REPRESENTACE LIEOVÝCH GRUP A ALGEBER

Vladimír Souček

Draft from May 28, 2002

1. Lieovy grupy a Lieovy algebry

1.1. Úvod. Hlavním cílem přednášky je seznámit posluchače se základními fakty o konečně-dimensionálních representacích Lieových grup a podrobně rozebrat klasifikaci těchto representací v nejdůležitějším případě representací klasických jednoduchých (komplexních) Lieových grup. Existuje více postupů, jak tuto klasifikaci popsat, v této přednášce použijeme infinitesimální přístup Cartana a Killinga, kde se representace (jednoduše souvislých) Lieových grup klasifikují pomocí representací odpovídajících Lieových algeber.

1.2. Lieovy grupy.

Definice 1. *Řekneme, že G je Lieova grupa, pokud G je současně grupa a hladká (resp. komplexní) varieta splňující podmínku kompatibility obou struktur, která říká, že zobrazení $(g, h) \in G \times G \to g{\cdot}h^{-1} \in G$ je hladké (resp. holomorfní).*

Mezi nejběžnější příklady Lieových grup patří libovolný vektorový prostor s operací sčítání (např. $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$); kružnice S^1 v komplexní rovině s operací násobení a grupa $GL(V)$ invertibilních lineárních zobrazení V do sebe s operací skládání.

Definice 2. *Representací Lieovy grupy na vektorovém prostoru V se rozumí zobrazení $\rho : G \to GL(V)$, které je homomorphismus grup a současně hladké (resp. v případě, že G je komplexní Lieova grupa a V je komplexní vektorový prostor holomorfní) zobrazení.*

V této přednášce budeme zkoumat převážně maticové grupy (t.j. podgrupy v grupě $GL(V)$). Jejich tautologická representace na V se obvykle nazývá definující representace.

Representace ρ je hladké zobrazení a tak její tečné zobrazení

$$\rho_* : T_e G \to T_e GL(V)$$

je dobře definováno. Infinitesimální metoda klasifikace representací charakterisuje nejdříve podtřídu lineárních zobrazení těchto tečných prostorů, které lze napsat jako tečné zobrazení nějakého homomorfismu a pak tuto množinu zkoumá a klasifikuje.

Aby bylo možné tuto charakterizaci napsat, je nejdříve třeba zavést na $T_e G$ strukturu Lieovy algebry.

1.3. Lieovy algebry.

Definice 3. *Řekneme, že reálný (resp. komplexní) vektorový prostor L je Lieova algebra, pokud je dána bilineární (resp. komplexní bilineární) operace "závorka" $[.,.]$ na V s hodnotami ve V taková, že platí:*
i) $[X,Y] = -[Y,X];\ X,Y \in L;$
ii) (Jacobiho identita) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0;\ X,Y,Z \in L.$

Definice 4. *Nechť L, L' jsou dvě Lieovy algebry. Řekneme, že lineární zobrazení $\varphi : L \to L'$ je homomorfismus Lieových algeber, pokud platí*

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)];\ X,Y \in L.$$

Homomorfismus Lieovy algebry L do $gl(V)$ se nazývá representace Lieovy algebry L na V.

Mezi nejjednodušší příklady Lieových algeber patří libovolný vektorový prostor L s triviální závorkou (tzv. komutativní Lieovy algebry). Je-li L libovolná asociativní algebra s multiplikativní operací $\circ$, pak lze definovat závorku jako komutátor:

$$[X,Y] := X \circ Y - Y \circ X.$$

Příkladem může být algebra $gl(V)$ všech lineárních zobrazení V do sebe s operací skládaní zobrazení. Většina Lieových algeber, které potkáme, budou podalgebry této algebry.

Důležitý příklad, který je vyjímkou, je (nekonečně-dimensionální) vektorový prostor $\mathcal{X}(M)$ všech hladkých vektorových polí na varietě M.

Naším cílem teď bude definovat kanonickou strukturu Lieovy algebry na tečném prostoru T_eG Lieovy grupy G. Význam této definice a zároveň přesnější vyjádření Cartanovy metody klasifikace representací je vidět z následujících dvou vět:

Věta 1. *Nechť G, H jsou Lieovy grupy, nechť G je souvislá. Pak každý homomorfismus $\rho : G \to H$ je jednoznačně určen svým tečným zobrazením $\rho_* : T_eG \to T_eH$.*

Věta 2. *Nechť G, H jsou Lieovy grupy, nechť G je jednoduše souvislá. Nechť $L(G)$, resp. $L(H)$ označuje tečné prostory G, resp. H s jejich kanonickou strukturou Lieové algebry. Pak přiřazení*

$$\rho : G \to H \longleftrightarrow \rho_* : L(G) \to L(H)$$

je vzájemně jednoznačné zobrazení homomorfismů G do H a homomorfismů $L(G)$ do $L(H)$.

Důkaz (ne zcela kompletní) těchto vět bude naším prvním cílem.

1.4. Lieovy algebry Lieových grup.

Definice 5. *Pro libovolný element $g \in G$ označme $L_g : h \in G \to gh \in G$ levé násobení na G; analogicky $R_g : h \in G \to hg \in G$ označuje pravé násobení.*

Vektorové pole X na Lieově grupě G se nazývá levoinvariantní, pokud

$$(L_g)_*(X) = X \text{ t.j. } (L_g)_*[X(h)] = X(gh);\ h \in G.$$

Vektorový prostor všech levoinvariantních vektorových polí na G označíme symbolem $\mathcal{X}_{\mathrm{inv}}(G)$.

Věta 3. *Nechť G je Lieova grupa. Pro libovolné $v \in T_eG$ definujeme levoinvariantní vektorové pole $X_v \in \mathcal{X}_{\text{inv}}(G)$ předpisem*

$$X_v(g) := (L_g)_* v \in T_gG.$$

Pak X_v je hladké vektorové pole na G a přiřazení $v \mapsto X_v$ je isomorfismus vektorových prostorů T_eG a $\mathcal{X}_{\text{inv}}(G)$.

Důkaz.

(1) Zobrazení je dobře definováno, t.j. $X_v \in \mathcal{X}_{\text{inv}}(G)$, neboť

$$(L_h)_*[X_v(g)] = (L_h)_*[(L_g)_* v] = (L_{hg})_* v = X_v(hg).$$

Z definice tečného zobrazení plyne, že pokud $v = \gamma'(0)$, $\gamma(0) = e$, kde γ je křivka v G, pak

$$(L_g)_* v = \tfrac{d}{dt}[g\,\gamma(t)]_{t=0},$$

takže hladkost pole X_v je důsledkem hladkosti násobení v definici Lieovy grupy (což se snadno ověří v lokálních souřadnicích).

(2) Zobrazení je na, neboť je-li $X \in \mathcal{X}_{\text{inv}}(G)$, pak

$$X(g) = (L_g)_*[X(e)] = X_{\{X(e)\}}.$$

(3) Zobrazení je prosté, neboť $X_v(e) = v$.

□

Právě dokázané ztotožnění nám umožní zavést kanonickou strukturu Lieovy algebry na T_eG. Stačí si rozmyslet, že komutátor dvou levoinvariantních polí je opět levoinvariantní pole. Závorka je pak definována jako komutátor. Pro to (a pro budoucí další účely) se budou hodit následující tvrzení.

Věta 4. *Nechť $\Phi : M \to N$ je hladké zobrazení variet a nechť $X \in \mathcal{X}(M)$, $Y \in \mathcal{X}(N)$. Pak jsou ekvivalentní tvrzení*

(1) $\Phi_*(X(p)) = Y(\Phi(p))$, *pro všechny* $p \in M$;
(2) $Y(f) \circ \Phi = X(f \circ \Phi)$, *pro všechny* $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$.

Je-li jedna z těchto podmínek splněna, řekneme, že vektorová pole X a Y jsou Φ-svázaná označíme to stručně rovností

$$\Phi_*(X) = Y.$$

Důkaz. Připomeňme si, že je-li $v \in T_pM$, pak $\Phi_* v \in T_{\Phi(p)}N$ je definováno předpisem

$$(\Phi_* v)(f) = v(f \circ \Phi).$$

Platí tedy pro všechny $p \in M$ a pro všechny $f \in \mathbb{C}^\infty(N)$

$$\Phi_*(X(p))(f) = X(p)[f \circ \Phi] = X(f \circ \Phi)(p); Y(\Phi(p))(f) = Y(f)(\Phi(p)) = [Y(f) \circ \Phi](p)$$

□

Velmi užitečnou informaci o komutátorech Φ-svázaných polí poskytuje následující věta.

Věta 5.

(1) *Jsou-li* $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$; $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$ *a platí-li* $\Phi_*(X_i) = Y_i$; $i = 1, 2$, *pak*

$$\Phi_*([X_1, X_2]) = [Y_1, Y_2].$$

(2) *Vektorový prostor* $\mathcal{X}_{\text{inv}}(G)$ *levoinvariantních vektorových polí je uzavřený vůči operaci komutátoru, která na něm (a tedy i na* T_eG*) definuje kanonickou strukturu Lieovy algebry.*

Důkaz. Z Věty 3. plyne, že pro všechny $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ platí

$$Y_1(Y_2(f)) \circ \Phi = X_1(Y_2(f) \circ \Phi) = X_1(X_2(f \circ \Phi))$$

a tedy

$$[Y_1, Y_2](f) \circ \Phi = [X_1, X_2](f \circ \Phi).$$

Druhá část věty plyne z toho, že levoinvariantní vektorová pole jsou definovaná podmínkou $(L_g)_*(X) = X$. $\square$

Označení. Je-li G Lieova grupa, pak Lieovu algebru $T_eG \equiv \mathcal{X}_{\text{inv}}(G)$ s její výše definovanou kanonickou strukturou značíme obvykle symbolem $L(G)$ nebo odpovídajícími gotickými písmeny, v našem případě $\mathfrak{g}$. Pro klasické lienární grupy používáme stejné symboly jako pro odpovídající grupu, jen nahradíme úvodní velká písmena malými, např. $gl(V), so(n, \mathbb{C})$.

Je-li φ hladká křivka na varietě M, definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pak symbolem $\varphi'(t) \in T_{\varphi(t)}M$ budeme označovat vektor $\varphi_*(\frac{d}{dt})$, t.j. obraz jednotkového vektoru v $\mathbb{R}$ při tečném zobrazení φ_*. Je-li (U, Ψ) mapa na M, pak souřadnice vektoru $\varphi_*(\frac{d}{dt})$ tvoří vektor $\frac{d(\Psi \circ \varphi)}{dt} \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. V dalším bychom chtěli ještě lépe popsat vztah mezi Lieovou grupou a její Lieovou algebrou a zavést si jisté kanonické zobrazení (nazývané exponenciela) z Lieovy algebry do Lieovy grupy.

Budeme přitom potřebovat některá fakta o řešeních soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Připomeňme si proto, že je-li M varieta a X hladké vektorové pole na M, pak rovnice

$$\varphi'(t) = \mathcal{X}(\varphi(t)), \ t \in I \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

pro hladkou křivku φ v M má v lokálních souřadnicích (U, Ψ) tvar soustavy obyčejných diferenciálních rovnic pro křivku $\Psi \circ \varphi$ v $\mathbb{R}^n$. Budeme níže bez dalšího ověřování používat standardní věty o (lokální) existenci, (globální) jednoznačnosti řešení a spojité závislosti na parametrech pro soustavy obyčejných diferenciálních rovnic i pro řešení φ rovnice (1) (které se obvykle nazývají integrální křivky daného vektorového pole X).

Definice 6. *Nechť G je Lieova grupa. Homomorfismy $\theta : \mathbb{R} \to G$ se nazývají jednoparametrické podgrupy groupy G.*

Věta 6. *Zobrazení*

$$\theta \mapsto \theta'(0) \in T_eG$$

je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny jednoparametrických podgrup v G na T_eG.

Důkaz.

(1) Každý homomorfismus zobrazuje jednotku na jednotku, tedy $\theta(0) = e$, tedy $\theta'(0) \in T_eG$.

(2) *Jednoznačnost.* Podmínka, že θ je homomorfismus - $\theta(s+t) = \theta(s)\theta(t)$ - je ekvivalentní s tvrzením, že diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "L_t"'] & G \arrow[d, "L_{\theta(t)}"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\theta"] & G \end{tikzcd}$$

komutuje pro všehna $T \in \mathbb{R}$. Důsledkem je to, že také diagram

$$\begin{tikzcd} T_0\mathbb{R} \arrow[r, "\theta_*"] \arrow[d, "(L_t)_*"'] & T_eG \arrow[d, "(L_{\theta(t)})_*"] \\ T_t\mathbb{R} \arrow[r, "\theta_*"] & T_{\theta(t)}G \end{tikzcd}$$

komutuje pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Uvažujme vektor $(0, \frac{d}{dt})$ a jeho dva obrazy v tomto komutativním diagramu. Na jednu stranu je to $\theta_*((t, \frac{d}{dt})) = \theta'(t)$ a na druhou stranu se tento obraz rovná vektoru $(L_{\theta(t)})_*(\theta'(0))$, což je hodnota levoinvariantního vektorového pole $X_{\theta'(0)}$ v bodě $\theta(t)$. Tedy jednoparamaterická podgrupa θ je integrální křivka jistého vektorového pole určeného pouze vektorem $\theta'(0)$ a stačí použít větu o jednoznačnosti pro integrální křivky vektorového pole.

(3) *Existence.* Nechť je dán vektor $v \in T_eG$. Rovnice $\theta'(t) = X_v(\theta(t))$ s počáteční podmínkou $\theta(0) = e$ má řešení na jistém intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Ukážeme nejdříve, že navíc pro všechny $s, t \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ platí

$$\theta(s+t) = \theta(s)\theta(t). \tag{2}$$

Zvolme $s \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ pevně. Označíme-li $\varphi(t) := \theta(s+t)$, pak $\varphi'(t) = X_v(\varphi(t))$. Označíme-li $\varphi(t) := \theta(s)\theta(t)$, pak

$$\varphi'(t) = (L_{\theta(s)})_*(\theta'(t)) = (L_{\theta(s)})_*[(L_{\theta(s)})_*v] = (L_{\theta(s)\theta(t)})_*v.$$

Tedy obě strany rovnosti (2) jsou pro s pevné integrální křivky vektorového pole X_v a jejich hodnoty v bodě t splývají; stačí tedy použít opět větu o jednoznačnosti pro integrální křivky. Povšimněte si, že rovnost (2) má automaticky za následek, že $\theta(t)\theta(s) = \theta(s)\theta(t)$.

Rozšiřme nyní křivku θ na celé $\mathbb{R}$ předpisem

$$\psi(t) := (\theta(t/N)), \quad \text{pokud } |t/N| < \varepsilon/2, N \in \mathbb{N}.$$

Z rovnosti (2) plyne ihned, že pokud $M, N \in \mathbb{N}$ jsou taková, že $t/N, t/M \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$, pak

$$(\theta(t/N))^N = (\theta(t/NM))^{NM} = (\theta(t/M))^M,$$

tedy zobrazení ψ je dobře definováno. Navíc

$$\psi(s+t) = (\theta((s+t)/N))^N = [\theta(s/N)\theta(t/N)]^N = \psi(s)\psi(t), \; s, t \in \mathbb{R}.$$

□

Definice 7. *Nechť G je Lieova grupa. Pak definujeme zobrazení* $\exp : T_eG \to G$ *předpisem*

$$\exp(v) = \theta_v(1), \; v \in T_eG.$$

Věta 7.

(1) *Zobrazení* exp *je hladké;*
(2) *Je-li $v \in T_eG$, pak zobrazení $\theta : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tv)$ je jednoparametrická podgrupa odpovídající vektoru $v = \theta'(0)$;*
(3)
$$(\exp)_* = Id : T_eG \to T_eG;$$
(4) *Diagram*
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow[\varphi]{} & H \end{array}$$
komutuje pro všechny homomorfismy $\varphi : G \to H$.

Důkaz.

(1) Zobrazení
$$(g, v) \in G \times \mathfrak{g} \mapsto (L_g)_* v \in T\,G; \; \mathfrak{g} \equiv T_eG$$
je hladká trivializace tečného prostoru $T\,G$, neboť levé násobení je hladké zobrazení. Levoinvariantní pole odpovídají v této trivializaci konstantním zobrazením a tak závislost levoinvariantního pole X_v na v je hladká. Z toho plyne, že i integrální křivka $\theta(t) = \exp(tv)$ levoinvariantního pole X_v závisí hladce na v.
(2) Připomeňme, že θ_v označuje jednoparametrickou podgrupu odpovídající vektoru $v \in T_eG$, t.j. že $\theta'_v(0) = v$. Je-li $v \in T_eG$ a $s \in \mathbb{R}$ pevné, pak je zřejmě $\theta_v(st)$ jednoparametrická podgrupa v proměnné t a $\frac{d}{dt}[\theta_v(st)]_{|t=0} = sv$. To znamená, že $\theta_v(st) = \theta_{sv}(t)$. Z definice zobrazení exp tedy plyne, že
$$\exp(sv) = \theta_{sv}(1) = \theta_v(s).$$
(3) Zobrazení $\gamma(t) = tv$ je křivka v T_eG, pro kterou platí $\gamma(0) = 0, \gamma'(0) = v$. Tedy
$$(\exp)_*(v) = \frac{d}{dt}[\exp(\gamma(t))]_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\theta_v)_{|t=0} = v.$$
(4) Nechť φ je homomorfismus z G do H. Je-li θ_v jednoparametrická podgrupa v G určená vektorem $v \in T_eG$, pak $\varphi \circ \theta_v$ je jednoparametrická podgrupa na H určená vektorem $(\varphi \circ \theta_v)'(0) = \varphi_*(\theta'_v(0)) = \varphi_*(v)$ a tedy
$$\varphi(\exp(v)) = \varphi(\theta_v(1)) = \exp(\varphi_*(v)).$$

□

Poznámka. Název exponenciální zobrazení je odvozen z faktu, že pro nejdůležitější případ $G = GL(n,\mathbb{R})$ a $\mathfrak{g} = gl(n,\mathbb{R})$, je zobrazení exp je opravdu exponenciální zobrazení.

Teď už je vše připraveno, abychom dokázali Větu 1 a slabší versi Věty 2.

Důkaz Věty 1. Nechť tedy G je souvislá Lieova grupa a nechť φ_1, φ_2 jsou dva homomorfismy z G do Lieovy grupy H takové, že $(\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*$. Z Věty 8,(4) plyne, že $\varphi_1 = \varphi_2$ na $\exp(T_eG)$. Obraz T_eG při zobrazení exp je okolí jednotky v G. Je-li nyní A množina všech bodů G, ve kterých se oba homomorfismy rovnají, stačí ukázat, že A je neprázdná, otevřená i uzavřená v G. Zvolme $g \in A$, pak z definice homomorfismu plyne, že $\varphi_1 = \varphi_2$ na množině $\varphi_1(g)\cdot\exp(T_eG)$. Z toho plyne, že A je otevřená množina. Uzavřenost této množiny plyne ze spojitosti těchto homomorfismů. □

Věta 2'. *Jsou-li G a H dvě Lieovy grupy a je-li $\varphi : G \to H$ homomorfismus, pak $\varphi_* : T_eG \to T_eH$ je homomorfismus Lieových algeber.*

Důkaz. Podmínka
$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h),\ g, h \in G, \tag{3}$$
definující homomorfismus φ je ekvivalentní s požadavkem, že pro všechna $g \in G$ diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ {\scriptstyle L(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_{\varphi(g)}} \\ G & \xrightarrow[\varphi]{} & H \end{array}$$

komutuje.

Z toho ihned plyne, že i diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle L(g)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (L_{\varphi(g)})_*} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\varphi_*]{} & \mathfrak{h} \end{array}$$

komutuje, což je ekvivalentní s podmínkou

$$[L_{\varphi(g)}]_*(\varphi_*(X)) = \varphi_*[L(g)_*(X)],\ X \in \mathfrak{g}. \tag{4}$$

Uvažujme nyní levoinvariantní vektorová pole $\tilde{X}, \tilde{X}'$ určené vektory X a $X' = \varphi_*(X)$ a připomeňme, že

$$\tilde{X}(g) = L(g)_*(X),\ \tilde{X}'(\varphi(g)) = L_{\varphi(g)}]_*(X')$$

a že tedy podmínka (4) je ekvivalentní podmínce, že pole $\tilde{X}$ a $\tilde{X}'$ jsou φ-svázané. Z Věty 3 pak ihned plyne, že φ_* je homomorfismus Lieových algeber. □

Poznámka. Věta 1 a Věta 2' tedy říkají, že zobrazení, které homomorfismu φ Lieových grup přiřazuje homomorfismus φ_* odpovídajících Lieových algeber je dobře definované a prosté. Zbylá část Věty 2 (t.j. že pro G jednoduše souvislou je toto zobrazení surjektivní) vyžaduje více znalostí o jednoduše souvislých Lieových grupách a o principu monodromie a nebudeme ji proto dokazovat.

Pro názornost a pro lepší pochopení přidejme jen několik poznámek o principu, který umožňuje zrekonstruovat homomorfismus φ v okolí jednotky $e \in G$. Samotná (lokální) definice tohoto homomorfismu je ihned vidět z komutativního diagramu

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow[\varphi]{} & H \end{array}$$

dokázaného ve Větě 8. Tečné zobrazení k exp v jednotce je identita, a tak podle věty o inversním zobrazení je exp prostá na nějakém okolí U jednotky. Zobrazení φ je pak na $\exp(U)$ určeno jednoznačně tímto diagramem. Je ale potřeba ověřit, že je to (lokální) homomorfismus grup (a pak ev. ukázat, že jej lze rozšířit na celé G).

Existuje okolí V' jednotky v G takové, že $V' \cdot V' \subset \exp(U)$. Pak musí existovat funkce $f : V' \times V' \to V'$ taková, že pro všechny $X, Y \in V'$ platí

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp(f(X, Y)).$$

Pro případ maticových grup lze f napsat jako

$$f(X, Y) = \log[\exp X \cdot \exp Y]$$

a rekurentně vypočítat. Výsledek se nazývá Campbell-Haudorffova formule a je z ní vidět zásadní fakt, že je složená jen ze sčítání a iterovaných komutátorů (používají se tedy jen operace z odpovídající Lieovy algebry). Tatáž formule má smysl i pro obecný případ, kde je komutátor nahrazen Lieovou závorkou. Z toho pak plyne, že pro $X, Y \in V'$ platí

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\exp X \exp Y) & = & \varphi(\exp X)\varphi(expY) \\ \| & & \| \\ \varphi[\exp(f(X,Y)] & & \exp[\varphi_*(X)]\exp[\varphi_*(Y)] \\ \| & & \| \\ \exp[\varphi_*(f(X,Y))] & = & \exp[f(\varphi_*(X), \varphi_*(Y))] \end{array}$$

Z tohoto diagramu je pak ihned vidět, že φ je (lokální) homomorfismus Lieových grup právě když φ_* je homomorfismus odpovídajících Lieových algeber.

2. Klasifikace representací algebry $sl(2, \mathbb{C})$ a $sl(3, \mathbb{C})$.

V celé této přednášce uvažujeme jen (konečně-dimensionální) representace na *komplexních* vektorových prostorech. Representace na reálných vektorových prostorech se dají odvodit z těchto komplexních representací vcelku jednoduchým postupem (který však nebudeme rozebírat).

2.1. Základní fakta o representacích.

Definice 8. *Nechť ρ je representace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V. Řekneme, že podprostor V' je invariantní podprostor V, pokud pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ platí $\rho(X)(V') \subset V'$. Pak ρ indukuje restrikci $\rho|_{V'}$ na V' (danou restrikcí $\rho(X)$ na V') - a faktor-representaci $\rho_{V/V'}$ na V/V' (danou faktor-zobrazením indukovaným na V/V').*

Řekneme, že representace ρ na V je irreducibilní, pokud V nemá žádné netriviální invariantní podprostory.

Je-li ρ representace $\mathfrak{g}$ na V, pak definujeme duální neboli kontragradientní representaci ρ^* na V^* takto:

$$< [\rho^*(X)](v^*), v >=< v^*, -[\rho(X)](v) >, \; X \in \mathfrak{g},$$

kde $< .,. >$ je dualita mezi V a V^*.

Jsou-li ρ_1, ρ_2 representace $\mathfrak{g}$ na V_1, V_2, pak definujeme representace $\rho_1 \oplus \rho_2$ resp. $\rho_1 \otimes \rho_2$ na $V_1 \oplus V_2$, resp. $V_1 \otimes V_2$ pomocí zobrazení

$$\rho_1(X) \oplus \rho_2(X), \quad \textit{resp.} \quad \rho_1(X) \otimes Id + Id \otimes \rho_2(X); \; X \in \mathfrak{g}$$

na $V_1 \oplus V_2$, resp. $V_1 \otimes V_2$.

Je-li ρ representace $\mathfrak{g}$ na V, pak podprostory $\Lambda^k(V)$ a $\odot^k(V)$ jsou invariantní podprostory $\otimes^k(V)$; definujeme tedy representace $\wedge^k \rho$ a $\odot^k \rho$ jako zúžení representace $\otimes^k \rho$ na tyto podprostory.

Jsou-li ρ_1, ρ_2 representace $\mathfrak{g}$ na V_1, V_2, pak nazveme zobrazení $\varphi : V_1 \to V_2$ splétající zobrazení nebo equivariantní zobrazení, pokud pro všechny $X \in \mathfrak{g}$ diagram

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ {\scriptstyle \rho_1(X)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_2(X)} \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \end{array}$$

komutuje. Řekneme, že dvě representace jsou isomorfní, pokud existuje splétající zobrazení mezi nimi, které je zároveň isomorfismem příslušných vektorových prostorů.

Řekneme, že representace ρ je rozložitelná, pokud je isomorfní se (konečným) součtem irreducibilních representací.

Pojmy v této definici se definují stejně v obou ze dvou základních případů - buď uvažujeme jen reálné representace, nebo jen komplexní representace.

2.2. Klasifikace representací algebry $sl(2, \mathbb{C})$.

1 Jak víme, nejjednodušší ze zajímavých Lieových algeber je algebra $sl(2, \mathbb{C})$ t.j. algebra všech 2×2 komplexních matic s nulovou stopou. Tato algebra má dimensi 3, vyberme si např. tuto její basi

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lieova závorka je bilineární operace, takže struktura Lieovy algebry na $sl(2, \mathbb{C})$ je jednoznačně určena závorkami elementů base. Jediné takovéto netriviální závorky jsou

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Chceme teď zkoumat representace této algebry (lépe řeceno třídy navzájem isomorfních representací). To se dá také říct tak, že hledáme ve čtvercových maticích nějakého řádu k 3 matice se stejnými komutačními relacemi, jako mají H, X, Y. Zkusit řešit tuto úlohu je obtížné už pro 3×3 matice, není vidět na první pohled, jak postupovat.

Zatím známe jen 2 příklady representací, t.j. definující representaci na $\mathbb{C}^2$ a triviální representaci, kdy se všem třem elementům H, X, Y přiřadí 1, t.j. jednotková 1×1 matice. Pomocí nich se snadno sestrojí 3×3 matice se stejými komutátory, a to

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To je ovšem totéž, jako bych řekl, že definuji representaci na $\mathbb{C}^3$ jako součet již známých representací na $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}$.

To je zároveň příklad toho, že složitější representace se mohou rozkládat na součet jednodušších. Princip klasifikace je ten, že se vezme v úvahu obecný a základní fakt (který v tuto chvíli nebudeme dokazovat), že každá representace $sl(2,\mathbb{C})$ se rozloží na součet irreducibilních representací a hledá se pak pouze klasifikace irreducibilních representací. Tří-dimensionální representace, kterou jsme právě sestrojili, tedy není irreducibilní a je součet dvou irreducibilních representací (zkuste si rozmyslet, že definující representace je vskutku irreducibilní!).

Postup při klasifikaci irreducibilních representací si rozdělíme na několik kroků. Klíč k této klasifikaci je nápad, zkusit si rozmyslet, jaké vlastní čísla má (či může mít) v dané irreducibilní representaci matice, representující element H. Pro jednoduchost označení se dohodněme, že nemůže-li dojít k nedorozumění kterou representaci ρ algebry $\mathfrak{g}$ na V máme na mysli, pak pro $X \in \mathfrak{g}$ element $[\rho(X)](v)$ označíme jednoduše $X(v)$.

Věta 8. *Nechť ρ je irreducibilní representace $sl(2,\mathbb{C})$ na V a $\alpha \in \mathbb{C}$. Nechť V_α označuje podprostor všech vlastních vektorů zobrazení $\rho(H)$, odpovídajících vlastnímu číslu α, t.j.*

$$V_\alpha = \{v \in V | H(v) = \alpha \cdot v\}.$$

Pak V_α je nenulový jen pro konečně mnoho α a platí

$$V = \oplus_\alpha V_\alpha.$$

(Součet je množno brát jako součet přes všechny α, neboť stejně jen konečně mnoho sčítanců je netriviálních.)

Podle definice, zobrazení $\rho(H)$ zachovává všechny podprostory V_α. Chování zobrazení $\rho(X)$ a $\rho(Y)$ je popsáno v následujícím jednoduchém. ale zcela základním lemmatu.

Lemma.

$$[\rho(X)](V_\alpha) \subset V_{\alpha+2}, \quad [\rho(Y)](V_\alpha) \subset V_{\alpha-2}. \tag{1}$$

Důkaz. Stačí použít jednoduchou rovnost

$$H(X(v)) = [H, X](v) + X(H(v)) = 2X(v) + X(\alpha \cdot v) = (\alpha + 2)v$$

a její obdobu pro Y. $\square$

Důkaz Věty 10. Lineární zobrazení representující element H má na komplexním vektorovém prostoru alespoň jeden vlastní vektor. Z toho plyne, že existuje alespoň jedno $\alpha \in \mathbb{C}$, pro které je V_α netriviální. Nechť $v \in V_\alpha$ je vybráno pevně. Pak $X^j(v)$ patří do $V_{\alpha+2j}$ pro všechna j, ale jen konečně mnoho z nich může být nenulových (vlastní vektory pro různá vlastní čísla jsou lineárně nezávislé). Existuje tedy $\mu \in \mathbb{C}$ a vektor $w \in V_\mu$ takový, že $w \neq 0, X(w) = 0$.

Uvažujme nyní vektory $Y^k(w)$ a najděme nejmenší n přirozené takové, že

$$Y^n(w) \neq 0, Y^{n+1}(w) = 0. \tag{2}$$

Ukážeme nyní, že vektory $w, Y(w), Y^2(w), \cdot, Y^n(w)$ generují celé V. Označme W lineární obal těchto vektorů. Zobrazení H i Y zřejmě zobrazují W do sebe. Totéž je pravda i pro X, neboť

$$X(Y(w)) = [X,Y](w) + Y(X(w)) = \mu{\cdot}w,$$
$$X(Y^2(w)) = [X,Y](Y(w)) + Y(X(Y(w))) = H(Y(w)) + Y(\mu{\cdot}w) = [(\mu-2)+\mu]{\cdot}w,$$

a obecně (indukcí)

$$X(Y^j(w)) = j(\mu - j + 1){\cdot}Y^{j-1}(w). \tag{3}$$

W je tedy invariantní podprostor V a protože V je irreducibilní, rovná se V.

Z toho ihned plyne, že V_α je netriviální právě pro $\alpha \in \{\mu, \mu-2, \dots, \mu-2n\}$, že každé vlastní číslo je jednonásobné a že platí tvrzení věty. $\square$

Je tedy vidět, že jsme dokázali něco navíc, totiž že vlastní vektory libovolné ireducibilní representace tvoří nepřerušený "řetízek" o 2 se lišících čísel. Při podrobnějším zkoumání ale je možné z výše uvedeného důkazu dostat ještě podstatně a překvapivě silnější tvrzení, které - jak uvidíme později - je základem všech pozdějších informací o klasifikaci irreducibilních representací všech jednoduchých Lieových algeber.

Věta 9. *Pro každou irreducibilní representaci $sl(2,\mathbb{C})$ jsou vlastní čísla zobrazení H* **celá** *a existuje n přirozené takové, že V_α jsou netriviální právě pro α z množiny $n, n-2, n-4, \dots, -n+2, -n$.*

Důkaz. Při stejném označení jako v důkaze předchozí věty víme, že platí rovnosti (2) a (3). Pro $j = n+1$ z těchto rovností dostaneme, že

$$0 = X(Y^{n+1}(w)) = (n+1)(\mu - n){\cdot}Y^n(w),$$

ale protože $Y^n(w) \neq 0$, musí být $\mu = n$. $\square$

Tím jsme se o irreducibilních representacích $sl(2,\mathbb{C})$ dozvěděli vše podstatné a stačí si jen utřídit získaná fakta. Konstrukce více rozměrných representací je nyní již lehká. Pokud např. 3-dimensionální representace na $\mathbb{C}^3$ existuje, je v basi $w, Y(w), Y^2(w)$ dána maticemi

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Snadno se ověří, že tyto matice mají požadované komutační relace a že tedy 3-dimensionální representace existují. Zároveň je také vidět, že všechny 3-dimensionální representace jsou navzájem isomorfní (jsou-li V, V' dvě takové representace, pak v nich obou existuje baze tvaru $Y^j(w), Y^j(w')$ sestrojená v důkazu poslední věty a zobrazení, které je na sebe zobrazí, je isomorfismus representací; akce generátorů H, X, Y je v obou stejná). Přesně stejně se nyní dokáže následující klasifikační věta.

Věta 12. *(Klasifikace irrep. $sl(2,\mathbb{C})$. Nechť $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak matice*

$$H_{ij} = (n-2i)\delta_{ij}; \quad X_{ij} = (n-j+1)j\delta_{i+1,j}; \quad Y_{ij} = \delta_{i,j+1}$$

definují $(n+1)$-dimensionální irreducibilní representaci D_n algebry $sl(2,\mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^{n+1}$. Žádné dvě z těchto representací nejsou isomorfní a libovolná jiná irreducibilní representace je isomorfní s některou z nich.

Důkaz.

Nechť V je libovolná irreducibilní representace dimense rovné $n+1$. Pak důkaz Věty 10 ukazuje, že v bazi $\{Y^j(w)\}$, $j = 0, \dots, n$ jsou elementy H, X, Y representovány právě uvedenými maticemi. Z toho plyne, že pak pro toto n matice definované ve větě definují representaci a že representace V a D_n jsou isomorfní. Representace různých dimensí nemohou být isomorfní.

Stačí tedy ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje irreducibilní representace dimense $n+1$.

To lze udělat takto:

Definujeme-li matice H, X, Y tak jako ve znění věty, stačí přímočaře ověřit, že matice popsané ve větě mají správné komutační relace. Tím je tedy definována representace D_n algebry $sl(2,\mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^{n+1}$. Stačí ověřit, že D_n jsou irreducibilní (pro $n > 0$). Nechť W je netriviální invariantní podprostor, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že W je irreducibilní representace (indukce vzhledem k dimensi W). Nechť dimense W je $j+1$, $j < n$ Pak lze podle předchozí věty napsat W jako součet $W_{-j} \oplus \dots \oplus W_j$ a zřejmě (vlastní vektory jsou jednonásobné) $V_i = W_i$, $-j \le i \le j$. Pak ale akce X na W_j musí být triviální, zatímco akce X na V_j je netriviální, což je spor.

□

2.3. Klasifikace representací algebry $sl(3,\mathbb{C})$.

Poznámka. V tomto paragrafu bychom chtěli klasifikovat irreducibilní representace algebry $sl(3,\mathbb{C})$. K tomu několik poznámek. Na první pohled tato myšlenka vzbuzuje jisté pochybnosti, protože je jasné, že není možné probírat nekonečné posloupnosti klasických Lieových algeber jednu po druhé. Důvod pro tento postup je prostý - ukáže se, že metody a pojmy nezbytné pro popis representací $sl(3,\mathbb{C})$ už jsou natolik obecné, že je prakticky beze změny bude možno použít ve všech dalších případech; navíc je tento případ průzračný, jednoduchý a zcela explicitní.

Hlavní myšlenka klasifikace representací $sl(2,\mathbb{C})$ byla zkoumat vlastní čísla zobrazení $\rho(H)$. Otázka, jestli je možné totéž udělat v dimensi 3. Bylo by možné opět vybrat jeden význačný element algebry a zkoumat odpovídající vlastní vektory a vlastní čísla. Ukazuje se však, že je možné (a velmi účinné) zkusit získat obsáhlejší informaci zkoumáním společných vlastních vektorů celé skupiny operátorů. Proč jsme to neudělali už v dimensi 2?

Odpověď je prostá. Každý fyzik ví (a je to klíčová informace pro popis měření v kvantové mechanice), že lze hledat společné vlastní vektory pro celou třídu operátorů najednou, pokud všechny operátory této třídy spolu navzájem komutují. V dimensi 2 byly komutativní podalgebry (t.j. lineární podprostory na nichž je komutátor triviální) pouze jednodimensionální. Bývá zvykem nazývat maximální komutativní podalgebry Cartanovými podalgebrami. V dimensi 3 je nejprostší uvažovat podalgebru $\mathfrak{h}$ diagonálních matic v $sl(3,\mathbb{C})$, která tvoří dvou-dimensionální vektorový prostor.

2.3.1 Něco víc o $\mathfrak{g} = sl(3,\mathbb{C})$.

Nejdřív najdeme vhodnou basi $\mathfrak{g}$ a zkusíme si rozmyslet, jaké jsou komutační relace jednotlivých dvojic prvků z base. Prostor $\mathfrak{h}$ diagonálních matic

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

má basi

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tyto dva prvky se dají doplnit na basi celé algebry pomocí matic (důvod pro zvláštní indexy bude zřejmý za chvíli)

$$X_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_{-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je jednoduché spočítat, jak vypadají komutátory jednotlivých prvků base. Prvky z $\mathfrak{h}$ spolu navzájem komutují. Přímý (a jednoduchý) výpočet ukazuje, že komutátor $H \in \mathfrak{h}$ s některým z dalších 6 prvků base je násobek tohoto prvku a že příslušný koeficient je lineární funkce na $\mathfrak{h}$. Například

$$[H, X_{\alpha_1}] = \alpha_1(H)\cdot X_{\alpha_1},\ \alpha_1 \in \mathfrak{h}^*, \alpha_1(H) = a_1 - a_2.$$

Tento fakt (porovnejte ho s chováním generátorů $sl(2,\mathbb{C})$) vede k následující definici.

Definice 9. *Nechť $\mathfrak{g} = sl(3,\mathbb{C})$. Definujme lineární podprostory $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{h}^*$ takto:*

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} | [H,X] = \alpha(H)\cdot X, H \in \mathfrak{h}^*\}. \tag{4}$$

Je-li $\alpha \in \mathfrak{h}^*, \alpha \neq 0$ takové, že $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, pak α nazveme <u>kořen</u> a odpovídající $\mathfrak{g}_\alpha$ nazveme <u>kořenový podprostor</u> $\mathfrak{g}$. Symbolem R označíme množinu všech kořenů $\mathfrak{g}$ a symbolem

$$\Lambda_R := \{\alpha | \alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2,\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

označíme mříž generovanou v rovině všemi kořeny.

Poznámka. Označme $L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{h}^*$ prvky definované předpisem

$$L_i(H) = a_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Tyto prvky generují celé $\mathfrak{h}^*$, ale nejsou lineárně nezávislé. Abychom mohli kreslit jejich (reálné) lineární kombinace do roviny, je vhodné je nakreslit jako vrcholy rovnostraného trojúhelníka s těžištěm v počátku, pak je jejich součet nulový.

Snadno se spočítá, že množina všech kořenů $sl(3, \mathbb{C})$ je šestiprvková a obsahuje kořeny

$$\pm\alpha_1(H) := \pm(a_1 - a_2);\ \pm\alpha_2(H) := \pm(a_2 - a_3);\ \pm\alpha_3(H) := \pm(a_1 - a_3).$$

Prvky $X_{\pm\alpha_i}$ generují jednodimensionální kořenové podprostory $\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}$ je ihned vidět, že jsme algebru $\mathfrak{g}$ rozložili takto:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \{\oplus_{\alpha \in R}\ \mathfrak{g}_\alpha\}. \tag{5}$$

Zbývající komutátory v algebře (jak se snadno spočítá) splňují

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}. \qquad \text{Cvičení!} \tag{6}$$

Rozklad (5) a příslušné komutační relace dávají úplnou představu o struktuře algebry $\mathfrak{g}$.

Obr.1.

2.3.2 Rozklad na váhové podprostory. Nechť V je irreducibilní representace $\mathfrak{g}$. Podle ideje vysvětlené v úvodu se budeme snažit najít společné vlastní vektory zobrazení, které representují prvky z H.

Definice 10. *Pro libovolné $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definujeme podprostor*

$$V_\lambda := \{v \in V | H(v) = \lambda(H) \cdot v,\ H \in \mathfrak{h}\}.$$

Je-li $V_\lambda \neq \{0\}$ pro nějaké $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, řekneme, že λ je váha representace V, vektor $v \in \mathcal{V}_\lambda, v \neq 0$ nazveme váhový vektor a V_λ váhový podprostor.

Věta 11. *Nechť V je irreducibilní representace $\mathfrak{g}$, pak*

$$V = \oplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda, \tag{7}$$

kde součet je ve skutečnosti konečný (sčítá se přes všechny váhy V).

Je-li λ nějaká váha V, pak všechny váhy λ jsou prvky množiny $\lambda + \Lambda_R$.

Důkaz.

(1) Nejdříve dokážeme, že vždy existuje alespoň jedna váha. Pro zobrazení representující prvek H_1 existuje alespoň jeden vlastní vektor $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$ s vlastním číslem $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Označme A_{λ_1} odpovídající vlastní podprostor ve V. Je-li $w \in A_{\lambda_1}$, pak

$$H_1[H_2(w)] = H_2[\lambda_1 \cdot w] = \lambda_1 \cdot H_2(w),$$

tedy $H_2(A_{\lambda_1}) \subset A_{\lambda_1}$. Pak tedy musí existovat nenulový vektor $v_2 \in A_{\lambda_1}$ takový, že $H_2(v_2) = \lambda_2 \cdot v_2, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Tento vektor pak patří do

$$V_\lambda,\ \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ \lambda(a_1 H_1 + a_2 H_2) = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$$

a λ je tedy váha V.

(2) Dalším bodem je dokázat jednoduchou, ale zcela principiální, relaci

$$\mathfrak{g}_\alpha(V_\lambda) \subset V_{\lambda+\alpha}. \tag{8}$$

To je ihned vidět ze vztahu

$$H(X_\alpha(v)) = [H, X_\alpha](v) + X_\alpha(H(v)) = \\ = \alpha(H)\cdot X_\alpha(v) + \lambda(H)\cdot X_\alpha(v) = [\alpha + \lambda](H)\cdot X_\alpha(v).$$

(3) Vzhledem k tomu, že vlastní vektory pro různá vlastní čísla jsou lineárně nezávislá, je množina všech vah konečná. Ze vztahu (7) ihned plyne, že $\oplus_{\alpha \in R} V_{\lambda+\alpha}$ (součet je konečný) je netriviální invariantní podprostor a že se tedy rovná V.

□

2.3.3 Váhová mříž, Weylova komora. Právě dokázaná věta je podstatným krokem při snaze pochopit strukturu irreducibilních representací, ale ne posledním krokem. Jako tomu bylo pro representace $sl(2,\mathbb{C})$, váhy representací nemohou být jen tak nějaké prvky komplexního prostoru $\mathfrak{h}^*$, ale musí být v jistém smyslu celočíselné. Postupovat obdobně jako pro $sl(2,\mathbb{C})$ by bylo příliš složité, je pohodlnější využít toho, že v $sl(3,\mathbb{C})$ je dostatek podalgeber isomorfních $sl(2,\mathbb{C})$.

Přidejme ke dvěma prvkům $X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_1}$ jejich komutátor

$$H_{\alpha_1} = [X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a uvědomme si, že

$$[H_{\alpha_1}, X_{\pm\alpha_1}] = \pm\alpha_1(H_{\alpha_1})\cdot X_{\pm\alpha_1} = \pm 2\cdot X_{\pm\alpha_1}.$$

Tedy H_{α_1}, X_{α_1}, $X_{-\alpha_1}$ jsou standardní generátory $sl(2,\mathbb{C})$-podalgebry sl_{α_1} (podstatná je relace $\alpha(H_\alpha) = 2!$) a každá representace $\mathfrak{g}$ je tedy zároveň representací sl_{α_1}. Je možné tedy očekávat, že je-li λ váha representace, bude muset být $\lambda(H_{\alpha_1})$ celé číslo. Totéž je pravda i pro další dvě obdobné podalgebry $sl_{\alpha_2}, sl_{\alpha_3}$ a to již bude úplná informace. To vede k následující definici.

Definice 11. *Nechť $H_{\alpha_i} = [X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}] \in \mathfrak{h}$, $i = 1, 2, 3$. Rozdělme množinu kořenů R na kladné kořeny, resp. záporné kořeny $R_\pm := \{\pm\alpha_i | i = 1, 2, 3\}$; $R = R_+ \cup R_-$.*

Řekneme, že kořen $\alpha \in R_+$ je jednoduchý kořen, pokud se nedá napsat jako součet dvou kladných kořenů.

Pak

$$\Lambda_W := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z},\ \alpha \in R\}$$

se nazývá váhová mříž a

$$\mathcal{W} := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(\alpha) \geq 0,\ \alpha \in R_+\}$$

se nazývá Weylova komora.

Vzhledem k tomu, že $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, je zřejmé že množina jednoduchých kořenů se skládá právě ze dvou kořenů α_1 a α_2. Je okamžitě vidět, že stačí ověřovat podmínky v definici váhové mříže a Weylovy komory jen pro jednoduché kořeny.

Je-li $\lambda = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$, pak

$$\lambda(H_{\alpha_1}) = \lambda_1 - \lambda_2,\ \lambda(H_{\alpha_2}) = \lambda_2,\ \lambda(H_{\alpha_3}) = \lambda_1.$$

Tedy λ patří do váhové mříže právě když $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ a λ patří do Weylovy komory právě když $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_2 \geq 0$.

Obr.2.

Věta 12. *(Klasifikace irreducibilních representací $sl(3.\mathbb{C})$.)*

(1) *Nechť V je irreducibilní representace $sl(3, \mathbb{C})$. Pak existuje nenulový vektor v_0 s vlastnostmi:*
   (i) v_0 je váhový vektor, t.j. existuje λ_0, $v_0 \in V_{\lambda_0}$,
   (ii) $X_\alpha(v_0) = 0$ pro všechny kladné kořeny $\alpha \in R_+$.
   Váha λ_0 se nazývá nejvyšší váha representace V a odpovídající vektor v_0 se nazývá vektor nejvyšší váhy V. Vektor nejvyšší váhy je určen jednoznačně (až na násobek).

(2) *Dvě representace jsou isomorfní právě když mají stejnou nejvyšší váhu.*

(3) *Množina všech nejvyšších vah všech irreducibilních representací je množina $\Lambda_W \cap \mathcal{W}$.*

Pro důkaz věty si připravíme dopředu jedno standardní a zcela obecné tvrzení. Jde o velmi jednoduchý, ale velmi často využívaný princip.

Věta 13. *(Schurovo lemma.) Nechť $\mathfrak{g}$ je libovolná Lieova algebra, nechť φ je homomorfismus mezi jejími dvěma representacemi V_1, V_2. Předpokládajme navíc, že V_1 je irreducibilní.*

Pak buď φ je triviální zobrazení, nebo φ je prosté.

Důkaz. Jádro $Ker(\varphi)$ je invariantní podprostor V_1, z irreducibility tedy plyne, že je to buď celé V_1, nebo $\{0\}$. $\square$

Důkaz věty 12.
(1) Zvolme vhodný lineární funkcionál l na $\mathfrak{h}^*$ tak, aby $l(\alpha) > 0$ pro všechny kladné kořeny α. Funkcionál l definuje částečné upořádání na $\mathfrak{h}^*$. To nám umožní postupovat analogicky jako v případu $sl(2,\mathbb{C})$, kdy jsme nejprve hledali váhový vektor, který je "nejvíc napravo".

Množina vah je konečná podmnožina množiny $\lambda + \Lambda_R$ pro nějakou váhu λ. Existuje tedy právě jedna váha λ_0, pro kterou je reálná část čísla $l(\lambda)$ maximální (imaginární část se nemění, neboť $l(\Lambda_R) \subset \mathbb{R}$.). Nechť v_0 je libovolný nenulový vektor ve V_{λ_0}. Zřejmě $X_\alpha(v_0) = 0$ pro všechny kladné kořeny $\alpha \in R_+$, neboť $X_\alpha(v_0) \in V_{\lambda_0+\alpha}$ a $l(\lambda_0 + \alpha) > l(\lambda_0)$. Tím je ukázána existence vektoru nejvyšší váhy ve V.

Ukažme teď jeho jednoznačnost až na násobek. Následující tvrzení má i samostný význam.

Lemma. Je-li V libovolná representace $\mathfrak{g}$ a jestliže vektor $w \in V$ splňuje podmínky (i), (ii) Věty 12 (1) (takovýmto vektorům se někdy říká singulární vektory), pak lineární obal W vektorů

$$\{Y_1(Y_2(\dots(Y_n(w))\dots))|\, Y_i \in \mathfrak{g}_\alpha,\, \alpha \in R_-,\, n \in \mathbb{N}\} \tag{9}$$

je invariantní podprostor.

Prostor W je zřejmě invariantní při akci prvků z $\mathfrak{h}$ a z $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in R_-$. Označíme-li W_n linearní obal vektorů v (9) s pevným n a $W = \cup_n W_n$, pak ukážeme (indukcí), že $X \in \mathfrak{g}_\beta, \beta \in \mathcal{S}$ zobrazují W_n do W_n. Platí

$$X(Y_1(Y_2(..(Y_n(w))..)) = [X, Y_1](Y_2(..(Y_n(w))..)) + Y_1(X(Y_2(..(Y_n(w))..)).$$

Komutátor $[X, Y_1]$ je element v $\mathfrak{g}_{\beta-\alpha}, \alpha \in R_+$. Kdyby $\beta - \alpha \in R_+$, pak β je součet dvou kladných kořenů a není jednoduchý, což je spor. Tedy $-(\beta - \alpha)$ je buď součet jednoduchých kořenů, nebo patří do $\mathfrak{h}$. V obou případech je první sčítanec napravo ve W_n a druhý sčítanec tam patří podle indukčního předpokladu.

V našem případě je zřejmě $\mathfrak{g}_{\alpha_3} = [\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}]$, takže W_n je zřejmě invariantní při akci všech $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in R_+$. Poznamenejme pro budoucnost, že vlastnost potřebná k důkazu lemmatu se dá formulovat takto:

Libovolný prvek z $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in R_+$ se dá napsat jako složený komutátor prvků z $\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathcal{S}$.

Lemma ukazuje, že pro všechny váhy representace λ různé od váhy λ_0 vektoru v_0 platí $l(\lambda_0) > l(\lambda)$. Pokud v_0' je jiný vektor splňující podmínky (i), (ii), pak Lemma musí platit i pro něj a má tedy stejnou váhu jako v_O. Jsou tedy násobky jeden druhého.

(2) Jsou-li dvě representace V a V' isomorfní a připomeneme-li si definice nejvyššího vektoru a nejvyšší váhy, pak je zřejmé, že příslušný isomorfismus φ převádí vektor

nejvyšší váhy ve V na násobek vektoru nejvyšší váhy ve V' a že příslušné nejvyšší váhy se rovnají.

Naopak, jsou-li nejvyšší váhy dvou representací V a V' stejné, pak $V \oplus V'$ je také representace a jsou-li v, resp. v' vektory nejvyšší váhy ve V, resp. V', pak vektor $v \oplus v'$ je vektor nejvyšší váhy ve $V \oplus V'$. Označme U invariantní podprostor v $V \oplus V'$ generovaný akcí elementů ze záporných kořenových podprostorů na $v \oplus v.'$

Nejdřív ukážeme, že U je irreducibilní. Pokud by tomu tak nebylo, pak existuje netriviání vlastní podprostor U', o kterém můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je irreducibilní. Nechť π_V, resp. $\pi_{V'}$ je projekce $V \oplus V'$ na jednotlivé sčítance. Nejvyšší váha U' je nutně menší než nejvyšší váha U v částečném uspořádání daném funkcionálem l. Obraz $\pi_V(U')$ je pak invariantní podprostor V, jehož nejvyšší váha je menší než nejvyšší váha V a protože V je irreducibilní, je $\pi_V(U') = \{0\}$. Stejně se ukáže, že $\pi_{V'}(U') = \{0\}$. Pak ale $U' = \{0\}$, což je spor.

Nyní stačí použít Schurovo lemma, ze kterého plyne, že restrikce projekcí π_V, resp. $\pi_{V'}$ na U je isomorfismus.

(3) Nechť λ je nejvyšší váha irreducibilní representace V, nechť w je příslušný vektor nejvyšší váhy. Nechť α je pevný kladný kořen. Připomeňme, že $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ jsou takové, že pro $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ platí $\alpha(H_\alpha) = 2$. Pak vektory $H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha}$ tvoří standardní basi $sl(2,\mathbb{C})$-podalgebry sl_α a vektory $[X_\alpha]^n(w)$ generují irreducibilní representaci sl_α. Z toho ihned plyne, že $\lambda(H_\alpha)$ je celé a nezáporné číslo. Tedy λ je prvek množiny $\Lambda_W \cap \mathcal{W}$.

Zbývá tedy již jen ukázat, že pro každý element $\lambda \in \Lambda_W \cap \mathcal{W}$ existuje irreducibilní representace, jejíž je λ nejvyšší váha. Tuto konstrukci provedeme v jednotlivých případech uvažovaných Lieových algeber zvlášť. Konstrukce pro $sl(3,\mathbb{C})$ následuje ihned. $\square$

2.3.4 Konstrukce irreducibilních representací.

Příklad 1. Nechť $V = \mathbb{C}^3$ je definující representace $sl(3,\mathbb{C})$. Zkusme ukázat, že je to irreducibilní representace a najít její nejvyšší váhu. Váhové vektory jsou zřejmě vektory kanonické base $v_i = e_i,\ i = 1,2,3$. Odpovídající váhy jsou $\lambda_i = L_i,\ i = 1,2,3$. (Nakreslete si obrázek!) Vektor nejvyšší váhy je tedy vektor $\lambda_1 = L_1$. Pokud by representace nebyla irreducibilní, pak existuje netriviální vlastní invariantní podprostor W, o kterém můžeme rovnou předpokládat, že je irreducibilní representací. Jeho vektor nejvyšší váhy musí být jeden z vektorů e_2, e_3. Ale to je spor, neboť ani jeden z nich není anihilovaný všemi prvky $X_\alpha, \alpha \in R_+$.

Věta 13. *Nechť V je irreducibilní representace $\mathfrak{g} = sl(3,\mathbb{C})$ nechť $\{v_i\}_{i\in I}$ je base V složená z váhových vektorů; nechť $\lambda_i,\ i \in I$ jsou odpovídající váhy.*

Nechť V^* je duální (kontragradientní) representace k V a nechť $\{v_i^*\}_{i\in I}$ je duální base. Pak všechny vektory z této base jsou váhové vektory V^* a odpovídající váhy jsou právě $-\lambda_i,\ i \in I$.

Důkaz. Vztah

$$< H(v_i^*), v_j >= - < v_i^*, H(v_j) >= - < v_i^*, \lambda_j\, v_j >= \lambda_j\, \delta_{ij}$$

mí za následek, že $H(v_i^*) = -\lambda_i\, v_i^*$. $\square$

Příklad 2. Nechť V^* je duální (kontragradientní) representace k definující representaci V. Podle Věty 13 má množina všech vah V^* tři prvky $-L_i\ i = 1,2,3$. Nejvyšší váha je tedy $-L_3$. Irreducibilita V^* se ukáže stejně jako v Příkl.1.

Poznámka. Tím jsme sestrojili representace s nejvyššími vahami L_1 a $-L_3$. Tyto dvě váhy leží na hranách Weylovy komory $\mathcal{W}$ a všechny ostatní prvky v $\Lambda_W \cap \mathcal{W}$ jsou jejich lineární kombinace s nezápornými celými koeficienty (nakreslete si obrázek!). Ke konstrukci dalších irreducibilních representací se bude hodit následující postup.

Nechť V_1 a V_2 jsou dvě irreducibilní representace $\mathfrak{g} = sl(3, \mathbb{C})$. Nechť $\lambda_i\, i = 1, 2,$ jsou jejich nejvyšší váhy a v_i, $i = 1, 2$, příslušné vektory nejvyšší váhy. Pak $v_1 \otimes v_2$ je singulární vektor ve $V_1 \otimes V_2$ (t.j. splňuje podmínky (i), (ii) Věty 12 (1)) a akce prvků ze záporných kořenových podprostorů generuje irreducibilní representaci W s nejvyšší váhou $\lambda_1 + \lambda_2$. Tato representace se obvykle nazývá Cartanův součin representací V_1 a V_2 a značívá se $V_1 \boxtimes V_2$.

V tuto chvíli ještě nemáme k dispozici všechny informace potřebné k důkazu tohoto tvrzení (bylo by potřeba vědět, že každá representace je úplně rozložitelná), a tak se spokojíme se slabším tvrzením, že irreducibilní representace s nejvyšší váhou $\lambda_1 + \lambda_2$ může být realizována jako faktor-representace representace W.

Věta 14. *Nechť V_1 a V_2 jsou dvě irreducibilní representace $\mathfrak{g} = sl(3, \mathbb{C})$. Nechť $\lambda_i\, i = 1, 2,$ jsou jejich nejvyšší váhy a v_i, $i = 1, 2$, příslušné vektory nejvyšší váhy. Pak existuje irreducibilní representace s nejvyšší váhou $\lambda_1 + \lambda_2$.*

Důkaz. Říkejme pro stručnost representacím, které jsou součty svých váhových podprostorů váhové representace (podprostory). Nechť W je invariantní podprostor $V_1 \otimes V_2$ generovaný singulárním vektorem $v_1 \otimes v_2$ s vahou $\lambda_1 + \lambda_2$.

Podle Lemmatu v důkazu Věty 12 víme, že podprostor W generovaný singulárním vektorem $v_1 \otimes v_2$ je invariantní podprostor. Váha tohoto sigulárního vektoru je zřejmě $\lambda_1 + \lambda_2$. Pokud je W irreducibilní, je důkaz hotov.

Pokud ne, uvažujme systém všech váhových invariantních vlastních podprostorů W' ve W. Tento systém má maximální prvek W_0 (vzhledem k inklusi), neboť každý prvek systému je zřejmě podprostor součtu $\oplus_{\lambda' \neq \lambda_1 + \lambda_2} W_{\lambda'}$ a to tedy znamená, že i součet všech podprostorů ze systému je opět vlastní váhový invariantní podprostor.

Ukážeme, že W/W_0 je hledaná irreducibilní representace s nejvyšší váhou $\lambda_1 + \lambda_2$. Pokud by tomu tak nebylo, pak existuje irreducibilní vlastní podprostor $W'' \subset W/W_0$, který je tedy také váhový a je-li π projekce na faktor-prostor, pak $\pi^{-1}(W'')$ je váhový invariantní vlastní podprostor W, který obsahuje W_0 jako vlastní podprostor, což je spor.

3. Klasifikace representací algeber $sl(n, \mathbb{C})$, $sp(2n, \mathbb{C})$ a $so(m, \mathbb{C})$

3.1. Schéma pro klasifikaci representací jednoduchých algeber.

Při klasifikaci irreducibilních representací jednotlivých klasických algeber v dalších paragrafech budeme postupovat podle následujícího schématu:

(1) Najít Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$, t.j. maximální komutativní podalgebru základní algebry $\mathfrak{g}$. Standardně to budou všechny diagonální matice dané podalgebry.
(2) Spočítat, jak vypadá množina všech kořenů R. Popsat množinu $\mathcal{S}$ jednoduchých kořenů.
(3) Ukázat, že platí rozklad

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \{\oplus_{\alpha \in R}\, \mathfrak{g}_\alpha\}. \tag{5}$$

(4) Zvolit si funkcionál $l \in \mathfrak{h}^*$ takový, že $l(\alpha) \neq 0, \alpha \in R$. Rozložit R na disjunktní sjednocení kladných a záporných kořenů $R = R_+ \cup R_-, R_\pm =$

$\{\alpha | l(\alpha) \leqslant 0\}$. (V případě $sl(3,\mathbb{C})$ jsme předem toto rozdělení provedli již v označení, ale byla to jen jedna z 6 možných konvencí.)

(5) Pro každé $\alpha \in R_+$ je třeba zvolit $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ tak, aby $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ splňovalo podmínku $\alpha(H_\alpha) = 2$.

(6) Spočítat, jak vypadá váhová mříž Λ_W, t.j. najít tzv. fundamentální váhy ω_i, $i = 1, \dots, r$, které jsou definovamé vztahem

$$\omega_i(H_{\alpha_j}) = \delta_{ij};\ i,j = 1,\dots,r; \mathcal{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}.$$

Pro ně pak platí, že prvky váhové mříže jsou právě celočíselné lineární kombinace fundamentálních vah a prvky ve Weylově komoře (určené výběrem l) jsou právě lineární kombinace s nezápornými koeficienty fundamentálních vah. Tedy

$$\Lambda_W \cap \mathcal{W} = \{\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_i\omega_i | n_i \in \mathbb{Z}, n_i \geq 0\}.$$

(7) Najít konstrukci irreducibilních representací, jejichž nejvyšší váhy jsou právě fundamentální váhy.

(8) Zkontrolovat, že Věta 11 a Věta 12 platí i v této situaci, že v jejich důkazu nebylo nic speciálního pouze pro $sl(3,\mathbb{C})$ (v některých místech je třeba udělat jednoduchou a přímočarou modifikaci). V důkazu Věty 12 bylo nutno vědět, že libovolný prvek z $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in R_+$ se dá napsat jako složený komutátor prvků z $\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathcal{S}$, to je tedy třeba zkontrolovat.

Při konstrukci irreducibilních representací s nejvyššími váhami v $\Lambda_W \cap \mathcal{W}$ stačí použít Větu 14.

3.2. Klasifikace representací algebry $sl(n+1,\mathbb{C})$**.** Cartanova algebra je podalgebra diagonálních matic. Seznam kořenů je $\{L_i - L_j\}_{i\neq j; i,j=1,\dots,n+1}$. Kladné kořeny se obvykle volí jako množina $\{L_i - L_j\}_{i<j; i,j=1,\dots,n+1}$. Množina jednoduchých kořenů má prvky $L_1 - L_2, \dots, L_n - L_{n+1}$ a její Dynkinův diagram je typu A_n (definice Dynkinova diagramu - viz níže).

Fundamentální váhy jsou $\omega_i = L_1 + \dots + L_i;\ i = 1, \dots, n$. Definující reprezentace na $\mathbb{C}^{n+1}$ má nejvyšší váhu ω_1. Její j-tá vnější mocnina $\Lambda^j(\mathbb{C}^{n+1})$ je irreducibilní a její nejvyšší váha je fundametnální váha ω_j.

Váhy ztotožňujeme (v tomto jediném případě!), pokud se liší o násobek váhy $(1, \dots, 1)$. Váha $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ je tedy jednoznačně určena rozdíly $\lambda_i - \lambda_{i+1}$. Pro pohodlí je budeme normalizovat podmínkou $\lambda_{n+1} = 0$. Nejvyšší váhy všech irreducibilních reprezentací jsou právě prvky množiny

$$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0) = \sum_i \lambda_i L_i | \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0;\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\delta := \sum_{i=1}^{n} \omega_i = nL_1 + (n-1)L_2 + \dots + 1\,L_n.$$

3.3. Klasifikace representací algebry $so(2n+1,\mathbb{C})$**.** Seznam všech kořenů je

$$\Delta = \{\pm L_i \pm L_j |\, i < j; i,j = 1, \dots, n\} \cup \{\pm L_i | i = 1, \dots, n\}.$$

Množina jednoduchých kořenů je

$$\{L_1 - L_2, \dots, L_{n-1} - L_n, L_n\}.$$

Dynkinův diagram pro tuto algebru je typu B_2.

Fundamentální váhy jsou

$$\omega_i = L_1 + \dots + L_i;\ i = 1, \dots, n-1;\ \omega_n = 1/2(L_1 + \dots + L_n).$$

Odpovídající reprezentace jsou vnější mocniny definující reprezentace a spinorová reprezentace.

Nejvyšší váhy všech irreducibilních reprezentací jsou právě prvky množiny

$$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_i \lambda_i L_i | \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0;\ \lambda_i \in \mathbb{Z} \text{ nebo } \lambda_i \in 1/2 + \mathbb{Z}\}.$$

$$\delta = (n - 1/2)L_1 + (n - 3/2)L_2 + \dots + 1/2\, L_n.$$

3.3. Klasifikace representací algebry $sp(2n, \mathbb{C})$**.** Seznam všech kořenů je

$$\Delta = \{\pm L_i \pm L_j | i < j; i, j = 1, \dots, n\} \cup \{\pm 2L_i | i = 1, \dots, n\}.$$

Množina jednoduchých kořenů je

$$\{L_1 - L_2, \dots, L_{n-1} - L_n, 2L_n\}.$$

Fundamentální váhy jsou

$$\omega_i = L_1 + \dots + L_i;\ i = 1, \dots, n-1; \omega_n = 1/2(L_1 + \dots + L_n).$$

Odpovídající reprezentace jsou vnější mocniny definující reprezentace a spinorová reprezentace.

Nejvyšší váhy všech irreducibilních reprezentací jsou právě prvky množiny

$$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_i \lambda_i L_i | \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0;\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\delta = nL_1 + (n-1)L_2 + \dots + 1\, L_n.$$

3.3. Klasifikace representací algebry $so(2n, \mathbb{C})$**.** Seznam všech kořenů je

$$\Delta = \{\pm L_i \pm L_j | i < j; i, j = 1, \dots, n\}.$$

Množina jednoduchých kořenů je

$$\{L_1 - L_2, \dots, L_{n-1} - L_n, L_{n-1} + L_n\}.$$

Fundamentální váhy jsou

$$\omega_i = L_1 + \dots + L_i;\ i = 1, \dots, n-2;$$

$$\omega_{n-1} = 1/2(L_1 + \dots + L_{n-1} - L_n), \omega_n = 1/2(L_1 + \dots + L_n).$$

Odpovídající reprezentace jsou vnější mocniny definující reprezentace a dvě spinorové reprezentace.

Nejvyšší váhy všech irreducibilních reprezentací jsou právě prvky množiny

$$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_i \lambda_i L_i | \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq |\lambda_n|;\ \lambda_i \in \mathbb{Z} \text{ nebo } \lambda_i \in 1/2 + \mathbb{Z}\}.$$

$$\delta = (n-1)L_1 + (n-2)L_2 + \dots + 1\, L_{n-1}.$$

4. Cliffordovy algebry a spinory

4.1 Cliffordova algebra.

Definice. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ (či $\mathbb{R}$) dimenze m. Nechť Q je libovolná (evtl. i degenerovaná) symetrická bilineární forma na V, odpovídající kvadratická forma bude označena stejně. Pak definujeme Cliffordovu algebru $\mathcal{C} = \mathcal{C}(V, Q)$ jako asociativní algebru s jednotkou, která obsahuje V, pro kterou platí*

$$vw + wv = -2Q(v, w); v, w \in V$$

a která má následující univerzální vlastnost: Pro libovolnou asociativní algebru s jednotkou E a pro libovolné lineární zobrazení $j : V \to E$ takové, že

$$j(v)j(w) + j(w)j(v) = -2Q(v, w); v, w \in V,$$

existuje právě jeden homomorfismus algebry $\mathcal{C}$ do E který rozšiřuje j.

Věta. *Pro daný vektorový prostor V a danou bilineární formu Q existuje právě jedna (až na izomorfismus) Cliffordova algebra $\mathcal{C}$.*

Důkaz. Existence se dokáže takto: Nechť $T(V)$ je tenzorová algebra V a nechť I je oboustranný ideál generovaný všemi elementy tvaru $vw + wv + 2Q(v, w)$. Pak faktoralgebra $\mathcal{C} := T(V)/I$ je asociativní algebra s jednotkou. Projekce $V \subset T(V)$ na svůj obraz v $\mathcal{C}$ je prostá (díky tvaru generujících elementů), takže V ztotožníme s jeho obrazem v $\mathcal{C}$. Universální vlastnost $\mathcal{C}$ plyne ihned z universální vlastnosti tenzorové algebry a z ní pak ihned plyne jednoznačnost až na izomorfismus.

Poznámka. Díky tomu, že generátory ideálu I jsou sudé, je na $\mathcal{C}$ dobře definovaná Z_2-gradace $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \oplus \mathcal{C}^-$ (definovaná projekcí standardní gradace tenzorové algebry).

Definice Cliffordovy algebry se používá pro libovolnou bilineární formu Q, my se zde (pro pohodlí) omezíme jen na nedegenerovanou formu Q na komplexním vektorovém prostoru. Forma Q se v takovém případě dá vždy převést na standardní kanonický tvar.

Je-li $\{e_i\}$ libovolná ortonormální báze V, pak platí

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}.$$

Různé prvky ortonormální báze spolu tedy antikomutují a $e_i e_i = -1$. Z toho plyne, že prvky tvaru

$$e_J := e_{i_1} \dots e_{i_k};\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$$

tvoří spolu s $1 = e_\emptyset$ množinu generátorů algebry $\mathcal{C}$. Chceme teď ukázat, že tyto prvky tvoří bázi a že tedy má algebra dimenzi 2^m. Před důkazem tohoto tvrzení si napřed připravíme vhodné pojmy.

Definice. *Nechť $\Lambda^*(V)$ označuje vnější algebru V. Pak definujeme pro každé $v \in V$ tři lineární operátory na $\Lambda^*(V)$ takto:*

(1) $\varepsilon(v)(\alpha) = v \wedge \alpha,\ \alpha \in \Lambda^*(V)$;

(2) $\iota(v)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \sum_j (-1)^{j+1} Q(v, v_j) v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_j \wedge \dots \wedge v_k; v_j \in V$;

(3) $c(v) = \varepsilon(v) - \iota(v)$.

Věta.
(1) $\varepsilon(v)\varepsilon(w) + \varepsilon(w)\varepsilon(v) = 0;\ v, w \in V;$
(2) $\iota(v)\iota(w) + \iota(w)\iota(v) = 0,\ v, w \in V;$
(3) $\varepsilon(v)\iota(w) + \iota(w)\varepsilon(v) = Q(v, w),\ v, w \in V;$
(4) $c(v)c(w) + c(w)c(v) = -2Q(v, w).$

Důkaz.
(1) Plyne ihned z antikomutativity vnějšího násobení vektorů.
(2) Platí

$$\iota(v)\iota(w)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} Q(v, v_i) Q(w, v_j) v_1 \wedge \ldots \hat{v_i} \ldots \hat{v_j} \ldots \wedge v_k +$$

$$+ \sum_{i>j} (-1)^{i+j-1} Q(v, v_i) Q(w, v_j) v_1 \wedge \ldots \hat{v_j} \ldots \hat{v_i} \ldots \wedge v_k.$$

Z toho je vidět, že se obě sumy na levé straně vskutku odečtou.
(3) Platí

$$\varepsilon(v)\iota(w)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = v \wedge \sum_j (-1)^{j+1} Q(w, v_j) v_1 \wedge \ldots \hat{v_j} \ldots \wedge v_k,$$

$$\iota(w)\varepsilon(v)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = Q(v, w) v_1 \wedge \ldots \wedge v_k + v \wedge \sum_j (-1)^j v_1 \wedge \ldots \hat{v_j} \ldots \wedge v_k,$$

z čehož tvrzení ihned plyne.
(4)

$$c(v)c(w) + c(w)c(v) = -(\iota(v)\varepsilon(w) + \varepsilon(v)\iota(w) + \iota(w)\varepsilon(v) + \varepsilon(w)\iota(v))) = -2Q(v, w).$$

Definice. *Zobrazení c z V do $\mathrm{End}(\Lambda^*(V))$ se z univerzální vlastnosti Cliffordovy algebry jednoznačně rozšíří na homomorfismus $c; \mathcal{C} \to \mathrm{End}(\Lambda^*(V))$.*
Definujme pak zobrazení $C : \mathcal{C} \to \Lambda^*(V)$ předpisem

$$C(a) := c(a)(1).$$

Věta.
(1) Zobrazení C je izomorfismus (vektorových prostorů, ne algeber!). Dimenze $\mathcal{C}$ je tedy 2^m.
(2) Je-li $\{e_j\}$ ortonormální báze, pak

$$C(e_{i_1} \ldots e_{i_k}) = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}.$$

Vzor prostoru $\Lambda^k(V); k = 0, \ldots, m$ při zobrazení C označíme $\mathcal{C}^k$.

Poznámka. Rozklad $\mathcal{C}$ na homogenní části $\mathcal{C}^k$ je pouze gradace vektorového prostoru a ne algebry (ta má jen výše zmíněnou Z_2-gradaci. Nás bude pro naše účely zajímat hlavně část $\mathcal{C}^2$. Ukážeme, že je na tomto vektorovém prostoru přirozeně (pomocí komutátoru) definovaná struktura Lieovy algebry a že je tato Lieova algebra izomorfní s Lieovou algebrou $so(V, Q)$. To nám pak umožní sestrojit chybějící spinorové reprezentace této algebry.

Věta. *Pro libovolné $a \in \mathcal{C}^2$ a pro každé $v \in V$ platí, že $[a,v] = av - va$ patří opět do V. Navíc, zobrazení*

$$\tau : \mathcal{C}^2 \to \mathrm{End}(V);\ \tau(a)(v) = [a,v]$$

je izomorfismus vektorových prostorů $\mathcal{C}^2$ a $so(V,Q)$. Pokud se na $\mathcal{C}^2$ definuje závorka jako komutátor, je τ pak izomorfismus Lieových algeber.

Důkaz. Nechť $\{e_i\}$ je opět libovolná ortonormální báze V. Prvky $e_ie_j, i < j$, tvoří bázi $\mathcal{C}^2$. Pro libovolný prvek e_ie_j a libovolný vektor $e_k, k = 1, \ldots, m$, spočítáme

$$[e_ie_j, e_k] = e_ie_je_k + e_ie_ke_j - e_ie_ke_j - e_ke_ie_j = 2(\delta_{ik}e_j - \delta_{jk}e_i),$$

což je prvek V.

Z toho plyne, že všechny prvky tvaru $[a,v]$ patří do V a že zobrazení $\tau(e_ie_j)$ odpovídá ve zvolené bázi standardní antisymetrické matici $2E_{ij}$. (Má prvek 2 na místě ij a -2 na místě ji). Tedy τ je izomorfismus $\mathcal{C}^2$ na $so(V,Q)$.

Spočtěme nyní komutátory operátorů $e_ie_j, e_ke_l, i < j, k < l$, pro stručnost pišme jen indexy i,j,k,l:

$$[ij,kl] = ijkl - klij = ijkl + ikjl - ikjl - kijl + kijl + kilj - kilj - klij =$$

$$= 2(-\delta_{jk}il + \delta_{ik}jl - \delta_{jl}ki + \delta_{il}kj).$$

Tytéž komutační relace platí pro generátory $2E_{ij}$ antisymetrických matic, tedy τ je izomorfismus Lieových algeber.

4.2 Spinorové reprezentace.

Nyní je třeba rozdělit konstrukci na dva případy, nejprve probereme případ sudé dimense.

4.2.1 Případ $m = 2n$.

Nechť $\{e_i\}$; $i = 1, \ldots, 2n$ je ortonormální báze. Definujme nyní bázi z nulových (komplexních) vektorů

$$w_j = 1/2(e_{2j-1} + ie_{2j}); \overline{w}_j = 1/2(-e_{2j-1} + ie_{2j});\ j = 1, \ldots n.$$

Pak $\{w_j\}$, resp. $\{\overline{w}_j\}$ generují izotropní podprostory W, resp. $\overline{W}$, $W \oplus \overline{W} = V$.

Pro tuto novou bázi dostaneme následující relace ($w_i, \overline{w}_j;\ i \neq j$):

$$w_iw_j = -w_jw_i, \overline{w}_i\overline{w}_j = -\overline{w}_j\overline{w}_i, w_i\overline{w}_j = -\overline{w}_jw_i,$$

$$w_i^2 = \overline{w}_i^2 = 0;\ w_i\overline{w}_i + \overline{w}_iw_i = 1.$$

Prvek $I = \overline{w}_1w_1 \ldots \overline{w}_nw_n$ je pak idempotent ($I^2 = I$) v algebře $\mathcal{C}$ a budeme uvažovat příslušný levý ideál

$$S := \mathcal{C}{\cdot}I$$

v $\mathcal{C}$. Pak platí:

Věta.

(1)
$$S = \Lambda^*(W)\cdot I.$$

(2) Prvky $H_i := 1/2 - w_i\overline{w}_i$ generují Cartanovu podalgebru $\mathcal{C}^2$.
(3) Všechny váhy S jsou tvaru $\lambda = (\pm 1/2, \dots, \pm 1/2)$.
(4) $S^\pm := S \cap \mathcal{C}^\pm$ jsou dány sudou a lichou částí $\Lambda^*(W)\cdot I$ a jsou to invariantní (ve skutečnosti ireducibilní) podprostory S. Jejich nejvyšší váhy jsou $\lambda = (1/2, \dots, 1/2)$, resp. $(1/2, \dots, 1/2, -1/2)$.

Důkaz.

Označme $w_J, J \subset \{1, \dots, n\}$ obvyklou bázi $\Lambda^*(W)$.

Pak levé násobení prvkem w_i převádí $w_J I$ na $w_{J\cup\{i\}} I$ pro $i \notin J$; a na nulu jinak. Podobně, levé násobení prvkem $\overline{w}_i$ převede $w_J I$ na $w_{J\setminus\{i\}} I$ pokud $i \in J$ a na nulu jinak. Ve fyzice bývá běžné (ze zcela názorných důvodů) nazývat prvek I vakuem, operátory násobení w_i, resp. $\overline{w}_i$ kreačními, resp. anihilačními operátory. Z toho ihned plyne, že $\Lambda^*(W)\cdot I$ je levý ideál v $\mathcal{C}$ a že se tedy rovná S.

Všechny prvky H_i spolu komutují a generují tedy Cartanovu podalgebru $\mathcal{C}^2$. Všimněte si, že

$$w_j\overline{w}_j - 1/2 = 1/4(e_{2j-1} + ie_{2j})(-e_{2j-1} + ie_{2j}) - 1/2 = 1/4(2 - 2ie_{2j-1}e_{2j}) - 1/2 = -1/2e_{2j-1}e_{2j} \in \mathcal{C}^2.$$

Z definice akce $w_i, \overline{w}_i$ plyne ihned, že

$$H_i(w_J I) = 1/2 w_J I; i \notin J;$$
$$H_i(w_J I) = -1/2 w_J I; i \in J;$$

Fakt, že $S^\pm$ jsou invariantní podprostory plyne z existence Z_2-gradace na $\mathcal{C}$. Jejich ireducibilita plyne z akce Weylovy grupy na vahách $S^\pm$, kterou jsme ovšem ještě neprobírali.

4.2.2 Případ $m = 2n + 1$.

V tomto případě se postupuje obdobně. Zvolme podprostory $W, \overline{W}$ stejně a zvolme podprostor U kolmý na $W \oplus \overline{W}$, tedy $V = W \oplus \overline{W} \oplus U$. Zvolme dále $u \in U$ tak, aby $u^2 = 1$. Definujme $I = \overline{w}_1 w_1 \dots \overline{w}_n w_n (1+u)$, to je pak idempotent ($I^2 = I$) v algebře $\mathcal{C}$ a budeme opět uvažovat příslušný levý ideál

$$S := \mathcal{C}\cdot I$$

v $\mathcal{C}$. Pak platí:

Věta.

(1)
$$S = \Lambda^*(W)\cdot I.$$

(2) Prvky $H_i := 1/2 - w_i\overline{w}_i$ generují Cartanovu podalgebru Lieovy algebry $\mathcal{C}^2$.
(3) Všechny váhy S jsou tvaru $\lambda = (\pm 1/2, \dots, \pm 1/2)$.
(4) Nejvyšší váha S je $\lambda = (1/2, \dots, 1/2)$. Ve skutečnosti, reprezentace S je ireducibilní.

Důkaz.

Důkaz probíhá stejně jako v sudém případě. Tentokrát však $S^\pm$ nejsou invariantní podprostory, neboť akce elementu $uw_i \in \mathcal{C}^2$ tyto podprostory míchá mezi sebou. Jako v předchozím případě, ireducibilitu S dokazovat nebudeme (plyne např. z toho, že váhy tvoří jednu orbitu Weylovy grupy).

4.3 (Anti)-automorfismy Cliffordových algeber.

Definice.

Hlavní automorfismus α *Cliffordovy algebry* $\mathcal{C} = \mathcal{C}(V,Q)$ *je definován požadavkem*

$$\alpha(v) = -v,\ v \in V.$$

Toto zobrazení se kanonicky rozšíří z V *na celé* $\mathcal{C}$ *na sebe (obraz součinu musí být součin obrazů a konečné součiny vektorů generují celou Cliffordovu algebru). Zřejmě pak platí*

$$\alpha(a) = (-1)^k a;\ a \in \mathcal{C}^k.$$

Zobrazení α *je tedy involuce (tj. jeho kvadrát je identita).*

Antiautomorfismus algebry je prosté zobrazení β *algebry na sebe, pro které platí* $\beta(ab) = \beta(b)\beta(a);\ a,b \in \mathcal{C}$.

Hlavní antiautomorfismus $a \to a^t$ *je antiautomorfismus* $\mathcal{C}$, *charakterizovaný vztahem* $v^t = v;\ v \in V$. *Pak tedy* $(a_1 \dots a_j)^t = (a_j)^t \dots (a_1)^t$. *Z toho se lehce odvodí, že pro* $a \in \mathcal{C}^k$ *platí*

$$a^t = (-1)^{k(k-1)/2} a;\ a \in \mathcal{C}^k.$$

Složením hlavního automorfismu a hlavního antiautomorfismu dostaneme antiautomorfismus N *charakterisovaný vztahem* $N(v) = -v;\ v \in V$. *I tento antiautomorfismus je involuce a platí pro něj vztah*

$$N(a) = (-1)^{k(k+1)/2} a;\ a \in \mathcal{C}^k.$$

4.4 Spinová grupa.

V tomto paragrafu budeme definovat (reálné) spinorové grupy $Pin(p,q,\mathbb{R})$ a $Spin(p,q,\mathbb{R})$. Nejdříve označíme symbolem $V = \mathbb{R}^{p,q}$ reálný vektorový prostor dimenze $n = p+q$ se zvolenou kanonickou kvadratickou formou Q se signaturou (p,q) (prvních p kvadrátů má kladné znaménko, ostatní mají znaménko záporné). Cliffordova algebra $\mathcal{C}_{p,q} = \mathcal{C}(V,Q)$ je reálná algebra.

Definice. *Grupa* $\mathcal{C}^x_{p,q} \subset \mathcal{C}$ *je definována jako grupa invertibilních prvků v* $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}^x_{p,q} := \{a \in \mathcal{C}_{p,q} | \exists a^{-1};\ a^{-1}\,a = a\,a^{-1} = 1\}.$$

Twistovaná adjungovaná akce $\tilde{\mathrm{Ad}}$ *grupy* $\mathcal{C}^x_{p,q}$ *na* $\mathcal{C}$ *je definována předpisem*

$$\tilde{\mathrm{Ad}}(a)(b) := \alpha(a)\,b\,a^{-1};\ a \in \mathcal{C}^x_{p,q},\ b \in \mathcal{C}.$$

Cliffordova grupa $\Gamma_{p,q}$ *je definována takto:*

$$\Gamma_{p,q} := \{a \in \mathcal{C}^x_{p,q} | \forall v \in V\ \ \tilde{Ad}(a)(v) = \alpha(a) v a^{-1} \in V\}.$$

Příklad.

Pokud je $v \in V$ takový, že $-|v|^2 = v^2 \neq 0$, pak v je invertibilní, tj. $v \in \mathcal{C}^x_{p,q}$. Platí totiž zřejmě

$$v^{-1} = \frac{-v}{|v|^2}.$$

Je vcelku jednoduché si rozmyslet, jaký má geometrický smysl zobrazení $\tilde{Ad}(v)$ pro $v \in V$ invertibilní. Lineární zobrazení $u \in V \to \tilde{Ad}(v)(u) = -v\,u\,v^{-1}$ je ve skutečnosti reflexe vůči nadrovině kolmé k vektoru v. Abychom to viděli, stačí si uvědomit, že $\tilde{Ad}(v)(v) = -v$ (tedy vektor v se zobrazí na vektor opačný) a pro libovolný vektor u kolmý na vektor v platí

$$\tilde{Ad}(v)(u) = -v\,u\,v^{-1} = uvv^{-1} = u,$$

(neboť $uv = -vu$).

Připomeňme si, že takováto reflexe je isometrie (která mění orientaci). Klasický fakt (který nebudeme dokazovat) říká, že každou rotaci lze získat jako složení sudého konečného počtu reflexí vůči vhodným vektorům. Z těchto několika poznámek je již vidět, že akce Cliffordovy grupy na vektorovém prostoru V bude úzce souviset s rotacemi prostoru V.

Definice. *Definujme dvě nové grupy takto:*

$$\mathrm{Pin}(p,q;\mathbb{R}) := \{a \in \Gamma_{p,q} | \alpha(a)a = \pm 1\},$$

$$\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) := \{a \in \Gamma_{p,q} \cap \mathcal{C}^+ | \alpha(a)a = \pm 1\} = \mathrm{Pin}(p,q;\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^+.$$

Je lehké si odvodit následující evivalentní definice pro tyto grupy.

$$\mathrm{Pin}(p,q;\mathbb{R}) := \{a \in \mathcal{C} | \exists j, v_i \in V, v_i^2 = \pm 1, i = 1, \dots, j;\ a = v_1 \dots v_j\},$$

$$\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) := \{a \in \mathcal{C} | \exists j, v_i \in V, v_i^2 = \pm 1, i = 1, \dots, 2j;\ a = v_1 \dots v_{2j}\}.$$

Věta. *Zobrazení* $\tilde{Ad} : \mathrm{Pin}_{p,q} \to \vee(p,q)$ *je homomorfismus grup, je to zobrazení, ale není prosté. Jádro tohoto homomorfismu je dvouprvková množina* $\{\pm \mathrm{Id}\}$. *Lieovy algebry všech grup* $\mathrm{Pin}(p,q,\mathbb{R})$, $\vee(p,q,\mathbb{R})$, $\mathrm{Spin}(p,q,\mathbb{R})$ *a* $\mathrm{SO}(p,q,\mathbb{R})$ *jsou navzájem isomorfní (a jsou isomorfní Lieově algebře* $\mathcal{C}^2$*).*

Spinorové prostory $S^\pm$ *jsou ireducibilní representace grupy* $\mathrm{Spin}(p,q,\mathbb{R})$, *součet* $S = S^+ \oplus S^-$ *je ireducibilní representace grupy* $\mathrm{Pin}(p,q,\mathbb{R})$.

Důkaz. Přímo z definice se snadno ověří, že je zobrazení $\tilde{Ad}$ homomorfismus. Zobrazení je surjektivní, protože každá rotace se dá napsat jako složení sudého počtu reflexí a každá isometrie jako složení konečného počtu reflexí. Je zřejmé, že identita Id a $-$Id jsou v jádře tohoto homomorfismu. Opačná inkluse se odvodí ne příliš složitým výpočtem, který nebudeme provádět. Spinorové prostory $S^\pm$ jsou representace sudé části$\mathcal{C}^+$, která obsahuje grupu Spin.

5. Klasifikace jednoduchých Lieových algeber

5.1 Killingova forma.

Definice. *Killingova forma je symetrická bilineární forma na Lieově algebře* $\mathfrak{g}$ *definovaná předpisem*

$$B(X,Y) := \mathrm{Tr}(Z \in \mathfrak{g} \mapsto [X,[Y,Z]]) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(X) \circ \mathrm{Ad}(Y));\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Dá se ukázat, že pro Lieovy algebra $\mathfrak{g}$ polojednoduchá (tj. je součtem jednoduchých Lieových algeber) právě když je Killingova forma na $\mathfrak{g}$ nedegenerovaná.

Naopak, Killingova forma je triviální právě když je příslušná Lieova algebra řešitelná.

Příklad. Obecný vektor v Lieově algebře $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru $X = aX_+ + bH + cX_-$, kde X_-, X_+, H jsou tradiční bázové vektory. Odtud

$$\mathrm{ad}_X \sim \begin{pmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{ad}_X)^2 \sim \begin{pmatrix} 4b^2+2ac & -4ab & -2a^2 \\ -2bc & 4ac & -2ab \\ -2c^2 & -4bc & 4b^2+2ac \end{pmatrix}$$

a tedy dostáváme $B(X,X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}X) = 8b^2 + 8ac$.

Někdy bývá užitečné vědět, že je Killingova forma jednoduché Lieovy algebry invariantní v následujícím smyslu: platí

$$B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z]);\ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}.$$

Je možné ukázat, že invariantní nedegenerovaná symetrická bilineární forma na jednoduché Lieově algebře $\mathfrak{g}$ je jednoznačně určená až na násobek, každá takováto forma je tedy netriviální násobek Killingovy formy.

Killingova forma je nedegenerovaná, takže můžeme ztotožnit Cartanovu algebru s jejím duálem. To nám umožňuje kanonicky definovat nedegenrovaný skalární součin i na tomto duálu. Přiřazení $\lambda \in \mathfrak{h}^* \to H_\lambda \in \mathfrak{h}$ je jako obvykle definováno podmínkou

$$\lambda(H) =< H_\lambda, H > \quad \forall H \in \mathfrak{h},$$

pak je skalární součin na $\mathfrak{h}^*$ definován pomocí tohoto ztotožnění takto:

$$< \lambda, \lambda' >:=< H_\lambda, H_{\lambda'} >= \lambda(H_{\lambda'});\ \lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*.$$

Zvolme nyní elementy $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tak, aby $< E_\alpha, E_{-\alpha} >= 1$. Pak lze snadno ukázat, že $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$. Vskutku, pro libovolný kořen β platí

$$\beta([E_\alpha, E_{-\alpha}]) =< H_\beta, [E_\alpha, E_{-\alpha}] >=< E_{-\alpha}, [H_\beta, E_\alpha] >= \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha).$$

Tedy pro element $\tilde{H}_\alpha := \frac{2}{|\alpha|^2} H_\alpha$ platí

$$\alpha(\tilde{H}_\alpha) = \frac{2}{|\alpha|^2}\alpha(H_\alpha) = 2.$$

Trojice $E_\alpha, E_{-\alpha}, \tilde{H}_\alpha$ jsou kanonické generátory příslušné kopie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Všechny kořeny jsou zároveň váhy, tedy pro libovolný kořen β musí být $\beta(\tilde{H}_\alpha)$ celé číslo.

Pro nás z toho plyne klíčová informace, že pro libovolné dva kořeny α, β je číslo $< \frac{2}{|\alpha|^2}\alpha, \beta >= \beta(\tilde{H}_\alpha)$ celé. Prvek $\frac{2}{|\alpha|^2}\alpha$ se často označuje symbolem $\alpha^\vee$.

5.2 Klasifikace jednoduchých Liových algeber, Dynkinovy diagramy.

Označme jednoduché kořeny jako v předchozích kapitolách $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Cartanova čísla definujeme takto:

$$a_{ij} = 2 \cdot \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}.$$

Matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ se nazývá Cartanova matice. Její koeficienty jsou, jak bylo ukázáno výše, celá čísla.

Nechť θ_{ij} je úhel, který svírají vektory α_i a α_j. Pak zřejmě

$$a_{ij}{\cdot}a_{ji} = 4{\cdot}\frac{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle{\cdot}\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle{\cdot}\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = 4\cos^2\theta_{ij}.$$

Zavedeme označení $n_{ij} = a_{ij}{\cdot}a_{ji}$ a vidíme, že n_{ij} může nabývat hodnot mezi 0 a 4. Kdyby však pro různá i a j bylo $n_{ij} = 4$, pak $\theta_{ij} = 0$, což není možné, protože by a_i a a_j byly závislé. Navíc víme, že a_{ij} jsou celá čísla, proto $n_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Definice. *Pro každý kořenový systém Δ definujeme jeho Dynkinův diagram jako graf s m vrcholy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ a hranami mezi α_i a α_j s násobností n_{ij}. U vícenásobných hran přidáme navíc orientaci hrany šipkou, která povede od většího kořene k menšímu.*

Příklad.

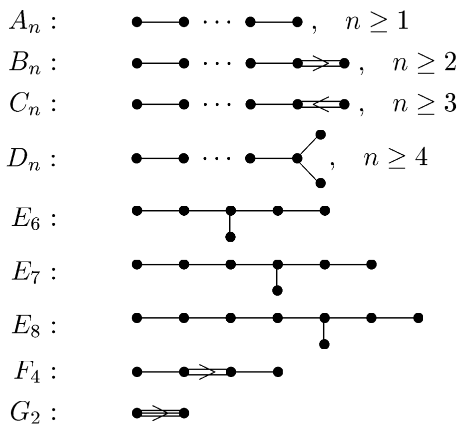
Máme dva jednoduché kořeny $e_1 - e_2$ a $e_2 - e_3$. Dostáváme Cartanova čísla $a_{12} = -1$, $a_{21} = -1$, tedy $n_{12} = n_{21} = 1$. Dostáváme tak Dynkinův diagram algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

.

Dynkinův diagram je souvislý právě tehdy, když algebra $\mathfrak{g}$ je jednoduchá.

Věta (Klasifikace jednoduchých komplexních Lieových algeber).

Dynkinovy diagramy jednoduchých komplexních Lieových algeber jsou tvořeny čtyřmi sériemi (které odpovídají klasickým Lieovým algebrám, počet kořenů v diagramu je n) a pěti vyjímečnými případy:



Důkaz této věty by byl delší. Postup by byl následující. Nejdříve je možné popsat základní vlastnosti kořenových systémů jednoduchých komplexních Lieových algeber a použít jako inspiraci pro definici (abstraktních) kořenových systémů v daném Eukleidovském prostoru. Jeden z hlavních axiomů říká, že pro všechny prvky α, β daného kořenového systému platí $< \alpha^{\vee}, \beta > \in \mathbb{Z}$. Pro daný abstraktní kořenový systém lze definovat Dynkinův diagram stejně jako jsme to udělali pro kořenové systémy Liových algeber.

Není příliš složité ukázat, že seznam možných Dynkinových diagramů (abstraktních) kořenových systémů je dán seznamem v předchozí větě. Pak je ale třeba také ověřit, že libovolný Dynkinův diagram (modulo isomorfismus orientovaných grafů) určuje jednoznačně příslušný kořenový systém (až na isomorfismus kořenových systémů) a pak i celou Lieovu algebru (až na isomorfismus Lieových algeber). Navíc je třeba zkonstruovat Lieovy algebry pro 5 vyjímečných Dynkonových diagramů. Poznamenejme, že např. Lieova algebra odpovídající Dynkinovu diagramu G_2 je podalgebrou Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(7,\mathbb{C})$ a že se dá realizovat jako jistá maticová algebra. Zkuste si v rovině nakreslit, jak musí vypadat kořenový diagram (tj. množina všech kořenů) pro G_2.

5.3 Casimírův operátor.

Předpokládejme, že (π, V) je ireducibilní reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Schurovo lema nám říká, že každý prvek $L \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, který komutuje se všemi operátory $\pi(X)$; $X \in \mathfrak{g}$, je skalární násobek identity. Jistý význačný operátor s touto vlastností se dá pro danou reprezentaci definovat takto.

Definice. *Nechť $H_1, \dots H_n$ je libovolná base $\mathfrak{h}$, zvolme libovolně nenulová prvky $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Pak množina $\{H_1, \dots H_n\} \cup \{E_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ je baze $\mathfrak{g}$. Nechť $\{\tilde{H}_1, \dots \tilde{H}_n\} \cup \{E_{-\alpha}\}_{\alpha\in\Delta}$ je duální baze (vůči Killingově skalárnímu součinu) k této bazi.*

Pak definujeme Casimírův operátor $C_\pi \equiv C$ reprezentace (π, V) pomocí vzorce

$$C_\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi(H_i) \circ \pi(\tilde{H}_i) + \sum_{\alpha\in\Delta} \pi(E_\alpha) \circ \pi(E_{-\alpha}.$$

Tento operátor komutuje se všemi operátory dané reprezentace a je tedy násobkem identity. Je-li (π, V) ireducibilní reprezentace s nejvyšší vahou λ, pak se dá ukázat, že příslušné číslo je dáno vztahem

$$C_\pi = |\lambda + \delta|^2 - |\delta|^2 = < \lambda + 2\delta, \lambda >,$$

kde $< ., . >$ je Killing;v skalární součin a váha δ je definována pomocí vzorce

$$\delta = 1/2 \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha = \sum_{i=1}^{n} \omega_i,$$

kde $\omega_1, \dots, \omega_n$ jsou fundamentální váhy příslušné Lieovy algebry.

Pro případ algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ je reprezentace úplně určena hodnotou tohoto Casimírova operátoru (spočítejte si, čemu se rovná tato hodnota pro reprezentaci, která ma dimenzi rovnou $n+1$). Pro vyšší rank algebry existuje více Casimírových operátorů (vyšších řádů, ne již kvadratických), jejich hodnoty pak určují reprezentaci i v obecném případě.