A = T_j|_A$ na $A := \Omega_i \cap \Omega_j$, existuje právě jedna distribuce $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ s vlastností $\forall i, T|_{\Omega_i} = T_i$.*

Definice 1.7.2 *Předpokládejme, že $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Její nosič $\operatorname{supp} T$ je definován, jako množina všech bodů $x \in \Omega$ takových, že neexistuje okolí U bodu x, pro které by platilo $T|_U = 0$.*

Množina $\operatorname{supp} T$ je charakterizována vlastností, že $\Omega - \operatorname{supp} T$ je největší otevřená podmnožina $U \subset \Omega$, pro kterou platí $T|_U = 0$ (to je jednoduchý důsledek Věty 1.7.1). Platí tedy, že

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset \Rightarrow T(\varphi) = 0.$$

Podobně se definuje singulární support T. Je-li $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, pak singulární support $\operatorname{sing\,supp} T$ je množina všech bodů $x \in \Omega$ s vlastností, že neexistuje okolí U bodu x, pro které by $T|_U$ byla regulární distribuce, zadaná hladkou funkcí na U. Alternativně, množina $U = \Omega - \operatorname{sing\,supp} T$ je největší otevřená podmnožina v Ω s vlastností, že restrikce T na tuto množinu je regulární distribuce zadaná hladkou funkcí.

V závislosti na nosiči distribuce T je možné rozšířit definiční obor T na větší množinu testovacích funkcí. Je-li např T_f regulární distribuce zadaná funkcí $f \in L_{1,loc}(\Omega)$, pak integrál $\int f\varphi dx$ je dobře definovaný pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, pro kterou je $supp\, T \cap supp\, \varphi$ kompaktní podmnožina Ω. Pro pohodlí se domluvme, že symbol $A \subset\subset \Omega$, označuje to, že uzávěr $\bar{A}$ je kompaktní podmnožina Ω. Obecně platí následující věta.

Věta 1.7.3 *Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $supp\, T$ je její nosič. Pak existuje právě jedna lineární forma $\tilde{T}$ na množině testovacích funkcí*

$$\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) |\, supp\, T \cap supp\, \varphi \subset\subset \Omega\} \tag{1.7.1}$$

taková, že platí

(i) $\tilde{T}(\varphi) = T(\varphi)$ pro všechny $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
(ii) $\tilde{T}(\varphi) = 0$, pokud $supp\, T \cap supp\, \varphi = \emptyset$.

Hlavní myšlenka důkazu je prostá. Zvolme libovolně testovací funkci $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tak, aby $\psi = 1$ v okolí $supp\, \varphi \cap supp\, T$. To je možné, protože množina $supp\, \varphi \cap supp\, T$ je kompaktní a je tedy dost místa na to, aby funkce ψ měla kompaktní nosič v Ω. definujeme příslušné rozšíření $\tilde{T}$ předpisem

$$\tilde{T}(\varphi) = T(\varphi\psi),\ \varphi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Zbytek důkazu je jen ověření, že toto rozšíření je jediné možné. Celý důkaz je možné najít v apendixu.

Dohodněme se, že vždy rozšíříme definiční obor dané distribuce na množinu testovacích funkcí popsanou v (1.11.5) a že toto rozšíření označíme stejným symbolem T.

1.7.1 Distribuce s kompaktním nosičem

Je-li tedy T distribuce s kompaktním nosičem v Ω, pak ji podle předchozí věty můžeme rozšířit jako lineární funkcionál na větší prostor testovacích funkcí $\mathcal{E}(\Omega)$. Distribuce jsou definovány jako lineární funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$, které jsou spojité pro vhodnou konvergenci na prostoru testovacích funkcí. Pro distribuce s kompatktním nosičem vzniká přirozená otázka, zda je možné také tuto speciální třídu distribucí charakterizovat pomocí vhodné podmínky spojitosti na prostoru testovacích funkcí $\mathcal{E}(\Omega)$. Odpověď je obsažena v následující definici a větě.

Definice 1.7.4 *Konvergenci na prostoru $\mathcal{E}(\Omega)$ zavedeme takto. Řekneme, že posloupnost $\varphi_j \in \mathcal{E}(\Omega)$ konverguje k nule, pokud tyto funkce konvergují, spolu se všemi svými derivacemi, lokálně stejnoměrně k nule. Podrobněji řečeno, $\varphi_j \to 0$ v $\mathcal{E}(\Omega)$, pokud $\forall K$ kompaktní v Ω a $\forall \alpha$ platí $\partial^\alpha \varphi_j \rightrightarrows 0$ na K.*

Ekvivalentně lze tuto podmínku vyjádřit takto. Pro každou kompaktní množinu K a každé přirozené číslo k definujeme pseudonormu

$$|\varphi|_{k,K} := \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,\ \varphi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Pak $\varphi_j \to 0$ v $\mathcal{E}(\Omega)$ právě když $\forall K \subset \Omega$ kompaktní a $\forall k$ přirozené platí

$$|\varphi_j|_{k,K} \to 0.$$

Věta 1.7.5 *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) Lineární funkcionál T na $\mathcal{E}(\Omega)$ je spojitý.

(ii) Existují $C \in \mathbb{R}$, k přirozené a kompaktní množina $K \subset \Omega$ takové, že $\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ platí

$$|T(\varphi)| \leqslant C\, |\varphi|_{k,K}.$$

(iii) T je distribuce z $\mathcal{D}'(\Omega)$ s kompaktním nosičem (rozšířená podle naší dohody na celé $\mathcal{E}(\Omega)$).

Důkaz této věty je možné také najít v Apendixu.

Příklad 1.7.6 *Uvažujme funkci $x_+^\lambda, Re\lambda > -1$, která má hodnotu x^λ pro $x > 0$ a jinde je nula. Je to funkce lokálně integrovatelná na $\mathbb{R}$, tedy určuje distribuci v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nosič této distribuce je ale obsažen v intervalu $< 0, +\infty)$, tedy mohu tuto distribuci rozšířit a definovat ji i pro testovací funkce, které se chovají libovolně u minus nekonečna. Místo požadavku, že φ má kompaktní nosič stačí požadavek, že existuje $L \in \mathbb{R}$, pro které $\varphi(x) = 0$ pro $x > L$.*

Díky tomu, že růst naší funkce v plus nekonečnu je polynomiální, mohl bych dokonce rozšířit příslušný funkcionál i na testovací funkce, které rychle klesají v plus nekonečnu. Jedna z takovýchto funkcí je funkce e^{-x}. Všimněte si, že pak

$$[x_+^{\lambda+1}](e^{-x}) = \Gamma(\lambda).$$

1.8 Homogenní distribuce

Poznámka 1.8.1 *Každý ví, že je snadné najít reálnou funkci f, která má v $x \in \mathbb{N}$ předepsané hodnoty, např. mohu chtít aby $f(n) = (n-1)!$. Takovýchto funkcí je hodně. Složitější úloha je najít holomorfní funkci $F(z)$ (na vhodné oblasti) pro kterou platí totéž, t.j. např. $F(n) = (n-1)!$. Problém je v tom, že hodnoty F v malém okolí libovolného bodu (a dokonce ještě o hodně menší informace) určují jednoznačně hodnoty holomorfní funkce na maximální oblasti, na kterou lze rozšířit. Pokud bych začal funkci definovat v okolí 1, pak musím hodnoty poblíž 1 zvolit tak, abych se strefil do zadaných hodnot ve všech přirozených čísel najednou.*

Je proto pozoruhodný fakt, že taková holomorfní funkce existuje. Už jsme ji v této přednášce potkali, je to Gamma funkce $\Gamma(z)$, která je holomorfní *na celé komplexní rovině kromě záporných celých čísel a pro kterou, jak už víte, opravdu platí* $\Gamma(n) = (n-1)!$. *Podobná, ale ještě složitější úloha se dá formulovat takto:*

Najděte parametrický systém distribucí $T(z) \in \mathcal{D}', z \in \mathbb{C}$, *který na komplexním parametru z závisí holomorfně s vlastností* $T(-k) = \delta^{(k)}(x), k \in \mathbb{N}$.

Uvidíme, že vhodné řešení uvedné úlohy umožní zároveň ukázat cestu k řešení další, více méně nesmyslné úlohy. Chtěli bychom, abychom kromě první, druhé, třetí, atd. derivace uměli počítat (v nějakém vhodném, blíže nespecikovaném smyslu) polovinovou, třetinovou, π*-tou, nebo dokonce* $(1+5i)$*-tou derivaci! O tom ale víc později.*

1.8.1 Distribuce x_+^λ.

Příklad 1.8.2 *Zkusme si rozmyslet, pro které hodnoty parametru* λ *je funkce* $x^\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ *lokálně integrovatelná na intervalu* $x \in (0,\infty)$. *Připomeňme si, že* $x^\lambda = e^{\lambda \ln x}$ *a* $|x^\lambda| = x^{\mathrm{Re}\,\lambda}$. *Funkce* $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ *má konečný integrál na intervalu* $(0,1)$ *právě když* $\alpha > -1$.

Tedy funkce x^λ *je lokálně integrovatelná na* $\mathbb{R}$ *právě když* $Re\ \lambda > -1$.

Definice 1.8.3 *Pro* $\lambda \in \mathbb{C}$ *označíme symbolem* x_+^λ *funkci*

$$\begin{aligned} x_+^\lambda &= x^\lambda \ \textit{pokud}\ x > 0; \\ x_+^\lambda &= 0 \ \ \textit{pokud}\ x < 0. \end{aligned}$$

Pak $x_+^\lambda \in L_{1,loc}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Re\ \lambda > -1$. *Pro tyto hodnoty* λ *tedy funkce representuje regulární distribuci, kterou budeme označovat stejným symbolem.*

Poznámka 1.8.4 *Pro* $\lambda \in \mathbb{C}, Re\ \lambda \leqslant -1$ *nelze pomocí funkce* x^λ *definovat přímo odpovídající distribuci. Rádi bychom ale našli nějaký postup, jak definici výše uvedeného parametrického systému distribucí rozšířit i na ostatní hodnoty parametru. Množina komplexních čísel, pro kterou se nám obecnou mocninu podařilo jako distribuci definovat je dost velká a tak zkusíme rozšířit definici co nejdál pomocí analytického pokračování holomorfních funkcí.*

---

3. přednáška

Definice 1.8.5 *Nechť* T_λ *je parametrický soubor distribucí pro* $\lambda \in \Omega \subset \mathbb{C}$. *Řekneme, že* T_λ *holomorfně závisí na* λ, *pokud pro všechna* $\varphi \in \mathcal{D}$ *je* $\langle T_\lambda, \varphi\rangle$ *holomorfní funkce na oblasti* Ω.

Je-li T_λ *parametrický soubor distribucí, který holomorfně závisí na* $\lambda \in \Omega \subset \mathbb{C}$, *pak je ihned z definice vidět, že totéž platí pro derivace* T'_λ *(nebo indukcí pro jakékoliv vyšší derivace).*

Předpokládejme, že soubor T_λ *má v bodě* λ_0 *isolovanou singularitu (tj. pro každé* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *má holomorfní funkce* $\langle T_\lambda, \varphi\rangle$ *v bodě* λ_0 *isolovanou singularitu). Pak distribuci* $\mathrm{res}_{\lambda_0} T_\lambda$ *definujeme předpisem*

$$\langle \mathrm{res}_{\lambda_0} T_\lambda, \varphi\rangle = \mathrm{res}_{\lambda_0}\langle T_\lambda, \varphi\rangle.$$

Je zřejmé, že soubor distribucí $T_\lambda = x_+^\lambda$; $Re\ \lambda > -1$ závisí na této množině holomorfně na λ (stačí ověřit splnění C-R podmínek pro komplexní derivaci derivací za integrálem). Na jak velkou množinu jde (pro pevně zvolenou testovací funkci φ) tuto holomorfní funkci rozšířit?

Existuje více způsobů, jak požadované holomorfní rozšíření distribucí x_+^λ sestrojit. Nejjednodušší varianta využívá toho, že umíme každou distribuci derivovat. Uvažujme nejprve pravou polorovinu $\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\lambda > 0$. Pak je funkce x_+^λ spojitá v nule a podle Věty 1.4.5 platí

$$\frac{d}{dx}(x_+^\lambda) \equiv (x_+^\lambda)' = \lambda\, x_+^{\lambda-1}$$

To umožňuje pro všechny $\lambda \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\lambda > -2, \lambda \neq -1$ definovat

$$x_+^\lambda := \frac{(x_+^{\lambda+1})'}{\lambda+1};\ \langle x_+^\lambda, \varphi\rangle := -\frac{\langle x_+^{\lambda+1}, \varphi'\rangle}{\lambda+1}.$$

Na oblasti $\mathrm{Re} > -1$, kde je příslušná distribuce již definovaná a regulární obě definice, díky vzorci (1.8.1), zřejmě splývají. Obdobně lze pomocí vyšších derivací postupovat dál.

Abychom nemuseli opakovat totéž dvakrát, zavedeme si zároveň pro $\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}|\lambda > -1$ regulární distribuci x_-^λ, která je zadaná funkcí, která se rovná pro záporné x funkci $|x|^\lambda$ a která je rovna nule pro kladná čísla x. Pro $\lambda, \mathrm{Re}\,\lambda > -1$ platí

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(-x)dx.$$

Zřejmě tedy $x_+^\lambda = (-x)_-^\lambda$, tj. $\langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle = \langle x_-^\lambda, \varphi(-x)\rangle$.

Definice 1.8.6 *Nechť k je pevné přirozené číslo. Pak pro každé* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re} > -k-1, \lambda \neq -1, -2, \ldots, -k$ *definujeme distribuci* $x_+^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *předpisem*

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle := (-1)^k \frac{\langle x_+^{\lambda+k}, \varphi^{(k)}\rangle}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)}.$$

Pro tytéž λ *definujeme distribuci* $x_-^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *předpisem*

$$\langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle = \langle x_-^\lambda, \varphi(-x)\rangle.$$

Je snadné si rozmyslet, že výše uvedená definice je bezesporná. Pro dvě různá k jsme sice definovali tutéž distribuci dvěma různými způsoby, ale pro pravou polorovinu $\lambda, \mathrm{Re}\lambda > 0$ obě definice splývají a z principu analytického pokračování to tedy platí na celém průniku definičních oborů. Základní vlastnosti těchto distribucí jsou obsaženy v následující větě.

Věta 1.8.7 *(1) Distribuce $x_\pm^\lambda$ jsou výše uvedeným vzorcem definovány pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1, -2, \dots\}$ a platí $x\, x_\pm^\lambda = x_\pm^{\lambda+1}$.*
(2) V bodech $\lambda = -k, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathrm{res}_{\lambda=-k}\, x_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}}{(k-1)!},$$

$$\mathrm{res}_{\lambda=-k}\, x_-^\lambda = \frac{\delta^{(k-1)}}{(k-1)!}.$$

(3) $\frac{d}{dx}(x_\pm^\lambda) = \lambda x_\pm^{\lambda-1}$ kdykoliv obě strany mají smysl.
(4) V bodě $\lambda = 0$ se distribuce x_+^λ rovná Heavisideově theta funkci.

Důkaz.
(1) Plyne z rovnosti pro $\lambda, \mathrm{Re}\lambda > -1$ analytickým pokračováním.
(2) Z definice x_+^λ plyne že

$$\mathrm{res}_{\lambda=-n} \left\langle x_+^\lambda, \varphi \right\rangle = \lim_{\lambda\to -n} (-1)^n \frac{\langle x_+^{\lambda+n}, \varphi^{(n)}\rangle}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n-1)}.$$

Ale

$$\lim_{\lambda\to -n} \frac{\langle x_+^{\lambda+n}, \varphi^{(n)}\rangle}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n-1)} = \frac{\langle \theta(x), \varphi^{(n)}\rangle}{(-n+1)(-n+2)\dots(-n+n-1)} =$$

$$= \frac{\langle \delta^{(n-1)}, \varphi\rangle}{(n-1)(n-2)\dots(1)}.$$

Residuum pro x_-^λ se snadno dostane z vzorce (1).
(3) Rovnost se snadno ověří přímou derivací v oblasti $\lambda \in (-1, 0)$. Z principu holomorfního pokračování pak platí všude, kde mají obě strany smysl.
(4) Ihned z definice.
Cvičení. Rozmyslete si, že je možné definovat x_+^λ následujícím ekvivalentním způsobem.

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda \varphi(x)dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 x_+^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0)]dx}_{Re\ \lambda > -2} + \underbrace{\frac{\varphi(0)}{\lambda+1}}_{\lambda \neq -1} + \underbrace{\int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)dx}_{\lambda \in \mathbb{C}}.$$

Tento předpis tedy definuje distribuci x_+^λ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}, Re\ \lambda > -2, \lambda \neq -1$. Podobně budeme chtít postupovat krok za krokem dál a definovat tuto distribuci pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, kromě záporných celých čísel.

Podobně pro $Re\ \lambda > -n-1; \lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$

$$\langle x_+^\lambda; \varphi \rangle = \int_0^1 x^\lambda[\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)]dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}$$

Pokud $Re\ \lambda \in (-n-1, -n)$, pak dostaneme také

$$(x_+^\lambda; \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda[\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)]dx.$$

1.8.2 Normalizace distribucí $x_\pm^\lambda$.

Získali jsme velmi pěkný systém distribucí, ale zatím jsme ještě nevyřešili původní úlohu najít holomorfní soubor distribucí, který by se v daných bodech rovnal derivacím Diracovy delta funkce. Můžeme ale zkusit odstranit singularity v celých záporných číslech tím, že budeme náš systém distribucí dělit vhodnou meromorfní funkcí tak, aby se póly zkrátily. Nejjednoduší způsob, jak meromorfní funkci se stejnými poly najít je použít distribuci x_+^λ na vhodnou testovací funkci. Zkusme vzít $\varphi = e^{-x}$. Pak $\langle x_+^\lambda, e_+^{-x} \rangle = \Gamma(\lambda+1\rangle$.

Věta 1.8.8 *Definujme normalizované systémy distribucí $\chi_\pm^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ předpisem*

$$\chi_\pm^\lambda = \frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \lambda \in \mathbb{C} - \{-1, -2, \ldots\},$$

pak lze tyto systémy holomorfně prodloužit i do bodů $\lambda = -k, k \in \mathbb{N}$ a výsledné systémt budou holomorfní systém na celém $\mathbb{C}$. V bodech $\lambda = -k, k \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\chi_+(-k) = \left.\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-k} = \delta^{(k-1)}$$

a

$$\chi_-(-k) = \left.\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-k} = (-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}$$

Na celém $\mathbb{C}$ platí $\frac{d}{dx}(\chi_\pm^\lambda) = \chi_\pm^{\lambda-1}$.

Důkaz. V okolí bodu $\lambda = -k$ platí zároveň

$$\Gamma(\lambda+1) = \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)}$$

a

$$\langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = (-1)^k \frac{\langle x_+^{\lambda+k}, \varphi^{(k)} \rangle}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)}.$$

Tedy
$$\langle \chi_+^\lambda, \varphi\rangle = (-1)^k \langle \chi_+^{\lambda+k}, \varphi^{(k)}\rangle = \langle [\chi_+^{\lambda+k}]^{(k)}, \varphi\rangle.$$
Tedy
$$\chi_+^{-k} = [\theta]^{(k)} = \delta^{(k-1)}.$$

Vzorec pro χ_-^λ se odvodí stejně.

Vztah $\frac{d}{dx}(\chi_+^\lambda) = \chi_+^{\lambda-1}$ se snadno ověří pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\ \lambda > 0$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = \frac{\lambda x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = \chi_+^{\lambda-1}.$$

Z principu holomorfního pokračování pak platí v celém $\mathbb{C}$.

1.8.3 Distribuce $|x|^\lambda, |x|^\lambda\, sgn(x)$.

Další dva systémy distribucí jsou definovány jako lineární kombinace:

$$|x|^\lambda := x_+^\lambda + x_-^\lambda,\ |x|^\lambda\, sgn(x) := x_+^\lambda - x_-^\lambda.$$

Jako cvičení si rozmyslete vlastnosti těchto distribucí. Spočítejte si, že existují limity ($m \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{\lambda\to -2m} |x|^\lambda; \lim_{\lambda\to -(2m+1)} [|x|^\lambda\, sgn\, x]$$

Pro tyto speciální případy si zavedeme následující přirozené označení: $x^{-2m} := \lim_{\lambda\to -2m} |x|^\lambda$ a $x^{-2m+1} := \lim_{\lambda\to -(2m+1)} |x|^\lambda\, sgn(x)$.

Rozmyslete si, že distribuce, někdy označovaná jako hlavní hodnota $1/x$ je totéž jako výše uvedená distribuce x^{-1}.

1.8.4 Distribuce $(x \pm i0)^\lambda$.

Definice 1.8.9 *Pro $Re\ \lambda > -1$ jsou distribuce definované vztahy*

$$(x+i0)^\lambda := \lim_{y\searrow 0}(x+iy)^\lambda$$

$$(x-i0)^\lambda := \lim_{y\searrow 0}(x-iy)^\lambda$$

$$ln(x+i0) := \lim_{y\searrow 0} ln(x+iy)$$

regulární distribuce, příslušné limity jsou lokálně integrovatelné funkce. Snadno se spočítá, že pro $x > 0$ platí

$$(x+i0)^\lambda = (x-i0)^\lambda = x^\lambda,$$

zatímco pro $x < 0$ dostaneme

$$(x + i0)^\lambda = e^{i\lambda\pi}|x|^\lambda,\ (x - i0)^\lambda = e^{-i\lambda\pi}|x|^\lambda.$$

To vede k ekvivalentní definici

$$(x + i0)^\lambda := x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda$$

a

$$(x - i0)^\lambda := x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda,$$

pro libovolné $\lambda \neq -1, -2, \ldots$. Protože je levá strana definována pro libovolné λ komplexní, musí se v záporných celých číslech příslušné singulární členy odečíst.

Poznámka 1.8.10 *Dá se dokázat (případ $k = 1$ je tzv. Sochockého formule), že*

$$(x \pm i0)^{-k} = x^{-k} \mp \frac{i\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)$$

To vede k ekvivalentní definici distribucí x^{-k} :

$$x^{-k} = \frac{1}{2}[(x + i0)^{-k} + (x - i0)^{-k}];\ k \in \mathbb{N}.$$

a ke vztahu

$$(x + i0)^{-k} - (x - i0)^{-k} = -2\pi i\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x).$$

1.9 Fourierova transformace distribucí

1.9.1 Temperované distribuce.

Pro účely Fourierovy transformace se ukázalo být velmi užitečné používat prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rychle klesajících funkcí. Je to podprostor prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, a pojem konvergence se v něm zavádí jiným způsobem.

Definice 1.9.1 *Schwartzův prostor $\mathcal{S}$ rychle klesajících hladkých funkcí na $\mathbb{R}^n$ je definován takto. Řekneme, že hladká funkce φ klesá v nekonečnu rychleji než libovolný polynom, pokud pro libovolný multiindex α a libovolný polynom $P(x)$ je funkce $P(x)\partial^\alpha\varphi(x)$ omezená na $\mathbb{R}^n$. Je jednoduché cvičení ukázat, že rychle klesající funkce lze ekvivalentně charakterizovat podmínkou*

$$||\varphi||_{k,\alpha} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^k|\partial^\alpha\varphi(x)| < \infty$$

pro libovolný multiindex α a libovolné přirozené číslo k.

Řekneme, že posloupnost hladkých funkcí φ_j konverguje k nule v $\mathcal{E}$, pokud pro každý multiindex α a pro každou K kompaktní $\partial^\alpha\varphi_j \rightrightarrows 0$ na K.

Věta 1.9.2
(1) Platí inkluze $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$.
(2) Platí i topologická inkluze, tj. posloupnost konvergující v topologii menšího prostoru konverguje také v topologii prostoru většího.

Důkaz.
(1) Je zřejmé přímo z definice.
(2) Stačí si uvědomit, že platí odhad

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |P(x)\partial^\alpha \varphi_j(x)| \leqslant C_{K,P} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_j(x)|,$$

kde konstanta $C_{K,P}$ závisí na kompaktní množině K a polynomu P. Pokud φ_j konvergují k nule v prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, pak podle definice konverguje $\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_j(x)|$ k nule, tedy také pro každé k nezáporné celé a pro každé α konverguje $||\varphi_j||_{k,\alpha}$ k nule.

$\square$

Definice 1.9.3 *Prostor temperovaných distribucí $\mathcal{S}'$ je prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na Schwartzově prostoru testovacích funkcí $\mathcal{S}$.*

Věta 1.9.4 *Platí inkluse $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.*

Důkaz.
Nechť T je distribuce v $\mathcal{S}'$. Protože platí $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, je restrikce T na $\mathcal{D}$ dobře definovaný lineární funkcionál. Stačí tedy ukázat, že je spojitý. Předpokládejme, že posloupnost testovacích funkcí $\varphi_j \in \mathcal{D}$ konverguje v prostoru $\mathcal{D}$ k nule. Ve Větě 1.9.2 jsme ukázali že vnoření prostorů je spojité zobrazení, φ_j tedy konvergují k nule i v prostoru $\mathcal{S}$. Ze spojitosti T na $\mathcal{S}$ pak plyne, že $T(\varphi_j)$ konvergují k nule.

$\square$

1.9.2 Fourierova transformace pro temperované distribuce.

Poznámka.
V druhém ročníku jste se dozvěděli základní fakta o Fourierově transformaci a její vlastnostech. Tato transformace byla definována přirozeným způsobem pro funkce integrovatelné, zobrazovala prostor rychle klesajících hladkých funkcí $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ na sebe a bylo možné ji rozšířit na isomorfismus Hilbertova prostoru $L_2(\mathbb{R}^n)$ na sebe. Nyní bychom chtěli rozšířit Fourierovu transformaci na vhodné prostory distribucí.

Je snadné najít způsob jak toto rozšíření definovat pro temperované distribuce z $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Jsou-li funkce f, g z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pak

$$\int \mathcal{F}(f)g = \int \left(\int f(x)e^{-2\pi i(x,\xi)}dx \right) g(\xi)d\xi =$$

$$= \int \left(\int g(\xi) e^{-2\pi i (x,\xi)} d\xi \right) f(x) dx = \int f \mathcal{F}(g).$$

Chceme-li definovat $\mathcal{F}$ pro distribuce tak, aby definice souhlasila s výše uvedenou rovností pro regulární distribuce definované pomocí hladkých funkcí, nabízí se následující definice.

Definice 1.9.5 *Pro libovolné $T \in \mathcal{S}'$ definujeme Fourierovu transformaci $\mathcal{F}(T)$ předpisem*

$$(\mathcal{F}(T), g) := (T, \mathcal{F}(g)), g \in \mathcal{S}.$$

Věta 1.9.6 *(1) Zobrazení $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ je prosté a na;*
(2) inversní zobrazení $\mathcal{F}^{-1}$ je dáno vztahem

$$\mathcal{F}^{-1}(T)(\varphi) = T(\mathcal{F}^{-1}(\varphi))$$

(3) $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou spojitá.

Důkaz. První vlastnost je okamžitým důsledkem téže vlastnosti pro $\mathcal{S}$. Druhá vlastnost nabízí definici inverzního zobrazení, pro které se ihned ověří, že je opravdu inverzní. Dále, $T_n \to T$ v $\mathcal{S}'$ právě když $\forall g \in \mathcal{S}$ $(T_n, \mathcal{F}(g)) \to (T, \mathcal{F}(g))$, což platí právě když $\forall g \in \mathcal{S}$ $(cF(T_n), g) \to (\mathcal{F}(T), g)$, což je ekvivalentní s $\mathcal{F}(T_n) \to T$ v $\mathcal{S}'$.

Všimněte si, že rozšíření Fourierovy transformace na Hilbertův prostor $L_2(\mathbb{R}^n)$, odvozené loni, je speciálním případem naší současné definice pro distribuce.

---

4. přednáška

Poznámka 1.9.7 *V poslední přednášce jsme si definovali Fourierovu transformaci pro temperované distribuce. Jiná (a jak se ukáže ekvivalentní) definice je založena na faktu, že prostor $\mathcal{S}$ je hustý v prostoru $\mathcal{S}'$ temperovaných distribucí (viz Věta 1.9.11 v příštím paragrafu). Tato ekvivalentní definice je velmi užitečná při odvozování vlastností Fourierovy transformace temperovaných distribucí, které se snadno přenesou z vlastností Fourierovy transformace hladkých funkcí.*

Zmíněná ekvivalentní definice Fourierovy transformace pro temperované distribuce se dá formulovat takto. Je-li $T \in \mathcal{S}'$, pak existují hladké funkce $f_n \in \mathcal{S}$ takové, že $f_n \to T$ v prostoru $\mathcal{S}'$. Z předchozí věty plyne, že pak $\mathcal{F}(f_n) \to \mathcal{F}(T)$ v $\mathcal{S}'$. Tato limita by tedy mohla být ekvivalentní definicí (zároveň toto tvrzení ukazuje existenci limity a její nezávislost na výběru přibližovací posloupnosti). Pomocí této ekvivalentní definice se snadno rozšíří platnost formulí pro Fourierovy transformace z protoru $\mathcal{S}$ na prostor $\mathcal{S}'$.

Věta o hustotě (Věta 1.9.11) se dokazuje pomocí konvolucí distribucí. Nyní si tento pojem zavedeme.

1.9.3 Konvoluce distribucí

Poznámka 1.9.8 *Předpokládejme, že jsou dány dvě funkce* $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *a* $g(y)$, $y \in \mathbb{R}^m$. *Pak definujeme tensorový součin těchto dvou funkcí předpisem* $F(x,y) := f(x)g(y)$. *Výsledkem je tedy funkce na* $\mathbb{R}^{n+m}$. *Pokud funkce* $f(x), g(y)$ *zadávají regulární distribuce* T_f, T_g, *pak funkce* $F(x,y)$ *představuje také regulární distribuci a platí*

$$\langle T_F, \varphi(x,y)\rangle = \int f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int [f(x)\,[\int g(y)\varphi(x,y)dy]\,dx =$$

$$= \langle T_{f(x)}, \langle T_{g(y)}, \varphi(x,y)\rangle\,\rangle.$$

To vede k následující definici.

Definice 1.9.9 *Jsou-li dány dvě distribuce* $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *a* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, *pak jejich tensorový součin definujeme předpisem*

$$\langle S \otimes T, \varphi(x,y)\rangle := \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Totéž platí i pro temperované distribuce (tensorový součin dvou temperovaných distribucí je opět temperovaná distribuce).

Věta 1.9.10
(1) $supp(S \otimes T) \subset supp\, S \times supp\, T$, *tedy součin dvou distribucí z* $\mathcal{E}'$ *tam také patří.*
(2) (distributivní Fubiniova věta)

$$\langle T(x), \langle S(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle S(y), \langle T(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

(3) (asociativnost)

$$T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3.$$

(4) (spojitost) pokud $T_n \to T$ *v* $\mathcal{D}', \mathcal{S}'$ *nebo* $\mathcal{E}'$, *pak* $T_n \otimes S \to T \otimes S$.
(5)

$$\partial/\partial x_i(T(x) \otimes S(y)) = (\partial/\partial x_i T(x)) \otimes S(y);$$

$$a(x)(T(x) \otimes S(y)) = (a(x)T(x)) \otimes S(y); a(x) \in \mathcal{D}.$$

V tomto odstavci nebudeme věty dokazovat. Většinou jsou důsledkem podobných vět pro hladké funkce a limitního přechodu, popsaného v následující větě. Poznámky o myšlenkách důkazů lze také najít v příslušných oddílech skript P. Čihák a kol.: MA pro fyziky V.

Velmi užitečná informace pro pochopení vlastností distribucí jsou věty o hustotě hladkých funkcí v prostorech distribucí, které umožňují odvodit příslušné vlastnosti ze známých vlastností regulárních distribucí a limitního přechodu.

Věta 1.9.11 *Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustý v prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$. To znamená, že $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)\, \exists f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ takové, že $f_n \to T$ v prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Je-li navíc $T \in \mathcal{S}'$, pak lze zvolit f_n tak, že $f_n \to T$ v prostoru $\mathcal{S}'$.

Důkaz. Víme, že existuje posloupnost funkcí $\psi_n \in \mathcal{S}$ se stejně omezenými kompaktními nosiči, které v prostoru $\mathcal{S}'$ konvergují k Diracově delta funkci δ. Z vlastností konvoluce pak plyne, že pro libovolné $T \in \mathcal{D}'$ platí $T * \psi_n \to T * \delta = T$. Funkce $T * \psi_n$ patří do $\mathcal{D}'$, protože funkce ψ_n jsou hladké a mají kompaktní nosič (detaily tohoto odvození nebudeme probírat).

Stejně se odvodí tvrzení, týkající se hustoty prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ v prostoru $\mathcal{S}'$.

Definice 1.9.12 *Předpokládejme, že $T, S \in \mathcal{D}'$. Označme*

$$\Omega_R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \,|\, ||x+y|| < R\}, R > 0.$$

Nechť pro $T, S \in \mathcal{D}'$ platí, že pro všechna $R > 0$ je $(\operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S) \cap \Omega_R$ omezený.

Pak definujeme konvoluci $T * S \in \mathcal{D}'$ předpisem

$$\langle T * S, \varphi \rangle := \langle T \otimes S, \varphi(x+y) \rangle, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Poznámka 1.9.13 *Podmínka ve větě zaručuje, že má definice smysl, i když funkce $\varphi(x+y)$ nemá kompaktní nosič v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Podmínka totiž zaručuje, že průnik nosiče distribuce $T \otimes S$ a nosiče testovací funkce je kompaktní, a tedy že příslušná hodnota je dobře definována.*

Podmínka v definici věty je často důsledkem ještě jednodušších předpokladů. Uveďme si teď alespoň několik příkladů.
(1) Stačí, aby jeden z činitelů měl kompaktní (tj. omezený) nosič.
(2) Je-li $n = 1$, pak stačí, aby nosiče obou distribucí byly omezeny s téže strany. To platí např. pro $T = x_+^\lambda, S = y_+^\mu$.
(3) Ve vyšších dimenzích stačí například předpokládat, že oba nosiče jsou v témže (ev. posunutém) prvním oktantu.

Věta 1.9.14 *(1) Operace konvoluce je komutativní a asociativní*
(2) Pokud mají všechny uvažované distribuce až na jednu kompaktní nosič, pak je jejich postupná konvoluce asociativní.
(3) $\partial/\partial x_i(T * S) = (\partial/\partial x_i T) * S$; pokud mají obě strany rovnosti smysl
(4) Předpokládejme že $T_n \to T$. Pak platí $T_n * S \to T * S$, pokud buď

(a) S kompaktní nosič,

(b) všechny distribuce T_n mají nosič v téže kompaktní množině,

(c) $n = 1$ a a všechny distribuce T_n, S mají nosič stejně ohraničený ze stejné strany.

(5) $\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$
(6) $\delta * S = S * \delta = S$,

(7) Pokud $T = T_t$ je distribuce, která závisí na reálném parametru pak platí $\frac{\partial}{\partial t}(T_t * S) = (\frac{\partial}{\partial t}T_t) * S$, pokud je splněn jeden z následujících předpokladů:

(a) distribuce S má kompaktní nosič,

(b) všechny distribuce T_t mají stejný kompaktní nosič,

(c) $n = 1$ a nosiče všech distribucí T_t, S jsou stejně ohraničené ze stejné strany.

1.9.4 Necelé derivace

Předpokládejme, že funkce $g(x)$ je lokálně integrovatelná a rovna nule pro $x < 0$. Z analýzy je známa Cauchyova formule pro n-násobnou primitivní funkci. Pokud

$$g_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x g(\xi)(x-\xi)^{n-1}d\xi,$$

pak $g_n^{(n)} = g$. To se ekvivalentně dá vyjádřit pomocí konvoluce jako

$$g_n(x) = g(x) * \frac{x_+^{n-1}}{(n-1)!} = g(x) * \frac{x_+^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

kde funkce $g(x)$ a x_+^{n-1} jsou pro $x < 0$ podle definice rovny nule. To nás inspiruje k následující definici.

Definice 1.9.15 *Předpokládejme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ a g je libovolná distribuce, jejíž nosič leží v $\langle 0, \infty)$. Funkci*

$$g_\lambda(x) := g(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$$

pak nazveme primitivní funkcí řádu λ k funkci $g(x)$.

Předpoklady na nosič g a vlastnosti nosiče distribuce $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ zaručují existenci konvoluce.

Z rovnosti $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}|_{\lambda=-k} = \delta^{(k)}$ dostaneme

$$g_0 = g(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}|_{\lambda=0} = g(x) * \delta(x) = g(x),$$

$$g_{-1} = g(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}|_{\lambda=-1} = g(x) * \delta'(x) = g'(x),$$

podobně pro větší n. To vede k definici

Definice 1.9.16 *Předpokládejme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ a g je libovolná distribuce, jejíž nosič leží v $\langle 0, \infty)$. Distribuci*

$$g_{-\lambda}(x) := g(x) * \frac{x_+^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}$$

pak nazveme derivací řádu λ *funkce* $g(x)$ *a budeme ji označovat symbolem*

$$g_{-\lambda} = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} g.$$

Předpoklady na nosič g *a vlastnosti nosiče distribuce* $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ *zaručují existenci konvoluce.*

Zkusme dokázat rovnost

$$\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} = \frac{x^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)}.$$

Uvažujme komplexní čísla λ, μ, pro která platí $\mathrm{Re}\lambda > 0, \mathrm{Re}\mu > 0$. Levá strana rovnosti se dá napsat jako

$$\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} = \int_0^x \frac{\xi_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{(x-\xi)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \, d\xi.$$

Substitucí $\xi = x\,t$ dostaneme rovnost

$$\int_0^x \xi_+^{\lambda-1}(x-\xi)_+^{\mu-1}\, d\xi = x^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 t_+^{\lambda-1}(1-t)_+^{\mu-1}\, dt = x^{\lambda+\mu-1} B(\lambda,\mu).$$

Dokazovaná rovnost tedy plyne ze známého vyjádření Beta funkce pomocí podílu hodnot Gamma funkcí. Podle principu analytického pokračování pak dokazovaná rovnost platí všude, kde jsou obě strany definovány.

Tím jsme zároveň dokázali, že pro libovolné β, γ dostaneme

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta}\left(\frac{d^\gamma g}{dx^\gamma}\right) = \frac{d^{\beta+\gamma} g}{dx^{\beta+\gamma}}.$$

Pomocí takovéto 'necelé' derivace je možné Besselovy funkce řádu p vyjádřit pomocí elementárních funckí (cos, resp. mocnina).

1.9.5 Vlastnosti Fourierovy transformace temperovaných distribucí.

Příklad 1.9.17 *(1) Zkusme nyní spočítat Fourierův obraz distribuce* $x_+^\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$. *Pro výpočet se omezíme na* λ *z intervalu* $(-1,0)$.

Zvolme číslo $\tau > 0$ *pevně. Budeme počítat Fourierův obraz* $\mathcal{F}(x_+^\lambda e^{-2\pi\tau\, x})$. *Protože při* $\tau \to 0$ *platí* $x_+^\lambda e^{-2\pi\tau\, x} \to x_+^\lambda$ *v prostoru* $\mathcal{D}'_c$, *stačí pak nakonec udělat příslušnou limitu ve výsledku.*

Funkce $x_+^\lambda e^{-2\pi\tau\, x}$ *je zřejmě integrovatelná a tak její Fourierův obraz je dán integrálem*

$$\mathcal{F}(x_+^\lambda e^{-2\pi\tau\, x} e^{-2\pi i\,\xi\, x}) = \int_0^\infty x^\lambda e^{-2\pi(\tau+i\xi)\,x} dx = \int_0^\infty x^\lambda e^{p\,x} dx = \int_{\mathbb{R}_+} z^\lambda e^{p\,z} dz,$$

kde $p=-2\pi(\tau+i\xi)$ *a integrační obor je kladná reálná poloosa* $\mathbb{R}_+$. *Všimněte si, že* $\arg p \in (\pi/2, 3\pi/2)$, *tj.* p *patří do levé poloroviny.*

Integrál spočítáme pomocí substituce $pz=-u, z=-u/p, dz=-du/p$. *Integrační obor po substituci bude polopřímka* γ *vycházející z počátku a procházející bodem* $-p$. *Protože je argument čísla* $-p$ *v intervalu* $(-\pi/2, \pi/2)$, *leží* γ *v pravé polorovině. Funkce* e^{-u} *tedy exponencielně klesá na* γ. *To umožňuje nahradit v komplexním integrálu z holomorfní funkce integrační obor* γ *reálnou osou. Ve formulích níže používáme hlavní hodnotu obecné mocniny, která odpovídá jednoznačné větvi argumentu s hodnotami v intervalu* $(-\pi,\pi)$. *Dostaneme tedy*

$$\int_{\mathbb{R}_+} z^\lambda e^{p\,z}dz = (-1/p)^{\lambda+1}\int_\gamma u^\lambda e^{-u}du = (-1/p)^{\lambda+1}\int_{\mathbb{R}_+} u^\lambda e^{-u}du =$$

$$= (-p)^{-(\lambda+1)}\Gamma(\lambda+1) = -ie^{-i\lambda\pi/2}(2\pi)^{-\lambda-1}\Gamma(\lambda+1)(\xi-i\,\tau)^{-(\lambda+1)}.$$

protože $-p = i\,2\pi(\xi - i\,\tau), i = e^{i\pi/2}$ *a*

$$(-p)^{-(\lambda+1)} = e^{-i(\lambda+1)\pi/2}(\xi-i\,\tau)^{-(\lambda+1)}$$

Limitním přechodem $\tau \to 0$ *tedy dostaneme*

$$\mathcal{F}(x_+^\lambda) = -ie^{-i\lambda\pi/2}(2\pi)^{-\lambda-1}\Gamma(\lambda+1)(\xi-i\,0)^{-\lambda-1}.$$

Po normalizaci dostaneme

$$\mathcal{F}\left(\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = e^{-i(\lambda+1)\pi/2}(2\pi)^{-\lambda-1}(\xi-i\,0)^{-\lambda-1}.$$

Levá i pravá strana rovnosti jsou celé funkce, a tak tato formule platí pro libovolná λ *komplexní.*

Alternativní verze je

$$\mathcal{F}\left(\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = i\left[e^{i\lambda\pi/2}\xi_+^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\pi/2}\xi_-^{-\lambda-1}\right].$$

Specielně pro $\lambda = n = 0,1,2,\dots,$ *dostaneme*

$$\mathcal{F}(x_+^n) = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}}[\xi - i0]^{-n-1},$$

např.

$$\mathcal{F}(x_+^0) = \mathcal{F}(\theta(x)) = \frac{1}{2\pi i}[\xi-i0]^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\xi^{-1} + \frac{1}{2}\delta(\xi),$$

(2) Zcela obdobně se dá ukázat (zkuste sami), že platí vztah

$$\mathcal{F}\left(\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = e^{i(\lambda+1)\pi/2}(2\pi)^{-\lambda-1}(\xi+i\,0)^{-\lambda-1}.$$

Věta 1.9.18 *Pro všechny distribuce $T \in \mathcal{S}'$ platí*
(1)

$$\mathcal{F}(\partial_x^\alpha T) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}(T),\ \mathcal{F}(x^\beta T) = \frac{1}{(-2\pi i)^{|\beta|}}\partial_\xi^\beta(\mathcal{F}(T)).$$

(2)

$$\mathcal{F}^{-1}(\xi_x^\alpha T) = \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}}\partial_x^\alpha\left(\mathcal{F}^{-1}(T)\right),\ \mathcal{F}^{-1}(\partial_x^\beta T) = (-2\pi i)^{|\beta|}x^\beta(\mathcal{F}^{-1}(T)).$$

(3) pro všechna $S, T \in \mathcal{S}'$ platí

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S)\cdot\mathcal{F}(T); \mathcal{F}^{-1}(S * T) = \mathcal{F}^{-1}(S)\cdot\mathcal{F}^{-1}(T);$$

$$\mathcal{F}(S\cdot T) = \mathcal{F}(S) * \mathcal{F}(T); \mathcal{F}^{-1}(S\cdot T) = \mathcal{F}^{-1}(S) * \mathcal{F}^{-1}(T)$$

(4)

$$\mathcal{F}(T)(\xi - \beta) = \mathcal{F}(T\cdot e^{2\pi i(x,\beta)})(\xi),\ \beta \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{F}(T(x-b))(\xi) = e^{-2\pi i(b,\xi)}\mathcal{F}(T)(\xi);\ b \in \mathbb{R}^n$$

kde distribuce $T(x-b)$ je definována předpisem $T(x-b)(\varphi(x)) = T(\varphi(x+b))$.
(5)

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(T) = T(-x).$$

kde distribuce $T(-x)$ je definována předpisem $T(-x)(\varphi(x)) = T(\varphi(-x))$.

Důkaz. Stačí použít známé vlastnosti Fourierovy transformace pro hladké funkce a to, že derivace, násobení polynomem, $\mathcal{F}$, násobení a konvoluce jsou spojité zobrazení.

Pro výpočet Fourierovy transformace distribucí s kompaktním nosičem je užitečná následující věta, která umožňuje odbýt si jednou pro vždy výpočet a úvahu, kterou by bylo jinak nutné znovu a znovu při výpočtu opakovat.

Věta 1.9.19
(1) Nechť $T \in \mathcal{S}'$ má kompaktní nosič. Pak funkce $\alpha(\xi) := T_x(e^{-2\pi i(x,\xi)})$ patří do $\mathcal{S}$ a platí $\mathcal{F}(T) = \alpha$.

(2)Nechť pro T platí slabší podmínka, že existuje $\sigma > 0$ takové, že $\tilde{T} := e^{\sigma||x||^2}T \in \mathcal{S}'$. Pak funkce $\alpha(\xi) := \tilde{T}_x(e^{-2\pi i(x,\xi)}e^{-\sigma||x||^2})$ patří do $\mathcal{S}$ a platí $\mathcal{F}(T) = \alpha$.

Důkaz. První část tvrzení (hladkost, chování v nekonečnu) je pouze technická a nebudeme její detaily probírat. Pokud platí slabší podmínka ve větě, patří $\tilde{T} := e^{-\sigma||x||^2}T$ do $\mathcal{S}'$.

Podle definice

$$\mathcal{F}(T)(\varphi) = T(\mathcal{F}(\varphi)) = [e^{-\sigma||x||^2}\tilde{T}](\mathcal{F}(\varphi)) = [\tilde{T}_x](\mathcal{F}(e^{-\sigma||x||^2}\varphi) =$$

$$= [\tilde{T}_x \otimes 1_\xi](e^{-\sigma||x||^2}\varphi(\xi)e^{-2\pi i(x,\xi)}) = 1_\xi(\tilde{T}_x(e^{-\sigma||x||^2}\varphi(\xi)e^{-2\pi i(x,\xi)}) =$$

$$= \int \varphi(\xi)\alpha(\xi)\, d\xi.$$

---

5. přednáška

1.9.6 Paley-Wienerova věta

V předchozí části jsme si rozšířili Fourierovu transformaci na temperované distribuce. Nyní bychom chtěli definovat Fourierův obraz i pro distribuce z většího prostoru $\mathcal{D}'$. Abychom toto mohli udělat, musíme si nejdřív rozmyslet, jak vypadá obraz prostoru $\mathcal{D}$ při Fourierově transformaci.

Z vlastností Fourierovy transformaace víme, že rychlost klesání vzoru se při této transformaci projeví hladkostí obrazu, a naopak stupeň hladkosti vzoru má vliv na rychlost klesání v nekonečnu příslušného obrazu. Můžeme tedy očekávat, že funkce s kompaktním nosičem budou mít obzvlášť pěknou hladkost. Opravdu, obrazy funkcí s kompaktním nosičem budou reálně analytické na celé přímce. Takovéto funkce mají holomorfní prodloužení na celou komplexní rovinu (funkce holomorfní v celém $\mathbb{C}$ se obvykle nazývají funkce celé). V této situaci bude přirozenější uvažovat místo prostoru $\mathcal{D}$ prostor $\mathcal{D}_c$ všech funkcí $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s komplexními hodnotami, jejichž reálná i imaginární část patří do $\mathcal{D}$. Ne každá celá funkce bude ale ležet v $\mathcal{F}(\mathcal{D}_c)$. Přesný popis obrazu je předmětem následujícího tvrzení.

Definice 1.9.20 *Označme $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\mathbb{C})$ prostor funkcí holomorfních na $\mathbb{C}$ a označme $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definujme prostor Z takto:*

$$Z = \left\{ F(p) \in \mathcal{H} | \exists a > 0\, \forall q, l \in \mathbb{N}_0\, \exists c > 0\, \forall p \in \mathbb{C}\ (1 + |p|)^q |F^{(l)}(p)| \leqslant c e^{a|\operatorname{Im} p\,|} \right\}.$$

Poznámka.

(1) Všimněte si, že konstanta a je stejná pro všechny $l, q \in \mathbb{N}_0$, zatímco konstanta $c = c_{q,l}$ na l, q závisí.

(2) Není těžké si rozmyslet, že podmínka v definici prostoru Z je ekvivalentní analogické podmínce, kde příslušná nerovnost je nahrazena nerovností $|p|^q |F(p)| \leqslant c_q e^{a|\operatorname{Im} p\,|}$.

(3) Kterákoliv z těchto ekvivalentních podmínek říká, že na kterékoliv svislé přímce $\operatorname{Re} p = const.$ v komplexní rovině roste F v nekonečnu nejvýše jako exponenciela, zatímco na kterékoliv vodorovné přímce $\operatorname{Im} p = const.$patří příslušná funkce reálné proměnné do Schwartzova prostoru $\mathcal{S}_c$ (hodnoty funkce jsou v $\mathbb{C}$).

(4) Je tedy zřejmě, že při výpočtu křivkového integrálu $F(p)dp$ podél obvodu obdélníka

$$O_R := \{p \in \mathbb{C} | |\operatorname{Re}\, p\,| \leqslant R; |\operatorname{Im}\, p\,| \in (a, b)\}$$

budou integrály přes svislé úsečky konvergovat k nule při $R \to +\infty$. Integrály $F(p)dp$ přes vodorovné přímky tedy existují a nezávisí na umístění přímky (tj. na volbě hodnoty $\mathrm{Im}\, p$).

Věta 1.9.21 (Paley-Wienerova věta) *Zobrazení $\mathcal{F}$ je prosté na $\mathcal{D}$ a zobrazuje tento prostor na Z.*

Důkaz.

(1) Je-li f funkce hladká, s kompaktním nosičem, pak existuje kladné číslo a', pro které platí $supp\, f \subset (-a', a')$. Integrál

$$\mathcal{F}(f)(p) = \int_{-a'}^{a'} f(x) e^{-2\pi i x p} dx$$

existuje pro každé $p \in \mathbb{C}$ a zřejmě je to funkce celá (stačí derivovat podle parametru p a ověřit Cauchy-Riemannovy podmínky). Protože $|e^{2\pi i\, xp}| \leqslant e^{a|\mathrm{Im}\, p|}; a = 2\pi a'$ dostaneme pro $c = \int_{-a'}^{a'} |f(x)| dx$

$$|\mathcal{F}(f)(p)| \leqslant c e^{a|\mathrm{Im}\, p|}.$$

Pro libovolné $q, l \in \mathbb{N}_0$ patří funkce $x^l f^{(q)}$ opět do $\mathcal{D}_c$, tedy stejnou úvahou jako předtím dostaneme odhad

$$|\mathcal{F}(x^l f^{(q)})(p)| = |2\pi|^{q-l} |p|^q |(\mathcal{F}(f))^{(l)}(p)| \leqslant c' e^{a|\mathrm{Im}\, p|},$$

ze kterého plyne, že $\mathcal{F}(f)$ patří do Z.

(2) Naopak, je-li $F \in Z$, chceme ukázat, že existuje $f \in \mathcal{D}_c$, pro které $\mathcal{F}(f) = F$. Označme si reálnou a imginární část čísla p takto: $p = u + i\, v$. Zúžení funkce F na reálnou osu patří do prostoru $\mathcal{S}_c$, tedy pro ní existuje vzor v tomto prostoru při Fourierově transformaci. Tento vzor je dán vztahem

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} F(u) e^{2\pi i\, x\, u} du,$$

Podstatné je, že (podle Cauchyovy věty) tento vzor můžeme vypočítat také jako integrál přes jakoukoliv vodorovnou přímku. Zvolme hodnotu $\alpha \in \mathbb{R}$ libovolně, pak

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_\alpha} F(p) e^{2\pi i\, x\, p} dp,$$

kde $\mathbb{R}_\alpha$ je vodorovná přímka $\mathrm{Im}\, p = \alpha$. Podle poznámky za definicí prostoru Z, funkce f nezávisí na volbě čísla α.

Jediné tvrzení, které máme dokázat je fakt, že $supp\, f$ je kompaktní. Ukažme, že $supp\, f \subset (-a/2\pi, a/2\pi)$, kde a je konstanta pro F v definici prostoru Z.

Uvažujme nejprve čísla $x > a/2\pi$, tj. čísla, pro které platí $2\pi x > a$. Pak pro libovolné $\alpha > 0$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\,(u+i\,\alpha)\,x} F(u + i\,\alpha) du.$$

a tedy

$$|f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\alpha x} |F(u + i\,\alpha)| du \leqslant c e^{-(2\pi x - a)\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1 + |u|^2}.$$

Pro $\alpha \to +\infty$ tedy pravá strana konverguje k nule, a tedy $f(x) = 0$ pro $x > a/2\pi$.

Přesně stejnou úvahou (tentokrát pro $\alpha \to -\infty$) se dokáže, že $f(x) = 0$ pro $x < -a/2\pi$.

Poznámka. Inversní Fourierova transformace $\mathcal{F}^{-1}$ je na Schwarzově prostoru dána transformací $\mathcal{F}^{-}$, zadané předpisem

$$\mathcal{F}^{-}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i (x,\xi)} dx,$$

Stejným způsobem jako ve větě se dokáže, že $\mathcal{F}^{-} = \mathcal{F}^{-1}$ zobrazuje prostě $\mathcal{D}_c$ na Z. Je tedy zřejmé, že $\mathcal{F}$ zobrazuje naopak prostě Z na $\mathcal{D}_c$.

Definice 1.9.22 *Na prostoru Z budeme definovat topologii tím, že ji pomocí Fourierovy transformace přeneseme definici konvergence posloupnosti z prostoru $\mathcal{D}$. Řekneme, že $F_m \to F$ v prostoru Z, pokud $\mathcal{F}^{-1}(F_n) \to \mathcal{F}^{-1}(F)$ v prostoru $\mathcal{D}_c$.*

Dá se ukázat, že je možné charakterizovat konvergenci v prostoru Z násladujícím způsobem. Pro $p \in \mathbb{C}_n$ označíme $|p|^2 = \sum_i |z_i|^2$.

Tvrzení. Platí, že $F_m \to F$ v prostoru Z právě když $\exists a > 0 \forall q \in \mathbb{N}_0, \alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ $\exists c > 0$ takové, že $\forall m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{C}$ platí

$$(1 + |p|)^q |F_m^{(l)}(p)| \leqslant c\, e^{a|\mathrm{Im}\, p|}$$

a navíc F_m konvergují k F stejnoměrně na každém kompaktním intervalu v $\mathbb{R}$.

Poznámka.

(1) Všimněte si, že úvodní podmínka v předchozím tvrzení znamená, že Fourierovy vzory f_m, sestrojené v důkazu Paley-Wienerovy věty, mají stejný kompaktní nosič. Podmínka stejnoměrné konvergence pak odpovídá podmínce stejnoměrné konvergence v prostoru $\mathcal{D}$ pro Fourierovy vzory. Je tedy vidět, že opravdu si konvergence na $\mathcal{D}$ a Z odpovídají.

(1) Holomorfní funkce víc komplexních proměnných jsou funkce, které jsou holomorfní v každé jednotlivé proměnné, pokud ostatní proměnné zafixujeme. Z toho ihned plyne, že v každé proměnné zvlášť splňují takovéto

funkce příslušné Cauchy-Riemannovy rovnice. Teorie funkcí více komplexních proměnných byla vytvořena po druhé světové válce, je to velmi rozsáhlá, elegantní a důležitá součást matematiky s bohatými aplikacemi v částicové fyzice. Pro naše účely stačí znát jen definici a vlastnosti analogické funkcím jedné komplexní proměnné.

(2) Zcela obdobně je možné definovat analogii výše popsané situace pro víc proměnných. Pro parciální derivace budeme používat již dříve zavedené označení ∂^α, kde $\alpha = (\alpha_1, \dots \lambda_n)$. Obrazem prostoru $\mathcal{D}_c(\mathbb{R}^n)$ při Fourierově transformaci bude prostor Z definovaný obdobně:

$$Z = \left\{ F(p) \in \mathcal{H} | \exists a > 0 \, \forall q, \alpha \, \exists c > 0 \, \forall p \in \mathbb{C} \; (1 + |p|)^q |\partial^\alpha F(p)| \leqslant c e^{a|\mathrm{Im}\, p|} \right\}.$$

(3) Všechny tvrzení, které platí pro Fourierovu transformaci na $\mathcal{S}$ zůstávají v platnosti i pro Fourierovu transformaci na $\mathcal{D}_c$, protože (kromě rozšíření na funkce s komplexními hodnotami) jsou to prostory obsažené v $\mathcal{S}$.

1.9.7 Duál k prostoru Z.

Definice 1.9.23 *Prostor Z' definujeme jako prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na prostoru Z.*

Příklad 1.9.24 *(1) Prostor Z může být považován za podprostor (komplexifikace) prostoru $\mathcal{S}$ (stačí zúžit funkci $f \in Z$ na reálnou osu v $\mathbb{C}$). je tedy snadné vidět, že $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'_c$.*

Zároveň také všechny regulární funkcionály (tj. funkcionály zadané integrací vzhledem k (lokálně) integrovatelné funkci) v $\mathcal{D}'$ jsou příklady regulárních funkcionálů v $\mathcal{D}'_c$.

(2) V naší speciální situaci je možné pojem regulární distribuce ještě zobecnit a zavést pojem tzv. analytického funkcionálu. Předpokládejme, že funkce g je holomorfní v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a že γ je křivka v Ω (pokud je tato křivka neomezená, např. to může být parametricky zadaná přímka, je třeba přidat vhodné předpoklady zaručující konvergenci uvažovaných integrálů). Pak definujeme funkcionál $T = T_{g,\gamma}$ předpisem

$$(T, \phi) := \int_\gamma g(p)\phi(p)dz, \; \phi \in Z.$$

Vzhledem k tomu, že integrujeme holomorfní funkci, je jasné, že výsledek integrace nebude záviset na spojité deformaci integračního oboru v oblasti Ω. V typické situaci, kdy funkce g je holomorfní např. v celém $\mathbb{C}$ s výjimkou několika singulárních bodů, je zřejmě jen konečný počet křivek, které zadávají navzájem různé analytické funkcionály.

Je-li např. $g = \frac{1}{2\pi i}(z - z_0), z_0 \in \mathbb{C}$ a je-li např. γ kružnice se středem z_0 a kladným poloměrem, pak $T_{g,\gamma} = \delta_{z_0}$ (stačí použít Cauchyovu integrální formuli).

(4) Další funkcionály lze získat derivováním funkcionálů existujících. Jako vždy předtím definujeme pro $T \in Z'$

$$(T', \phi) := (-T, \phi').$$

(derivace ϕ' zde znamená komplexní derivaci holomorfní funkce).

(5) Zvolme $g(z) = \frac{1}{z}$ a za $\gamma_\pm$ zvolme dvě vodorovné přímky v $\mathbb{C}$, ta se znaménkem $+$ v horní polorovině a ta se znaménkem $-$ v polorovině dolní (orientace na přímkách je ve směru rostoucí reálné části).

Označme $\frac{1}{x \pm i\,0}$ analytické funkcionály zadané dvojicemi $(g, \gamma_\pm)$ (všimněte si, že hodnota těchto funkcionálů nezávisí na poloze přímek v horní, resp. dolní polorovině).

Pak zřejmě

$$\frac{1}{x - i\,0} - \frac{1}{x + i\,0} = 2\pi i\,\delta.$$

Geometricky je tento vzorec zřejmý, místo integrace po spodní přímce doprava a horní doleva deformujeme integrační obor do kladně orientované kružnice kolem počátku.

Také další z tradičních vztahů lze dostat ihned geometricky. Integraci podél vodorovné přímky v definici distribuce $\frac{1}{x+i\,0}$ můžeme nahradit integrací podél křivky γ' zadané následujícím způsobem. Nejdříve budeme integrovat přes interval $(-\infty, -\varepsilon\rangle$, pak přes záporně orientovanou polokružnici z čísla $-\varepsilon$ do čísla ε, a pak přes interval $\langle\varepsilon, \infty)$ (nakreslete si obrázek!). Limita integrálu (pro $\varepsilon \to 0^+$) přes součet první a třetí křivky je právě hodnota distribuce $1/x$ na testovací funkci, zatímco limita integrálu přes prostřední křivku je $-i\pi\varphi(0)$, tedy hodnota distribuce $-i\pi\delta$ na testovací funkci. Z toho ihned plyne vzorec

$$\frac{1}{x + i\,0} = \frac{1}{x} - i\pi\,\delta.$$

Podobně dostaneme

$$\frac{1}{x - i\,0} = \frac{1}{x} + i\pi\,\delta.$$

Součtem těchto vzorců dostaneme

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x - i\,0} + \frac{1}{x + i\,0}\right].$$

(6) Připomeňme si definici distribucí x^{-k} pro $k \in \mathbb{N}$. Jsou definovány vztahem

$$\frac{1}{x^k} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x + i\,0)^k} + \frac{1}{(x - i\,0)^k}\right].$$

Pomocí residuové věty ukažte, že

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x + i\,0)^k} - \frac{1}{(x - i\,0)^k}\right] = 2\pi i\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}.$$

Z toho odvoďte zobecněný Sochockého vzorec

$$\frac{1}{(x \pm i\,0)^k} = \frac{1}{x_k} \pm 2\pi i \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}.$$

(7) Rozmyslete si, že platí následující ekvivalentní definice distribucí $x^{-k}, k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{x^{2k}} = \lim_{\lambda \to -k} |x|^{\lambda}; \ \frac{1}{x^{2k+1}} = \lim_{\lambda \to -k} sgn\, x \cdot |x|^{\lambda}.$$

Pomocí této definice ukažte, že hodnota těchto distribucí na testovací funkci φ je dána vzorcem

$$x^{-2k}(\varphi) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2k}} \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}\varphi(2k-2)(0)\right]\right\} dx,$$

resp.

$$x^{-2k-1}(\varphi) =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2k+1}} \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2\left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\varphi(2k-1)(0)\right]\right\} dx.$$

Pro $k = 1$ dostanem znovu tvrzení, že naše distribuce $\frac{1}{x}$ je totožná s klasickou hlavní hodnotou v.p. $1/x$.

1.9.8 Fourierova transformace distribucí z prostorů $\mathcal{D}'$, resp Z'.

Nyní bychom chtěli rozšířit Fourierovu transformaci na distribuce, které jsou prvky prostoru $\mathcal{D}'_c$. Aby definice souhlasila pro případ hladkých rychle klesajících funkcí, resp. pro temperovan0 distribuce, chceme použít obvyklý předpis

$$(\mathcal{F}(T), \phi) = (T, \mathcal{F}(\phi)),\ \phi \in Z.$$

Definice 1.9.25 *Fourierova transformace $\mathcal{F}(T)$ na prostorech $\mathcal{D}'_c$, resp. Z' je definována pomocí vztahu*

$$(\mathcal{F}(T), \phi) = (T, \mathcal{F}(\phi)),$$

kde $T \in \mathcal{D}'_c$, $\varphi \in Z$, resp. do $T \in Z'$, $\varphi \in \mathcal{D}_c$.

Příklady.
(1) Už víme, že $\mathcal{F}(\delta) = 1$, a $\mathcal{F}(1) = \delta$.
(2) Zcela obecně, pokud je funkcionál T nejen v $\mathcal{D}'_c$, ale dokonce patří do (komplexifikace) prostoru $\mathcal{S}'$, pak jeho obraz patří také do $\mathcal{S}'$ (tj. lze jej definovat pro libovolné testovací funkce z $\mathcal{S}$ a je roven obrazu definovanému

dříve pro prvky z $\mathcal{S}'$ (komplexně lineárně rozšířenému na komplexní lineární kombinace). To platí například pro distribuce s kompaktním nosičem, distribucí s nejvýše polynomiálním růstem a všech jejich derivací.
(3) Nechť $a \in \mathbb{C}$ je dané komplexní číslo. Pak $\mathcal{F}(e^{2\pi i\,a\,x}) = \delta_{x-a} = \delta_a$. To plyne z toho, že i pro tyto obecnější distribuce pořád platí, že Fourierova transformace převádí násobení funkcí $e^{2\pi i\,a\,x}$) na složení s posunutím. Je to možné také ukázat přímo následujícím způsobem:

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i\,a\,x}) = \mathcal{F}(\sum_0^\infty \frac{(2\pi i a)^n}{n!}x^n) = \sum_0^\infty \frac{(2\pi i a)^n}{n!}\mathcal{F}(x^n) =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(2\pi i a)^n}{n!}\frac{1}{(-2\pi i)^n}\delta^{(n)} = \sum_0^\infty \frac{(-a)^n}{n!}\delta^{(n)}.$$

Ale pro $\phi \in Z$,

$$\left(\sum_0^\infty \frac{(-a)^n}{n!}\delta^{(n)}\right)(\phi) = \sum_0^\infty \frac{a^n\phi^{(n)}(0)}{n!} = \phi(a).$$

Tedy

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i\,a\,x}) = \delta_a.$$

Všimněte si, že pro a reálné je funkce $e^{2\pi i\,a\,x}$ omezená a je to regulární distribuce v $\mathcal{S}'$, zatímco pro $a \in \mathbb{C}, a \notin \mathbb{R}$ má tato funkce exponenciální růst v nekonečnu a je to tedy pouze element prostoru $\mathcal{D}'_c$. Pro tato a je obrazem delta funkce soustředěná v bodě komplexní roviny mimo reálnou osu a tak zřejmě již nepatří do $\mathcal{S}'$.
(4) Pomocí obrazů exponenciel lze snadno popsat obrazy trigonometrických a hyperbolických funkcí (zde je opět $a \in \mathbb{C}$):

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi a\,x)) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a}); \mathcal{F}(\sin(2\pi a\,x)) = \frac{1}{2i}(\delta_a - \delta_{-a});$$

$$\mathcal{F}(sh(2\pi a\,x)) = \frac{1}{2}(\delta_{-ia} - \delta_{ia}); \mathcal{F}(ch(2\pi a\,x)) = \frac{1}{2}(\delta_{ia} + \delta_{-ia});$$

(5) Již dříve jste si spočítali, že

$$\mathcal{F}(x_+^\lambda) = e^{-i(\lambda+1)\pi/2}(2\pi)^{-\lambda-1}\Gamma(\lambda+1)(\xi - i\,0)^{-\lambda-1} = \Gamma(\lambda+1)(2\pi i)^{-\lambda-1}(\xi - i\,0)^{-\lambda-1},$$

a po normalizaci

$$\mathcal{F}\left(\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = (2\pi i)^{-\lambda-1}(\xi - i\,0)^{-\lambda-1}.$$

Vlevo i vpravo celé funkce a tak tato formule platí pro libovolná λ komplexní. V těchto vztazích se používá hlavní hodnota obecné mocniny.

Alternativní verze je

$$\mathcal{F}\left(\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = \left[e^{i(\lambda+1)\pi/2}\xi_+^{-\lambda-1} - e^{-i(\lambda+1)\pi/2}\xi_-^{-\lambda-1}\right].$$

Specielně pro $\lambda = n = 0, 1, 2, \ldots$, dostaneme

$$\mathcal{F}(x_+^n) = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}}[\xi - i0]^{-n-1},$$

Fourierův obraz Heavisideovy funkce je tedy

$$\mathcal{F}(x_+^0) = \mathcal{F}(\theta(x)) = \frac{1}{2\pi i}[\xi - i0]^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\xi^{-1} + \frac{1}{2}\delta(\xi),$$

(6) Spočítejte si, že platí obdobný vztah

$$\mathcal{F}\left(\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = (2\pi i)^{-\lambda-1}(\xi + i\,0)^{-\lambda-1}.$$

Pomocí inverzní Fourierovy transformace ověřte, že

$$\mathcal{F}\left(x \pm i0)^\lambda\right) = (2\pi i)^{-\lambda}(\chi_\pm)^{-\lambda-1}.$$

Lineární kombinací tedy spočítejte, že pro k přirozené

$$\mathcal{F}(x^{-1-k}) = \frac{1}{2}\left[(2\pi)^{k+1}\left(e^{\frac{-i\pi(k+1)}{2}}\frac{\xi_+^k}{k!} + e^{\frac{i\pi(k+1)}{2}}\frac{\xi_-^k}{k!}\right)\right]$$

$$= \pi(2\pi)^k i^{-1-k}(sgn\,\xi)\frac{\xi^k}{k!}.$$

Jako speciální případ tedy

$$\mathcal{F}(x^{-1}) = -i\pi\,sgn\,\xi.$$

(7)

Ze známých Fourierových obrazů lze počítat další pomocí základních vlastností. Víme, jak se chová Fourierova transformace při derivaci, násobením polynomem a při posunutí.

Spočítejte např. Fourierův obraz distribuce $\frac{1}{x-a}, a \in \mathbb{C}$, nebo $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}]$.

---

6. přednáška

1.10 Fourierovy obrazy distribucí ve více proměnných.

V této části se budeme věnovat podrobněji zajímavým distribucím ve více proměnných a jejich Fourierovým obrazům. Podobně jako v případě jedné proměnné, začneme s distribucemi, které jsou homogenní. V případě více proměnných je mnoho typů takovýchto distribucí.

Další velmi význačný typ distribucí jsou rotačně symetrické distribuce. Regulární rotačně symetrické distribuce jsou distirbuce, které jsou generovány funkcemi, které závisí jen na proměnné r.

Na úvod si zavedeme třídu rotačně symetrických homogenních distribucí.

1.10.1 Distribuce $r^\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$.

Věta 1.10.1 *Definujme distribuci $r^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ takto:*

Pro případ $\lambda \in \mathbb{C}, Re\ \lambda > -n$ je tato distribuce regulární, je representována pomocí lokálně integrovatelné funkce r^λ, $r^2 = |x|^2 = \sum_i x_i^2$ na $\mathbb{R}^n$ a holomorfně závisí na parametru λ. Pomocí analytického pokračování lze tuto distribuci definovat jako meromorfní funkcí s hodnotami v $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, která má jednonásobné póly v bodech $\lambda = \{-n, -n-2, n-4, \ldots\}$.

Residuum v pólu $\lambda = -n$ je dáno formulí

$$\operatorname{res}_{\lambda=-n} |x|^\lambda = \kappa_n \delta_0(x),$$

kde κ_n označuje povrch sféry $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Residuum v pólu $\lambda = -n-2k, k \in \mathbb{N}$ je dáno vztahem

$$\operatorname{res}_{\lambda=-n-2k} r^\lambda(\varphi) = \frac{\overline{\varphi}^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{\delta^{(2k)}(\overline{\varphi})}{(2k)!},$$

kde $\overline{\phi}(r) := \int_{S^{n-1}} \varphi(r\omega) dS$.

Důkaz.

Pro $\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > -n$ a pro testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dostaneme ve sférických souřadnicích výraz

$$\langle |x|^\lambda, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^\lambda \varphi(x) dx = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} \left(\int_{S^{n-1}} \varphi(r\omega) dS_\omega \right) dr =$$
$$= \langle r^{\lambda+n-1}, \overline{\varphi}(r) \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

kde $\overline{\varphi}(r) = \int_{S^{n-1}} \varphi(r\omega) dS$ a kde integrál je plošný integrál prvního druhu vzhledem k proměnné ω přes jednotkovou sféru S^{n-1} v $\mathbb{R}^n$.

Z vlastností testovací φ je vidět snadno, že funkce $\overline{\varphi}(r)$ je hladká pro $r > 0$ a má kompaktní nosič. Chování této funkce v okolí nuly si zaslouží trochu pozornosti. Pro testovací funkcí φ zřejmě platí

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_j \partial_j \varphi(0) x_j + \ldots + \sum_{j_1,\ldots,j_k} \partial_{j_1,\ldots,j_k} \varphi(0) x_{j_1} \ldots x_{j_k} + \varphi'(x),$$

kde $\varphi' = o(r^k)$ v okolí nuly. Protože integrál přes S^{n-1} z liché funkce je nulový, je funkce $\bar{\varphi}(r)$ sudá a platí

$$\overline{\varphi}(r) = \kappa_n[\varphi(0) + a_2 r^2 + \ldots + a_{2k} r^{2k} + o(r^{2k})],$$

kde a_{2j} jsou vhodná čísla. Je tedy možné funkci $\overline{\varphi}(r)$ rozšířit sudě na celé $\mathbb{R}$ a výsledkem bude funkce z $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, která má všechny derivace lichého řádu v nule rovny nule.

Dá se také snadno rozmyslet, že pokud $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pak $\overline{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ a že distribuce r^λ patří ve skutečnosti do $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Dostali jsme tedy, že

$$r^\lambda(\varphi) = r_+^{n+\lambda-1}(\overline{\varphi}(r)).$$

Tvrzení věty nyní plyne z vlastností funkce x_+^λ. Póly v $n - k$, kde k je liché přirozené číslo jsou odstranitelné singularity, protože je distribuce x_+^λ použita na testovací funkci, která má derivace lichého řádu v nule rovny nule. Vztah pro ostatní póly plyne z vlastností residuí distribuce x_+^λ. □

Existuje alternativní a přímý způsob, jak definovat meromorfní prodloužení distribucí r^λ, podobný tomu, který jsme používali v jedné proměnné. Jeho použití zároveň vede ke vztahu, jak vyjádřit hodnoty residuí distribuce v jejích pólech přímo pomocí testovací funkce φ (místo vyjádření pomocí funkce $\bar{\varphi}$). V jedné proměnné jsme používali distributivní derivaci regulární distribuce x_+^λ k analytickému rozšíření na větší poloprostor v λ. Ve víc proměnných místo derivace budeme používat Laplaceův operátor Δ.

Věta 1.10.2 *(Pizzettiova formule) Regulární distribuci r^λ lze meromorfně prodloužit opakovaným použitím vztahu*

$$r^\lambda = \frac{\Delta(r^{\lambda+2})}{(\lambda+2)(\lambda+n)}.$$

Residuum v bodě $\lambda = -n - 2k$, $k \in \mathbb{N}$ lze vyjádřit takto:

$$\operatorname{res}_{\lambda=-n-2k} r^\lambda = \frac{\kappa_n \Delta^k(\delta)}{2^k\, k!\, n(n+2)\ldots(n+2k-2)}.$$

Tedy pro $k \in \mathbb{N}$

$$\overline{\varphi}^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!\kappa_n \Delta^k(\varphi)(0)}{2^k\, k!\, n(n+2)\ldots(n+2k-2)}.$$

Důkaz.

V oboru $\operatorname{Re}\lambda > -n$ se formule

$$\Delta(r^{\lambda+2})(\varphi) = (\lambda+2)\lambda+n)r^\lambda(\varphi).$$

odvodí přímou derivací příslušné funkce $r^{\lambda+2}$ za integračním znamením. Tento vztah je možné pak vzít za definici distribuce r^λ v oboru $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-2, \lambda \neq -n$. Opakováním tohoto postupu dostaneme holomorfní rozšíření distribuce r^λ na oblast $\mathbb{C} - \{-n, -n-2, -n-4, \ldots\}$.

Pro výpočet residua použijeme předchozí větu a vztah

$$r^\lambda = \frac{\Delta^k r^{\lambda+2k}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+2k)(\lambda+n)\lambda+n+2)\ldots(\lambda+n+2k-2)}.$$

Residuum v bodě $\lambda = -n-2k$ distribuce r^λ spočítáme jako residuum pravé strany v tomto bodě. Jmenovatel se v tomto bodě nerovná nule, stačí tedy do něj dosadit a vynásobit ho residuem čitatele. Ale pro libovolnou testovací funkci platí

$$\Delta^k(r^{\lambda+2k})(\varphi) = r^{\lambda+2k}(\Delta^k(\varphi)),$$

tedy s použitím předchozí věty dostaneme, že residuum funkce $r^\lambda(\varphi)$ v bodě $\lambda = -n-2k$ se rovná

$$\frac{\kappa_n \Delta^k(\varphi)(0)}{(-2k-n+2)\ldots(-n)(-2k)\ldots(-2)},$$

a tvrzení věty je již snadným důsledkem.

Všimněte si, že jsme dostali explicitní vzorce pro koeficienty v Taylorově rozvoji funkce $\overline{\varphi}(r)$, které jsme dříve označili symboly a_{2k}.

□

Podobně jako v případě jedné proměnné je možné meromorfní funkci r^λ s hodnotami v distribucích normalizovat tak, aby byla holomorfní v celé komplexní rovině. Vhodná normalizace se dostane vydělením funkcí

$$r^\lambda(e^{-r^2}) = \int_0^\infty r^\lambda\, e^{-r^2} r^{n-1} dr\, dS = \frac{\kappa_n}{2}\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right).$$

Věta 1.10.3 *Normalizované distribuce $\eta^\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ jsou definovány vztahem*

$$\eta^\lambda = \frac{2r^\lambda}{\kappa_n \Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}.$$

Tyto distribuce jsou definovány pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$ a jejich hodnoty v bodech $\lambda = -n-2k$ se rovnají

$$\eta^{-n-2k} = (-1)^k \frac{\Delta^k \delta}{2^k\, k!\, n \ldots (n+2k-2)}.$$

Specielně platí

$$\eta^{-n} = \frac{2r^\lambda}{\kappa_n \Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}|_{|\lambda=-n} = \delta.$$

1.10.2 Fourierova transformace regulárních radiálních distribucí.

V této části si spočítáme Fourierovu transformaci ve víc proměnných pro regulární distribuce, zadané radiálními funkcemi. Předpokládejme tedy, že $f(r)$ je radiální funkce. Přesněji řečeno, nechť funkce $f(r)$ je definována na $< 0, +\infty)$ a uvažujeme funkci $F(x)$ na $\mathbb{R}^n$ dano předpisem $F(x) = f(|x|), x \in \mathbb{R}^n$. Je-li F lokálně integrovatelná na $\mathbb{R}^n$, pak určuje regulární distribuci, kterou označíme T_f nebo $f(r)$.

Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dostaneme

$$T_f(\varphi) = \int_0^\infty f(r) \left(\int_{S^{n-1}} \varphi(r\omega) dS_\omega \right) dr.$$

To nás vede k definici tzv. plošné míry ν_r.

Definice 1.10.4 *Distribuci $\nu_r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), r > 0$ definujeme předpisem*

$$\nu_r(\varphi) = \int_{S^{n-1}} \varphi(r\omega) dS_\omega.$$

Tato distribuce má kompaktní nosič a má řád nula. Často se jí říká plošná míra (název míra používají matematikové pro distribuce řádu nula).

Pro výpočet Fourierových obrazů regulárních radiálních distribucí budeme potřebovat Fourierovy obrazy plošných měr.

Věta 1.10.5 *(1) pro $n = 3$ platí*

$$\mathcal{F}(\nu_r)(\rho) = \frac{2r}{\rho} \sin 2\pi\, r\, \rho;$$

(2) pro libovolné n platí

$$\mathcal{F}(\nu_r)(\rho) = 2\pi\, r \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{m}{2}-1} J_{\frac{m}{2}-1}(2\pi\, r\, \rho),\ \ \rho = |\xi|;$$

(3) Je-li f radiální, lokálně integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^n$, pak její Fourierova transformace je také radiální a platí

$$\mathcal{F}(f)(\rho) = \int_0^\infty f(r)\mathcal{F}(\nu_r)(\rho)\, d\, r.$$

*Důkaz.*Viz Čihák a kol., str. 50 - 54.

□

Příklad 1.10.6 *Fourierova transformace radiální funkce $\frac{1}{4\pi^2\xi^2+k^2}, k > 0$ je rovna $\frac{e^{-kr}}{4\pi\, r}$. (Viz skripta str. 51).*

7. přednáška

1.11 Skládání distribuce s hladkým zobrazením, substituce

Již dříve jsem se naučili, jak je definována substituce pro distribuce, tj. složení distribuce s difeomorfismem. V jedné proměnné jsme si definovali řadu užitečných distribucí a chtěli bychom je pomocí vhodné substituce přenést do více proměnných. Nyní si tedy budeme definovat složení distribuce v jedné proměnné s funkcí víc proměnných. Podobnou definici lze zavést obecněji i pro substituci pomocí hladkého regulárního zobrazení z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$. Pro zájemce je toto zobecnění zavedeno v Appendixu.

Jsou dva jednoduché způsoby, jak příslušnou složenou distribuci definovat. První je založen na faktu, že prostor $\mathcal{D}$ testovacích funkcí je hustý v prostoru $\mathcal{D}'$ distribucí. Pro testovací funkce není problémem definovat složenou funkci a tuto definici lze snadno pomocí limitního přechodu rozšířit na případ distribucí. Tato definice je zároveň velmi pohodlná, chceme-li dokázat, že běžné vlastnosti skládání zobrazení se přenesou na tento obecnější typ složení.

Druhá možnost definice je použít postup, který jsme od začátku používali pro definice operací na distribucích. Při něm jsme nejprve rozebrali příslušný pojem pro případ regulární distribuce (tj. distribuce, representované obyčejnou funkcí), příslušnou operaci jsme převedli vhodnou úpravou na testovací funkci. To pak vedlo k návodu, jak definovat příslušnou operaci pro případ distribucí. V obou postupech zřejmě platilo, že nově definovaná operace splývá s operací standardní pro regulární distribuce (representované obyčejnými funkcemi). Tento druhý způsob může v konkrétních případech pomoci získat silnější vlastnosti pro definované distribuce.

Věta 1.11.1 *Předpokládejme, že je dána hladká funkce $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pro které platí, že její gradient je různý od nuly ve všech bodech oblasti Om.*

Pak existuje jediné spojité lineární zobrazení $g^* : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, pro které platí

$$g^*(u) = u \circ h, \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\Omega}).$$

Takto definovanou distribuci $g^*(T)$ budeme značit symbolem $T(g(x))$.

Důkaz
(i) Jednoznačnost. Rozšířené zobrazení g^* je podle definice spojité, tedy jednoznačnost plyne z hustoty prostoru testovacích funkcí v prostoru distribucí.
(ii) Existence.

Pro důkaz existence je třeba zobrazení g^* zkonstruovat. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že existují funkce $g_2, \ldots, g_n$ takové, že zobrazení $G = (g_1, \ldots, g_n)$, $g_1 = g$ je difeomorfismus Ω na $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$. (Lokálně je toto možné udělat, protože gradient funkce g je v každém bodě Ω nenulový. Pokud to není pravda globálně, bylo by třeba použít rozkladu jednotky.)

Označme symbolem $H = G^{-1}$ inverzi k H na $\tilde{\Omega}$ a uvažujme testovací funkcí Φ na Ω. Pak pomocí substituce $y = H(x)$ dostaneme

$$\int_{\Omega} g^*(u)\Phi dx = \int_{\Omega} u(H(x))\Phi(x)dx =$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} u(y')\Phi(H^{-1}(y))|\det J(H^{-1})|(y)dy \equiv \langle u \otimes 1, \Psi\rangle,$$

kde $\Psi(y) := \Phi(H^{-1}(y))|\det J(H^{-1})|(y)$.

To ukazuje, že pro distribuci $T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ a testovací funkci Φ můžeme definovat distribuci $g^*(T)$ předpisem

$$\langle g^*(T), \Phi\rangle := \langle T \otimes 1, \Psi\rangle.$$

Vzhledem k tomu, že je operace tensorového násobení spojitá, je takto definované zobarazení $g^*(T)$ spojité, navíc je zřejmě lineární jako zobrazení mezi příslušnými prostory distribucí. Tím je existence zobrazení g^* dokázána.

Jako důsledek předchozí věty dostaneme následující užitečná tvrzení, jejich platnost plyne ihned z jejich zřejmé platnosti pro regulární distribuce, spojitosti uvažovaných operací a limitního přechodu.

Důsledek 1.11.2 *(1)* $\frac{\partial}{\partial x_j}(h^*(t)) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial x_j} h^*(\frac{\partial}{\partial x_k}(T), \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega);$
(2) $h^*(gT) = (g \circ h)h^*(T), \forall g \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\Omega});$

Poznámka.

Je-li tedy A nedegenerovaná matice a $A(x) = (Ax, x)$ příslušná kvadratická forma, pak její gradient je různý od nuly všude, kromě počátku. Máme tedy pro příslušná komplexní čísla λ dobře definovány distribuce

$$(A(x))_{\pm}^{\lambda},\ (A(x) \pm i\,0,\ \frac{1}{(A(x))^k}, k \in \mathbb{N}$$

jako distribuce na $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Speciální případ positivně definitní kvadratické formy $A(x) = r^2 = \sum x_i^2$ jsme diskutovali již dříve a ukázali jsme si, že je možné přislušné distribuce $r^\lambda = (A(x))_+^{\lambda/2}$ rozšířit na celé $\mathbb{R}^n$. Chtěli bychom nyní zobecnit toto rozšíření i na další případy. Uděláme to systematicky pro homogenní distribuce.

1.11.1 Homogenní distribuce

Udělejme nejdříve jednoduchý výpočet pro regulární případ. Je-li f integrovatelná funkce, pak řekneme, že je homogenní stupně λ, pokud pro každé kladné číslo t platí $f(tx) = t^\lambda f(x)$. Pro libovolnou testovací funkci φ tedy dostaneme

$$\langle f(x), \frac{1}{t^n}\varphi(\frac{x}{t})\rangle = \langle f(tx), \varphi(x)\rangle = \langle t^\lambda f(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), t^\lambda \varphi(x)\rangle.$$

To vede po jednoduché úpravě k následující definici.

Definice 1.11.3 *Distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n - \{0\})$ se nazývá homogenní stupně λ v $\mathbb{R}^n - \{0\}$, resp. v $\mathbb{R}^n$, pokud platí*

$$T(\varphi) = T(t^{\lambda+n}\varphi(tx)) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\}).$$

pro všechny testovací funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, resp. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Pro lepší porozumění a pro další použití si dokážeme ještě jiné ekvivalentní definice homogennosti.

Lema 1.11.4 *Distribuce T je homogenní stupně λ v $\mathbb{R}^n - \{0\}$ právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek.*
(1) 0značme $X = \sum_i x_i\partial_i$, pak

$$T(X\varphi + (\lambda + n)\varphi) = 0 \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$$

(2) Definujme operátor R_λ z prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ do sebe předpisem

$$[R_\lambda(\psi)](x) = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1}\psi(rx)dx.$$

Pak pro všechny $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, takové, že $R_\lambda(\psi) = 0$ platí

$$T(\psi) = 0.$$

Důkaz.
(1) Derivací podmínky v definici a dosazením $t = 1$ dostaneme postupně pro každou testovací funkci z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$

$$0 = T(x)\left((\lambda + n)t^{\lambda+n-1}\varphi(tx) + t^{\lambda+n}X(\varphi(tx))\right) =$$

$$= T(x)((\lambda + n)\varphi(x) + X(\varphi(x))) = 0.$$

(2) Stačí si rozmyslet, že podmínka pro $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ v tvrzení (2) je právě podmínka pro řešitelnost rovnic $(\lambda+n)\varphi+X(\varphi) = \psi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n-\{0\})$. Eulerův operátor X má v polárních souřadnicích tvar $X = r\frac{\partial}{\partial r}$.

Díky homogennosti lze uvažovat jen $x = \omega$, pro které $||x|| = 1$. Eulerův operátor X má v polárních souřadnicích tvar $X = r\frac{\partial}{\partial r}$, tedy po vynásobení faktorem $r^{\lambda+n-1}$ v těchto souřadnicích dostaneme

$$(\lambda + n)\varphi(r\omega)r^{\lambda+n-1} + X(\varphi(r\omega))r^{\lambda+n-1}) = \psi(r\omega)r^{\lambda+n-1},$$

tedy
$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{\lambda+n}\varphi(r\omega)) = \psi(r\omega)r^{\lambda+n-1}.$$
Podmínka v tvrzení (3) je právě podmínka zaručující pro každé pevné ω, že zvolíme-li primitivní funkci pro φ v proměnné r rovnou nule v okolí nuly, bude rovna nule i v okolí nekonečna. Tedy bude v prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$.

□

Věta 1.11.5 *Je-li $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n - \{0\})$ homogenní distribuce stupně λ, a $\lambda \neq -n, -n-1, -n-2, \ldots$, pak existuje a je jednoznačně určená distribuce $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, která je homogenní stupně λ. Je-li P homogenní polynom, pak $\widetilde{(PT)} = P\tilde{T}$ a $\widetilde{\partial_j T} = \partial_j(\tilde{T})$ pro $\lambda \neq 1-n$. Zobrazení $T \to \tilde{T}$ je spojité.*

Důkaz.
(i) Jednoznačnost.

Rozdíl mezi dvěma homogenními rozšířeními má nosič v počátku a je homogenní stupně, který nepatří do množiny $-n, -n-1, \ldots$ Platí (i když jsme si to nedokazovali), že libovolná distribuce, která má nosič v počátku je lineární kombinace delta funkce a jejích derivací. Ale delta funkce je homogenní stupně $-n$ a její derivace jsou homogenní stupně $-n-k$ pro vhodné přirozené číslo k.
(ii) Existence.

Zvolme pevně funkci $f \in \mathcal{D}((0,\infty))$, pro kterou platí
$$\int_0^\infty \psi(u)\frac{du}{u} = 1.$$
Pro funkci $\psi(x) = f(|x|)$ na $\mathbb{R}^n - \{0\}$ pak platí
$$\int_0^\infty (tx)\frac{dt}{t} = 1.$$
Pak pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je $\psi R_\lambda(\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ a
$$R_\lambda(\psi R_\lambda(\varphi))(x) = \int_0^\infty t^{\lambda+n-1}\psi(tx)R_\lambda(\varphi)(tx)dt =$$
$$= R_\lambda(\varphi)(x)\int_0^\infty \psi(tx)\frac{dt}{t} = R_\lambda(\varphi)(x).$$
Tedy funkce $\psi R_\lambda(\varphi))(x) - \varphi(x)$ patří do $\operatorname{Ker} R_\lambda$. Z toho plyne, že pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ platí $T(\varphi) = T(\psi R_\lambda(\varphi)$.

Hledané rozšíření tedy budeme definovat předpisem
$$\tilde{T}(\varphi) = T(\psi R_\lambda(\varphi)),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$
Lze ověřit, že takto definovaný funkcionál je spojitý, a je to tedy distribuce.

Protože $\widetilde{PT} - P\tilde{T}$ i $\widetilde{\partial_j T} = \partial_j \tilde{T}$ jsou homogenní stupně $\lambda + st\,P$, resp, $\lambda - 1$, a mají nosič v počátku, musí být rovny nule.

□

Kapitola 2

Fundamentální řešení

2.1 Základní pojmy.

2.1.1 Definice a základní vlastnosti.

Definice 2.1.1 *Předpokládejme, že D je diferenciální operátor*

$$D = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha$$

s konstantními koeficienty. Řekneme, že distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ je fundamentální řešení pro příslušný diferenciální operátor, pokud platí

$$D(T) = \delta.$$

Význam fundamentálních řešení je vidět z následujícího tvrzení.

Věta 2.1.2 *Je-li E fundamentální řešení pro diferenciální operátor D, pak pro každou distribuci f s kompaktním nosičem na $\mathbb{R}^n$ platí*

$$E * (D(f)) = f; \; D(E * f) = f.$$

Tedy operace konvoluce s E je oboustranná inverze k operátoru D.

Druhá vlastnost tedy říká, že řešení rovnice s pravou stranou

$$D(T) = f, \; f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

lze napsat ve tvaru $T = E * f$.

Důkaz tvrzení plyne ihned z vlastností derivace konvoluce a z toho, že se Diracova delta funkce chová jako jednotka vůči operaci konvoluce:

$$E * (D(f)) = D(E * f) = (D\,E) * f = \delta * f = f.$$

Při řešení diferenciálních rovnic s pravou stranou v oboru distribucí je užitečné si uvědomit, že jde o lineární rovnice. Obecné řešení se tedy dostane jako součet jednoho partikulárního řešení rovnice s pravou stranou a obecného řešení příslušné homogenní rovnice. Je důležité vědět, co lze říci o řešení homogenních rovnic v oboru distribucí.

Lze dokázat, že distributivní řešení obyčejné diferenciální rovnice už musí být klasické řešení (tj. že příslušná distribuce je regulární a odpovídá funkci, která má tolik spojitých derivací, kolik je řád rovnice). Platí tedy následující tvrzení.

Věta 2.1.3 *Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici řádu k ve tvaru*

$$T^{(k)} + a_{k-1}T^{(k-1)} + \ldots + a_0 T = f,$$

kde koeficienty a_i jsou hladké funkce a f je spojitá na $\mathbb{R}$. Pak každé řešení $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ této rovnice je regulární distribuce, zadaná funkcí, která má k spojitých derivací. Každé distributivní řešení rovnice se spojitou pravou stranou je tedy řešení v klasickém smyslu.

Tuto větu si nebudeme dokazovat. Jako cvičení si rozmyslete následující nejjednodušší případ (více podrobností je možné najít v Appendixu).

Lema 2.1.4 *Je-li $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a platí $T' = 0$, pak T je regulární distribuce zadaná konstantní funkcí.*

Pro některé parciální diferenciální rovnice (ale ne pro všechny typy) podobné věty o regularitě řešení také platí, situace v tomto případě je ale podstatně komplikovanější. Věty o regularitě distributivních řešení jsou podstatnou součástí teorie distribucí, my se jim však v přednášce již nebudeme věnovat.

Fundamentální řešení pro obyčejné diferenciální rovnice se hledají relativně snadno. Vždycky je možné najít alespoň jedno fundamentální řešení v $cS'(\mathbb{R})$. Všechny fundamentální řešení se najdou jako obvzkle jako součet jednoho fundamentálního řešení s libovolným (klasickým) řešení rovnice s nulovou pravou stranou.

Všechna klasická řešení generují regulární distribuce v $cD'(\mathbb{R})$, tedy každá obyčejná diferenciální rovnice řádu $n$má prostor fundamentálních řešení v $cD'(\mathbb{R})$, které závisí na n libovolných konstantách. Velmi často je jen jedno z nich v $\S'$.

Hledání jednoho fundamentálního řešení v $\mathcal{S}'$ lze buď pomocí Fourierovy transformace, nebo pomocí navazování řešení homogenní rovnic v počátku. Tyto příklady se budou počítat na cvičení.

2.1.2 Odmocnina z determinantu komplexních matic.

Jako přípravu pro další výpočty si budeme definovat odmocninu z determinantu matice v obecnějším případě, než je obvyklé.

Definice 2.1.5 *Označme symbolem H množinu všech komplexních symetrických $n \times n$ matic, které mají reálnou část positivně definitní. Tuto množinu můžeme chápat jako otevřenou podmnožinu ve komplexním vektorovém prostoru dimenze $n(n+1)/2$ všech symetrických komplexních matic. Je snadné si rozmyslet, že množina H je konvexní. Každá matice $A \in H$ je regulární, tj.* $\det A \neq 0$.

Funkce $\det A$ *je holomorfní nenulová funkce na H. Protože je množina H konvexní, je možné definovat jednu ze dvou jednoznačných větví odmocniny z této funkce na H požadavkem, že hodnoty této odmocniny pro A reálnou a positivně definitní jsou kladné. Tuto jednoznačnou větev označíme symbolem* $(\det A)^{1/2}$.

To, že matice $A \in H$ jsou regulární je možné odůvodnit následujícím způsobem. Je-li $A \in H$ a $Ax = 0, z \in \mathbb{C}^n$, pak

$$0 = Re\left(\sum_{ij} a_{ij} z_i \overline{z_j}\right) = \sum_{ij} Re\ a_{ij} z_i \overline{z_j},$$

a tedy $z = 0$. Matice A definuje prosté lineární zobrazení, takže matice A je regulární.

Ze spojitosti je funkce $(\det A)^{1/2}$ definována také na uzávěru množiny H, kam patří symetrické matice, jejichž reálná část je positivně semidefinitní. Příkladem jsou symetrické matice, jejichž reálná část je nulová. Jako cvičení si ukažte, že platí následující tvrzení.

Lema 2.1.6 *Je-li $A = iB$, kde B je reálná regulární matice, pak*

$$(\det iB)^{1/2} = |\det B|^{1/2} e^{\frac{i\pi \operatorname{sgn} B}{4}}.$$

Číslo $\operatorname{sgn} B$ je definováno jako rozdíl $n_+ - n_-$, kde (n_+, n_-) je signatura matice B.

Důkaz.

Definujme matici $A_\varepsilon = \varepsilon I + iB$, kde I je jednotková matice.

(1) Předpokládejme, že B je diagonální. Pak $\det(\varepsilon I + iB) = \Pi_j(\varepsilon + ib_j)$ a

$$(\det(\varepsilon I + iB))^{1/2} = \Pi_j |\varepsilon + ib_j| e^{\frac{1}{2} i \sum_j \arg(\varepsilon + ib_j)},$$

kde každé číslo $\arg(\varepsilon + ib_j)$ patří do intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Pro $\varepsilon \to 0^+$ platí

$$\sum_j \arg(\varepsilon + ib_j) \to \frac{\pi}{2} \sum_j sgn\, b_j = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} B,$$

tedy

$$(\det(\varepsilon I + iB))^{1/2} \to |\det B|^{1/2} e^{\frac{i\pi \, sgn\, B}{4}}.$$

(2) Pro B symmetrickou regulární najdeme ortogonální transformaci, která tuto matici (jako matici kvadratické formy) převádí na diagonální tvar. Takováto transformace nemění ani hodnotu determinantu, ani hodnotu signatury. Pro reálné matice nemění tato transformace ani hodnotu odmocniny $(\det A)^{1/2}$, totéž tedy platí z principu analytického pokračování i pro matice z uzávěru množiny H.

□

2.2 Fundamentální řešení základních rovnic.

V této části přednášky si popíšeme fundamentální řešení pro nejdůležitější typy parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu.

2.2.1 Laplaceův operátor

Věta 2.2.1 *Fundamentální řešení pro Laplaceovu rovnici na $\mathbb{R}^n$ mají tento tvar:*
(1) $n > 2$:

$$T(x) = \frac{1}{(2-n)\kappa_n} r^{2-n}$$

kde κ_n je povrch jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$.
(2)
$n = 2$:

$$T(x) = \frac{1}{(2\pi)} \log r.$$

Důkaz.(1)
Vyjdeme ze vztahu

$$\Delta(r^{\lambda+2}) = (\lambda+2)(\lambda+n)r^{\lambda},$$

který jsme si pro distribuci r^λ odvodili dříve. Spočítejme limitu obou stran pro $\lambda \to -n$.

Operace derivování distribucí je spojitá, tedy můžeme zaměnit limitu $\lambda \to -n$ a Laplaceův operátor. Levá strana má tedy limitu rovnou $\Delta(r^{2-n})$.

Residuum distribuce r^λ v bodě $-n$ je rovno $\kappa_n\delta$. Limita členu $(\lambda+n)r^\lambda$ v bodě $\lambda = -n$ je tedy rovna $\kappa_n\delta$ a pravá strana má za limitu výraz $(2-n)\kappa_n\delta$. Tedy

$$\Delta(r^{2-n}) = (2-n)\kappa_n\delta.$$

(2)

Pro případ $n = 2$ platí

$$\Delta(r^{\lambda+2}) = (\lambda+2)^2 r^\lambda.$$

Pravá strana má tentokrát v bodě $n = -2$ faktor s dvojnásobným kořenem, takže limita $\lambda \to -2$ je na obou stranách triviální. Proto nejdříve uděláme derivaci podle proměnné λ na obou stranách a pak teprve limitu v bodě -2.

Derivací podle λ dostaneme vztah

$$\Delta(r^{\lambda+2} \ln r) = 2(\lambda+2)r^\lambda + (\lambda+2)^2 \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} r^\lambda\right].$$

Parametrický systém distribucí r^λ má jednonásobný pól v bodě $\lambda = -2$ s residuem rovným $\kappa_2\delta$. Tedy v prstencovém okolí bodu -2 lze psát

$$r^\lambda = \frac{1}{(\lambda+2)}\kappa_2\delta + T_0 + (\lambda+2)T_1 + \dots,$$

kde T_0, T_1 jsou vhodné distribuce. Derivací podle λ dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} r^\lambda = \frac{-1}{(\lambda+2)^2}\kappa_2\delta + T_1 + \dots.$$

Nyní můžeme spočítat limitu v bodě -2 pro původní vztah a dostaneme

$$\Delta(\log r) = 2\kappa_2\delta - \kappa_2\delta = \kappa_2\delta.$$

Stačí tedy dosadit $\kappa_2 = 2\pi$.

□

---

8. přednáška

2.2.2 Vlnový operátor

V celém tomto paragrafu budeme předpokládat, že $n > 2$. Fundamentální řešení pro vlnový operátor odvodíme z fundamentálního řešení pro Laplaceův operátor, které jsme právě spočítali. Pohodlný způsob, jak to udělat, je uvažovat obecný případ, tj. uvažovat diferenciální operátor

$$B(\partial) = \sum_{ij} B_{ij}\partial_i\partial_j,$$

kde B je obecná regulární čtvercová matice. To zahrnuje jako speciální případ Laplaceův operátor (B je jednotková matice) a případ vlnového operátoru (kde B je matice odpovídající Minkowského metrice). Abychom mohli plynule přecházet mezi těmito reálnými, nedegenerovanými případy, budeme uvažovat matice s komplexními prvky.

Předpokládejme tedy, že je dána kvadratická forma

$$A(x,x) = \sum_{ij} A_{ij} x_i x_j,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

kde matice A je regulární a má obecně komplexní prvky.

Předpokládejme, že $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je homogenní distribuce stupně λ, pak $T(A(x))$ je homogenní distribuce stupně 2λ na $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Předpokládejme dále, že $2\lambda \neq -n, -n-1, -n-2, \dots$. Podle Věty 1.11.5 existuje jednoznačné rozšíření této distribuce na celé $\mathbb{R}^n$. V dalším bude $T(A(x))$ označovat toto rozšíření.

Označme $B := A^{-1}$ matici inverzní a vypočtěme distribuci

$$B(\partial)[T(A(x))].$$

Dostaneme postupně ($X = \sum x_i \partial_i$)

$$\partial_k(T(A)) = T'(A)\partial_k A,\ X(T(A)) = 2A\,T(A);$$

$$\partial_j \partial_k(T(A))) = 2a_{jk}T'(A) + T''(A)\partial_k A \partial_j A$$

$$B(\partial)[T(A(x))] = 2nT'(A) + 4A(x)T''(A) = 2nT'(A) + 2X(T'(A))$$

Protože $T'(A)$ je homogenní stupně $2\lambda - 2$, vyjde

$$B(\partial)[T(A(x))] = 2(n + 2\lambda - 2)T'(A).$$

Distribuce $T(A)$ tedy bude řešením mimo počátek, pokud $\lambda = \frac{2-n}{2}$.

Již předem víme, že distribuce $B(\partial)[T(A(x))]$ musí být násobek Diracovy delta funkce, protože je homogenní stupně $-n$ a má nosič v počátku. Následující věta ukazuje, jaký násobek to je a dává fundamentální řešení pro vlnovou rovnici (a zároveň také pro další její ultrahyperbolické verze).

Věta 2.2.2 *Nechť $A(x)$ je nedegenerovaná, reálná kvadratická forma se signaturou (n_+, n_-) a c_n nechť označuje povrch jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$. Pak:*
(1)

$$B(\partial)\left[(A \pm i0)^{\frac{2-n}{2}}\right] = (2-n)c_n |\det A|^{-1/2} e^{\mp \frac{i\pi n_-}{2}} \delta.$$

(2)

$$B(\partial)\left[\frac{(A(x))_\pm^{\frac{2-n}{2}}}{\Gamma(\frac{2-n}{2}+1)}\right] = \pm 4\pi^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} n_\pm\right) |\det A|^{-1/2} \delta_0.$$

Poznámka. Pro n sudé je třeba v bodě 2 tvrzení věty chápat podíl na levé straně takto:

$$\frac{(A(x))_+^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(2-\frac{n}{2})} := \chi_+^{1-\frac{n}{2}}(A(x)) = \lim_{\lambda \to 1-\frac{n}{2}} \frac{(A(x))_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Důkaz.
I. Nejprve dokážeme, že

$$\forall A, ReA > 0 : \quad B(\partial)(A(x))^{\frac{2-n}{2}} = (2-n)c_n(\det A)^{-1/2}\delta.$$

a) Pro případ, že $A = B$ je jednotková matice je tvrzení dokázáno, je to případ fundmentálního řešení pro Laplaceův operátor.

b) Je-li $A(x)$ positivně definitní, existuje regulární transformace souřadnic $x = Ty$, která ji převádí na součet kvadrátů $A(Ty) = \sum_i y_i^2$. Tvrzení pak plyne z předchozího bodu, protože $T^tAT = I$, (I je jednotková matice), $|\det T| = |\det A|^{-1/2}$ a $\delta(y) = \delta(T^{-1}x) = |\det T|\delta(x)$.

c) V obecném případě tvrzení platí z principu analytického pokračování na prostoru H všech matic s komplexními koeficienty a s reálnou částí positivně definitní. Jednoznačná větev odmocniny z determinantu A je definována tak, že pro positivně definitní případ má hodnoty kladné.

II. Teď dokážeme, že pro každou nedegenerovanou reálnou kvadratickou formu $A(x)$ se signaturou (n_+, n_-) platí

$$B(\partial)\left[(A+i0)^{\frac{2-n}{2}}\right] = (2-n)c_n|\det A|^{-1/2}e^{-\frac{i\pi n_-}{2}}\delta$$

Zavedeme si komplexní kvadratickou formu $A_\varepsilon := -i\,A(x) + \varepsilon\,|x|^2 = (-i)[A(x) + i\,\varepsilon\,|x|^2]$ a označíme $B_\varepsilon := (A_\varepsilon)^{-1}$. Pak $Re\,A_\varepsilon > 0$ a z bodu I.c) dostaneme, že

$$B_\varepsilon(\partial)\left[(A_\varepsilon(x))^{\frac{2-n}{2}}\right] = (2-n)c_n(\det A_\varepsilon)^{-1/2}\delta.$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0^+$ dostaneme

$$iB(\partial)(A+i0)^{\frac{2-n}{2}}(-i)^{\frac{2-n}{2}} = (2-n)c_n|\det A|^{-1/2}e^{\frac{i\pi\,\mathrm{sgn}\,A}{4}}\delta,$$

protože $(\det A_\varepsilon)^{-1/2} \to |\det A|^{-1/2}e^{\frac{i\pi\,\mathrm{sgn}\,A}{4}}$, $A_\varepsilon \to (-i)(A+i0)$ a $B_\varepsilon(\partial) \to iB(\partial)$. Tvrzení pak plyne ze vztahu $(-i)^{\frac{2-n}{2}} = (-i)e^{\frac{i\pi(n_+ + n_-)}{4}}$. Druhá část (druhé znaménko) prvního tvrzení věty je pak jen komplexním sdružením první, právě dokázané části.

III. První část druhého tvrzení věty je důsledkem prvního tvrzení a lineární algebry, protože fundamentální řešení v druhé části jsou vhodnou lineární kombinací řešení v části první. Pro odvození je třeba použít vztahy:

$$(x+i0)^\alpha = x_+^\alpha + e^{i\pi\alpha}x_-^\alpha,\ (x-i0)^\alpha = x_+^\alpha + e^{-i\pi\alpha}x_-^\alpha, \chi_\pm^\alpha = \frac{x_\pm^\alpha}{\Gamma(\lambda+1)},$$

$$\frac{(x\pm i0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \chi_+^\alpha + e^{\pm i\pi\alpha}\chi_-^\alpha,$$

$$\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha) = \frac{-\pi}{\sin \pi\alpha},$$

$$\chi_+^\alpha = \frac{i\Gamma(-\alpha)}{2\pi}\left[(x-i0)^\alpha e^{i\pi\alpha} + (x+i0)^\alpha e^{-i\pi\alpha}\right], \; \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq -1,-2,\ldots$$

$$(2-n)c_n\frac{\Gamma(n/2-1)}{\pi} = -4\pi^{\frac{n-2}{2}}; \; i\pi\, n_-/2 + i\pi(1-n/2) = i\pi(1-n_+/2).$$

Podobný (ale jednodušší) postup lze použít pro druhou část druhého tvrzení.

Následující věta popisuje fundamentální řešení vlnové rovnice.

Věta 2.2.3
(1) Nechť $M = \mathbb{R}^{1,k}$ je Minkowského prostor s kvadratickou formou $A(x) = c^2t^2 - \sum_1^k x_i^2$, kde c označuje rychlost světla. Pak fundamentální řešení $E(x,t)$ pro vlnový operátor

$$\Box_c = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

má tvar

$$E(x,t) = \frac{\pi^{\frac{1-k}{2}}c}{4}\chi_+^{\frac{1-k}{2}}(A(x)).$$

Nosič supp E je obsažen ve světelném kuželu $\{x|A(x) \geqslant 0\}$. Toto fundamentální řešení se často nazývá Feynmanovo fundamentální řešení.
(2) Definujme distribuce $E_\pm(x,t)$ takto:
$E_+(x,t) = 2E(x,t)$ pro $t > 0$, $E_+(x,t) = 0$ jinde;
$E_-(x,t) = 2E(x,t)$ pro $t < 0$, $E_+(x,t) = 0$ jinde.

Pak jsou $E_\pm$ fundamentální řešení pro vlnový operátor (nazývají se někdy advancované, resp. retardované). Distribuce E_+ je jediné fundamentální řešení, které má nosič v poloprostoru $t \geqslant 0$ (ve skutečnosti nosič je v horní části světelného kuželu). Podobně pro E_-.

Důkaz.

Tato věta je pro důsledkem předchozí věty pro $n = 1 + k > 2$. Případ $n = 2$ byl v předchozí větě vyloučen. Věta platí i pro $n = 2$ a není těžké si vzorec odvodit přímo (udělejte si jako cvičení!). V Appendixu je ukázán alternativní důkaz, který funguje i pro dimenzi 2.

Předpokládejme tedy, že $n > 2$. Fundamentální řešení $E(x,t)$ odpovídá případu $(2)_+$ předchozí věty předchozí věty, kde $n_+ = 1, n_= k$, $1 - \frac{n}{2} = \frac{1-k}{2}$ a $\sqrt{|\det A|} = c$. Nosič distribuce χ_+^λ je $< 0, +\infty)$, tedy nosič $E(x,t)$ je ve světelném kuželu.

Definice distribucí $E_\pm(x,t)$ ve větě je trochu neformální. Přesnější verze je tato:

Definujme distribuce T_1 jako restrikci distribuce $2E$ na otevřenou množinu $\{(x,t)|t > 0\}$. Označme symbolem T_2 triviální distribuci, která se rovná nule na svém definičním oboru $R^{1,k} - \{(x,t)|A(x,t) \geqslant 0, t \geqslant 0\}$. Protože

$T_1 = T_2$ na průniku obou definičních oborů, definují dohromady distribuci E_+ na $\mathbb{R}^{1,k}_{\{}0\}$., která je homogenní stupně $\frac{1-k}{2}$. Existuje tedy její homogenní rozšíření na celé $\mathbb{R}^{1,k}$, které je určeno jednoznačně. Stejně se postupuje pro distribuci E_-. Navíc $E_-(x) = E_+(-x)$, tedy $\Box(E_+) = \Box(E_-)$. Protože zřejmě $E_- + E_+ = E$, dostaneme $\Box(E_+) = \Box(E_-) = \delta$.

$\Box$

Speciální případy jsou vzorců v nízkých dimenzích jsou:
$k = 1$ (d'Alembert):

V tomto případě je $\frac{1-k}{2} = 0$ a $\chi^0_+ = \theta(x)$, kde $\theta(x)$ je Heavisideova funkce. Tedy

$$E^\pm = \frac{c}{2}\theta(\pm ct - |x|);$$

(zde $\theta(\pm t)\theta(c^2t^2 - x^2) = \theta(\pm ct - |x|)$).
$k = 2$ (Poisson):

$$E^\pm = \frac{c}{2\pi}\frac{\theta(\pm ct - |x|)}{\sqrt{c^2t^2 - |x|^2}},$$

$k = 3$ (Kirchhoff):

$$E^\pm = \frac{c\theta(\pm t)}{2\pi}\delta(c^2t^2 - |x|^2) = \frac{\theta(\pm t)}{4\pi|t|}\delta(c|t| - |x|)$$

V tomto případě je nosič fundamentálního řešení obsažen v plášti nulového kuželu, což je matematické vyjádření Huygensova principu. Obdobná vlastnost platí také pro vyšší k, které jsou liché.

2.2.3 Rovnice pro vedení tepla

Věta 2.2.4 *Pro $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ označme ($|x|^2 = \sum x_i^2$)*

$$E(x,t) := (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, t > 0,$$

$$E(x,t) := 0, t < 0.$$

Pak $E \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ a příslušná regulární distribuce splňuje

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)E = \delta.$$

Navíc $E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$.

Lema 2.2.5 *(1) $\forall t > 0, \int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)dx = 1$,*
(2) $E(\sqrt{\varepsilon}x, \varepsilon) = E(x,1)\varepsilon^{-n/2}$.

První tvrzení je důsledkem Gaussových integrálů, druhé je snadné.

Důkaz věty.

(1) nejdříve ukážeme, že E je hladká funkce mimo počátek. Pro body, kde $t \neq 0$ není do dokazovat. Je-li $t = 0, x \neq 0$, pak má funkce různou definici shora a zdola, ale pro t blížící se k nule shora je limita funkce i všech jejích derivací rovna nula a tak se v nule obě definice hladce naváží.

(2) $E \in L_1$ v okolí počátku, neboť stačí integrovat přes malou krychli obsahující počátek a použít Fubiniovu větu a první tvrzení lemmatu (E je nezáporná). Integrál přes takovouto krychli je omezen konečným integrálem $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \theta(t)dt$.

(3) E je radiální v x a tak

$$\Delta_x(E) = -n\frac{E}{2t} + |x|^2 \frac{E}{4t^2}.$$

Spočítáme-li derivaci podle t, je vidět, že pro $t > 0$ splňuje funkce E rovnici pro vedení tepla.

(4) Pro všechny testovací funkce $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ platí

$$((\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)E, \phi) = -(E, (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x)\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (E \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta_x E \cdot \phi) dx\, dt.$$

Použijeme-li fakt, že E řeší rovnici pro vedení tepla a substituci $x = \sqrt{\varepsilon} y$, dostaneme

$$((\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)E, \phi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (E \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \phi) dx\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon)\phi(x, \varepsilon) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} E(y, 1)\varepsilon^{-n/2} \phi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon)\varepsilon^{n/2} dy = \phi(0) \int_{R^n} E(y, 1) dy = \phi(0) = \delta(\phi).$$

---

9. přednáška

Poznámka.

(1) Analogická formule platí i pro fundamentální řešení Schrödingerovy rovnice $[i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x]\Psi(x, t) = \delta$. Její fundamentální řešení má tvar

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{-i\theta(t)}{(4\pi i t)^{n/2}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$$

Tento případ může být odvozen z rovnice pro vedení tepla tak, že budeme uvažovat opět místo Eukleidovské normy (a příslušného Laplaceova operátoru) obecnou kvadratickou formu s komplexními koeficienty a reálnou částí positivně definitní, jako pří odvození vlnové rovnice. Dokážeme si následující tvrzení.

Věta 2.2.6 *Předpokládejme, že A je symetrická, komplexní, regulární matice, jejíž reálná část je positivně semidefinitní. Pak následující předpis definuje distribuci*

$$E(\phi) = \int_0^\infty (4\pi t)^{-n/2} (\det A)^{-1/2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{(A^{-1}x,x)}{4t}} \phi(x,t) dx \right] dt, \ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

která je fundamentálním řešením pro operátor $L = \frac{\partial}{\partial t} - A(\partial)$.

Důkaz.

V tomto případě už příslušné jádro není lokálně integrovatelná funkce, proto je nutná výše uvedená opatrná definice. Aby bylo vidět, že je tato distribuce dobře definována, je třeba ukázat, že funkce pod vnějším integrálem je integrovatelná v okolí 0. Ukážeme, že ve skutečnosti má v nule konečnou limitu.

K tomu použijeme informaci o Fourierově transformaci Gaussových funkcí (v proměnné x). Víme, že pro positivně definitní matici A platí

$$\mathcal{F}(e^{-(Ax,x)}) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det A)^{1/2}} e^{-\pi^2 \frac{(A^{-1}\xi,\xi)}{2}}$$

Pomocí analytického pokračování platí totéž i pro případ, kdy je A matice komplexní, nedegenerovaná, s positivně semidefinitní reálnou částí. Pak tedy dostaneme (ε je parametr)

$$\mathcal{F}(E(x,\varepsilon) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2} (\det A)^{-1/2} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{(A^{-1}x,x)}{4\varepsilon}} \right) =$$

$$= (4\pi\varepsilon)^{-n/2} (\det A)^{-1/2} \pi^{n/2} (4\varepsilon)^{n/2} (\det A)^{1/2} e^{-\pi^2 (4\varepsilon Ax,x)} = e^{-\pi^2(4\varepsilon Ax,x)}.$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0^+$ dostaneme na levé straně delta funkci, protože pravá strana zřejmě konverguje k jedné.

Z toho plyne, že funkce proměnné t pod vnějším integrálem v tvrzení věty má konečnou limitu rovnou $\phi(0)$. Důkaz se pak provede stejně jako v předchozí větě, ještě se ve skutečnosti zjednoduší.

Důsledek.

Fundamentální řešení pro Schrödingerovu rovnici

$$[i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x]\Psi(x,t) = \delta$$

má tvar

$$E(x,t) = \frac{-i\theta(t)}{(4\pi i t)^{n/2}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$$

Důkaz.

Použijeme-li předchozí větu s $A = i\,I$, $A^{-1} = -i\,I, \sqrt{\det A} = e^{\frac{i\pi n}{4}}$, dostaneme pro operátor

$$\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial t} - i\Delta_x,$$

fundamentální řešení

$$\tilde{E} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-i\pi n}{4}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}.$$

Pak si stačí uvědomit, že $E = (-i)\tilde{E}$.

2.2.4 Počáteční úloha pro rovnice pro vedení tepla.

Počáteční úloha pro rovnici pro vedení tepla má v klasické verzi následující přirozenou formulaci. Hledáme funkci $u(x,t)$ na poloprostoru $t \geqslant 0$ tak, aby pro čas $t = 0$ platilo $u(x,0) = g(x)$, kde $g = g(x)$ je zadaná klasická funkce.

V tomto případě má dobrý smysl mluvit o hodnotách funkce u na nadrovině $t = 0$, kde je zadána počáteční podmínka. Víme již, že se rychl pro distribuce nemá smysl mluvit o hodnotě v bodě. Právě tak není možné mluvit o hodnotách distribucích pro $t = 0$, tj. o zúžení distribuce na nadrovinu. To pak znamená, že není jasné jak formulovat počáteční podmínku pro distributivní řešení.

My uděláme drobný krok stranou a budeme pro řešení počáteční úlohy uvažovat distribuce, které zavisí na jednom parametru t, a mají hodnoty v prostoru distribucí $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. V tomto případě již víme, jak bychom definovali limitu ve zvoleném bodě t_0, spojitou závislost na příslušném parametru, nebo derivaci podle parametru. Pro příští použití také budeme konstatovat fakt, který se snadno z definice ověří, že je-li E_t jednoparametrický systém distribucí z $\mathcal{D}'(\Omega)$ a φ_t jednoparametrický systém testovacích funkcí, pak

$$\frac{d}{dt} < E_t, \varphi_t > = < \frac{d}{dt}(E_t), \varphi_t > + < E_t, \frac{d}{dt}\varphi_t|$$

Fomulace úlohy.

viz skripta, str. 248, 249, 250: Úvod

I. Základní úlohy pro rovnici (1),

II. Pojem řešení.

III. Princip superpozice.

Věta 2.2.7 *Je-li $L = \partial_t - a^2\Delta$ operátor z rovnice pro vedení tepla a $E(x,t)$ příslušné fundamentální řešení, pak:*
(1) Pro pevné $t > 0$, je funkce $E_t(x) = E(x,t)$ regulární distribuce v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $E_0(x) = \delta(x)$; tento systém distribucí závisí spojitě na t pro $t \geqslant 0$ a má derivaci podle t pro každé $t > 0$;
(ii) Úloha s pravou stranou $L(u) = f$, $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ má řešení

$$u(x,t) = E(x,t) * f;$$

(iii) Rovnice $Lu = 0$ s počáteční podmínkou $u_0(x) \equiv u(x,0) = g(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ má jediné řešení

$$u_t(x) = g(x) * E_t(x), t \geqslant 0.$$

(iv) Greenova funkce úlohy s počateční podmínkou je definována takto:

$$G(x,\xi,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}.$$

Pak řešení $u(x,t)$ úlohy s počáteční podmínkou g je definováno vzorcem

$$u(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t) g(\xi) d\xi.$$

Důkaz.

Stačí si jen uvědomit, že jsme si dokázali, že $E_t(x) \to \delta_0$ pro $t \to 0^+$. Ostatní tvrzení jsou snadným důsledkem. □

Postup hledání některých okrajových úloh si popíšete na cvičení.

2.2.5 Počáteční úlohy pro vlnovou rovnici.

Formulace úlohy: Skripta, str.282.

V tomto případě budeme řešení zkoumat pro počateční podmínky g_0, g_1, které jsou spojité. Zatímco pro řešení počáteční úlohy pro rovnici pro vedení tepla platilo, že i pro distributivní počáteční podmínky bylo řešení hladké pro všechny kladné časy, totéž pro vlnovou rovnici neplatí. Jsou-li počáteční podmínky zobecněné funkce, bude mít singularity i řešení. My zde budeme rozebírat jen řešení pro hladké počáteční podmínky.

Definujme opět parametrický systém distribucí pro $t > 0$ předpisem

$$E_t(x) = E_+(x,t),$$

Je snadné se přesvědčit, že tento systém spojitě závisí na t a m8 podle t dvě (distributivní) derivace. Je-li navíc $\Phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{k+1})$, pak

$$< E_+(x,t), \Phi(x,t) >= \int_0^\infty < E_t(x), \Phi(x,t) > dt.$$

Věta 2.2.8 *Řešení základní počáteční úlohy pro vlnovou rovnici má tvar*

$$u(x,t) = f * T + c^{-2} E_t' * g_0 + c^{-2} E_t * g_1.$$

Konvoluci $f * T$ lze také psát jako $\int_0^t E_{t-s}(x) * f(s,x) ds$, kde konvoluce pod integrálem se dělá v proměnné x.

Důkaz.

Stačí ukázat, že

$$\lim_{t\to 0+} E_t' = c^2\delta, \lim_{t\to 0+} E_t = \lim_{t\to 0+} E_t'' = 0.$$

(neboť pomocí těchto relací se snadno ukáže, že formule ve větě dává hledané řešení).

Jako pro parabolickou rovnici spočítáme (čárka značí derivaci podle t):

$$\Phi(0) =< \Box_c E, \Phi >= \frac{1}{c^2}\left[\int_0^\infty < E_t, \Phi''(x,t) > - < E_t'', \Phi(x,t) >\right] =$$

$$= \frac{-1}{c^2}\left[\int_0^\infty, \frac{d}{dt} < E_t', \Phi''(x,t) > - \frac{d}{dt} < E_t'', \Phi(x,t) >\right] =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[< E_0', \Phi(x,0) > - < E_0, \Phi'(x,0) >\right].$$

Pokud zvolíme $\Phi(x)$ libovolně a rozšíříme konstantně (a uřízneme pro velké t), pak druhý člen vypadne a z prvního plyne $E_0' = c^2\delta$.

Pokud zvolíme $\phi(x)$ libovolně a $\Phi(x,t) = \phi(x)t$ (a uřízneme pro velké t), pak první člen vypadne a druhý dá $E_0 = 0$. Abychom ukázali, že $E_0'' = 0$, stačí pro libovolnou testovací funkci $\phi(x)$ spočítat, že

$$< E_t''(x)\phi(x) >= c^2 < \Delta E, \phi >= c^2 < E, \Delta\phi >$$

konverguje k nule (pro $t \to 0^+$) pro libovolné ϕ. □

2.2.6 Explicitní popis řešení v nízkých dimenzích.

Fundamentální řešení a řešení počáteční úlohy je definováno pomocí distribuce $E(x,t) = E_t(x)$, která je složením jednorozměrné distribuce a kvadratické formy $A(x,t) = c^2t^2 - |x|^2$. Napíšeme si teď explicitní definici těchto distribucí. Věta o složení říká, že je nutné funkci tam kde má nenulový gradient (pro A tedy všude mimo počátek) rozšířit nejprve na difeomorfismus. Definujeme tedy zobrazení h a jeho inverzi $H = h^{-1}$ takto:

$$h(x,t) = (x, A(x,t)); x = x, s = A(x,t)$$

$$H(x,s) = (x, \frac{\sqrt{s+|x|^2}}{c}); x = x, t = \frac{\sqrt{s+|x|^2}}{c}.$$

Dále

$$\det JH = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{2c\sqrt{s+|x|^2}}.$$

Pak tedy podle definice

$$< E_+, \Phi >= \frac{\pi^{\frac{1-k}{2}}}{4} < \chi_+^{\frac{1-k}{2}}, \Psi >,$$

kde

$$\Psi(s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, \frac{\sqrt{s+|x|^2}}{c}) \frac{1}{\sqrt{s+|x|^2}} dx, t > 0.$$

Pokud definujeme

$$\tilde{\Phi}(r,t) = r^{n-2} \int_{|\omega|=1} \Phi(r\omega, t) dS_\omega,$$

pak

$$\Psi = \int \tilde{\Phi}(\frac{\sqrt{s+r^2}}{c}, r) \frac{r\,dr}{\sqrt{s+r^2}} = \int_{s \leqslant c^2t^2} \tilde{\Phi}(t, \sqrt{t^2c^2-s}) dt$$

a

$$< E_t, \Phi >= \frac{\pi^{\frac{1-k}{2}}}{4} < \chi_+^{\frac{1-k}{2}}, \tilde{\Phi}(t, \sqrt{t^2c^2-s}) > .$$

Jako cvičení spočítejte konkrétní tvar řešení počáteční úlohy v dimenzích 1, 2 a 3.

2.2.7 Fourierova transformace homogenních radiálních distribucí.

Jako závěrečný příklad na Fourierovu transformaci si spočítáme Fourierův obraz distribucí r^λ.

Nejprve si vyslovíme obecnější větu o Fourierově obrazu homogenních distribucí.

Věta 2.2.9 *Je-li $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n - \{0\})$ distribuce homogenní stupně λ, pak její Fourierův obraz $\mathcal{F}(T)$ je homogenní distribuce stupně $-n-\lambda$ na $\mathbb{R}^n - \{0\}$.*

Formální důkaz této věty najdete v Appendixu, názorná idea pro případ regulárních distribucí se dá napsat takto. Je $\phi(x)$ homogenní stupně n, pak pro $t > 0$ platí

$$\mathcal{F}(\phi)(t\xi) = \int e^{-2\pi i x.\xi} \phi(x) dx = \int e^{-2\pi i x'.\xi} \phi(x'/t) \frac{dx'}{t^n} = t^{-n-\lambda} \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Fourierův obraz distribuce r^λ je ted radiálně symetrická distribuce v proměnné ξ, homogenní stupně $-n-\lambda$. Je to tedy násobek distribuce $\rho^{-n-\lambda}$.

Abychom jednodušše vypočítali, jaký násobek to je, použijeme Parcevalovu rovnost. Víme, že Fourierova transformace je isometrie Hilbertových prostorů $L_2(\mathbb{R})$. Pro libovolné $\phi, \psi \in l^2(\mathbb{R})$ tedy platí

$$(\phi, \psi)_{L^2} = (\mathcal{F}(\phi), \mathcal{F}(\psi))_{L^2}.$$

Zvolme $\phi = e^{-\frac{r^2}{2}}, \psi = r^\lambda$ (pro vhodná λ). Pak

$$\mathcal{F}(\phi) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-2\pi^2|\xi|^2}, \mathcal{F}(\psi) = c \cdot \rho^{-\lambda-n},\ \rho = |\xi|.$$

---

10. přednáška

Kapitola 3

Speciální funkce

3.1 Elementární teorie representací grup

Nejběžnější grupy, se kterými se můžete ve fyzice setkat jsou konečné grupy nebo maticové grupy (tj. podgrupy grupy $GL(V) \simeq GL(n,\mathbb{R})$ všech invertibilních lineárních zobrazení). Řadu maticových grup jste potkalí již v prvním ročníku v lineární algebře. Tam jste také (pro maticové grupy) potkali pojem Lieovy algebry $L(G)$ (tj. algebry infinitezimálních generátorů) dané maticové grupy G. Dva základní typy grup jsou grupy řešitelné, jejichž speciálním případem jsou grupy nilpotentní (modelovým příkladem je grupa trojúhelníkových matic) a grupy jednoduché (modelový příklad jsou grupy $SL(n,\mathbb{R}), SO(n,\mathbb{R}), SU(n)$. Dimenze dané maticové grupy je podle definice dimenze její Lieovy algebry. Pro pořádek si zopakujme definici těchto grup:

$$GL(n,\mathbb{R}) := \{A \text{ je } n \times n \text{ reálná matice} \,|\, \det A \neq 0\}.$$
$$SL(n,\mathbb{R}) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | \det A = 1\}$$
$$SO(n,\mathbb{R}) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | (Ax, Ax) = (x,x) \forall x \in \mathbb{R}^n, detA = 1\},$$

kde $(.,.)$ označuje standardní Eukleidovský skalární součin;

$$SU(n) := \{A \text{ je } n{\times}n \text{ komplexní matice} \,|\langle Ax, Ax\rangle = \langle x,x\rangle, \forall x \in \mathbb{C}^n, \det A = 1\}$$

kde $\langle ., . \rangle$ označuje standardní Hermitovský skalární součin na $\mathbb{C}^n$. Grupová operace je v těchto případech vždy násobení matic. Podmínka nenulového determinantu zaručuje, že existuje inverzní prvek v příslušné grupě.

Mezi nejběžnější další grupy patří grupy zobrazení neboli transformační grupy. Je-li X daná množina, pak množina $\mathrm{Aut}(X)$ všech invertibilních zobrazení X na sebe tvoří grupu vzhledem k operaci skládání (jednotkovým prvkem je zde identické zobrazení). Je-li X konečná, je i $\mathrm{Aut}(X)$ konečná.

Je-li X podmnožina v Eukleidovském prostoru, křivka, plocha (nebo varieta), pak se často uvažuje grupa $\mathrm{Diff}(X)$ všech (hladkých) difeomorfismů X na X (difeomorfismus f je hladké invertibilní zobrazení, pro které je inverze také hladká). V tomto případě je tato grupa (ve smyslu, který by bylo třeba upřesnit) nekonečně dimensionální.

Nejelementárnější modelový případ situace, kde lze mluvit o nějaké symetrii je případ akce grupy na daném prostoru. Velmi důležitý speciální případ je tzv. reprezentace grupy, čímž se zpravidla myslí akce grupy na daném vektorovém prostoru V, pomocí lineárních zobrazení (tj. homomorfisumus grupy do grupy $\mathrm{Aut}(V)$). Nejzákladnější pojmy z teorie reprezentací jsou shrnuty v následující definici.

Definice 3.1.1

(i) Jsou-li G, H dvě grupy, pak zobrazení $\phi : G \to H$ nazveme homomorfismem daných grup, pokud platí

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2),\ g_1, g_2 \in G.$$

V případě maticových grup se požaduje hladkost zobrazení ϕ.

Representace G na vektorovém prostoru V je homomorfismus G do grupy $GL(V)$. [Nejběžnější jsou representace grup na konečně dimensionálních prostorech nad $\mathbb{C}$, někdy také nad $\mathbb{R}$ či $\mathbb{H}$ (těleso kvaternionů). V teoretické fyzice hrají důležitou roli také representace na daných nekonečně dimenzionálních vektorových prostorech (typicky např. pro representace Poincarého grupy na vektorovém prostoru všech polí daného typu).]

(ii) Nechť $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ je reprezentace grupy G na vektorovém prostoru V. Řekneme, že podprostor W je invariantní podprostor V, pokud $\forall g \in G$ platí $\rho(g)(W) \subset W$.

(iii) Řekneme, že reprezentace V je nerozložitelná (irreducibilní), pokud jediné invariantní podprostory jsou podprostory triviální, tj. podprostory $\{0\}$ a V.

Jsou-li ρ_1, ρ_2 dvě reprezentace grupy G na vektorových prostorech V_1, V_2, pak definujeme přímý součet $\rho_1 \oplus \rho_2$ na $V_1 \oplus V_2$ a tenzorový součin $\rho_1 \otimes \rho_2$ na $V_1 \otimes V_2$ takto:

$$[\rho_1 \oplus \rho_2](g) := \rho_1(g) \oplus \rho_2(g);\ [\rho_1 \otimes \rho_2](g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$$

(vzpomeňte si, jak je definován přímý součet a tenzorový součin dvou lineárních zobrazení).

(iv) Je-li ρ reprezentace na vektorovém prostoru V, pak duální (nebo kontragredientní) reprezentace ρ^* na duálním prostoru V^* takto:

$$\rho^*(g) := [\rho(g)]^*,$$

operace hvězdička pro komplexní matici A je transpozice spojená s komplexním sdružením.

(v) Nechť ρ je reprezentace grupy G na vektorovém prostoru V se skalárním součinem $\langle ., . \rangle$. Řekneme, že tato reprezentace je unitární, pokud platí

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle,\ \forall g \in G,\ v, w \in V.$$

(vi) Nechť ρ_1, ρ_2 jsou dvě representace grupy G na V_1, V_2. Řekneme, že lineární zobrazení $F : V_1 \to V_2$ je ekvivariantní (resp. splétající) zobrazení mezi těmito dvěmi reprezentacemi, pokud platí

$$\rho_2(g) \circ F(g) = F(g) \circ \rho_1(g)$$

pro všechna $g \in G$.
(vii) Řekneme, že reprezentace V_1, V_2 grupy G jsou isomorfní, pokud existuje ekvivariantní zobrazení $F : V_1 \to V_2$, které zobrazuje isomorfně V_1 na V_2.
(viii) Řekneme, že reprezentace V je úplně rozložitelná, pokud je V isomorfní přímému součtu irreducibilních reprezentací.

Poznámka.

Každá konečně dimenzionální unitární reprezentace je úplně rozložitelná. Každá reprezentace kompaktní grupy je unitarizovatelná, a tedy úplně rozložitelná.

(První tvrzení plyne snadno z toho, že ortogonální doplněk je opět invariantní, odůvodnění druhého tvrzení potřebuje znalost toho, že na kompaktní grupě existuje invariantní míra; pak je totiž možné z libovolného skalárního součinu na prostoru V dané representace sestrojit integrací vůči této invariantní míře invariantní skalární součin, vůči kterému je pak representace unitární.)

Příklad 3.1.2

(1) Základní (definující) reprezentace:

Je-li $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ jedna z výše uvedených maticových grup, pak její definující reprezentace je representace ρ na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ daná předpisem

$$\rho(A)v = A \cdot v, \; A \in G, v \in \mathbb{R}^n,$$

kde tečka označuje maticové násobení. Matice A je tedy representovaná sama sebou, chápanou jako lineární zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^n$ do sebe.
(2) Grupa $\mathbb{R}^\times$ nenulových reálných čísel, kde grupová operace je násobení, je indentická s grupou $GL(1, \mathbb{R})$ všech regulárních lineárních zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Zobrazení $\rho : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$, definované předpisem $\rho(A) = \det A$, je representací grupy $GL(n, \mathbb{R})$ na jednodimensionálním vektorovém prostoru $\mathbb{R}$.

Je to také reprezentace grupy $SL(n, \mathbb{R})$, ale tato representace je triviální, tj. každé matici se přiřadí jednička (tj. identické zobrazení).
(3) Grupy $SU(n)$ hrají podstatnou roli ve fyzice elementárních částic. Zkusme popsat representace nejjednodušší z nich, grupy $SU(2)$. Základní (definující) representace je dvojice (ρ, V), kde V je vektorový prostor $\mathbb{C}^2$ a ρ je lineární zobrazení, které matici $A \in SU(2)$ přiřadí opět odpovídající lineární zobrazení $\rho(A)$ z V do sebe.

Bude nyní definovat (nekonečně dimensionální) vektorový prostor $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ polynomů s komplexními hodnotmai ve dvou proměnných $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ a *podprostory* $\mathcal{P}^k(\mathbb{C}^2)$ *těch polynomů, které jsou homogenní stupně* k*. Prostor* $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ *je přímý součet těchto podprostorů.*

Je-li $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ *a* $A \in SU(2)$*, pak definujeme (tzv. regulární) reprezentaci* ρ *předpisem*

$$[\rho(A)(P)](z) = P(A^{-1}z),\ P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2),\ A \in SU(2).$$

To, že v definici použijeme hodnotu polynomu v bodě $A^{-1}z$*, místo abychom použili hodnotu polynomu v bodě* $A\,z$*, je vynuceno požadavkem, abychom reprezentace* ρ *byla opravdu reprezentace, aby zachovávala (a nepřehazovala) pořadí násobení.*

Z definice je zřejmé, že tato podprostory $\mathcal{P}^k$ *jsou invariantní podprostory, můžeme representaci* ρ *zúženou na* $\mathcal{P}^k$ *označit* ρ_k*.*

Prostor $\mathcal{P}^k$ *má dimenzi* $k+1$*. Sestrojili jsme tedy pro každé přirozené číslo* k *representaci grupy* $SU(2)$ *na vektorovém prostoru dimenze* $k+1$*. Dá se ukázat, že tyto representace jsou ireducibilní (nerozložitelné). Je zřejmé, že tyto reprezentace jsou pro různá čísla* k *různá (tj. nejsou izomorfní), protože příslušné vektorové prostory mají různou dimenzi. Dá se také ukázat, že libovolná nerozložitelná reprezentace* (ρ, V) *grupy* $SU(2)$ *na vektorovém prostoru* V *dimenze* $k+1$ *je izomorfní s reprezentací* ρ_k *na prostoru polynomů* $\mathcal{P}^k(\mathbb{C}^2)$*. Tím je tedy popsána klasifikace všech nerozoložitelných reprezentací této grupy.*

Protože pro výše uvedené grupy jsou všechny reprezentace úplně rozložitelné (to znamená, že se dají napsat jako přímý součet nerozložitelných reprezentací), je poměrně dobrý přehled o struktuře těchto reprezentací.

3.1.1 Lieova algebra maticové grupy.

Typická Lieova algebra je vektorový podprostor prostoru $\mathrm{End}(V)$ všech lineárních zobrazení z vektorového prostoru V do sebe, která je uzavřená na operaci komutátoru dvou zobrazení. Nejjednodušším příkladem je tedy celý prostor $\mathrm{End}(V)$. Pro maticové grupy se snadno definuje jim odpovídající Lieova algebra.

Definice 3.1.3 *Homomorfisumus dvou Lieových algeber je lineární zobrazení* ϕ *mezi nimi, které převádí komutátor na komutátor, tj. pro které platí*

$$[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y]),\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Representace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ *na* $\mathcal{H}$ *je homomorfismus* $\mathfrak{g}$ *do* $\mathrm{End}(\mathcal{H})$*.*

Každý (spojitý) homomorfismus $\theta : \mathbb{R} \to G$ *se nazývá jednoparametrická podgrupa* G *(grupa* $\mathbb{R}$ *se bere jako grupa vzhledem ke sčítání). Z definice homomorfismu plyne, že* $\theta(0) = e$*, kde* e *je jednotka v grupě* G*.*

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ *maticové grupy* G *je množina všech matic tvaru* $\theta'(0)$*, kde* θ *probíhá všechny jednoparametrické podgrupy grupy* G*. Lieovu algebru* *grupy G bude označovat symbolem $\mathfrak{g}$, pro klasické grupy se příslušná Lieova algebra označuje malými písmeny. Dá se ukázat, že Lieova algebra $\mathfrak{g}$ grupz G je Lieova algebra ve smyslu předchozí definice, tj. platí pro ni, že jsou-li X, Y dva prvky $\mathfrak{g}$, pak jejich komutátor $[X, Y]$ patří také do $\mathfrak{g}$.*

Jeden z velkých objevů matematika Sophuse Lie bylo, že v jistém rozumném smyslu je možné nahradit zkoumání homomorfismů a representací grup pomocí zkoumání homomorfismů a representací odpovídajících Lieových algeber. To je úloha podstatně jednodušší, protože je vše v rámci lineární algebry.

Příslušné přiřazení mezi homomorfismy grup a homomorfismy jejich algeber se snadno popíše. Pokud element X Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je dán derivací $X = \theta'(0)$, kde $\theta(t)$ je jednoparametrická podgrupa G, a je-li $\phi : G \to H$ homomorfismus, pak $\phi(\theta(t))$ je jednoparametrická podgrupa H a $\phi(X) = (\phi(\theta))'(0)$.

Speciálně, je-li T representace G na $\mathcal{H}$, pak je takto indukována reprezentace dT Lieovy grupy $\mathfrak{g}$ na $\mathcal{H}$.

Příklad 3.1.4 *Lieova algebra $su(2)$ grupy $SU(2)$ je množina všech 2 x 2 komplexních matic, pro které platí $X + X^* = 0, tr\, X = 0$.*

Najděte jednoparamterické podgrupy $\theta(t)$, pro které má $\theta'(0)$ tvar

$$a_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tyto tři matice tvoří bazi $su(2)$.

[Návod: Uvažujte zobrazení $\theta_i(t) = \exp(ta_i), t \in \mathbb{R}; i = 1, 2, 3.$]

3.1.2 Souvislost grupy $SU(2)$ a $SO(3)$.

Přiřaďme každému vektoru $x = (x_1, x_2, x_3)$ z $\mathbb{R}^3$ 2 x 2 matici T_x předpisem

$$T_x = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

Pak $\det T_x = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Přiřazení $x \to T_x$ zobrazuje $\mathbb{R}^3$ na množinu všech Hermitovských matic s nulovou stopou. Pak platí následující věta.

Věta 3.1.5 *(1)*

Je-li $A \in SU(2)$, pak pro každé $x \in \mathbb{R}^3$ existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}^3$ takové, že platí

$$A\, T_x\, A^* = T_y.$$

Takto definované zobrazení $\rho(T)$ z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ označíme symbolem $\rho(T)$.
(2) Zobrazení $\rho(T)$ je lineární a patří do $SO(3)$.

(3) Zobrazení $\rho : SU(2) \to SO(3)$ je homomorfismus grup, které je dvojnásobné nakrytí. Přesněji, vzor libovolné matice z $SO(3)$ je vždy dvojbodový a skládá se z dvojice opačných matic. Například, vzor jednotkové matice z $SO(3)$ je plus nebo minus jednotková matice v $SU(2)$.

Důkaz této věty je možné najít v Apendixu. Důkaz se výrazně zjednoduší použitím tělesa kvaternionů místo 2 x 2 komplexních matic.

---

11. přednáška

V následujících paragrafech si ukážeme příklady toho, že teorie representací vede přirozeně k definicím speciálních funkcí a že pomocí této teorie je možné porozumět mnoha vlastnostem speciálních funkcí. Hlavní roli v definic příslušných speciálních funkcí hrají tzv. maticov0 elementy reprezentace, které se definují následujícím způsobem.

Definice 3.1.6 *Předpokládejme, že T je reprezentace grupy G na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Jsou-li x, y dva vektory z $\mathcal{H}$, pak funkci $T_{xy}(g)$ na grupě G, definovanou předpisem*

$$T_{xy}(g) = (T(g)y, x),$$

kde $(.,.)$ označuje skalární součin na $\mathcal{H}$, nazveme maticovým elementem reprezentace T.

Je-li $\{e_i\}$ baze $\mathcal{H}$, pak označíme symbolem $T_{ij}(g)$ maticové elementy $T_{e_i,e_j}(g)$.

Všimněte si, že to, že je T reprezentace, je ekvivalentní s tím, že pro libovolné dva elementy $g_1, g_2 \in G$ platí

$$T_{ij}(g_1 g_2) = \sum_k T_{ik}(g_1)\, T_{kj}(g_2).$$

Tento fakt nám později pomůže odvodit tzv. aditiční věty pro speciální funkce a rekurentní formule pro ně. Zároveň vede k odvození faktu, že uvažované speciální funkce jsou řešením obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu.

3.2 Grupa $SU(2)$ a Jacobiho a Legendreovy polynomy.

Nejprve se věnujeme nejjednodušší nekomutativní grupě $SU(2)$.

3.2.1 Cartanův rozklad, Eulerovy úhly.

V grupě

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \Big| \, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

existuje kompaktní podgrupa

$$K \equiv SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} | t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right\}$$

a komutativní podgrupa

$$A \equiv SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix} | t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right\}$$

Je zřejmé, že prvky matice z $SU(2)$ můžeme vždy rozložit následujícím způsobem (tj. $G = KAK$):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i \sin\frac{\theta}{2} \\ i \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\psi}{2}}, \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi+\psi}{2}} & i \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi-\psi}{2}} \\ i \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\phi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi+\psi}{2}} \end{pmatrix}.$$

kde $\phi \in \langle 0, 2\pi) \; \theta \in \langle 0, \pi \rangle \; \psi \in \langle -2\pi, 2\pi)$ a

$$|\alpha| = \cos\frac{\theta}{2}, |\beta| = \sin\frac{\theta}{2}, Arg\alpha = \frac{\phi + \psi}{2}, Arg\beta = \frac{\phi - \psi + \pi}{2}.$$

Všimněte si, že pro $\alpha\beta = 0$ nejsou Eulerovy úhly určeny jednoznačné (podobně jako tomu je ve sférických souřadnicích v bodech severního a jižního pólu).

Jako cvičení si rozmyslete následující interpretací Eulerových úhlů ψ, θ, ψ. Elementu $g \in SU(2)$ s výše uvedeným rozkladem odpovídá rotace, daná složením rotace kolem osy x_3 o úhel ψ, rotace kolem osy x_a o úhel θ a rotace kolem osy x_3 o úhel ϕ. Pro každou tuto rotaci je snadné napsat příslušnou matici v $SO(3)$. Jejich součin dává prvek $\rho(g) \in SO(3)$, který odpovídá elementu $g \in SU(2)$.

3.2.2 Sféra S^2 jako homogenní prostor.

V dobách antiky byla známa jen Eukleidovská goemetrie. Dlouho trvalo, než lidé akceptovali existence neeukleidovských geometrií. Pak se ukázalo, že jich existuje celá řada a že je možné je klasifikovat pomocí grupy transformací (tzv. hlavní grupa), které k příslušné geometrii patří. Pro Eukleidovskou geometrii je tato hlavní grupa všech shodností (rotace, posunutí, reflexe). Je-li M prostor bodů dané geometrie, pak hlavní grupa G na něm působí transitivně, tj. pro libovolné dva body existuje element grup G, který je převádí na sebe. Označíme-li H isotropní podgrupu daného bodu $m \in M$, t.j. $H = \{g \in G | g(m) = m\}$, pak M se dá ztotožnit s prostorem orbit pravé akce grupy H na G. Kleinův Erlangenský program říká, že každá geometrie je takovýto homogenní prostor $M = G/H$, a že tedy klasifikaci geometrií je možné provést pomocí klasifikace (Lieových) group G a jejich podgrup H.

Grupa $G = SO(3)$ působí na $\mathbb{R}^3$ a při této akci zachovává jednotkovou sféru S^2. Akce je transitivní a je snadno vidět, že isotropní podgrupa libovolného bodu je komutativní grupa $H = SO(2)$. Sférická geomerie je tedy dalším příkladem homogenního prostoru.

Zvolíme-li bod $m = (0,0,1)$ na sféře, pak má podgrupa H tvar

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix} | t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle \right\}.$$

Pokud používáme Eulerovy úhly jako souřadnice na grupě G, pak odpovídající bod $m \in S^2$ má souřadnice

$$(\sin\theta \sin\phi, -\sin\theta\cos\phi, \cos\theta).$$

Čísla $-\frac{\pi}{2} + \phi$ a θ jsou tedy obyčejné sférické souřadnice a udávají, na kterém poledníku a na které rovnoběžce se bod nachází.

3.2.3 Konečně dimenzionální representace grupy $SU(2)$.

Nechť l je libovolné nezáporné celé, nebo polocelé číslo. Již v předchozí části jsme si popsali representace této grupy na prostoru homogenních polynomů stupně l ve dvou komplexních proměnných. Napišme její jinou realizaci na prostoru $\mathcal{H}_l$ polynomů v jedné komplexní proměnné z tvaru

$$\phi(z) = \sum_{n=-l}^{l} a_n z^{l-n}, a_n \in \mathbb{C}.$$

Prostor všech takovýchto polynomů má (komplexní) dimenzi $2l + 1$. Reprezentace T_l grupy $SL(2, \mathbb{C})$ všech komplexních matic

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

na $\mathcal{H}_l$ je definována takto:

$$T_l(g)\phi(z) = (\beta z + \delta)^{2l} \phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Dá se ukázat, že tyto reprezentace jsou ireducibilní a že každá jiná ireducibilní reprezentace dimenze $2l + 1$ je izomorfní s T_l.

Každá reprezentace kompaktní grupy na vektorovém prostoru $\mathcal{H}$ je unitární. Tím se myslí, že existuje invariantní skalární součin na $\mathcal{H}$. Invariance skalárního součinu $(.,.)$ znamená, že pro každé $g \in G$ a každou dvojici vektorů $u, v, \in \mathcal{H}$ platí

$$(T(g)u, T(g)v) = (u, v).$$

Chápeme-li T_l jako reprezentaci grupy $SU(2)$, pak se dá ukázat, že je možné zvolit jeden invariantní skalární součin na $\mathcal{H}_l$ tak, že prohlásíme bazi vektorů

$$\psi_n(x) = \frac{x^{l-n}}{c_{l,n}}, c_{l,n} = \sqrt{(l-n)!(l+n)!}$$

za ortonormální bazi.

3.2.4 Maticové elementy reprezentace T_l.

Připomeňme si, že maticové elementy grupy G vzhledem k bazi$\{e_i\}$ jsou definovány pomocí vztahu $T_{ij}(g) = (T(g)e_i, e_j)$ a že ze vztahu $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$ plyne

$$T_{ij}(g_1g_2) = \sum_k T_{ik}(g_1)T_{kj}(g_2).$$

Definice 3.2.1 *Maticové elementy reprezentace T_l vůči bazi $\{\psi_n\}$ označíme symbolem T^l_{mn}. Jsou to funkce na grupě $SU(2)$. Standardně budeme elementy grupy $SU(2)$ parametrizovat buď komplexními čísly α, β, nebo Eulerovými úhly, takže $T^l_{mn} = T^l_{mn}(\alpha, \beta) = T^l_{mn}(\varphi, \theta, \psi)$.*

Není těžké tyto maticové elementy popsat podrobněji. Protože

$$T_l(g)\psi_n(x) = \frac{(\alpha x - \bar{\beta})^{l-n}(\beta x + \bar{\alpha})^{l+n}}{\sqrt{(l-n)!(l+n)!}},$$

jsou maticové elementy $T^l_{mn}(g)$ koeficienty při x^{l-m} v tomto výrazu, vynásobeném koeficientem $\sqrt{(l-m)!(l+m)!}$. Z Taylorovy věty dostaneme lemma

Věta 3.2.2

$$T^l_{mn}(g) = c_{lmn}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}[(\alpha x - \bar{\beta})^{l-n}(\beta x + \bar{\alpha})^{l+n}]_{x=0},$$

kde

$$c_{lmn} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{l-n)!(l+n)!(l-m)!}}.$$

Pomocí Eulerových úhlů se snadno napíší maticové elementy

$$T^l_{mn}(\phi, \theta, \psi) = e^{-i(m\phi + n\psi)}T^l_{mn}(0, \theta, 0)$$

pomocí zatím neznámé funkce $T^l_{mn}(0, \theta, 0)$.

Definice 3.2.3 *Polynomy $P^l_{mn}(x)$ definujeme předpisem*

$$P^l_{mn}(\cos\theta) = T^l_{mn}(0, \theta, 0).$$

Tedy

$$T^l_{mn}(\phi, \theta, \psi) = e^{-i(m\phi + n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta).$$

Naším cílem teď bude identifikovat tyto polynomy se známými speciálními funkcemi a popsat si jejich vlastnosti. Uveďme si následující standardní definici Jacobiho polynomů.

Definice 3.2.4
(1) Jacobiho polynomy jsou definovány vztahem

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^k}{dx^k}[(1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k}].$$

(2)

Legendreovy polynomy jsou definovány vztahy

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}[(1-x^2)^k].$$

Tedy $P_k(x) = P_k^{(00)}(x)$.
Asociované Legendreovy polynomy jsou (pro $m \geqslant 0$*) definovány vztahy*

$$P_k^m(x) = \frac{(-1)^{m+k}(1-x^2)^{m/2}}{2^k k!}\frac{d^{m+k}}{dx^{m+k}}[(1-x^2)^k].$$

Dále definujeme

$$P_k^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(k-m)!}{(k+m)!}P_k^m(x).$$

Tedy

$$P_k^m(x) = \frac{2^m(k+m)!}{k!}(1-x^2)^{-m/2}P_{k+m}^{(-m,-m)}.$$

Věta 3.2.5 *Srovnáním obou definic získáme vztahy*

$$T_{mn}^l(\phi,\theta,\psi) = e^{-i(m\phi+n\psi)}P_{mn}^l(\cos\theta)$$

a

$$P_{mn}^l(x) = c'_{lmn}(1-x)^{(m-n)/2}(1+x)^{(m+n)/2}P_{l-m}^{(m-n,m+n)}(x),$$

kde

$$c'_{lmn} = \frac{i^{n-m}}{2^m}\sqrt{\frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-n)!(l+n)!}}.$$

Specielně

$$T_{m0}^l(g(\phi,\theta,\psi) = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{-im\phi}P_l^m(\cos\theta)$$

a

$$T_{00}^l(g(\phi,\theta,\psi) = P_l(\cos\theta)$$

Je podstatné si všimnout, že maticové koeficienty T^l_{m0} závisí jen na dvou proměnných θ a ϕ. To je nutné interpretovat tak, že tyto maticové elementy jsou nejen funkce na $G = SU(2)$, ale že jsou tyto funkce konstantní na (pravých) orbitách při akci grupy $H = SO(2)$ a že jsou to tedy funkce na sféře $S^2 = G/H$ (příslušné dva Eulerovy úhly jsou sférické souřadnice na sféře). Maticové koeficienty T^l_{m0} jako funkce sférických souřadnic se často nazývají sférické (nebo kulové) funkce a značí se také symbolem $Y_{lk}(\phi, \theta)$.

Pro maticový koeficient T^l_{00} platí dokonce, že závisí jen na úhlu θ. To znamená, že tato funkce je konstantní na všech rovnoběžkách sféry a že závisí jen na zeměpisné výšce.

3.2.5 Sčítací věty pro Jacobiho a Legendreovy polynomy.

Již víme, že pro maticové elementy platí

$$T^l_{mn}(g_1 g_2) = \sum_k T_{mk}(g_1) T_{kn}(g_2).$$

Tuto rovnost použijeme pro elementy $g(0, \theta_1, 0)$, $g(\phi_2, \theta_2, 0)$. Víme, že

$$T_{mn}(g_1 g_2) = e^{-i(m\phi+n\psi)} P^l_{mn}(\cos\theta);$$

$$T_{mk}(g_1) = P^l_{mk}(\cos\theta_1);\ T_{kn}(g_2) = e^{-ik\phi_2} P^l_{kn}(\cos\theta_2).$$

Pokud roznásobíme součin $g_1 g_2$ dvou prvků vyjádřené pomocí Eulerových úhlů a porovnáme s vyjádřením pomocí Eulerových úhlů pro součin, dostaneme vztahy mezi příslušnými úhly:

$$\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi_2,$$

$$e^{i\phi} = \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi_2 + \sin\theta_2 \sin\phi_2}{\sin\theta},$$

$$e^{i(\phi+\psi)/2} = \frac{\sqrt{2}[\cos(\theta_1/2)\cos(\theta_2/2) e^{i\phi_2/2} - (\sin\theta_1/2)\sin(\theta_2/2) e^{-i\phi_2/2}}{\cos(\theta/2)}.$$

Formulujme si pro další použití speciální případy pro $\phi_2 = 0$ a $\phi_2 = \pi/2$.

Věta 3.2.6 *Platí*

$$P^l_{mn}(\cos(\theta_1 + \theta_2)) = \sum_k P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2).$$

$$e^{-i(m\phi+n\psi)} P^l_{mn}(\cos\theta) = \sum_k i^{-k} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2),$$

kde

$$\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2, e^{i\phi} = \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2 + i \sin\theta_2}{\sin\theta},$$

$$e^{i(\phi+\psi)/2} = \frac{\sqrt{2}[\cos((\theta_1+\theta_2)/2) + i\cos((\theta_1-\theta_2)/2)]}{2\cos(\theta/2)}.$$

3.2.6 Rekurentní vztahy pro Jacobiho polynomy.

Věta 3.2.7 *Platí rekurentní vztahy pro Jacobiho polynomy*

$$i\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}P^l_{mn}(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}P^l_{m,n-1}(x) - \sqrt{(l-n)(l+n+1)}P^l_{m,n+1}(x)\right]$$

a

$$i\frac{m-n\,x}{\sqrt{1-x^2}}P^l_{mn}(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}P^l_{m,n-1}(x) + \sqrt{(l-n)(l+n+1)}P^l_{m,n+1}(x)\right]$$

Důsledkem jsou vztahy

$$\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx} + \frac{n-m\,x}{\sqrt{1-x^2}}\right]P^l_{mn}(x) = -\sqrt{(l-n)(l+n+1)}P^l_{m,n+1}(x),$$

$$\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx} - \frac{n-m\,x}{\sqrt{1-x^2}}\right]P^l_{mn}(x) = -\sqrt{(l+n)(l-n+1)}P^l_{m,n-1}(x),$$

Důkaz.

Nejdříve si všimneme, že koeficienty v Taylorově řadě pro maticové koeficienty je možné získat pomocí integrálu

$$T^l_{mn}(g) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!}}\int_{|z|=1}[(\alpha z-\bar\beta)^{l-n}(\beta z+\bar\alpha)^{l+n}]z^{m-l-1}dz.$$

Pokud tyto formule použijeme pro $\alpha = \cos(\theta/2), \beta = i\sin(\theta/2)$, a pokud obě strany rovnosti budeme derivovat podle θ v bodě nula, dostaneme

$$\frac{d}{d\theta}[P^l_{mn}(\cos\theta)]_{\theta=0} = \frac{i}{4\pi}\sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!}}\int_0^{2\pi}[(l-n)e^{-i(n+1)\phi}+(l+n)e^{-i(n-1)\phi}]e^{im\phi}d\phi.$$

Zřejmě je pravá část rovna nule pro m různé od $n\pm 1$. Pro $m = n+1$ dostaneme

$$\frac{d}{d\theta}[P^l_{n+1,n}(\cos\theta)]_{\theta=0} = \frac{i}{2}\sqrt{(l-n)(l+n+1)},$$

pro $m = n-1$ dostaneme

$$\frac{d}{d\theta}[P^l_{n-1,n}(\cos\theta)]_{\theta=0} = \frac{i}{2}\sqrt{(l+n)(l-n+1)}.$$

Pokud budeme derivovat první vztah předchozí věty podle θ_2 a dosadíme nulu a použijeme dva právě odvozené vztahy, dokážeme první vztah této věty.

Pokud budeme derivovat druhý vztah předchozí věty podle θ_2 a dosadíme nulu a využijeme vztahů mezi jednotlivými úhly a z nich odvozenými derivacemi:

$$\frac{d\theta}{d\theta_2}(0) = 0, \frac{d\phi}{d\theta_2}(0) = \frac{1}{\sin\theta_1}, \frac{d\psi}{d\theta_2}(0) = -\cot\theta_1,$$

dostaneme druhý vztah v této větě. Zbytek je lineární algebra. □

3.2.7 Diferenciální rovnice pro Jacobiho polynomy.

Ze dvou posledních rekurentních vztahů v předchozí větě dostanem snadno úpravou následující tvrzení.

Věta 3.2.8 *Jacobiho polynomy $P^l_{mn}(x)$ splňují diferenciální rovnici*

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} - \frac{m^2+n^2-2mnx}{1-x^2}\right] P^l_{mn}(x) = -l(l+1)P^l_{mn}(x).$$

Kulové funkce

$$Y_{lm}(\phi,\theta) = const.e^{-im\phi}P_l^m(\cos\theta) = const.T^l_{m0}(\phi,\theta)$$

splňují rovnici

$$[\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + l(l+1)]Y_{lm}\sin\theta(\phi,\theta) = 0.$$

3.2.8 Relace ortogonality.

Základní a klíčová věta o maticových koefientech je Peter-Weylova věta, která říká, že pokud budeme uvažovat pro kompaktní grupy G maticové koeficienty vůči zvolené ortogonální baze pro všechny unitární (navzájem neizomorfní) irreducibilní reprezentace G, pak jejich všechny maticové koeficienty tvoří ortogonální systém v prostoru $L_2(G,\mu)$, kde μ je invariantní (Haarova) míra na grupě G. Z této věty pak plynou všechny relace ortogonality pro Jacobiho polynomy. Jako speciální případ z této věty plyne ortogonalita kulových funkcí a jejich úplnost v prostoru $L_2(S^2)$. Podobně je také možné z Peter-Weylovy věty odvodit hustotu Legendreových polynomů v prostoru $L_2((-1,1))$.

3.2.9 Generující funkce.

Dá se ukázat, že Legendreovy funkce splňují vztah

$$\sum_0^\infty P_k(x)h^k = \frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}}.$$

3.3 Grupa $M(2)$ shodností v rovině a Besselovy funkce.

Teď budeme uvažovat další velmi jednoduchý případ Lieovy grupy. Bude to Lieova grupa (přímých) shodností v rovině $\mathbb{R}^2$. Přímé shodnosti jsou složení rotace a posunutí, zatímco typickým příkladem nepřímé shodnosti je reflexe vůči přímce (nepřímé shodnosti obracejí orientaci roviny, Jakobián příslušného zobrazení má záporný determinant).

Definice 3.3.1 *Grupa $M(2)$ (přímých) shodností je definována jako grupa transformací roviny tvaru*

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a,$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Příslušný element grupy $M(2)$ označíme symbolem $g = g(a, b, \alpha)$.

Existuje parametrizace grupy $M(2)$, která je podobná paramterizaci rotací pomocí Eulerových úhlů. Stačí si bod (a, b) v rovině napsat pomocí polárních souřadnic:

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi;\ r \in (0, \infty),\ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Obecný element $g \in M(2)$ lze pak psát jako

$$g(r, \varphi, \alpha) = g(0, 0, \varphi)g(r, 0, 0)g(0, 0, \alpha - \varphi)$$

Je to tedy složení rotace, posunutí ve směru osy x, a rotace.

Pokud $g_1 = g(r_1, 0, \alpha_1), g_2 = g(r_2, 0, 0)$ a $g_1 g_2 = g(r, \varphi, \alpha)$, pak

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\alpha_1},$$

$$e^{i\varphi} = \frac{r_1 + r_2 e^{i\alpha_1}}{r};\ \ \alpha = \alpha_1.$$

3.3.1 Lieova algebra $m(2)$.

Pokud si vezmeme jednoparametrické podgrupy

$$\omega_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pak prvky $a_i \in m(2), a_i = \frac{d\omega_i(t)}{dt}|_{t=0}$ mají tvar

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tyto tři matice generují celou Lieovu algebru $m(2)$, jejich komutační relace jsou

$$[a_1, a_2] = 0, [a_2, a_3] = a_1, [a_3, a_1] = a_2.$$

3.3.2 Representace grupy $M(2)$.

Definujme unitární representaci T_ρ grupy $M(2)$ takto. Příslušný Hilbertový prostor $\mathcal{H}$ je prostor L_2 funkcí na jednotkové kružnici se skalárním součinem

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\psi)\bar{g}(\psi) d\psi < \infty.$$

Representace T^ρ je dána vztahem

$$[T^\rho(g)f](\psi) = e^{i\rho r \cos(\psi - \varphi)} f(\psi - \alpha),$$

kde $g = g(r, \varphi, \alpha)$ a $\rho \neq 0$. Jako cvičení se přesvědčete, že toto je representace a že je unitární.

3.3.3 Maticové elementy.

V prostoru $\mathcal{H}$ si zvolíme bazi $f_n(\psi) = e^{in\psi}$. Je ihned vidět, že to je ortonormální baze. Maticové elementy T^ρ_{mn} reprezentace T^ρ vůči této bazi jsou definovány takto:

$$T^\rho_{mn}(g) = (T^\rho_{mn}(g) f_n, f_m) = \frac{e^{-in\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{Rr\cos(\psi-\varphi)} e^{i(n-m)\psi} d\psi.$$

Tedy např.

$$T^\rho_{mn}(g(0, 0, \alpha)) = T^\rho_{mn}(\alpha) e^{in\alpha} \delta_{mn}.$$

Matice reprezentující elementy $g(0, 0, \alpha)$ je tedy v této bazi diagonální.

Elementy $g(r, 0, 0)$, které reprezentují posunutí o r ve směru osy x mají maticové elementy

$$T^\rho(g(r, 0, 0)) = T^\rho_{mn}(r) \frac{i^{n-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\rho r \sin\theta - i(n-m)\theta} d\theta = i^{n-m} J_{n-m}(\rho r).$$

V integrálu je lehké najít integrální vyjádření pro Besselovy funkce. Besselovy funkce $J_{n-m}(r)$ s celočísleným indexem jsou tedy (až na konstantu) maticové elementy reprezentace T^1 jednoparametrické podgrupy posunutí o délku r podél osy x. Z rozkladu obecného elementu $g = g(r, \varphi, \alpha)$ pomocí otočení a posunutí podél osy x dostaneme, že

$$T^\rho(g) = i^{n-m} e^{-i[n\alpha + (m-n)\varphi]} J_{n-m}(\rho r).$$

3.3.4 Sčítací věty.

Teď odvodíme z vlastností reprezentací sčítací věty pro Besselovy funkce s celočíselným indexem tak, jak jsme to dělali v případě Jacobiho polynomů. Použijeme základní vlastnost reprezentace

$$T^{\rho}_{mn}(g_1g_2) = \sum_k T^{\rho}_{mk}(g_1)T^{\rho}_{kn}(g_2).$$

pro případ $g_1 = g(r_1, 0, 0), g_2 = g(r_2, \varphi_2, 0)$. Označíme-li $g = g(r\varphi, \alpha)$, pak

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\varphi_1}, e^{i\varphi} = \frac{r_1 + r_2e^{i\varphi_2}}{r}, \alpha = 0.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu vyjádření pro maticové elementy a položíme $m = 0$ a $\rho = 1$, dostaneme

$$e^{i\varphi}J_n(r) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi_2}J_{n-k}(r_1)J_k(r_2).$$

Pro $\varphi_2 = 0$ dostaneme $r = r_1 + r_2$, $\varphi = 0$ a odpovídající jednoduchý vztah kopírující vlastnost jednoparametrické podgrupy translací podél osy x:

$$J_n(r_1 + r_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(r_1)J_k(r_2).$$

Pro $\varphi_2 = \pi/2$ dostaneme složitější vztah:

$$\left(\frac{r_1 + ir_2}{r_1 - ir_2}\right)^{\frac{n}{2}} J_n\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_{n-k}(r_1)J_k(r_2).$$

Z unitárnosti reprezentace T^1 plyne, že

$$\delta_{mn} = \sum_k T^1_{mk}(r)(T^1_{kn})^*(r),$$

Po dosazení a záměnou indexů dostaneme tzv. Hansenovu formuli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(r)J_k(r) = J_n(0) = \delta_{n0}.$$

3.3.5 Rekurentní vztahy.

Podobně jako tomu bylo pro Jacobiho polynomu, i pro Besselovy funkce jsou rekurentní vztahy infinitezimální verzí sčítacích vět.

Věta 3.3.2 *Besselovy funkce J_n splňují vztahy:*
(1) $2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$;
(2) $\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$;
(3)

$$\left(\frac{n}{x} + \frac{d}{dx}\right) J_n(x) = J_{n-1}(x);$$

$$\left(\frac{n}{x} - \frac{d}{dx}\right) J_n(x) = J_{n+1}(x).$$

Důkaz.

Nejdříve musíme spočítat hodnoty derivací Besselových funkcí v bodě $x = 0$. Derivací integrálního vztahu pro Besselovy funkce (kterým jsou definovány) dostaneme okamžitě

$$J_n'(0) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \sin\theta d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [e^{-i(n-1)\theta} - e^{-\imath(n+1)\theta}] d\theta.$$

Toto číslo je nenulové jen pro $n = \pm 1$, pro ostatní n je rovno nule. Při tom

$$J_1'(0) = -J_{-1}'(0) = \frac{1}{2}.$$

Nyní budeme derivovat vztah

$$J_n(r_1 + r_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(r_1) J_k(r_2).$$

podle r_2 a dosadíme $r_2 = 0$. Tím dostaneme první tvrzení.

Derivací vztahu

$$\left(\frac{r_1 + ir_2}{r_1 - ir_2}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(\sqrt{r_1^2 + r_2^2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_{n-k}(r_1) J_k(r_2).$$

podle r_2 a dosazením $r_2 = 0, r_1 = x$ dostaneme druhý vztah. Zbytek je lineární kombinace předchozích vztahů. □

3.3.6 Besselova diferenciální rovnice.

Z předchozí věty dostaneme ihned

$$J_n(x) = \left(\frac{n-1}{x} - \frac{d}{dx}\right) \left(\frac{n}{x} + \frac{d}{dx}\right) J_n(x).$$

Snadnou úpravou dostaneme následující větu.

Věta 3.3.3 *Besselovy funkce J_n splňují Besselovu diferenciální rovnici*

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

3.3.7 Generující funkce.

Definující integrální vztah pro Besselovu funkci říká, že $J_n(x)$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $f(\theta) = e^{ix\sin\theta}$. Tedy

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta},$$

neboli

$$e^{ixz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n.$$

Funkce e^{ixz} je tedy generující funkce pro J_n.

3.4 Hermiteovy polynomy.

Hermiteovy polynomy velice úzce souvisí s Heisenbergovou grupou a Heisenbergovou algebrou. Nejdříve si uvedem jejich definice.

Definice 3.4.1 *Heisenbergova grupa H je grupa 3 x 3 reálných trojúhelníkových matic tvaru*

$$H = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Heisenbergova algebra je Lieova algebra Heisenbergovy grupy. Dá se snadno vypočítat ze standardních jednoparametrických podgrup (jako cvičení najděte jednoparametrické podgrupy, jejichž infinitezimální generátory jsou níže uvedené tři matice).

Definice 3.4.2 *Heisenbergova algebra $\underline{h}$ je vektorový podprostor prostoru všech 3 x 3 reálných matic tvaru*

$$\underline{h} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

generovaný maticemi

$$a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem se snadno zjistí, že pro tři generátory a_+, a_-, b platí následující komutační relace.

$$[a_+, a_-] = b;\ [a_+, b] = 0;\ [a_-, b] = 0$$

Naším cílem je sestrojit unitární representaci ρ grupy H, resp. algebry $\underline{h}$, na vhodném Hilbertově prostoru. Odvodíme si nejdříve jednoduché důsledky komutačních relací, které musí platit v každé reprezentaci. Všimněte si, že element b je v centru Heisenbergovy algebry $\underline{h}$. Tím se myslí, že komutuje se všemi prvky $\underline{h}$.

Jedna z možností, jak element b reprezentovat je přiřadit mu násobek jednotkové matice (pro ireducibilní representace je to dokonce kanonická možnost).

Budeme hledat representaci, ve které je element b representován dvojnásobkem jednotkové matice. V hledané reprezentaci pak pro matice $\rho(a_+), \rho(a_-)$ (které pro pohodlí označíme prostě a_+, a_-) platí $[a_+, a_-] = 2$. Snadno odvodíme následující jednoduché lemma.

Lema 3.4.3 *Pro libovolné přirozené číslo j platí*

$$[a_-, a_+^j] = 2ja_+^{j-1}.$$

Důkaz.

Jsou-li X, Y dva prvky z dané Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, pak se snadno dokáže, že

$$[X^n, Y] = \sum_{j=0}^{n-1} X^j [X, Y] X^{n-j-1}.$$

K tomu stačí si napsat levou stranu jako

$$X^{n-1}(XY - YX) + X^{n-1}YX - YX^n =$$

$$= X^{n-1}[X, Y] + [X^{n-1}, Y]x$$

a použít indukci. Pro $X = a_+, Y = a_-, [X, Y] = 2$ dostaneme tvrzení lematu. □

Předpokládejme ještě, že v naší hledané reprezentaci existuje "vakuový vektor", tj. element v_0, pro který platí $a_-(v_0) = 0$. Označíme postupně

$$v_1 = a_+(v_0), v_2 = a_+^2(v_0),\ v_j = a_+^j(v_0).$$

Tedy element a_+ je vzhledem k této bazi reprezentován (nekonečně rozměrnou) maticí, která má na vedlejší diagonále samé jedničky.

Z předchozího lematu ihned plyne, že pro reprezentaci elementu a_- platí, že vektor v_j se převádí na vektor $2jv_{j-1}$. Z pochopitelných důvodů se operátorům a_+, resp. a_-, říká kreační, resp. anihilační operátory.

Tím jsme popsali jakousi nekonečně rozměrnou reprezentaci, která je zatím abstraktní a působí na vektorovém prostoru, jehož bazí jsou prvky $v_j, j = 0, 1, 2, , \ldots$.

Abychom našli konkrétní realizaci, zkusme vzít za Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ prostor $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ všech kvadraticky ingerovatelných funkcí na reálné přímce.

Snadno se ověří, že operátory

$$a_+(f) = xf(x) - \frac{df}{dx}(x);\ a_- = xf(x) + \frac{df}{dx}(x)$$

jsou dobře definovány na husté podmnožině a splňují relace $[a_+, a_-] = 2$.

Je snadné nalézt řešení rovnice $a_(v_0) = 0$, např. lze vzít $v_0(x) = \exp(-x^2/2)$.

Pokud si všimneme, že

$$a_+(f) = -\exp\frac{x^2}{2}\frac{d}{dx}(\exp-\frac{x^2}{2}f),$$

pak

$$v_j(x) = P_j(x)\exp-\frac{x^2}{2},$$

kde platí

$$P_j(x) = (-1)^j \exp\frac{x^2}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^j(\exp-\frac{x^2}{2})$$

Takto definované polynomy se nazývají Hermiteovy polynomy.

Hermiteovy polynomy jsou řešením vhodné diferenciální rovnice. Její tvar dostaneme snadno takto.

Věta 3.4.4 *Hermiteovy polynomy $P_j(x)$ řeší diferenciální rovnici*

$$-P_n''(x) + x^2 P_n(x) = (2n+1)P_n(x).$$

Generující funkce pro P_j má tvar

$$\exp 2xz - z^2 = \sum_0^\infty \frac{P_n(x)}{n!}z^n.$$

Důkaz.

Z vlastností operátorů $a_\pm$ plyne, že $(a_+a_-)(v_n) = 2nv_n$. Dosazením za $a_\pm$ dostaneme příslušnou rovnici.

Dále

$$\exp 2xz - z^2 = \exp x^2 \exp -(x-z)^2 = \sum_0^\infty \frac{(\exp -x^2)^{(n)}}{n!}(-z)^n.$$

□

Ještě si najdeme pomocí Hermiteových polynomů bazi z vlastních funkce Fourierovy transformace.

Věta 3.4.5 *Nechť $\varphi_n(x) = f_n(\sqrt{2\pi}x)$, $f_n(x) = P_n(x)\exp-\frac{x^2}{2}$. Pak*

$$\mathcal{F}(\varphi_n) = (-i)^n\varphi_n.$$

Důkaz.

O funkci $\varphi_0(x) = \exp -\pi x^2$ víme, že $\mathcal{F}(\varphi_0) = \varphi_0$.

Pokud označíme

$$\tau_+(f) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f' + \sqrt{2\pi} x f,$$

pak $\tau_+(\varphi_n) = \varphi_{n+1}$.

Dále

$$\mathcal{F}(\tau_+(f)) = \mathcal{F}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f' + \sqrt{2\pi} x f\right) =$$

$$-i\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\xi)\xi - \frac{(\mathcal{F}(f))'(\xi)}{i\sqrt{2\pi}} = -i\tau_+\mathcal{F}(f).$$

$\square$

Kapitola 4

Appendix

V této části je shromážděn další materiál pro ty, kteří se zajímají o podrobnější informace, které jsou potřebné pro důkazy některých tvrzení používaných v textu.

4.1 Testovací funkce

Lema 4.1.1
(1) Pro každé $p \geqslant 1$ *platí, že* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *je husté v* $L_p(\mathbb{R}^n)$.
(2) Existuje posloupnost nezáporných funkcí $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *splňující*

$$\int \varphi_n = 1, \operatorname{supp} \varphi_n \subset U(0; 1/n).$$

(3) Předpokládejme, že $K \subset \Omega$, K *je kompaktní,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená. Pak existuje* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *taková, že* $\varphi(x) = 1$ *v okolí množiny* K.
(4) Jsou-li $\Omega_j, j = 1, \ldots, k$ *otevřené v* $\mathbb{R}^n$ *a* $\varphi \in \mathcal{D}(\cup_{j=1}^k \Omega_j$*, pak existují* $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ *takové, že* $\sum_{j=1}^k \varphi_j = \varphi$ *na* $\cup_{j=1}^k \Omega_j$*. Je-li* $\varphi \geqslant 0$*, lze zvolit* $\varphi_j \geqslant 0$.

4.2 Lokalizace distribucí.

Věta 4.2.1 *Je-li* Ω_i *libovolný systém otevřených množin a* $\Omega = \cup_i \Omega_i$*, pak pro každý systém distribucí* $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$*, který splňuje podmínku* $\forall i, j,\ T_i = T_j$ *na* $\Omega_i \cap \Omega_j$*, existuje distribuce* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *s vlastností* $\forall i, T = T_i$ *na* Ω_i.

Věta 4.2.2 *Nechť* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *a* $\operatorname{supp} T$ *je její nosič. Pak existuje právě jedna lineární forma* $\tilde{T}$ *na množině testovacích funkcí*

$$\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) |\, \operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi \subset\subset \Omega\} \tag{4.2.1}$$

taková, že platí
(i) $\tilde{T}(\varphi) = T(\varphi)$ *pro všechny* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
(ii) $\tilde{T}(\varphi) = 0$, *pokud* $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$.

Důkaz.
(i) Jednoznačnost.

Nechť je dána distribuce T. Ukážeme nyní, že každou testovací funkci φ z množiny 4.2.1 lze rozložit na součet $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, kde $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ a pro φ_1 platí $supp\,\varphi \cap supp\,T = \emptyset$.

To je možné ukázat takto. Zvolme testovací funkci $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tak, aby $\psi = 1$ v okolí $supp\,\varphi \cap supp\,T$. Pak $\varphi_0 = \varphi\psi$ a $\varphi_1 = \varphi(1-\psi)$ mají požadované vlastnosti.

Z toho plyne, že hodnotu rozšíření $\tilde{T}(\varphi)$ musíme podle předpokladů věty zvolit takto:

$$\tilde{T}(\varphi) = \tilde{T}(\varphi_0) + \tilde{T}(\varphi_1) = T(\varphi_0). \tag{4.2.2}$$

Pokud jsou $\tilde{T}_1$, resp. $\tilde{T}_2$ dvě rozšíření T, musejí se rovnat. To ukazuje jednoznačnost a dává zároveň návod na definici rozšíření pomocí výše uvedeného vztahu.
(ii) Existence.

Je zřejmé, že rozklad $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ s uvedenými vlastnostmi zdaleka není jednoznačný. Abychom vztah (4.2.2) mohli vzít za definici rozšíření, musíme ukázat, že je tato definice nezávislá na výběru rozkladu. Předpokládejme tedy, že φ je rozloženo dvěma způsoby $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = \varphi_0' + \varphi_1'$. Pak $\varphi_0 - \varphi_0' = \varphi_1 - \varphi_1'$, platí také $supp(\varphi_1 - \varphi_1') \cap supp\,T = \emptyset$, a tedy i

$$T(\varphi_0 - \varphi_0') = \tilde{T}(\varphi_1 - \varphi_1') = 0.$$

To ukazuje, že $T(\varphi_0) = T(\varphi_0')$. Vztah (4.2.2) tedy lze vzít za definici hledaného rozšíření $\tilde{T}$. □

Věta 4.2.3 *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) Lineární funkcionál T na $\mathcal{E}(\Omega)$ je spojitý.

(ii) Existují $C \in \mathbb{R}$, k přirozené a kompaktní množina $K \subset \Omega$ takové, že $\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ platí

$$|T(\varphi)| \leqslant C\,|\varphi|_{k,K}.$$

(iii) T je distribuce z $\mathcal{D}'(\Omega)$ s kompaktním nosičem (rozšířená podle naší dohody na celé $\mathcal{E}(\Omega)$).

Důkaz.

Dokážeme postupně tři implikace.
(i) $\Rightarrow$ (ii):

Předpokládejme, že T je spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{E}(\Omega)$. Vlastnost (ii) dokážeme sporem. Zvolme rostoucí posloupnost kompaktních množin K_j takovou, že $\cup_j K_j = \Omega$. Pokud neplatí podmínka (ii), pak pro každé j existuje $\varphi_j \in \mathcal{E}(\Omega)$ taková, že

$$|T(\varphi_j)| > j\,|\varphi_j|_{j,K_j}.$$

Po vhodném vynásobením můžeme předpokládat, že $|T(\varphi_j)| = 1$.

Vezměme si nyní pevnou kompaktní množinu K a pevné přirozené číslo k. Pak existuje j_0 takové, že $\forall j \geqslant j_0$ platí $K \subset K_j$ a $k \leqslant j$. Pak ale

$$|\varphi_j|_{k,K} \leqslant |\varphi_j|_{j,K_j} \leqslant \frac{1}{j} \to 0.$$

To je spor, neboť pro všechna j je $|T(\varphi_j)| = 1$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Platí-li podmínka (ii), pak se snadno ukáže, že nosič T je podmnožina K. Distribuce T má tedy kompaktní nosič a stačí ji zúžit na menší množinu testovacích funkcí $\mathcal{D}(\Omega)$. Je také ihned vidět, že je na této množině spojitá.
(iii) $\Rightarrow$ (i)

Předpokládejme, že $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ má kompaktní nosič $K \subset \Omega$. Víme, že tento lineární funkcionál lze prodloužit na celé $\mathcal{E}(\Omega)$. Toto prodloužení je dáno následujícím předpisem. Zvolme funkci $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $\psi = 1$ na K. Pak $\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ platí $T(\varphi) = T(\psi\varphi)$. Je třeba nyní ukázat, že toto prodloužení je spojité.

Pokud $\varphi_j \to 0$ v $\mathcal{E}(\Omega)$, pak $\varphi_j\psi \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ a tedy $T(\varphi_j) = T(\psi\varphi_j) \to 0$.
□

4.3 Konvoluce a její vlastnosti

Lema 4.3.1 *Vlastnosti konvoluce:*

$$u * v(x) := \int u(x-y)v(y)dy,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$$

(a) $u * v = v * u$ *(pokud alespoň jedna funkce má kompaktní nosič)*

(b) $(u * v) * w = u * (v * w)$ *(pokud alespoň jedna funkce má kompaktní nosič)*

(c) $\partial^{\alpha+\beta}(u * v) = (\partial^\alpha u) * (\partial^\beta v)$ *(pokud alespoň jedna funkce má kompaktní nosič)*

(d) Nechť $u \in \mathcal{C}_0^j$, *pak*

$$v \in L_{1,\mathrm{loc}} \Rightarrow u * v \in \mathcal{C}^j,\ v \in \mathcal{C}^k \Rightarrow u * v \in \mathcal{C}^{j+k},$$

Věta 4.3.2 *Předpokládejme, že posloupnost nezáporných funkcí* $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *splňuje* $\int \varphi_n = 1, supp\, \varphi_n \subset U(0; 1/n)$.

Pak platí:

$$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n);\ \forall |\alpha| \leqslant j\ \ \partial^\alpha(f * \varphi_n - f) \rightrightarrows 0\ v\ \mathbb{R}^n;$$

$$f \in L_p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n);\quad f * \varphi_n - f \to 0\ v\ L_p.$$

Důsledek 4.3.3 *Předpokládejme, že* $f, g \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Ukažte, že pokud platí*

$$\int f\varphi dx = \int g\varphi dx,$$

pro všechny funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *pak* $f = g$ *s.v. na* Ω.