6 Řady

6.1 Číselné řady, absolutní konvergence

§1. Základní pojmy

V tomto oddílu se seznámíme s řadami čísel - s jedním z klasických témat matematiky, které stálo na jejím úsvitu, byť ve zcela jiné koncepci - v koncepci řecké vědy. Zájem o řady byl zájmem o zacházení (počítání) s nekonečným počtem veličin. Nekonečno bylo v tehdejších dobách (dobách Starého Řecka, tj. asi 6. st. př. Kr.) velice často zdrojem četných sporů, a tak není divu, že zájem o ně byl tak veliký, že při slýchání jmen starořeckých vědců-filozofů se nezřídka setkáváme s jejich vztahem k řadám samotným (Zenón, Xenofanés, Aristotelés). My se však za pořadovými čísly vět setkáme se jmény matematiků převážně století osmnáctého a devatenáctého: Gauss, d'Alembert, Cauchy, Abel, Dirichlet, Čebyšev).
Úmluva: Jelikož velice často budeme užívat $\lim_{n\to\infty} s_n$, pišme místo něj stručně: $\lim s_n$.

Definice 1: Číselná řada
Nechť a_n je posloupnost komplexních čísel. Posloupnost s_n nazveme **posloupností n-tých částečných součtů posloupnosti** a_n , právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Řekneme, že **řada** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **konverguje, resp. diverguje, resp. osciluje**, právě když existuje $\lim s_n$ vlastní (tj. s_n konverguje), resp. nevlastní, resp. s_n nemá limitu (ani vlastní, ani nevlastní). Nechť $A \in \mathbb{C} \cup R^*$. Nechť řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje nebo diverguje. Řekneme, že **součtem řady** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **je** A, právě když $\lim s_n = A$, toto píšeme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A$.

Poznámka: Někdo může být překvapen, že říkáme (v definici druhé tučně vytištěné sousloví) něco o "řadě", když nevíme, co ona je (neznáme její definici), upozorňuji, že v definici se nedefinuje řada, ale sousloví "řada konverguje, resp. diverguje, resp. osciluje". Slovo řada bude použito ve větách dále jen v tomto sousloví. Je potřeba říci, že se nebudeme svazovat při užívání slova řada touto přísnou formálností.

Příklad: Nechť $q \in \mathbb{C}$. Uvažme posloupnost $\{q^k\}$. Zkoumejme konvergenci, divergenci, anebo oscilaci příslušné řady (geometrické) v závislosti na parametru q.
Využijeme známého vzorce

$$\forall q \in \mathbb{C} : 1 - q^{n+1} = (1 + q + q^2 + \ldots + q^n)(1 - q) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Hledejme nyní limitu posloupnosti částečných součtů geometrické řady. Vidíme, že pro libovolné $q, |q| < 1$ tato limita existuje a je rovna $1/(1 - q)$. Pro $q = 1$ nemůžeme použít náš vzoreček, ale vidíme, že n-tý částečný součet řady je roven n, tj. řada zřejmě diverguje. Pro ostatní q vzoreček použít můžeme a zjistíme, že řada diverguje pro $q \geq 1$ a osciluje pro $q \leq -1$ (tj. na $\{|q| \geq 1\} \setminus \{q \geq 1\}$).

Příklad: Dokážeme, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Tato řada se nazývá harmonická.

$$s_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2}+2.\frac{1}{4}+4.\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+3.\frac{1}{2}.$$

„Domyslíme-li tento postup indukcí“, dostaneme, že $s_{2^k} \geq 1 + k.\frac{1}{2}$. Jelikož $\frac{1}{n}$ jsou kladná čísla, je příslušná s_n rostoucí, má tedy dle vět známých z minulého semestru limitu. Dle Heineho věty, má-li nějaká posloupnost limitu (vlastní či nevlastní), pak její každá vybraná podposloupnost má touž limitu, tj. jelikož (jak jsme se výše odvolali na větu z minulého semstru) pro harmonickou řadu existuje $\lim s_n$ (my pouze nevíme, zda konečná, anebo ne), pak je rovna limitě podposloupnosti s_{2^k}, která je však pro $k \to \infty$ plus nekonečno - dle odhadu učiněného výše. Proto zmíněná řada diverguje.

Poznámka: Konvergence či divergence řady nezávisí, na rozdíl od jejího součtu, na konečném počtu členů. Je možno definovat řadu nejen od počátečního členu 1, ale i od libovolného celého (tedy i nekladného) čísla.

Dokažme jedno velice jednoduché, ale potřebné tvrzení — větu o podmínce nutné pro konvergenci řady.

Věta 1: Nutná podmínka pro konvergenci řad

Jestliže $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim a_k = 0$.

Důkaz: Nechť s_k má limitu, a to konečnou. Nechť $S_k = s_{k-1}$, pro $k \geq 2$. Platí, že $a_k = s_k - s_{k-1} = s_k - S_k$, pro $k \geq 2$. Jelikož S_k je vybranou posloupností s_n, má dle Heineho věty touž limitu jako S_k: $\lim s_k = \lim S_k$. Pišme: $\lim a_k = \lim (s_k - S_k) = \lim s_k - \lim S_k = 0$, a proto i $\lim a_k = 0$, což bylo dokázat.

Věta 2: Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci řad

Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k) < \varepsilon$.

Důkaz: Napišme Bolzano-Cauchyovu podmínku pro posloupnosti: Existuje konečná $\lim s_n$, právě když $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(|s_n - s_m| < \varepsilon)$. Předposlední závorku můžeme ekvivalentně nahradit $(\forall n \geq n_0)(\forall m > n)$, dík vlastnostem absolutní hodnoty. Definujme $p := m - n$, uvědomme si, že má-li být $V(m)$ splněno pro každé $m > n$, stačí a je nutné, aby $V(n+p)$ bylo splněno pro každé přirozené p. Navíc platí, že $|s_m - s_n| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k \right|$, a proto můžeme B.-C.-podmínku pro posloupnosti ekvivalentně přepsat v zápis: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \mathrm{n}_0 \in \mathbb{N})(\forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0)(\forall \mathrm{p} \in \mathbb{N})(\sum\limits_{\mathrm{k}=\mathrm{n}}^{\mathrm{n}+\mathrm{p}} \mathrm{a}_\mathrm{k} < \varepsilon)$, který je ekvivalentní tvrzení věty.

Nikdo nepochybuje o platnosti následující jednoduché věty, která určuje pravidla pro počítání s řadami.

Věta 3: O vektorovém prostoru konvergentních řad

Nechť $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{C}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = B \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{C}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak platí

1. Jestliže má $A + B$ smysl, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B$.
2. Jestliže $\lambda.A$ má smysl, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda.A$.
3. Množina všech konvergentních řad je lineárním vektorovým prostorem nad tělesem komplexních čísel.

Důkaz: Tvrzení věty je triviální, bereme-li součet řady jako limitu částečných součtů — vztahy 1 a 2 budou zřejmě platit, pokud místo ∞ píšeme v sumě libovolné $n \in \mathbb{N}$. Přechodem do limity $n \to \infty$ již dostáváme dokazované tvrzení. Bod 3 plyne přímo z definice lineárního vektorového prostoru a vlastností 1 a 2.

6.2 Řady s nezápornými členy

Zabývejme se nyní speciální množinou řad, řadami s nezápornými členy. V tomto paragrafu, bude-li řečeno slovo řada, míní se tím implicite řada s nezápornými členy.

Věta 4:

Každá řada s nezápornými členy má součet $s \in \mathbb{R}^*$.

Důkaz: Plyne okamžitě z věty o konvergenci monotonních posloupností z minulého semestru.

Věta 5: Srovnávací kriterium
Nechť platí alespoň jedna z podmínek

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq b_n)$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > 0, b_n > 0)(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{a_n})$.

Potom pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ konverguje; a pokud naopak $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ diverguje, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
Důkaz: Druhou část tvrzení (o divergenci) dokazovat nebudeme, neboť jde o obměnu (pojem z logiky) tvrzení prvního, jelikož víme, že pro řady s nezápornými členy mohou dle věty (4) nastat pouze dvě vzájemně se vylučující možnosti: buď řada konverguje, nebo diverguje (oscilace nenastává).
Nechť tedy platí 1, pak sčítáním příslušných výrazů dostáváme pro každé n přirozené, že: $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} b_k$.
Limitní přechod v nerovnosti poskytne: $\sum_{k=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} b_n$, jelikož víme, že limity v $\mathbb{R}^*$ existují. Dále víme (dle předpokladu o konvergenci řady s členy a_n), že $\infty > \sum_{k=1}^{\infty} a_n$. Ve spojení s předchozí nerovností dostáváme, že řada s členy b_n konverguje.
Nechť platí nerovnost z podmínky 2 pro $n+1, n, ..., 1$ přirozená. Znásobme všechny tyto nerovnosti pro výše uvedené indexy. Dostáváme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}.\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}.\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_2}{b_1}.$$

Po vykrácení ($a_i \neq 0$) dostaneme: $\frac{a_{n+1}}{a_1} \geq \frac{b_{n+1}}{b_1}$, čímž zjistíme:$a_{n+1} \geq \frac{a_1}{b_1}.b_{n+1}$. Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak dle předchozího odstavce konverguje i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1}.b_{k+1}$ (zřejmě je i tato řada dle předpokladu řadou s nezápornými členy). Dle věty (3) ad 2., kde klademe $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$, dostáváme již požadované tvrzení.

Poznámka: Připomínáme, že věta (5) pojednává pouze o řadách s nezápornými členy, a to i v případě podmínky 1. Určete, kde byl tento předpoklad (mlčky) v důkazu použit!

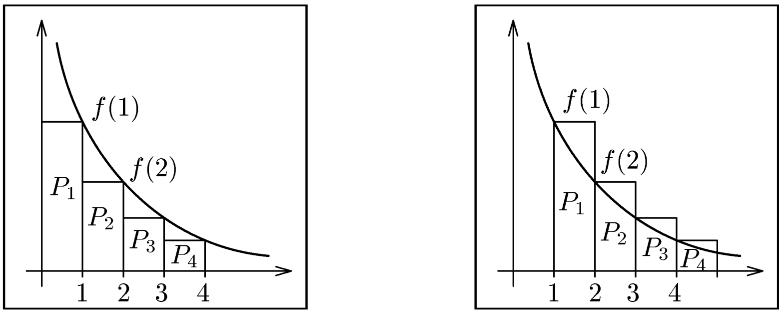
Cvičení: Dokažte, že řada s členy $\frac{1}{n^2}$ konverguje. Návod: ukažte, že platí $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n.(n-1)}$, poté rozložte na "parciální zlomky" výraz $\frac{1}{n.(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ a ukažte, že tato řada konverguje (sčítejte členy na prvé straně výše uvedené rovnosti - příslušné se odečtou), tím jste však dle srovnávacího kriteria ukázali, že konverguje i řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Věta 6: Cauchyovo nelimitní odmocninové kriterium

1. $(\exists q \in (0,1))(\forall n \in \mathbb{N})(\sqrt[n]{a_n} \leq q) \Rightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} a_n)$ je konvergentní.
2. Jestliže existuje nekonečně mnoho členů a_n, že $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada diverguje.

Důkaz: První část věty: nechť takové $q \in (0,1)$ existuje, tj. pro každé přirozené n platí: $a_n \leq q^n$, avšak my již víme (viz úvodní příklad), že příslušná řada (geometrická) $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje, čímž je splněna 1. podmínka věty (5), s jejíž pomocí dostáváme požadované.
Druhá část tvrzení plyne snadno z věty (1) — má-li být nekonečně mnoho členů $a_n > 1$, nemůže být $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tedy řada nekonverguje (a dle (4) tím pádem diverguje).

Věta 7: d'Alembertovo nelimitní podílové kriterium



Obr. 1: K souvislosti součtu řady a nevlastního integrálu — odhad integrálu pomocí horního a dolního součtu

1. $(\exists q \in (0,1))(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

2. $(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz: Předpokládejme platnost první nerovnosti a přepišme ji ve tvar: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$. Použijeme-li opět srovnávací kriterium, dostaneme požadované tvrzení, jelikož víme, že geometrická řada s kvocientem $q \in (0,1)$ konverguje.
Druhá část opět plyne triviálně z (1) — zřejmě musí platit $a_n \geq a_1 > 0$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq a_1 > 0$.

Další kriterium svazuje integrál a pojem sčítání, věc která je nám intuitivně velice blízká, je však potřeba jí dodat nezbytné přesnosti.
Věta 8: Integrální kriterium
Nechť f je spojitá, kladná a nerostoucí na $(0,\infty)$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje, právě když konverguje (tj. existuje a je reálný) zobecněný Riemannův integrál $\int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$.

Důkaz: Tvrzení věty je intuitivně velmi názorné (viz obrázky). Formální důkaz vypadá takto: f je nerostoucí a spojitá, proto pro každé přirozené m platí:

$$f(m) \geq \int_m^{m+1} f(t)\ \mathrm{d}t \geq f(m+1),\ \text{což sečteno přes } m = 1,\dots,n \text{ dává}$$

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) \geq \sum_{m=1}^{n} \int_m^{m+1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t \geq \sum_{m=1}^{n} f(m+1) = f(n+1) - f(1) + \sum_{m=1}^{n} f(m).$$

Z předchozí kapitoly víme, že spojitost f postačuje k existenci Riemannova integrálu. Protože na $\mathbb{R}^+$ je $f(x) \geq 0$, funkce $F(n) = \int_1^n f(x)\ \mathrm{d}t$ je rostoucí, a tedy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$. Otázkou je, zda vlastní či nevlastní. Použijeme-li pro poslední uvedenou nerovnost limitního přechodu, dostaneme:

1. Je-li řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergentní, je příslušný integrál $\int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ menší než její součet, tudíž konečné číslo (tj. konverguje).

2. Je-li integrál $\int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ konvergentní, je díky druhé části nerovnosti, součet řady menší než hodnota integrálu, a tudíž i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje.

Věta 9: Raabeovo kriterium
Pokud $\lim \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \cdot n > 1$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Pokud $\lim \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \cdot n < 1$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz: Plyne ze srovnání s harmonickou řadou viz např. V. Jarník: Diferenciální počet II., Academia, Praha 1984, str. 115, kde je uvedeno v nelimitní podobě.

Dokažme jednoduchý důsledek Raabeova kriteria.
Věta 10: Gaussovo kriterium
Nechť existují $p, q \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ taková, že pro každé n přirozené platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = p + \frac{q}{n} + \frac{t_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

kde t_n je omezená posloupnost reálných čísel. Pak platí následující implikace:

1. $p > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

2. $p < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

3. $(p = 1 \wedge q > 1) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

4. $(p = 1 \wedge q < 1) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz: Dokážeme pouze implikaci číslo 3, ostatní analogicky přímým dosazením do Raabeova kriteria. $\lim n.(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim (n + q + \frac{t_n}{n^\varepsilon} - n) > 1$, čímž je důkaz proveden.

Poznámka: Všechna tato kriteria požadují, aby nějaký výrok byl splněn pro všechna přirozená čísla (pro všechny členy řady). Jak jsme již zmínili, konvergence je nezávislá na hodnotě konečného počtu členů, což (pro $\mathbb{N}$) znamená, že stačí, aby existovalo nějaké n_0 přirozené, že pro všechna $n > n_0$ výroky, jejichž platnost se požaduje, platí. Právě z výše uvedeného důvodu mají kriteria své limitní protějšky:

Věta 11: Limitní Cauchyovo odmocninové kriterium

1. $(\lim \sqrt[n]{a_n} \neq 1) \Rightarrow (\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n)$ je konvergentní.

2. Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada diverguje.

Věta 12: Limitní d'Alembertovo podílové kriterium

1. $(\exists q \in (0,1))(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

2. $(\forall n \in N)(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1) \Rightarrow \sum k = 1^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta 13: Limitní srovnávací kriterium
Buďte a_n, b_n kladné pro každé n přirozené. Nechť existuje $q \in (0, +\infty)$, že $lim(\frac{a_n}{b_n}) = q$, pak je řada $\sum k = 0^{\infty} a_k$ konvergentní, právě tehdy když je konvergentní $\sum k = 0^{\infty} b_k$.

Raabeovo kriterium v nelimitní podobě si jistě každý sestaví sám.
Poznámka: Základem důkazů limitních variant je úvaha

$$\lim_{n\to\infty} a_n < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n < 1.$$

Dále si už jen uvědomíme, že konvergence řady (na rozdíl od součtu) nezávisí na konečném počtu členů (zde prvních n_0 členech).

Nezapomeňme však, že pokud některá limita neexistuje, nemůžeme z příslušného limitního kriteria učinit žádný závěr.

Zmiňme se navíc o "hierarchii" kriterií. Výchozí větou pro další tvrzení byla věta 5 - srovnávací kriterium. Raabeovo kriterium je silnější než kriterium d'Alembertovo, tím míním: Lze-li konvergenci zjistit d'Alembertovým, pak ji lze zjistit i Raabeovým kriteriem a zároveň existuje řada, jejíž konvergenci lze zjistit Raabeovým kriteriem, nikoliv však kriteriem d'Alembertovým - viz v. Jarník: Diferenciální počet II., Academia, Praha 1984, s. 116. Limitní varianty jsou slabší než příslušné nelimitní, pokud v těchto nahradíme výraz: $(\forall n \in \mathbb{N})$ výrazem $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)$.

§2. Absolutně konvergentní řady

Definice 2: Absolutní konvergence, neabsolutní konvergence
Řekneme, že řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ $(a_i \in \mathbb{C})$ je absolutně konvergentní, pokud řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konverguje; neabsolutně konvergentní, pokud konverguje $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, ale řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ diverguje.

Poznámka: Řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ může konvergovat (absolutně nebo neabsolutně), divergovat nebo oscilovat; zatímco řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ může pouze konvergovat nebo divergovat, neboť je tvořena nezápornými (tedy i reálnými) členy.

Věta 14: Souvislost konvergence a absolutní konvergence
Pokud je řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ absolutně konvergentní je i konvergentní.

Důkaz: Dle Bolzano-Cauchyho podmínky, použité na řadu absolutních hodnot, platí:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0; \forall n > n_0 : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{i=n}^{n+p} |a_i| \right| < \varepsilon$$

K tomu, aby řada konvergovala, je nutné a stačí, aby byla splněna Bolzano-Cauchyho podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0; \forall n > n_0 : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{i=n}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

Zvolím-li pro dané ε n_0 tak, aby platilo:

$$\forall n > n_0 : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{i=n}^{n+p} |a_i| \right| < \varepsilon$$

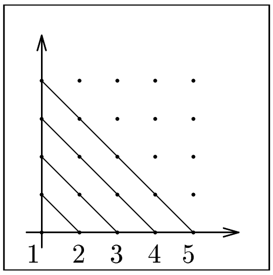
Podle trojúhelníkové nerovnosti bude též platit:

$$\forall n > n_0 : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{i=n}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

Bolzano-Cauchyho podmínka je tedy pro řadu $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ splněna a řada konverguje.

Příklad: Pro která $z \in \mathbb{C}$ řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje?

Budeme nejprve vyšetřovat absolutní konevrgenci řady. Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ však dle d'Alembertova kritéria



Obr. 2: Přečíslování řady pro $\exp(z_1)\exp(z_2)$.

konverguje pro všechna $|z| \geq 0$, neboť:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

Původní řada tedy konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Cvičení: Vyšetřete konvergenci pro $z \in \mathbb{C}$ řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ a řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Věta 15:
Exponenciála je jediná funkce splňující následující body:

1. $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\ \exp(z_2)$
2. $\forall\ x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$
3. $\exp(0) = 1$
4. $\forall\ x \in \mathbb{R} : (\exp(x))' = \exp(x)$
5. $H(\exp) = (0, +\infty)$, exponenciála je prostá a rostoucí funkce
6. $\forall\ a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N} : \exp(\frac{p}{q}\ln a) = \sqrt[q]{a^p}$

Poznámka: Z bodů 1 a 3 vyplývá: $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

Poznámka: Z bodu 5 vyplývá existence inverzní funkce ($\ln x$).

Poznámka: Lze též definovat mocninné funkce pro základ $a \neq e, a > 0$ předpisem $a^b = \exp(b \ln a)$.

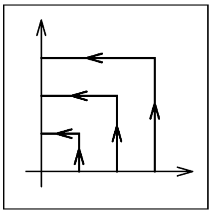
Poznámka: Exponenciála je homomorfismus mezi groupou $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}^+, .)$.

Důkaz:

1. $\exp(z_1)\exp(z_2) = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!}\right) = \sum\limits_{k=0,l=0}^{\infty} \frac{z_1^k z_2^l}{k!l!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{(n-k)!k!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n = \exp(z_1 + z_2)$. Klíčovým krokem bylo přečíslování sčítané řady (záměna pořadí sčítanců) — v součinu se vyskytují všechny členy $a_k b_l, k, l \in \mathbb{N}$, otázkou je, v jakém pořadí je sčítat. Na obrázku představují body o souřadnicích (k, l) sčítance $a_k b_l$; místo abychom je sčítali „po řádcích" (příp. sloupcích), sčítáme je po šikmých úsečkách. Že jsme k tomuto kroku oprávněni, ukážeme v následujícím. Vnitřní sumu přes k jsme odstranili s využitím binomické věty.

2. Podle 1 stačí ukázat $\exp(ix) = i \sin x + \cos x$. Ale $\exp(ix) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x$

3. Plyne z 1, neboť $0 \neq \exp(0) = \exp(0 + 0) = \exp(0)\exp(0) = (\exp(0))^2$, případně přímo z definice exponenciály.



Obr. 3: Bijekce $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$.

4. Nejprve ukažme $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$. Zkoumejme $\lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{\exp(h)-1}{h} - 1\right) = \lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{1+\frac{h}{1!}+\ldots+\frac{h^n}{n!}-1}{h} - 1\right) \leq \lim\limits_{h\to 0} |h| \left(1 + |h| + \ldots + |h|^{n-2}\right) = \lim\limits_{h\to 0} |h| \frac{1-|h|^{n-1}}{1-|h|} = 0$. Samotné tvrzení se poté dokáže použitím 1: $(\exp(x))' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x) \lim\limits_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x)$
5. Domácí cvičení — návod: Zkoumejte limity v krajních bodech.
6. Stačí ověřit, že platí: $(\exp(\frac{p}{q}\ln a))^q = a^p$. Postupujme následovně: $(\exp(\frac{p}{q}\ln a))^q = \exp(q\frac{p}{q}\ln a) = \exp(p\ln a) = a^p$

§3. Přerovnávání řad a jejich násobení

Poznámka: Nechť M je množina a $a_m \in \mathbb{C}, m \in M$. Nechť dále je φ bijekce $\mathbb{N}$ na M. Zajímá mě, kdy $\sum\limits_{m\in M} a_m := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, nezávisí na volbě φ.

Definice 3: Spočetná množina
Řekneme, že M je spočetná, pokud $\exists\ \varphi \subseteq \mathbb{N} \times M, \varphi$ je bijekce.
Řekneme, že M je konečná, pokud $\exists\ \varphi \subseteq N_m \times M, \varphi$ je bijekce, kde $N_m = \{n \in \mathbb{N}; n \leq m\}$.
Řekneme, že M je nespočetná, pokud M není spočetná ani konečná.

Příklad: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^n$ jsou nespočetné (důkaz lze najít v Kopáčkově Matematice pro fyziky I). $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná množina — v tomto případě budeme bijekci konstruovat takto:

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2, n \mapsto (a,b) : \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots \\ (1,1) & (2,1) & (1,2) & (3,1) & (2,2) & (1,3) & (4,1) & (3,2) & (2,3) & (1,4) & \ldots \end{array}$$

Systém bijekce je znázorněn v grafu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (body roviny se souřadnicemi $(x,y), x,y \in \mathbb{N}$ očíslované přirozenými čísly) — viz obrázek. Toto φ můžeme využít i pro konstrukci bijekce mezi $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{N}$ (čímž ukážeme, že racionálních čísel „je stejně“[1] jako přirozených) — mezi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ bijekce zřejmě existuje (jak se vyrovnáte se zobrazením $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$?). Je jen třeba si uvědomit, že např. body $(1,1)$ a $(2,2)$ očíslujeme různými přirozenými čísly, i když jim přiřadíme stejná racionální čísla ($\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$).

Definice 4: Přerovnání řady
Nechť $a_n \in \mathbb{C}$ je posloupnost čísel, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce, pak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ nazveme přerovnáním řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Věta 16: Přerovnávání absolutně konvergentních řad
Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak její přerovnání konverguje také absolutně a hodnoty, k

[1] Jsou-li množiny A, B konečné, pak z existence bijekce mezi nimi plyne, že mají stejný počet prvků. Toto tvrzení (zatím intuitivně) zobecňujeme i pro nekonečné množiny.

nimž tyto řady konvergují se rovnají.

Důkaz: Nejprve dokažme absolutní konvergenci přerovnání $a_n = b_{\varphi(n)}$. Chci ukázat $\exists\ C \in \mathbb{R}; \forall\ n \in \mathbb{N}:$ $\sum\limits_{k=0}^{n} |b_k| \leq C$, o posloupnosti a_n to vím. Nechť $m = \max\{\varphi(k), k \leq n\}$, potom $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum\limits_{k=0}^{m} |a_k| \leq C$, což se mělo ukázat.
Pro shodnost obou hodnot stačí ukázat, že platí: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (b_k - a_k) = 0$. Zkoumejme, zda lze nějak omezit částečné součty této řady. Z absolutní konvergence řad s a_n a b_n vyplývá (přes Bolzano-Cauchyovu podmínku): $\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ n_a; \forall p \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{n=n_a}^{n_a+p} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, podobně pro n_b. Zvolím-li $n_0 = \max(n_a, n_b)$, budu moci omezit všechny součty podle trojúhelníkové nerovnosti:

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} (a_k - b_k)\right| < \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} |a_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} |b_k| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Takto však potřebujeme omezit částečné součty pro k od jedné. Volme $n_1 = \max\limits_{k \leq n_0}\{\varphi(k), \varphi^{-1}(k)\}$; tvrdím, že pak

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1} (b_k - a_k)\right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{n_1} |a_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n_1} |b_k|. \tag{2}$$

Vskutku: podmínka pro n_1 mi zaručila, že se v sumě nalevo budou ke všem $a_1, \ldots, a_{n_0}$ vyskytovat jejich „přerovnané“ protějšky v řadě b_k, tj. $b_{\varphi(1)}, \ldots, b_{\varphi(n_0)}$, které se s nimi odečtou, čímž v sumě zbudou z řady a_k pouze členy s indexem $n_0 + 1$ a vyšším. Stejně mám ale zaručeno, že i ke členům $b_1, \ldots, b_{n_0}$ budou existovat protějšky $a_{\varphi^{-1}(1)}, \ldots, a_{\varphi^{-1}(n_0)}$ v řadě se členy a_k. V sumě nalevo se tedy budou vyskytovat pouze členy a_k i b_k s indexy většími než n_0 (a možná ještě ne všechny). Vztah (2) pak již dostáváme z trojúhelníkové nerovnosti.
Z Bolzano-Cauchyovy podmínky (viz výše) pro $p = n_1 - n_0 - 1$ pak máme

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1} (b_k - a_k)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což sečteno s (1) dává

$$2\varepsilon > \left|\sum_{k=1}^{n_1} (b_k - a_k)\right| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} (a_k - b_k)\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{n_0+p} (a_k - b_k)\right|, \forall p \in \mathbb{N},$$

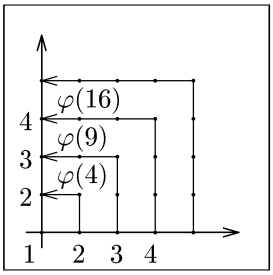
neboť jistě $n_1 \geq n_0$ (sumy na sebe buď těsně navazují, nebo se dokonce překrývají). Pro každé $\varepsilon > 0$ jsme tedy nalezli způsob, jak omezit všechny částečné součty číslem 2ε — to ale znamená, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = 0$, což bylo dokázati.

Definice 5: Řady s prvky „očíslovanými“ jinak než přirozenými čísly
Nechť M je spočetná množina. Řekneme, že $\sum\limits_{m \in M} a_m$, kde $a_m \in \mathbb{C}$, je absolutně konvergentní, pokud existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to M$ taková, že $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{\varphi(i)}|$ konverguje. Pak definujeme $\sum\limits_{m \in M} a_m$ jako $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)}$.

Poznámka: Minulá věta zajišťuje korektnost definice - tzn., že hodnota $\sum\limits_{m \in M} a_m$ nezávisí na volbě φ.

Poznámka: Speciálně lze sečíst absolutně konvergentní řadu $\sum\limits_{m \in M} a_m$ pro $M = \mathbb{N}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Věta 17: Konvergence součinu řad
Nechť řady $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně, potom řada $\sum\limits_{m=1,n=1}^{\infty} a_m b_n$ konverguje absolutně a platí:



Obr. 4: Očíslování členů součinu dvou řad

$\sum\limits_{m=1,n=1}^{\infty} a_m b_n = \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right).$

Důkaz: Nejprve chci dokázat absolutní konvergenci. Nechť $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, tj. $n \to (\varphi_1(n), \varphi_2(n))$, předpisem $\varphi_1(n) = i, \varphi_2(n) = j \Rightarrow n = (i-1)^2 + j$, pro $i \geq j$, $n = j^2 - i + 1$ pro $i < j$. „Obcházím po okraji čtverce“ — viz obrázek. Zajímá mě, zda konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\varphi_1(n)} b_{\varphi_2(n)}|$ Označím posloupnost částečných součtů $s_{n_0} = \sum\limits_{n=1}^{n_0} |a_{\varphi_1(n)} b_{\varphi_2(n)}|$, tato posloupnost je monotónní, stačí ukázat tedy, že je omezená. Pro $n_0 = n^2$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí: $s_{n^2} = \sum\limits_{i=1}^{n^2} |a_{\varphi_1(i)} b_{\varphi_2(i)}| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| \sum\limits_{i=1}^{\infty} |b_i|$, tedy řada $\sum\limits_{m=1,n=1}^{\infty} a_m b_n$ konverguje absolutně.

Nyní chci dokázat rovnost: $\sum\limits_{m=1,n=1}^{\infty} a_m b_n = \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$ Tedy: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)$ Což se mělo ukázat. První rovnost je oprávněna dle věty o limitě podposloupnosti konvergentní posloupnosti.

Poznámka: S využitím předchozí věty můžeme provést přesný důkaz věty o exponenciále, bod první.

6.3 Stejnoměrná konvergence

Definice 6: bodová a stejnoměrná konvergence
Buď M množina. Nechť $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost funkcí definovaných na M.

- Řekneme, že $\varphi_n(x)$ konverguje *bodově* k $\varphi(x)$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in M \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

  Píšeme $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x)$.

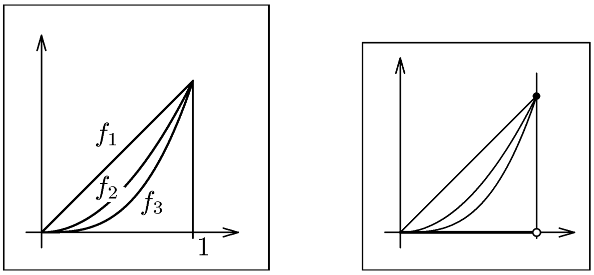
- Řekneme, že $\varphi_n(x)$ konverguje *stejnoměrně* k $\varphi(x)$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in M \quad \forall n \geq n_0 \quad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

  Píšeme $\varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x)$.

Buď $v_n(x)$ posloupnost funkcí na M.

- Řekneme, že nekonečná řada $\sum\limits_{1}^{\infty} v_n(x)$ konverguje bodově k $S(x)$, právě když pro $S_n(x) \equiv \sum\limits_{1}^{n} v_n(x)$ platí $S_n(x) \overset{M}{\to} S(x)$



Obr. 5: Posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ na $(0,1)$ a její limita

- Řekneme, že $\sum\limits_{1}^{\infty} v_n(x)$ konverguje stejnoměrně k $S(x)$, právě když $S_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} S(x)$.

Příklad: Uvažujme posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ na intervalu $I = (0,1)$. Všechny tyto funkce (viz obrázek) mají grafy začínající v bodě $[0,0]$ a končící v bodě $[1,1]$, přičemž krajní body do zkoumané množiny nepatří. S rostoucím n je graf x^n stále prohnutější a stále více se blíží bodu $[1,0]$. Snadno nahlédneme, že daná posloupnost bodově konverguje ke konstantní funkci $f(x) = 0, \quad x \in (0,1)$, pro každé x z tohoto intervalu tvoří hodnoty $f_n(x)$ geometrickou posloupnost, která má při kvocientu $|x| < 1$ limitu nula.
Jak je tomu se stejnoměrnou konvergencí? Když si pořádně prohlédneme definice bodové a stejnoměrné konvergence, seznáme, že se liší pouze pořadím kvantifikátorů — kvantifikátor $\forall x$ je u stejnoměrné konvergence „vsunut více do definice“. Jinými slovy, ε musíme zvolit dříve než x a musí tudíž vyhovovat na celé množině. Pokud si nakreslíte graf funkce, k níž se má posloupnost limitně blížit a kolem této funkce pás o pološířce ε, zjistíte, že definice neznamená nic jiného, než že od jistého indexu n_0 musí mít všechny funkce s vyšším indexem graf celý uvnitř tohoto pásu.
V našem konkrétním případě je z této geometrické představy patrné, že $f_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně k funkci $f(x) = 0$. Pro libovolné $\varepsilon < 1$ grafy funkcí v okolí jedničky vzrostou nad ε a tedy vyskočí z příslušného pásu kolem nuly. Vzápětí dokážeme větu, kterou tento postup zpřesníme a zobecníme.

Poznámka:

1. Jestliže $\varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, pak $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x)$. Toto tvrzeníčko se stane zřejmým, uvážíme-li, že pokud pro každé ε dokážeme najít univerzální index n_0, od něhož už se pro všechna x žádné $f_n(x)$ neliší od $f(x)$ o více než ε, tím spíše ho najdeme pro každé x jednotlivě.

2. Nechť $\varphi_n(x) \overset{M_i}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ platí pro každý index od 1 do n. Pak $\varphi_n(x) \overset{\bigcup M_i}{\rightrightarrows} \varphi(x)$. Toto tvrzení je opět velmi jednoduché – pokud máme zadáno ε a jsme k němu schopni najít na každé M_i odpovídající $n_0 i$, pak na sjednocení $\bigcup\limits_{1}^{n} M_i$ stačí vzít za n_0 maximum z těchto čísel. Pozor, tvrzení platí pouze pro konečné sjednocení.

3. Ze stejné úvahy plyne také, že pro M konečnou ztrácí pojem stejnoměrné konvergence svou zajímavost, neboť $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x) \iff \varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x)$

4. Je-li $M' \subset M$, pak $\varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x) \implies \varphi_n(x) \overset{M'}{\rightrightarrows} \varphi(x)$.

Věta 18: Ekvivalentní podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí
Nechť $\varphi_n(x)$ je posloupnost funkcí $\varphi_n : M \mapsto \mathbb{C}$, $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x)$. Označme $\sigma_n = \sup\limits_{x \in M} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|$. Pak

$$\varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x) \iff \lim \sigma_n = 0$$

.

Důkaz: Rozepišme obě strany dokazované ekvivalence v $\varepsilon - \delta$ formalismu:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in M \quad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \sup_{x\in M} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Pokud pro libovolnou funkci $f(x)$ definovanou na M (například $|\varphi_n(x) - \varphi(x)|$) platí $\sup\limits_{x\in M} f(x) < \varepsilon$, pak z definice suprema $\forall x \in M \quad f(x) \leq \sup\limits_{x\in M} f(x) < \varepsilon$. Opačná implikace je stejně jednoduchá. Pokud pro každé x je $f(x)$ menší než ε, pak supremum musí být menší nebo rovno než ε. Tím je věta dokázána, neboť v definici limity není samozřejmě podstatné, zda je příslušná funkce menší či menší nebo rovna než ε (viz kapitola o limitách).

Příklad: Nyní můžeme snadno zdůvodnit, proč posloupnost x^n nekonverguje stejnoměrně na $(0, 1)$. Platí totiž $\sup\limits_{x\in(0,1)} |x^n - 0| = 1$. O něco obtížnější je vyšetřit stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ pro x reálné. Snadno ověříme, že tato posloupnost bodově konverguje ke konstantní funkci $f(x) = 0$. Funkce $|f_n(x) - 0|$ je sudá, takže se můžeme omezit jen na $x \geq 0$. Chceme hledat $\sup(f_n(x) - 0)$ a použijeme k tomu standardních prostředků pro vyšetřování průběhu funkce, jmenovitě pro hledání globálních extrémů.
Limita funkce $\frac{nx}{1+n^2x^2}$ v $+\infty$ je rovna nule, stejně jako funkční hodnota v bodě 0. Derivace $f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2)-2n^2xnx}{(1+n^2x^2)^2} = n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ je všude definovaná a nulová v bodě $x_e = \frac{1}{n}$. Funkční hodnota v tomto bodě je $f(x_e) = 1/2$ a jedná se tedy o maximum a supremum na intervalu $(0, 1)$. Daná posloupnost nekonverguje stejnoměrně.

Věta 19: Nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí
Nechť řada komplexních funkcí $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M. Pak $v_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} 0$.

Důkaz: Označme součet řady $\sum\limits_1^\infty v_n(x) \equiv S(x)$ a její částečné součty $S_n(x)$. Řada je stejnoměrně konvergentní, takže

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in M \quad |S(x) - S_{n-1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti pak platí

$$|v_n(x) - 0| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon,$$

čímž je věta dokázána.

Věta 20: Bolzano-Cauchyova podmínka pro řady
Buď $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ řada komplexních funkcí na M. Pak $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní, právě když

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \left|\sum_{n+1}^{n+p} v_k(x)\right| < \varepsilon$$

Důkaz: $\Longrightarrow$: Pokud posloupnost $S_n(x)$ částečných součtů stejnoměrně konverguje k $S(x)$, pak podle námi dokázané věty pro n větší než nějaké n_0 je $\sup |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Odtud z vlastností suprema a trojúhelníkové nerovnosti plyne pro $m, n \geq n_0$

$$\sup |S_m(x) - S_n(x)| \leq \sup(|S_m(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)|) \leq$$

$$\leq \sup |S_m(x) - S(x)| + \sup |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Pak ale $\forall x \in M \quad |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Označíme-li $m-n = p$, potom $\left|\sum_{n+1}^{n+p} v_n(x)\right| = |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.
$\Longleftarrow$: Předpoklady si můžeme přepsat do tvaru

$$\forall \varepsilon < 0 \quad \exists n_0 \quad \forall m, n \geq n_0 \quad \forall x \in M \quad |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Z Bolzano-Cauchyho podmínky pro číselné posloupnosti je jasné, že pokud pro určité x_0 a $m, n \geq n_0$ je $|S_m(x_0) - S_n(x_0)|$ menší než ε, pak posloupnost $S_n(x_0)$ konverguje k nějakému $S(x_0)$. Protože toto platí pro všechna $x = x_0$ z vyšetřované množiny, má posloupnost $S_n(x)$ bodovou limitu, kterou označíme $S(x)$. Z předpokladů plyne tvrzení

$$\sup_{m \geq n_0} S_m(x) - \inf_{n \geq n_0} S_n(x) \leq \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Protože posloupnost $S_n(x)$ má limitu a ta nutně leží mezi supremem a infimem této posloupnosti, lze toto přepsat na

$$\sup_{m \geq n_0} S_m(x) - S(x) < 2\varepsilon \quad \wedge \quad S(x) - \inf_{n \geq n_0} S_n(x) < 2\varepsilon$$

Všechny hodnoty $S_n(x)$, $n \geq n_0$ náleží intervalu $\langle \inf_{n \geq n_0} S_n(x), \sup_{n \geq n_0} S_n(x) \rangle$, tudíž platí

$$\forall n \geq n_0 \quad S_n(x) - S(x) < 2\varepsilon \quad \wedge \quad S(x) - S_n(x) < 2\varepsilon$$

čili

$$\forall \varepsilon < 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in M \quad |S_n(x) - S(x)| < 2\varepsilon$$

v čemž poznáváme definici stejnoměrné konvergence.

Věta 21: Weierstrassova
Uvažujme $\sum_1^\infty v_n(x) \in \mathbb{C}$, $\sum_1^\infty w_n(x) \in \mathbb{R}_0^+$ dvě řady funkcí definovaných na množnině M. Nechť pro každé n platí $|v_n(x)| \leq w_n(x)$ a nechť $\sum_1^\infty w_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M. Pak $\sum_1^\infty v_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M a $\sum_1^\infty |v_n(x)| \leq \sum_1^\infty w_n(x)$.

Důkaz: Z Bolzano-Cauchyovy podmínky. Protože řada $\sum_1^\infty w_n(x)$ je nezáporná a stejnoměrně konvergentní, platí podle definice

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \sum_{n+1}^{n+p} w_n(x) < \varepsilon$$

Odtud pomocí trojúhelníkové nerovnosti

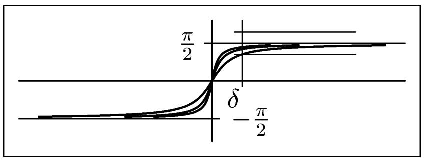
$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} v_n(x)\right| \leq \sum_{n+1}^{n+p} |v_n(x)| \leq \sum_{n+1}^{n+p} w_n(x) < \varepsilon$$

plyne stejnoměrná konvergence $\sum_1^\infty v_n(x)$. Nerovnost $\sum_1^\infty |v_n(x)| \leq \sum_1^\infty w_n(x)$ je triviálním důsledkem nerovností mezi částečnými součty.

Poznámka:

1. Řada $\sum_1^\infty w_n(x)$ bývá někdy nazývána *majorantní řada*.

2. Často je výhodné převést problém týkající se řad funkcí na problém číselných řad. V souvislosti s Weierstrassovou větou se užívá řada suprem původní nebo majorantní řady $\sum_1^\infty \sigma_n$, kde $\sigma_n = \sup_{x \in M} |v_n(x)|$ respektive $\sigma_n = \sup_{x \in M} w_n(x)$. Je důležité si uvědomit, že věta platí jen jedním směrem a není tedy možné z divergence řady $\sum_1^\infty \sigma_n$ dělat jakékoli závěry ohledně řady $\sum_1^\infty w_n(x)$.



Obr. 6: Posloupnost funkcí $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ na $\mathbb{R}$.

Příklad:

1. Vyšetřme stejnoměrnou konvergenci funkce $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ na intervalu $\langle\delta, \infty)$, pro δ kladné. Pro x pevné roste argument s n nade všechny meze a limita $f_n(x)$ je tudíž rovna $\frac{\pi}{2}$. Hledejme $\sigma_n = \sup\limits_{\langle\delta,\infty)} \left|\frac{\pi}{2} - f_n(x)\right|$. Tato funkce je kladná na celém vyšetřovaném intervalu, můžeme tedy odstranit absolutní hodnotu. Derivace $f_n(x)$ je rovna $-\frac{n}{1+n^2x^2}$ a je tudíž všude na reálné ose nenulová. Supremum se nachází v krajním bodě $\sigma_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\delta$. Tento výraz jde pro kladné δ k nule a zadaná posloupnost tedy konverguje stejnoměrně na $\langle\delta, \infty)$. Toto tvrzení zjevně *nelze* rozšířit na interval $(0, \infty)$, protože tam už je $\sigma_n = \frac{\pi}{2}$.

2. Mějme řadu $\sum\limits_1^\infty \frac{x}{1+n^2x^2}$ pro x kladná. Její bodovou konvergenci zjistíme snadno – stačí uvážit, že

$$\frac{x}{1+n^2x^2} < \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n^2}$$

a řada tvořená pravými stranami této nerovnosti pro každé x konverguje.

Na stejnoměrnou konvergenci zkusíme aplikovat Weierstrassovu větu. Zkusíme majorizovat jednotlivé $v_n(x)$ co nejmenšími konstantními funkcemi, abychom mohli využít náš aparát pro práci s číselnými řadami. Takové funkce jsou samozřejmě funkce $\alpha_n = \sup\limits_{(0,\infty)} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$. Limity $v_n(x)$ v nule a nekonečnu jsou nulové, supremum tedy leží někde uvnitř intervalu. Derivace $v_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ existuje všude a je nulová v bodě $x = \frac{1}{n}$. Funkční hodnoty $\alpha_n = v_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$ tvoří divergentní řadu. To samozřejmě neznamená, že i $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ diverguje, jen to, že není majorizovatelná konstantními funkcemi.

Nabyli jsme ale podezření, že by zkoumaná řada stejnoměrně konvergovat nemusela. Zkusíme ho ověřit přes Bolzano-Cauchyovu podmínku. Její negace zní: Řada nekonverguje stejnoměrně právě když

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \exists x \quad \left|\sum_{n+1}^{n+p} v_k(x)\right| \geq \varepsilon$$

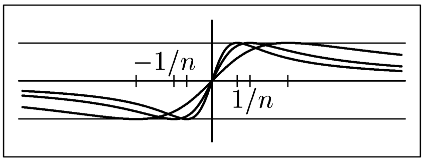
Máme zde několik existenčních kvantifikátorů, takže budeme hledat co nejvhodnější volbu n, p a x při daném n_0. Zvolme $n = p = n_0$. Pak platí

$$\sum_{n_0+1}^{2n_0} \frac{x}{1+k^2x^2} \geq n_0 \cdot \frac{x}{1+4n_0^2x^2}$$

kde jsme každý člen součtu nahradili minimem všech členů. Zde je již nabíledni, že volba $x = \frac{1}{2n}$ dává pro výraz na pravé straně hodnotu $\frac{1}{8}$ a tudíž

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{8} \quad \forall n_0 \quad \exists n = n_0 \quad \exists p = n_0 \quad \exists x \quad \left|\sum_{n+1}^{n+p} v_k(x)\right| \geq \varepsilon$$

což znamená, že $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně na zkoumaném intervalu.



Obr. 7: Posloupnost funkcí $f_n(x) = x/(1+n^2x^2)$ na $\mathbb{R}$.

Mějme posloupnost funkcí $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x)$. Jaké podmínky musíme na tyto funkce naklást, aby byla jejich limita spojitá funkce? Stačí, když budou všechny spojité? Evidentně ne, jak ukazuje příklad posloupnosti x^n. Odpověď na tuto otázku dávají následující věty:

Věta 22: O limitním chování posloupnosti funkcí (záměna sumy a limity)
Nechť $\varphi_n(x)$ je posloupnost komplexních funkcí na intervalu (a,b), která stejnoměrně konverguje k $\varphi(x)$, nechť $\forall n$ existuje $\lim\limits_{x\to b-} \varphi_n(x) = c_n$. Pak

1. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$
2. existuje $\lim\limits_{x\to b-} \varphi(x)$ a rovná se c

Důkaz:

1. Použijeme Bolzano-Cauchyho podmínku a definici limity. Stejnoměrná konvergence $\varphi_n(x)$ je ekvivalentní s
$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall m, n \geq n_0 \quad \forall x \in (a,b) \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$$
K tomuto ε můžeme najít $U^{*-}(b)$, že pro všechna x z tohoto okolí je $|\varphi_n(x) - c_n|$ i $|\varphi_m(x) - c_m|$ menší než ε. Potom
$$|c_n - c_m| \leq |c_n - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| + |\varphi_m(x) - c_m| < 3\varepsilon$$
což nám dává Bolzano-Cauchyho podmínku pro posloupnost c_n a tudíž limita existuje[2].
2. Z definice limity vím, že $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \quad n \geq n_1 \quad |c_n - c| < \varepsilon$.
Dále ze stejnoměrné konvergence $\varphi_n(x)$ plyne, že k tomuto ε existuje n_2 tak, že $\forall n \geq n_2 \quad \forall x \in (a,b) \quad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$
Zvolím nyní $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ a pak takové redukované okolí $U^{*-}(b)$, že pro všechna x z tohoto intervalu je $|\varphi_n(x) - c_n| < \varepsilon$.
Pak podle trojúhelníkové nerovnosti platí na tomto okolí
$$|\varphi(x) - c| \leq |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - c_n| + |c_n - c| < 3\varepsilon$$
v čemž poznáváme definici limity $\varphi(x)$ v bodě b zleva.

Věta 23: O limitním chování řad funkcí
Nechť $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ je řada komplexních funkcí definovaných na (a,b), která stejnoměrně konverguje k $S(x)$ na tomto intervalu. Nechť pro každé n existuje $\lim\limits_{x\to b-} v_n(x) = c_n$. Pak

1. existuje $\sum\limits_1^\infty c_n = c$
2. $\lim\limits_{x\to b-} S(x)$ existuje a rovná se c

Důkaz: Plyne z předchozí věty aplikované na posloupnost částečných součtů. Ověřte si sami platnost všech předpokladů.

Věta 24: O spojitosti limity posloupnosti a součtu řady
Buď I interval.

[2] Na nerovnost $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|$ lze také přímo aplikovat limitní přechod $x \to b^-$, čímž dostaneme přímo poslední Bolzano-Cauchyovu podmínku pro limitu c_n.

1. Nechť $\varphi_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ je posloupnost spojitých funkcí. Pak $\varphi(x)$ je spojitá.
2. Nechť $\sum\limits_1^\infty v_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} S(x)$ je řada spojitých funkcí. Pak $S(x)$ je spojitá funkce.

Důkaz: Jsou-li $\varphi_n(x)$ spojité zleva na intervalu I, platí $\lim\limits_{x\to b-} \varphi_n(x) = \varphi_n(b)$ pro každé $b \in I$. Podle námi dokázané věty se pak $\lim\limits_{x\to b-} \varphi(x)$ rovná $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(b) = \varphi(b)$, čili $\varphi(x)$ je zleva spojitá na I. Zcela stejně se dokáže spojitost zprava a tvrzení týkající se řad.

Poznámka: Možná vás nad touto větou napadlo, jestli náhodou spojitost všech členů posloupnosti i limity neimplikuje stejnoměrnou konvergenci této posloupnosti. Odpověď zní ne, alespoň ne bez dalších předpokladů, jak ukazuje další věta, kterou však dokazovat nebudeme.

Věta 25: Diniho
Nechť $\varphi_n(x)$ je posloupnost funkcí spojitých na $\langle a, b\rangle$, které na tomto intervalu bodově konvergují k spojité funkci $\varphi(x)$. Nechť navíc $\forall x \in \langle a, b\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x)$. Pak $\varphi_n(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} \varphi(x)$.
Analogicky pro řady.

Věta 26: O derivaci posloupnosti funkcí
Nechť $\varphi_n(x)$ je posloupnost komplexních funkcí na intervalu $I \in \mathbb{R}$. Nechť pro každé n existuje $\varphi'_n(x)$ na I a posloupnost $\varphi'_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I. Nechť existuje $x_0 \in I$ tak, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_0)$.
Pak

1. $\forall x \in I$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$
2. $\forall I' \subset I$ omezený $\varphi_n(x) \overset{I'}{\rightrightarrows} \varphi(x)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi'_n(x) = \varphi'(x)$

Poznámka: Tato věta nám umožňuje derivovat součet řady člen po členu.

Důkaz: Nejprve dokážeme první dvě části věty pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_0 \in I'$. Chtěli bychom, aby platilo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall m, n \ge n_0 \quad \forall x \in I' \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$$

Podívejme se, jak můžeme výraz $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|$ shora omezit. Naším záchytným bodem bude x_0, kde víme, že posloupnost konverguje:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \le |\varphi_n(x) - \varphi_m(x) - [\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)]| + |\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)|$$

Na první člen aplikujeme Lagrangeovu větu: existuje takové ξ mezi x a x_0, že

$$|[\varphi_n(x) - \varphi_m(x)] - [\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)]| = |(\varphi_n - \varphi_m)(x) - (\varphi_n - \varphi_m)(x_0)| =$$

$$= |(\varphi_n - \varphi_m)'(\xi)|\,|x - x_0| = |\varphi'_n(\xi) - \varphi'_m(\xi)|\,|x - x_0|$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\varphi'_n(x)$ konverguje stejnoměrně, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \ge n_1 \quad \forall \xi \in I' \quad |\varphi'_n(\xi) - \varphi'_m(\xi)| < \varepsilon$.
Navíc podle Bolzano-Cauchyovy podmínky $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \ge n_2 \quad |\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)| < \varepsilon$.
Do třetice, I' je omezený, čili $\exists K > 0 \quad \forall x, x_0 \in I' \quad |x - x_0| < K$.
Díky tomu můžeme psát

$$\forall x \in I' \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon K + \varepsilon$$

Při důkazu klíčové třetí části věty bychom chtěli využít větu o limitním chování posloupnosti funkcí. Definujme

$$\phi_n(h) = \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h}$$

kde x není pravým krajním bodem intervalu. Tato posloupnost funkcí má bodovou limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(h) = \phi(h)$, jak plyne z již dokázané druhé části věty. Zároveň $\lim\limits_{h\to 0+}\phi_n(h) = \varphi'_{n+}(x)$ podle definice derivace. Abychom splnili předpoklady věty o limitním chování posloupnosti funkcí, musíme dokázat, že na nějakém pravém okolí nuly je $\phi(h)$ stejnoměrnou limitou $\phi_n(h)$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (0, \varepsilon_0)$ takové, že

$$\phi_n(h) - \phi(h) = \frac{[\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)] - [\varphi(x+h) - \varphi(x)]}{h} =$$
$$= \frac{(\varphi_n - \varphi)(x+h) - (\varphi_n - \varphi)(x)}{h} = (\varphi'_n - \varphi')(x+\xi)$$

Je tedy $\sup\limits_{(0,\varepsilon_0)}(\phi_n(h) - \phi(h)) \leq \sup\limits_{(x,x+\varepsilon_0)}(\varphi'_n(y) - \varphi'(y)) \longrightarrow 0$ a $\phi_n(h)$ skutečně stejnoměrně konvergují k $\phi(h)$. Potom ovšem

$$\lim_{n\to\infty}\varphi'_{n+}(x) = \lim_{h\to 0+}\phi(h) = \varphi'_+(x)$$

a věta je dokázána.

Příklad: Předpoklad o konvergenci alespoň v jednom x_0 je ve větě naprosto nutný. Uvažujme posloupnost funkcí $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + n$ na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Derivace jednotlivých členů posloupnosti stejnoměrně konvergují k nule, ale derivace limity není vůbec definovaná, protože není definovaná ani tato limita, je v každém bodě nevlastní.

Věta 27: O integrálu posloupnosti funkcí
Nechť $f_n(x)$ jsou spojité funkce na $\langle a, b\rangle$, a nechť tato posloupnost stejnoměrně konverguje k $f(x)$ na tomto intervalu. Pak existuje $\int_a^b f(x)dx$ a rovná se $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

Důkaz: Odhadneme integrál pomocí suprema integrandu:

$$\left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \sup_{\langle a,b\rangle}|f_n(x) - f(x)|\,(b-a) \longrightarrow 0$$

Věta 28: Derivace řady po členech
Nechť $v_n(x)$ jsou definovány na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, nechť existuje $v'_n(x)$ na I, nechť existuje $x_0 \in I$ takový, že $\sum\limits_1^\infty v_n(x_0)$ konverguje, nechť $\sum\limits_1^\infty v'_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I. Pak

1. $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ konverguje na I a konverguje stejnoměrně na libovolném omezeném $I' \subset I$.
2. $\left[\sum\limits_1^\infty v_n(x)\right]' = \sum\limits_1^\infty v'_n(x)$, $x \in I$.

Věta 29: Integrál řady po členech
Nechť $v_n(x)$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ a $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ konverguje stejnoměrně na tomto intervalu. Pak

$$\int_a^b \sum_1^\infty v_n(x) = \sum_1^\infty \int_a^b v_n(x)$$

Důkaz: Obě věty jsou jednoduchými důsledky analogických vět pro posloupnosti.

§4. Mocninné řady

Poznámka: S řadami funkcí jsme se setkali již dříve v paragrafu o Taylorových řadách. Funkci $f(x)$ s derivacemi až do řádu $n+1$ v bodě x_0 jsme přiřadili polynom

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

Zjistili jsme také, že pro některé funkce (např. e^x, $\ln(1+x)$ příslušná řada konverguje, v prvním případě na celém $\mathbb{R}$, ve druhém jen na $(-1,1)$. Vidíme například, že oba tyto intervaly jsou „souměrné" podle bodu 0 — zkusme tedy uvažovat obecnou mocninnou řadu a zaměřme se nejprve na otázky oboru konvergence.

Definice 7: Mocninná řada
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, z \in \mathbb{C}$$

nazveme mocninnou řadou o středu z_0.

Poznámka: První zvláštnost mocninných řad objevíme, budeme-li zkoumat jejich absolutní konvergenci. V řadě pak budou členy $|a_n||z-z_0|^n$ — vidíme, že konvergence této řady vzhledem k z (tj. velikost členů řady) závisí pouze na vzdálenosti z od středu z_0 a v rovině komplexních čísel bude tento obor znázorňovat kruh (s hraniční kružnicí nebo bez ní), případně bod či celá rovina.
Dále zkoumejme i případnou neabsolutní konvergenci; pro pohodlí budeme uvažovat řady se středem $z_0 = 0$.

Označení: Pro zestručnění zápisů zaveďme pro kruh o středu z_0 a poloměru ρ tuto značku:

$$K(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C}|; |z - z_0| < \rho\}.$$

Věta 30: O konvergenci mocninných řad
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je mocninná řada a nechť pro určité $z_1 \in \mathbb{C}$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ konverguje. Potom

1. $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_1|$ konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolutně a
2. $\forall \rho \in (0, |z_1|)$ konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stejnoměrně absolutně na kruhu $K(0, \rho)$.

Důkaz: První tvrzení plyne z druhého (rozmyslete jak), dokážeme tedy pouze stejnoměrnou konvergenci. Z předpokladu plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z^n = 0$, tedy tato posloupnost je omezená určitým číslem K. Potom ovšem pro libovolné $z \in \mathbb{C}, |z| \in (0, \rho)$ můžeme psát

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \le K \left|\frac{\rho}{z_1}\right|^n = Kc^n.$$

Poslední výraz ovšem nezávisí vůbec na z a přitom zřejmě absolutně konverguje ($c < 1$). Našli jsme tedy pro naši řadu stejnoměrně konvergentní majorantu (c.b.d.).

Věta 31: O poloměru konvergence mocninné řady
Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0^n$ definujme číslo

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

je-li limita nenulová, v opačném případě položme $R = \infty$. Toto číslo nazýváme poloměr konvergence uvedené řady a má následující vlastnosti:

1. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)$ konverguje absolutně na $K(z_0, R)$,
2. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)$ diverguje $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| > R\}$,

3. $\forall \rho < R$ konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)$ stejnoměrně na $K(z_0,\rho)$ a

4. pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, pak je rovna R.

Poznámka: Připomeňme, že limita suprem posloupnosti vždy existuje (vlastní nebo nevlastní), a tedy poloměr konvergence je definován pro každou mocninnou řadu.

Důkaz: Položme opět pro pohodlí $z_0 = 0$ a zkoumejme výraz $|z|/R$:

$$c = \frac{|z|}{R} = \limsup \sqrt[n]{a_n}|z|.$$

Vidíme, že pro $c < 1$ musí například pro $d = (c+1)/2 \in (c,1)$ existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$: $\sqrt[n]{a_n}|z| < d$, tedy $a_n|z|^n < d^n$. Protože řada s členy d^n zřejmě konverguje, konverguje i mocninná řada v libovolném bodě $z \in K(0,R)$. Pro důkaz tvrzení o stejnoměrné konvergenci stačí pro žádané ρ položit $z \in (\rho, R)$, ukázat konvergenci v z a použít předešlou větu.
Pokud naopak volíme $c > 1$, znamená to, že existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pro něž $\sqrt[n]{a_n}|z| > 1$, tj. $a_n|z|^n > 1$, pročež nemůže být splněna podmínka $\lim n \to \infty a_n z^n = 0$, a řada tudíž musí divergovat.
K ověření posledního tvrzení použijeme d'Alembertova kriteria pro konvergenci řad:

$$c = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}} = \frac{|z|}{\rho}.$$

Písmenem ρ jsme označili limitu, o níž chceme dokázat, že je rovna R, a o níž předpokládáme, že existuje. Vidíme, že původní řada konverguje absolutně pro $c < 1$, tj. $|z| < \rho$ a diverguje pro $c > 1, |z| > \rho$. Číslo ρ má tedy také vlastnosti 1 a 3 jako R. Přitom jsme ukázali, že R spočítané jako limita suprem je jediné číslo splňující vlastnosti 1 a 3, tedy nezbývá než $\rho = R$.

Cvičení: d'Alembertovo kriterium jsme formulovali pro řady reálných čísel. V předchozím důkazu jsme používali „rozšířenou" verzi s absolutními hodnotami. Bylo to oprávněné?

Cvičení: Rozšiřte důkaz pro případ $R = +\infty$ (jedná se spíše o formální problém).

Poznámka: Všimněme si, že se ve větě nic nepraví o konvergenci na hranici kruhu ($nakružnici|z-z_0| = R$). Zde může být situace složitá, řada může konvergovat například jen na části kružnice. Tento problém budeme demonstrovat v článku o neabsolutní konvergenci u řady pro $\ln(1+x)$.

Cvičení: Nalezněte poloměr konvergence Taylorovy řady funkce $\ln(1+x)$ v obecném bodě $x_0 \in \mathbb{C}$.

§5. Derivace a integrace mocninné řady

Poznámka: Vyslovíme nyní znovu věty (26), (29), tentokrát speciálně pro mocninné řady.

Věta 32: Integrace mocninné řady
Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, x_0 \in \mathbb{R}$ nechť má poloměr konvergence R. Pak platí

1. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + c$ a

2. $\forall a,b \in (x_0 - R, x_0 + R) : \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-x_0)^n$.

Důkaz: První část tvrzení ověříme pomocí věty o derivaci řady (26) — zjistíme, že derivace předložené primitivní funkce vskutku dává původní řadu (jeden bod, v němž má nederivovaná řada konvergovat, může být například x_0).
Pro tvrzení 2 můžeme přímo použít větu o integraci řady funkcí, neboť integrovaná řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $(x_0-R+\delta, x_0+R-\delta), \delta > 0$ (dle (31)); pro libovolná $a,b \in (x_0-R, x_0+R)$ potom jistě najdeme takové δ, že a,b budou ležet i ve zmenšeném intervalu.

Věta 33: Poloměry konvergence mocninné řady a její derivace

Mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Poznámka: Návod pro důkaz lze psát asi takto:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \sqrt[n]{na_n} \longrightarrow \lim_{m\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \limsup \sqrt[n]{a_n},$$

neboť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (jak se to spočítá?). Úpravy s limitami je však zapotřebí provést korektně.

Cvičení: Uvědomme si, že pro libovolné dvě posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ platí

$$\sup a_n b_n \leq \sup a_n \sup b_n.$$

Důkaz: Odhadněme poloměr konvergence druhé řady R_2 z definice:

$$R_2 = \limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \leq \lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \sqrt[m]{m} \sup_{n>m} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \sqrt[m]{m} \lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \sqrt[n]{|a_n|} = R_1.$$

Větu o součinu limit jsme mohli použít, neboť víme, že obě nové limity existují[3]. Můžeme ale také psát

$$R_2 =\geq \limsup 1. \sqrt[n]{|a_n|} = R_1,$$

neboť zřejmě $\sqrt[n]{n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Kombinací těchto dvou odhadů máme $R_1 = R_2$.

Věta 34: Derivace mocninné řady
Budiž $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, x_0 \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{C}$ mocninná řada s poloměrem konvergence R. Pro libovolné přirozené k platí

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}.$$

Součet řady má tedy (spojité) derivace všech řádů.

Důkaz: Podle předchozí věty víme, že $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)'$ stejnoměrně konverguje na každém $(x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta)$ pro $\delta > 0$. Protože nederivovaná řada zřejmě bodově konverguje v $x = x_0$, lze použít větu (26) a ověřit dokazovaný vztah pro $k = 1$ (tj. opět: pro libovolné zadané x z $(x_0 - R, x_0 + R)$ musíme najít nejprve vhodné δ, aby x leželo ve zmenšeném intervalu stejnoměrné konvergence). Dále postupujeme indukcí.

Poznámka: Součet mocninné řady $S(z)$ je zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a lze jej chápat též jako $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : z = x + \imath y \mapsto u(x,y) + \imath v(x,y)$. Můžeme se zajímat o parciální derivace S podle x a y a nic nám nebrání použít předešlou větu (jakto?):

$$\begin{array}{c} \frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial}{\partial x}(x + \imath y - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x + \imath y - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}, \\ \frac{\partial S}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial}{\partial y}(x + \imath y - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n\imath(x + \imath y - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n\imath(z-z_0)^{n-1}. \end{array}$$

Vidíme, že parciální derivace existují a platí mezi nimi vztah $\partial S/\partial y = \imath(\partial S/\partial x)$. Tento vztah bývá označován jako Cauchy-Riemannova rovnost.

Příklad: Ukážeme, k čemu může být dobrá záměna pořadí sumace a integrace.
Sečtěme řadu

$$\sum_{n=1}^{i} nfty \frac{n}{2^n}.$$

[3]Diskutujte opět případ, že poloměr konvergence je ∞.

Místo řady číselné vezmeme řadu funkcí $\sum\limits_{n=1}^{i} nftynx^n$. Snadno zjistíme, že poloměr konvergence této řady je 1 (věta (31)) a že lze použít větu (32):

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \left[\int \left(\sum_{n=1}^{i} nftynx^n\right)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[\sum_{n=1}^{i} nfty \int nx^n\,\mathrm{d}x\right]' = \left[\sum_{n=1}^{i} nftyx^{n+1}\right]' =$$

$$= [x^2(1+x+x^2+\ldots)]' = \left[\frac{x^2}{1-x}\right] = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

Pro $x = 1/2$ pak zjistíme, že součet původní řady jsou 3.

§6. Taylorovy řady

Definice 8: Taylorova řada
Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0^{\infty}} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

nazveme Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0.

Poznámka: Takto definovaná řada samozřejmě může mít poloměr konvergence nulový.

Poznámka: Připomeňme také, že existují funkce, jejichž Taylorova řada není identicky rovna f na žádném okolí x_0, ačkoliv zde (na některých těchto okolích) konverguje. Již dříve jsme uváděli například funkci $f(x) = \exp(-1/x^2)$ s dodefinovanou spojitou hodnotou $f(0) = 0$. Jednostranné derivace v nule jsme vyšetřovali jako limity oboustranných derivací a při jejich počítání jsme substitucí $z = 1/x$ přešli k výrazům upravitelným pomocí l'Hôspitalovy věty (podíl exponenciály a polynomu). Všechny derivace takto vyšly nulové, a tedy Taylorova řada též, i když zjevně $f(x) = 0$ pouze pro $x = 0$.

Označení: Označme C^0 množinu všech spojitých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a C^k množinu všech těchto funkcí s derivacemi až do k-tého řádu. Zřejmě platí $C^0 \supset C^1 \supset \ldots \supset C^k \supset \ldots \supset C^{\infty}$.

Věta 35: Souvislost Taylorových a obecných mocninných řad
Nechť na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta), \delta > 0$ platí $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Pak je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ Taylorovou řadou funkce f bodě x_0.

Důkaz: Dosadíme-li do předpokládané rovnosti $x = x_0$, zjistíme, že $f(a) = a_0$. Pokud tuto rovnost k-krát zderivujeme a použijeme větu (34), získáme stejným trikem vztah $f^{(k)}(x_0) = a_k k!$, což bylo dokázati.

Příklad: Pokud si vzpomeneme na tuto větu, můžeme Taylorovy řady počítat různými triky, aniž bychom pracně počítali obecné k-té derivace.
Například funkce $1/(1+x^2)$ je zřejmě součtem geometrické řady $1, -x^2, x^4, \ldots$, a tedy tato řada je Taylorovou řadou pro $1/(1+x^2)$.
Podobně, navíc s užitím věty o integraci mocninné řady získáme Taylorovu řadu pro logaritmus:

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \Rightarrow \ln(1+x) = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n\,\mathrm{d}x = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Hodnotu integrační konstanty určíme např. při $x = 0$, kdy vyjde $c = 0$.
Tento postup můžeme zobecnit pro $\ln(a+x), a \in \mathbb{R}^+$:

$$(\ln(a+x))' = \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{a}\right)^n \Rightarrow \ln(a+x) = c + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n,$$

pro $x = 0$ zjistíme tentokrát $c = \ln a$. Co se týče poloměru konvergence, snadno zjistíme (věta (31)), že $R = a$ (pro $|x| < a$ řada geometricky konverguje). Takto bychom mohli postupně definovat logaritmus libovolného kladného čísla — začali bychom s $a = 1$, čímž bychom již znali hodnoty logaritmů na $(0, 2)$, dále bychom vzali střed např. $a = 1,9$ atd. Také vidíme, že při žádném a se nám nepodaří sestrojit řadu, která by nahrazovala logaritmus na celém $\mathbb{R}^+$ — poloměr konvergence bude vždy roven pouze $|a|$, neboť v bodě 0 logaritmus diverguje (podle věty (31) tento bod nesmí ležet uvnitř kruhu). Stejně tomu bude i pro $a \in \mathbb{C}$.

Příklad: Ve srovnání s posledním příkladem také snadno vysvětlíme, proč je poloměr konvergence Taylorovy řady pro $1/(1 + x^2)$ pouze 1, ačkoliv pro $x = \pm 1$ u této funkce obtíže nenastávají: kritické body jsou v tomto případě $x = \pm\imath$, a proto řada se středem v nule bude mít poloměr konvergence pouze $|\pm\imath|$.

Cvičení: Sestrojte Taylorovy řady pro funkce $\operatorname{arctg} x$ (podobně jako u logaritmu) a $(1 + x)^\alpha$. Vyšetřete jejich poloměry konvergence.

Poznámka: Je-li funkce zapsaná pomocí mocninné řady, lze s ní snadněji provádět některé operace (integrování derivování). Zavedeme proto podmnožinu C^∞ funkcí, které lze zapsat jako mocninnou řadu.

Definice 9: Reálně analytické funkce
Nechť $f : M \to \mathbb{C}, M \subset \mathbb{R}$ je z C^∞. Řekneme, že f je reálně analytická, pokud $\forall x_0 \in M \exists U(x_0) \subset M, \exists a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C} : \forall x \in U(x_0)\ f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$.

Poznámka: Podle předcházející věty víme, že pokud už lze $f(x)$ vyjádřit jako řadu, je to řada Taylorova.

Příklad: Funkce $1/(1 + x^2)$ je reálně analytická na celém $\mathbb{R}$, i když v žádném bodě příslušná řada nekonverguje na celém $\mathbb{R}$ (nemá poloměr konvergence ∞). Podobně $\ln x$ je reálně analytická na $\mathbb{R}^+$, $\operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$.

Poznámka: Funkce reálně analytické na celém svém definičním oboru nazýváme elementární.

Poznámka (důležitá): Platí následující tvrzení:

1. Pokud f, g jsou reálně analytické na M, pak i $f + g$ a fg jsou na M reálně analytické a pokud navíc $g \neq 0$ na M, je reálně analytická na M i f/g.
2. Pokud f je reálně analytická na (a, b) a g je reálně analytická na $f((a, b))$, pak složená funkce $f \circ g$ je reálně analytická na (a, b).

Abychom toto tvrzení poněkud podepřeli, vyslovíme těchto několik pravidel:
Věta 36: Pravidla pro počítání s řadami
Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ a $g(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty b_n x^n$ na nějakém $U(0)$. Potom

1. $f(x) + g(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty (a_n + b_n)x^n$,
2. $f(x)g(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty \sum\limits_{k,l,k+l=n} a_k b_l x^n = \sum\limits_{n=0}^\infty \sum\limits_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n$,
3. $g(0) = b_0 \neq 0 \Rightarrow \exists U_\delta(0), \forall x \in U_\delta(0) : \frac{f(x)}{g(x)} = \sum\limits_{n=0}^\infty c_n x^n$, kde $a_n = \sum\limits_{k=0}^n b_k c_{n-k}$ (z čehož lze postupně vypočítat všechna c_n) a

4. $f(0) = a_0 \in U(0) \Rightarrow \exists U_\delta(0), \forall x \in U_\delta(0) : g(f(x)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, kde d_n je definováno takto:

$$d_0 = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_0^n b_n,\ d_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n = 0 \\ k_1+\ldots+k_n = m}}^{\infty} b_n a_{k_1} \ldots a_{k_n}.$$

Poznámka: Následující důkaz bude pouze rámcový.

Důkaz: První tvrzení je triviální (zkoumáme řadu pomocí jejích částečných součtů, tam lze měnit pořadí sčítanců bez omezení).
Druhé tvrzení se objasní, pokud se pokusíme „skutečně násobit“ dva nekonečné součty a budeme zjišťovat, jaké budou koeficienty u x^0, x^1, x^2, atd.:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \ldots.$$

Třetí tvrzení je pouze přeformulované tvrzení druhé: říkáme, že součinem řad s koeficienty b a c je řada s koeficienty a. Je však dobré si uvědomit, že pomocí tohoto předpisu jsme skutečně schopni *postupně* určit c_n (začneme s $n = 0$, při $n = 1$ použijeme již vypočítané c_0 atd.). Nové okolí $U_\delta(0)$ je nutno volit proto, abychom zajistili $g(x) \neq 0$ (víme, že g je spojitá a v nule nenulová, tedy toto okolí existuje).
Čtvrté tvrzení objasníme opět tak, že do výrazu $g(f(x))$ řady zkrátka dosadíme:

$$g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1} x^{k_1} \right) \ldots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_n} x^{k_n} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1} \ldots a_{k_n} x^{k_1+\ldots+k_n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n = 0 \\ k_1+\ldots+k_n = m}}^{\infty} a_{k_1} \ldots a_{k_n} \right) x^m.$$

Poslední úprava spočívala pouze v tom, že zvolíme nový způsob (novou cestu) jak sčítat v sumách přes k_i — nejprve projdeme všechny případy, kdy součet všech k_i je roven 0, pak ty, kde je roven jedné, atd. V závěru již vidíme, že koeficient stojící u x^m odpovídá dokazovanému vzorci.
Mnohé úvahy výše využívají záměnnosti sum v nekonečných součtech. Měli bychom mít na paměti, že toto je možné pouze pokud příslušné řady konvergují absolutně. O tom však mluví například věta (31).

Poznámka (uklidňující): pokud se čtenář ztratil při ověřování čtvrtého tvrzení, nemusí být neklidný, stačí, pokud pochopí následující příklad.

Příklad: Položme $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ a hledejme prvních pět členů Taylorovy řady pro funkci $g(f(x))$ se středem v nule.
Nechceme-li pracně počítat derivace, můžeme zkusit právě naznačenou metodu. Víme, že

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots.$$

Po dosazení dostáváme

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \right)^4 - \ldots.$$

Provedeme nyní naznačené mocnění a budeme se zajímat pouze o členy řádu x^4 a nižšího:

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + 0x^5 + \ldots.$$

Cvičení: Stejným způsobem, tj. prostým dosazením, určete řady pro funkce $x \operatorname{arctg} x$, $x/(\ln(1+x))$.

6.4 Neabsolutní konvergence

Příklad: Víme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

nekonverguje absolutně. Přirozeně nás tedy zajímá, zda konverguje alespoň neabsolutně. Zapíšeme-li vhodně částečné součty

$$s_{2n} = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n}\right),$$
$$s_{2n+1} = 1 + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\right) + \ldots + \left(-\tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n+1}\right),$$

vidíme, že posloupnost s_{2n} je rostoucí a s_{2n+1} klesající. Obě tedy mají buď vlastní nebo nevlastní limity. Dále vidíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} - s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, tedy obě posloupnosti konvergují k témuž číslu. Protože je jedna posloupnost rostoucí a druhá klesající, nemůže to být $\pm\infty$, ale vlastní číslo. Snadno si rozmyslíme, že z tohoto již plyne existence vlastní limity celé posloupnosti částečných součtů s_n.

Při pohledu na tuto posloupnost nás může napadnout následující obecnější tvrzení:
Věta 37: Leibnizova
Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz: Implikaci doprava jsme dokázali již na začátku této kapitoly (věta (1)).
Opačný směr dokážeme naprosto stejně jako v příkladu: zjistíme, že existují limity částečných součtů s_{2n} a s_{2n+1}, předpokladu využijeme pro důkaz, že si jsou tyto limity rovny. Čtenář nechť nyní důkaz dokončí sám tím, že ukáže existenci limity s_n.

Věta 38: Leibnizova pro řady funkcí
Nechť pro posloupnost funkcí $\{a_n(x)\}$ na M platí $\forall x \in \mathrm{M}\ \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_{n+1}(x) \leq a_n(x)$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n(x) \text{ konverguje stejnoměrně na } M \Leftrightarrow a_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} 0.$$

Důkaz: Směr $\Rightarrow$ je opět triviální (věta (19)).
Ve druhém případě použijeme ekvivalentní podmínku stejnoměrné konvergence (18) a budeme počítat

$$\sigma_n = \sup_{x\in M} \{|S(x) - S_n(x)|\} = \sup_{x\in M} \{|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k(x)|\} \leq \sup_{x\in M} \{|a_{n+1}(x)|\} \to 0.$$

Při odhadování sumy jsme opět vhodně sdužovali sčítance:

$$a_{2n+1} + (-a_{2n+2} + a_{2n+3}) + \ldots \leq a_{2n+1},\ (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3}) - a_{2n+4}) + \ldots \geq 0.$$

V závěru vidíme, že σ_n je shora omezeno posloupností konvergující k nule (zde jsme použili větu (18) obráceně — když $a_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} 0$, pak $\sup\limits_{x\in M} \{|a_n(x)|\} \to 0$). Důkaz je tedy hotov.

Příklad: Vyšetřeme, pro která x konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\imath nx}}{n}. \tag{3}$$

Snadno zjistíme, že tato řada není absolutně konvergentní (již dříve jsme ukázali, že harmonická řada $(1/n)$ diverguje). Vzhledem k tomu, že se jedná o řadu v $\mathbb{C}$, nelze ani použít Leibnizovu větu. Vyslovíme proto větu, která nám pomůže tento a některé další případy řešit. Nejprve však jedno důležité lemma:

Lemma Abelovo: Nechť $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, k$. Označme $B_j = \sum_{k=1}^{j} \beta_k$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = \alpha_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k. \tag{4}$$

Důkaz lemmatu: Platí $\beta_k = B_k - B_{k-1}$ při $k \geq 2$, pro $k = 1$ je $B_1 = \beta_1$, tedy lze psát:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = \alpha_1 \beta_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k (B_k - B_{k-1}) = \alpha_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k+1} B_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k+1} B_k =$$

$$= \alpha_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) B_k = \alpha_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k.$$

Celý trik spočívá v tom, že sumu, v níž bylo v k-tém členu číslo α_k a nějaká další čísla B_j jsme přeuspořádali tak, aby v k-tém členu bylo číslo B_k a nějaká čísla[4] α_j.

Poznámka: zajímavý postřeh a zároveň pomůcka k zapamatování. Uvědomíme-li si, že Riemannův integrál byl definován jako určitá suma funkčních hodnot (násobených vždy délkou intervalu) a derivace jako rozdíl funkčních hodnot na kraji intervalu (dělený délkou intervalu), zajisté nám vztah (4) připomene vzorec pro integraci per partes.

Tuto myšlenku lze **poněkud** precizovat: Riemannův integrál byl alternativně definován přes limitu integrálních součtů. Mějme tedy funkce $f(x), g(x)$ spojité na $\langle a, b \rangle$ a volme ekvidistantní dělení (délky všech intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ jsou stejné a rovné h, $n = (b-a)/h$). Položme $\xi_i = x_i$ a $f(\xi_i) = f(x_i) = \alpha_i, g(\xi_i) = g(x_i) = \beta_i$. Výraz

$$\sum_{k=1}^{n} h \alpha_i \beta_i = h \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

potom skutečně konverguje k Riemannovu integrálu $f(x)g(x)$ na daném intervalu. Pokud rovnost (4) vynásobíme h, konverguje tedy levá strana k tomuto integrálu. Členy na pravé straně pro $h \to 0, n \to \infty$ upravíme s použitím Newtonovy věty[5] takto:

$$\alpha_n h B_n \to f(b) \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = f(b) G(b),\ \text{kde } G'(x) = g(x), G(a) = 0,$$

$$h \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k = \sum_{k=1}^{n-1} h \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{h} h B_k \to \int_a^b \left(f'(x) \int_a^x g(x)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f'(x) G(x)\ \mathrm{d}x.$$

Z tohoto lemmatu by bylo skutečně možné dokázat větu o integraci per partes. Lemma je dokonce silnější než tato věta, neboť hlásá rovnost v nelimitních případech (představme si, že na levé i na pravé straně stojí n-té členy nějakých posloupností). A jak jsme se již dávno přesvědčili, platí $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, nikoliv však naopak.

Věta 39: Abelovo a Dirichletovo kritérium

Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Označme $B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$ posloupnost částečných součtů b_n. Platí tato dvě tvrzení:

[4] Tj. sdružovali jsme členy obsahující B_k.

[5] Riemannův integrál pomocí primitivních funkcí.

1. Abelovo kritérium: pokud je $\{a_n\}$ omezená a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

2. Dirichletovo kritérium: pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{B_n\}$ je omezená, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta 39': Abelovo a Dirichletovo kritérium pro řady funkcí
Nechť $\{a_n(x)\}$ je posloupnost reálných funkcí na M taková, že pro každé $x \in \mathrm{M}$ je posloupnost $\{a_n(x)\}$ monotónní. Nechť $\{b_n(x)\}$ je posloupnost komplexních funkcí na M, $B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$. Pak platí:

1. pokud $\exists K; \forall n \forall x \in \mathrm{M} : |a_n(x)| < K$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ na M stejnoměrně konverguje, pak na M stejnoměrně konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

2. pokud $a_n(x) \overset{\mathrm{M}}{\rightrightarrows} 0$ a $\exists K; \forall n \forall x \in \mathrm{M} : |B_n(x)| < K$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ stejnoměrně konverguje na M.

Důkaz: provedeme pouze pro druhou z vět. Tvrzení první věty z věty druhé vyplývá triviálně, pokud volíme za funkce v posloupnostech konstanty.
Při důkazu bychom rádi použili obecnou Bolzano-Cauchyovu podmínku pro řadu z $a_n b_n$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall p, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \forall x \in \mathrm{M} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Označíme-li v této sumě $\alpha_k(x) = a_{n+k}, \beta_k(x) = b_{n+k}, B_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_j$, můžeme s pomocí Abelova lemmatu, trojúhelníkové nerovnosti a za předpokladu $\exists \Theta_2; \forall n \in \mathbb{N} : |B_n| < \Theta_2$ psát:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right| \leq |\alpha_n B_n| - \left| \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k \right| \leq |\alpha_n||B_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |(\alpha_{k+1} - \alpha_k)||B_k| =$$

$$= |\alpha_n||B_n| + \Theta_2 \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha_{k+1} - \alpha_k|.$$

Protože je však $\{\alpha_k\}$ monotónní posloupnost, mají všechny členy v poslední sumě stejná znaménka. Pokud je $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k$, resp. $\alpha_{k+1} \leq \alpha_k$, bude tato suma rovna $\alpha_n - \alpha_1$, resp. $\alpha_1 - \alpha_n$, tedy v obou případech $|\alpha_n - \alpha_1|$. Pokud ale $\exists \Theta_1; \forall n \in \mathbb{N} : |\alpha_n| < \Theta_1$, je tato absolutní hodnota (opět s použitím trojúhelníkové nerovnosti) menší nebo rovna $2\Theta_1$. Podle předchozího tedy můžeme napsat

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right| \leq \Theta_1 \Theta_2 + 2\Theta_2 \Theta_1 = 3\Theta_1 \Theta_2. \tag{5}$$

Abychom mohli omezit sumu nalevo libovolně malým $\varepsilon > 0$, stačí, když budeme moci učinit jedno z čísel Θ_1, Θ_2 libovolně malé a druhé alespoň omezit. Z každé z těchto možností plyne jedna z dokazovaných podmínek.

1. Abelova podmínka. Množina $\{|a_n(x)|\}$ je pro všechna přípustná n a x omezená číslem K. Řada z b_k stejnoměrně konverguje, tedy podle Bolzano-Cauchyovy podmínky platí

   $$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall p, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \forall x \in \mathrm{M} : B_n = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{6}$$

   Shrňme tedy celý postup: aplikujeme Bolzano-Cauchyovu podmínku na řadu z $a_n b_n$. Určíme K omezující posloupnost a_n, položíme $\Theta_1 = K$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ určíme v (6) n_0, pro které bude $B_n < \varepsilon/4\Theta_1$ pro každé $n \geq n_0$ nezávisle na volbě $x \in \mathrm{M}$ (stejnoměrnost). Potom budeme moci v nerovnosti (5) položit $\Theta_2 = \varepsilon/4\Theta_1$, čímž zjistíme, že suma na levé straně je menší nebo rovna $\varepsilon.3/4 < \varepsilon$ pro každé $x \in \mathrm{M}, n \in \mathbb{N}$.

2. Dirichletova podmínka. Tentokrát je omezená množina $\{|\sum_{j=1}^{n} b_j|\}$, a to například číslem $K > 0$. Posloupnost $\{a_n\}$ stejnoměrně konverguje ke konstantní nulové funkci, což dle definice znamená

   $$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \forall x \in \mathrm{M} : |a_n(x)| < \varepsilon. \tag{7}$$

Potřebujeme ovšem omezit $|\{\sum_{j=n+1}^{n+p} b_j\}|$ — zde však snadno zjistíme, že

$$\forall n, p \in \mathbb{N}: \left|\sum_{j=n+1}^{n+p}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n+p} b_j - \sum_{j=1}^{n} b_j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{n+p} b_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right| \leq 2K.$$

Položme tedy $\Theta_2 = 2K$ a dále pro libovolné $\varepsilon > 0$ najděme z podmínky (7) takové n_0, pro něž je omezující nerovnost splněna pro $\Theta_1 = \varepsilon/4\Theta_2$. Potom bude pro libovolné $n \in \mathbb{N}, x \in \mathrm{M}$ splněna nerovnost (5) s tím, že na pravé straně je opět číslo $\varepsilon 3/4 < \varepsilon$.

Poznámka: Klíčový pro celý důkaz byl předpoklad monotonie $\{a_n\}$ — jen tak se nám podařilo posčítat libovolně dlouhou (n členů) sumu s výrazy $|\alpha_{k+1} - \alpha_k|$.

Příklad: Vraťme se nyní k řadě (3) a použijme Dirichletovo kritérium. Položíme $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = e^{\imath nx}$. Okamžitě vidíme, že a_n splňuje podmínky věty (monotonie a konvergence k nule). Prozkoumáme tedy ještě omezenost částečných součtů b_n:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{\imath nx}\right| = \left|e^{\imath x}\frac{1 - e^{\imath nx}}{1 - e^{\imath x}}\right| \leq \left|\frac{e^{\imath x}}{1 - e^{\imath x}}\right|(1 + |e^{\imath x}|^n) = \frac{2}{|1 - e^{\imath x}|},$$

neboť $|e^{\imath x}| = 1$. Vidíme tedy, že kdykoliv je $e^{\imath x} \neq 1$, můžeme posloupnost B_n omezit, a tedy skutečně podle Dirichletova kritéria řada (3) konverguje. Naopak pokud je $e^{\imath x} = 1$ ($x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$), z řady (3) se stane řada harmonická, o níž víme, že diverguje.
Zajímejme se ještě dále, zda řada (3) konverguje na intervalu $(0, 2\pi)$ stejnoměrně. Dirichletovo kritérium si v tomto případě kladlo za podmínku stejnoměrnou konvergenci a_n k nule a dále „stejnoměrnou omezenost“ $B_n(x)$. První požadavek je zřejmě splněn, neboť a_n na x nezávisí (v tom případě pojmy bodová a stejnoměrná konvergence splývají). Druhou podmínku na základě našeho odhadu splnit nemůžeme — jistě nelze najít konstantu K takovou, aby pro x libovolně blízko[6] k 0 platilo $K > 1/|1 - e^{\imath x}|$. Je pravda, že toto byl jen horní odhad B_n, ale i když prozkoumáme přímo částečný součet B_n, zjistíme, že jej nelze omezit při $x \to 0$. Dirichletovo kritérium je však pouze implikace, tedy ještě nemůžeme tvrdit, že řada (3) nekonverguje stejnoměrně na $(0, 2\pi)$ — k důkazu nekonvergence bychom tedy museli použít jiných metod. Stejnoměrná konvergence ovšem bude zajištěna na libovolném intervalu $(\delta, 2\pi - \delta), \delta > 0$, neboť pak bude pro všechna x z tohoto intervalu platit

$$\left|\frac{e^{\imath x}(1 - e^{\imath nx})}{1 - e^{\imath \delta}}\right| > \left|\frac{e^{\imath x}(1 - e^{\imath nx})}{1 - e^{\imath x}}\right| = B_n(x), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Příklad: Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{8}$$

Samozřejmě platí $\sin nx = \mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{\imath \mathrm{nx}}$, tedy řada, kterou právě vyšetřujeme je pouze imaginární část řady (3). Všude tam, kde řada (3) konverguje, musí tedy konvergovat i řada (8)[7]. Pro $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ovšem řada (8) na rozdíl od (3) konverguje.

Věta 40: Abelova
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, \infty)$. Potom

1. pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konverguje stejnoměrně na $\langle 0, R\rangle$,
2. pokud pro některé $\phi \in \mathbb{R}$ konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (Re^{\imath\phi})^n$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konverguje stejnoměrně na množině $\{z = te^{\imath\phi}, t \in \langle 0, R\rangle\}$.

[6] Přesněji pro každé $x \in (0, 2\pi)$.
[7] Pokud to není zřejmé, stačí uvážit $\mathrm{Im}\ \mathrm{x} \leq |\mathrm{x}|$.

Poznámka: Věta říká, že pokud mocninná řada konverguje v libovolném bodě na poloměru konvergence, pak konverguje stejnoměrně na celé úsečce spojující tento bod a nulu (střed řady). První tvrzení je potom samozřejmě triviálním důsledkem druhého, pokud vezmeme $\phi = 0$ a úsečka leží na reálné ose.

Důkaz: Použijeme Abelova kritéria: pro libovolné $t \in \langle 0, R \rangle$ upravíme členy řady do tvaru

$$a_n(te^{\imath\phi})^n = \underbrace{a_n(Re^{\imath\phi})^n}_{A_n} \cdot \underbrace{\left(\frac{t}{R}\right)^n}_{B_n}.$$

Vidíme, že druhý činitel je monotónní vůči n a je stejnoměrně omezený (pro každé $t \in \langle 0, R \rangle$ např. číslem 2), zatímco řada, jejíž n-tý člen je první činitel, stejnoměrně konverguje (neboť konverguje a není závislá na t). Podle Abelova kritéria to tedy znamená, že součin $A_n B_n$ konverguje stejnoměrně na $\langle 0, R \rangle$.

Příklad: Pomocí právě dokázané věty můžeme snadno určit součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

o níž jsme již na začátku paragrafu dokázali, že konverguje (viz Leibnizovu větu).
Vzpomeneme si, že výrazy typu $(-1)^{n+1}/n$ se vyskytovaly v Taylorově rozvoji pro funkci $\ln(1 + x)$. Přesněji

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, x \in (-1, 1).$$

Rovnost pro tato x jsme dokázali v paragrafu o Taylorových rozvojích. Nyní víme, že řada konverguje i pro $x = 1$, tedy podle Abelovy věty řada konverguje stejnoměrně pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Věta (22) nám ovšem potom umožní zaměnit pořadí jednostranné limity a sumy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 1^-} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Poznámka (varovná): Když jsme mluvili o přerovnávání řad, nezabývali jsme se blíže řadami neabsolutně konvergentními. U nich totiž součet nejenže může záviset na přerovnání, ale dokonce vhodným přerovnáním můžeme zařídit, aby součet byl libovolné reálné číslo (u reálných řad), popřípadě $+\infty$ či $-\infty$. Pro demonstraci uveďme alespoň následující:

Příklad: Neabsolutně konvergentní řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

přerovnejme tak, aby měla součet $+\infty$.
Vtip je v tom, že vezmeme vždy několik členů kladných a potom jediný záporný. Tím „zvýšíme hustotu kladných znamének", i když díky nekonečnosti $\mathbb{N}$ budou „nakonec" v sumě i všechny záporné členy. Zkoumejme tedy např. součet

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots$$

Jeho n-týž člen odhadneme takto:

$$\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \left(\frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{\sqrt{8n} - \sqrt{6n-1}}{\sqrt{2n(6n-1)}}.$$

Poslední zlomek je pro $n \in \mathbb{N}$ zřejmě větší než nula, a tedy jsme n-tý člen omezili výrazem $1/\sqrt{6n-5} \geq 1/\sqrt{6}(n-1)^{-1/2}$. Řada jemu odpovídající je samozřejmě divergentní, tedy i přerovnaná řada diverguje.

Cvičení: Proč je původní nepřerovnaná řada neabsolutně konvergentní?

Cvičení: nepovinně. Zkuste přerovnat řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

tak, aby divergovala.
Návod: vzpomeňte na jeden z prvních důkazů divergence harmonické řady — sdružovali jsme vždy 2^n členů a jejich součet byl vždy větší než $1/2$.

Poznámka (k předchozímu cvičení): Proč je nutno vynakládat tak velkou námahu oproti příkladu se členy $\pm 1/\sqrt{n}$ je nasnadě — řada n^{-1} je „poslední divergentní“, pro libovolný exponent větší než jedna již řada konverguje (tedy příslušná řada s alternujícími znaménky konverguje absolutně). Naopak $n^{-1/2}$ diverguje podstatně rychleji.

7 Obyčejné diferenciální rovnice

§1. Něco o funkcích více proměnných

Na úvod je třeba zopakovat několik pojmů z lineární algebry.

Definice 10: Skalární součin, norma, okolí bodu
Nechť $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$. Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ nazveme skalárním součinem x, y reálné číslo $\langle x, y\rangle \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i$ a normou x nezáporné číslo $||x|| \equiv \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Okolím bodu $a \in \mathbb{R}^n$ o poloměru $R > 0$ rozumíme množinu $\mathrm{U}_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x - a|| < R\}$.

Poznámka: Sčítání dvou prvků v $\mathbb{R}^n$ a násobení jednoho prvku reálným číslem provádíme samozřejmě po složkách.

Poznámka: V algebře jsou definice skalárního součinu a normy podstatně obecnější. Pro naše potřeby budou zatím postačovat tyto speciální definice.

Definice 11: Spojitost, množiny v $\mathbb{R}^n$
Nechť f je funkce na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $a \in \Omega$. Řekneme, že f je spojitá v bodě a, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a) : f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(f(a))$.
Řekneme, že f je spojitá na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pokud je spojitá v každém bodě Ω.
Množinu $I \subset \mathbb{R}^n$ nazveme interval, pokud $I = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$.
Řekneme, že množina Ω je otevřená, pokud $\forall a \in \Omega \exists \mathrm{U}(a) : \mathrm{U}(a) \subset \Omega$.

Poznámka (vysvětlující): Příkladem otevřené množiny je interval nebo v $\mathbb{R}^2$ „souvislá“ plocha *bez* okraje (například $\{x, ||x|| < 1\}$). Množina, která není uzavřená, může být například tato plocha i s okrajem ($\{x, ||x|| \le 1\}$) — pokud u této plochy volíme bod a na okraji, každé jeho okolí z plochy „vyčuhuje“. Zkuste si nakreslit obrázek.
Spojitost lze samozřejmě definovat i na uzavřených množinách — viz například úvodní kapitola o limitách. V krajních bodech se pak definuje jednostranná spojitost atd. Nyní se budeme zabývat pouze spojitostí na otevřených množinách.
Okolí bodu $\mathbb{R}^2$ je kružnice, v $\mathbb{R}^3$ koule atd. Interval je potom obdélník (kvádr) obsahující daný bod. Norma v $\mathbb{R}^n$ odpovídá délce (vzdálenosti bodu x od počátku $(0,\ldots,0)$).
Jednoduchým příkladem spojitých funkcí více proměnných jsou polynomy. Dále platí podobné věty jako pro spojité funkce jedné reálné proměnné — součet, součin i podíl (pokud nedělíme někde nulou) spojitých funkcí jsou spojité funkce.

§2. Základní věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic

Definice 12: Obyčejná diferenciální rovnice
Nechť $f(t, z_0, ..., z_{n-1})$ je reálná funkce na $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Pak rovnici

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{9}$$

nazveme obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu v Ω pro neznámou funkci $y = y(t)$. Řekneme, že funkce $y(t)$ na $I \subset \mathbb{R}$ je v Ω řešením rovnice (9) na intervalu I, pokud existují derivace $y^{(k)}, k \in \{1, ..., n\}$ na I a platí zároveň

$$\forall t \in I : (t, y(t), ..., y^{(n-1)}(t)) \in \Omega,$$

$$\forall t \in I : f(t, y(t), ...y^{(n-1)}(t)) = y^{(n)}(t).$$

Poznámka: Obyčejné diferenciální rovnice proto, že se v nich vyskytují „obyčejné“ derivace, tedy nikoliv derivace parciální.

Poznámka: Ještě obecněji lze definovat obyčejnou diferenciální rovnici jako $\Phi(t, y, ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$. Rovnici (9) nazýváme rovnicí řešenou vůči n-té derivaci.

Poznámka: Řešením je *dvojice* $(y(t), I)$. Zúžíme-li interval I na jeho menší podinterval J, pak $(y(t), J)$ je jiné řešení.

Poznámka: Znázorníme-li si v případě diferenciální rovnice prvního řádu ($y'(t) = f(y(t), t)$) funkci $f(t)$ graficky, je v každém bodě grafu dána jeho směrnice, čímž je do jisté míry určeno, „kam se bude graf ubírat dále".

Poznámka: Při splnění některých požadavků na funkci $f(t, ...)$ lze říci, kolik bude mít příslušná rovnice (9) různých řešení. Často bývá řešení rovnice n-tého řádu závislé na n parametrech (tj. má n „stupňů volnosti"[8]) — ty můžeme specifikovat například tím, že řekneme, kterým bodem z Ω má řešení procházet (neboli jaké jsou hodnoty $y(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0)$ v jednom určitém čase $t_0 \in I$). Jedna třída diferenciálních rovnic (lineární homogenní) se vyznačuje tím, že množina jejich řešení tvoří n rozměrný vektorový prostor.

Definice 13: Klasifikace řešení diferenciálních rovnic
Nechť $(y, I), (\tilde{y}, \tilde{I})$ jsou dvě řešení (9) v Ω. Nechť I je ostře menší podinterval $\tilde{I}$ a nechť $y(t) = \tilde{y}(t)$ na I. Potom řekneme, že $(\tilde{y}, \tilde{I})$ je prodloužení řešení (y, I) (respektive (y, I) je zúžení $(\tilde{y}, \tilde{I})$). Řekneme, že řešení (y, I) diferenciální rovnice (9) je maximální (úplné), pokud nemá žádné prodloužení.

Věta 41: Existence řešení
Nechť f je spojitá na $\mathbb{R}^{n+1}$ a nechť $A = (t_0, y, ..., y_{n-1}) \in \Omega$. Pak v Ω existuje řešení (9) procházející A. Přesněji: $\exists \delta > 0 : \exists y(t)$ na $\mathrm{U}_\delta(t_0)$ taková, že $(y, \mathrm{U}_\delta(t_0))$ je řešením (9) v Ω a

$$y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, ..., y(t_0) = y_0.$$

Navíc lze toto řešení prodloužit do maximálního řešení rovnice (9) v Ω.

Poznámka: Nevíme však, na jak velkém okolí $\mathrm{U}_\delta(t_0)$ toto řešení existuje.

Věta 42: Jednoznačnost řešení
Nechť platí předpoklady předchozí věty a nechť je navíc splněna podmínka

$$\forall (\tau, \xi_0, ..., \xi_{n-1}) \exists \delta > 0 \exists K > 0 :$$

$$\forall (t, y_0, .., y_{n-1}), (t, \tilde{y_0}, .., \tilde{y}_{n-1}) \in \mathrm{U}_\delta(\tau, \xi_0, .., \xi_{n-1}) : |f(t, y_0, .., y_{n-1}) - (t, \tilde{y_0}, .., \tilde{y}_{n-1})| < K \sum_{i=0}^{n-1} |y_i - \tilde{y}_i|. \tag{10}$$

Pak existuje právě jedno maximální řešení (y, I) rovnice (9) v Ω procházející A.

Tyto dvě fundamentální věty ponecháme bez důkazu.
Poznámka: Lipschitzovu podmínku (10) si pokusíme osvětlit pro případ rovnice prvního řádu ($n = 1$). Pak se požaduje, aby v nějakém okolí $\mathrm{U}(a)$ každého bodu $a \in \Omega$ platilo

$$\exists K : \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|} < K, \ (t, x), (t, y) \in \mathrm{U}(a).$$

Vidíme, že na levé straně je výraz připomínající parciální derivaci f podle druhé proměnné (tj. ne podle t) a podmínka tedy požaduje, aby tato „derivace" f byla alespoň na nějakém malém okolí a omezená. Typickou nelipschitzovskou funkcí (tedy funkcí nesplňující tuto podmínku) je $y = \sqrt[3]{x}$ pro $x = 0$. Derivace v tomto bodě je nevlastní, a tudíž neomezená.

[8] Řešení je v každém případě nekonečně mnoho.

To, že je existence vlastních derivací na celém Ω postačující pro splnění (10) plyne například z Lagrangeovy věty o střední hodnotě:

$$\forall x, y, x \neq y; (t,x), (t,y) \in \Omega : \exists \xi \in (x,y); \frac{f(t,x) - f(t,y)}{x-y} = f'(\xi).$$

Podobně bychom snadno ukázali, že pokud existuje spojitá derivace f v a, je Lipschitzova podmínka splněna lokálně.
V případě funkce více proměnných ($n > 1$) potom podmínka zajišťuje, aby byly vlastní derivace ve všech směrech — tedy nejen parciální derivace podle jednotlivých proměnných. Pro daný konstantní čas t můžeme znázornit $f(x,y)$ plochou. Zkoumaným bodem a pak vedeme roviny rovnoběžné s osou z, čímž dostáváme řezy plochy $f(x,y)$. U všech těchto řezů (tj. dvourozměrných grafů) požadujeme, aby na malém okolí byly směrnice těchto grafů omezené.
Pokud ovšem jsou všechny parciální derivace f spojité na celém Ω, je Lipschitzova podmínka splněna též.

§3. Rovnice prvního řádu

3.1 $y' = f(t)$

Pokud je $f(t)$ spojitá na $I \subset \mathbb{R}$ a položíme-li $\Omega = I \times \mathbb{R}$, máme obzvlášť jednoduchý úkol. Řešením je zřejmě $y(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\ \mathrm{d}\tau + y_0$ při počáteční podmínce $y(t_0) = y_0$ (integrál jistě existuje). Řešení (y, I) je zřejmě maximální a jediné (dokázali jsme jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu), což odpovídá skutečnosti, že $f(t)$ je konstanta vůči y, a f je tudíž zřejmě lipschitzovská. 3.2 $y' = g(y)$

Formálně lze tyto rovnice řešit zapsáním derivace pomocí diferenciálů:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(y) \Rightarrow\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} \Rightarrow \int\ \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}.$$

Takto získáme vyjádření $t = G(y) + c$. Pokud existuje inverzní funkce ke G, bude řešením $y = G^{-1}(t - c)$. Musíme si ovšem uvědomit, že kromě toho, že používáme symboly s nejasným významem ($f(y)\ \mathrm{d}y$) bez znamení integrálu, také během úprav dělíme $g(y)$, tedy bychom měli učinit předpoklad, že $g(y) \neq 0$. Zkusme si tuto metodu ujasnit:
Příklad: Řešme

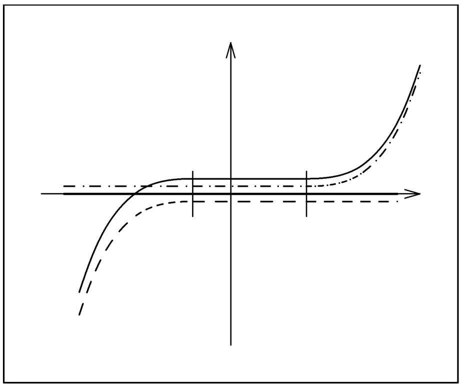
$$y' = y^{2/3}.$$

Za předpokladu, že $y \neq 0$, nyní provedeme poněkud „legálnější úpravu“, než jsme naznačili v předchozím odstavci:

$$\frac{y'}{y^{2/3}} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y^{2/3}}\ \mathrm{d}t = \int\ \mathrm{d}t \Rightarrow 3y^{1/3} + c = t \Rightarrow y = \frac{1}{27}(t-c)^3. \tag{11}$$

Integrál jsme substitucí $x = y(t),\ \mathrm{d}x = y'(t)\ \mathrm{d}t$ převedli právě na hledání primitivní funkce k $1/g(x)$.
Dále si uvědomíme, že $y(t) \equiv 0$ je rovněž řešení. Řešení procházející bodem $(t_0, 0)$ tedy budou alespoň dvě: $y(t) = 0$ a $y(t) = 1/27(t - t_0)^3$. Zkoumejme, jestli není možné tato dvě řešení na sebe napojit, a vytvořit tak řešení nové. Například tak, že pro $t \leq t_0$ by $y(t) = 0$ a pro $t > t_0$ $y(t) = 1/27(t - t_0)^3$. Ve všech bodech t kromě t_0 by tento systém jistě byl řešením naší rovnice. Zkoumejme tedy, zda je rovnice splněna i v bodě t_0. Mělo by být $y'(t_0) = 0$. Použijeme již dříve dokázanou větu tvrdící, že pro funkci např. zprava spojitou v a je derivace v a zprava rovna limitě zprava oboustranných derivací v x pro $x \to a$. Snadno tedy zjistíme, že kubická funkce má v t_0 derivaci zprava nulovou a stejně tak je nulová i derivace $y = 0$ zleva. V bodě t_0 pak ale tím pádem existuje oboustranná derivace a je rovna nule, což splňuje naši rovnici.
Každým bodem $(t_0, 0)$ ovšem potom prochází nekonečně mnoho řešení zadaných předpisy

$$y(t) = \frac{1}{27}(t-a)^3 \text{ pro } t < a, y(t) = 0 \text{ pro } a \leq t \leq b, y(t) = \frac{1}{27}(t-b)^3 \text{ pro } b < t$$



Obr. 8: Řešení rovnice $y' = y^{2/3}$ (vodorovné úseky funkcí správně leží na ose t)

pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}^*; a \leq b, t_0 \in \langle a, b\rangle$ — řešení může jít po $y = 0$ a v libovolném okamžiku se „odlepit", ať už doleva dolů nebo doprava nahoru (viz obrázek). Dokonce i lokálně (tj. na libovolně malém okolí) existuje nekonečně mnoho řešení procházejících bodem $(t_0, 0)$ — ať zvolíme jakkoliv malé okolí t_0, vždy budeme mít ještě nekonečně mnoho možností pro výběr „odlepovacích" bodů a, b. Naproti tomu, zkoumáme-li bod $(t_0, y_0), y \neq 0$, zjistíme, že lokálně jím prochází jediné řešení (11), přičemž konstantu c určíme z počáteční podmínky $y_0 = y(t_0) = 1/27(t_0 - c)^3$:

$$c = t_0 - 3\sqrt[3]{y_0} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{27}(t - t_0 + 3\sqrt[3]{y_0})^3.$$

Na určitém malém okolí (t_0, y_0) tedy najdeme jednoznačné řešení, které když budeme prodlužovat, zůstane jednoznačné přesně do okamžiku, kdy dosáhne na $y = 0$.
Srovnejme ještě tyto závěry s větou ((42)). Funkce $f(y) = y^{2/3}$ je lipschitzovská na celém $\mathbb{R}$ s výjimkou bodu 0. Vidíme, že pro všechna $y \neq 0$ je řešení procházející bodem (t, y) lokálně jednoznačné, v bodech $(t, 0)$ nikoliv. Vidíme také, že je nutno předpokládat splnění (10) na celém $\mathbb{R}$, jinak se i lokálně jednoznačné řešení může „pokazit" v bodech, kde tato podmínka splněna není. Celý problém přitom souvisel s tím, že jsme mohli volně napojovat kubickou křivku na $y \equiv 0$. Pokud budeme zkoumat rovnici $y' = y^n$, snadno zjistíme, že toto lze provést pro všechna $n < 1$ — řešením pak budou mocninné funkce řádu vyššího než prvého (ty mají v nule derivaci nulovou). Funkce $y^n, n < 1$ potom nesplňují Lipschitzovu podmínku. Naopak pro $n \geq 1$ dostáváme řešení, která nikdy osu $y = 0$ neprotnou (exponenciála, resp. záporné mocniny), a tedy není možno žádná řešení napojovat. Tyto funkce (10) naopak splňují.

Popsaný postup se pokusíme shrnout takto:
Věta 43: Řešení rovnice $y' = g(y)$
Nechť $g(y)$ je spojitá a nenulová na otevřeném intervalu J. Označme $G(y)$ funkci primitivní k $1/g(y)$ na J. Pak na intervalu J existuje inverzní funkce k $G(y)$ a každé maximální řešení rovnice $y' = g(y)$ v $\Omega = \mathbb{R} \times J$ má tvar $y(t) = G^{-1}(t - c)$ a je na intervalu $I = \{t \in \mathbb{R}; \exists y \in J : G(y) = t - c\}$[9].
Každým bodem $(t_0, y_0) \in \Omega$ prochází právě jedno maximální řešení.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že $y(t) = G^{-1}(t - c)$ je řešení:

$$y'(t) = \left(G^{-1}(t-c)\right)' = \frac{1}{G'(G^{-1}(t-c)} = g(G^{-1}(t-c)) = g(y(t)).$$

Potřebujeme však také ukázat, že $G^{-1}(t - c)$ na I vůbec existuje. Stačí si uvědomit, že $g(y)$ má na J stále stejné znaménko (neboť je spojitá a nenulová[10], tedy i $1/g(y)$ má tuto vlastnost. Je-li potom $1/g(y)$ derivací funkce $G(y)$, znamená to, že $G(y)$ je stále rostoucí nebo stále klesající (když je $g(y)$ stále kladná

[9] Neformálně řečeno $I = G(J) + c$ — chceme, aby $G^{-1}(t - c)$ dávalo hodnoty $y(t)$ v intervalu J, jiné hodnoty $y(t)$ by již vybočovaly z Ω.
[10] Důkaz sporem, např. z Darbouxovy vlastnosti spojitých funkcí.

nebo stále záporná) — v každém případě je však $G(y)$ monotónní, tedy prostá, pročež k ní jistě existuje inverzní funkce na J. Funkce $G^{-1}(t-c)$ pak zřejmě zobrazuje interval I na J.
Tato řešení jsou také maximální, neboť v krajních bodech I existují jednostranné limity $G^{-1}(t-c)$ (funkce G je monotónní na J, tedy i k ní inverzní funkce je monotónní na I, z čehož plyne existence limity). Tyto limity ale do otevřeného intervalu J nepatří[11]. To znamená, že libovolné spojité prodloužení našeho řešení by již nebylo v Ω — nespojité prodloužení by ale nebylo diferencovatelné, tedy naše řešení je maximální.
Předpokládejme nakonec, že by existovalo ještě jiné řešení, označme jej $y(t) = \eta(t)$. Víme, že na $I_\eta = \{t \in \mathbb{R}; \eta(t) \in J\}$ platí $\eta'(t) = g(\eta(t)) > 0$ (nebo < 0), tedy stejně jako v předminulém odstavci ukážeme, že $\eta(t)$ je na I_η monotónní, a tedy k ní existuje inverzní funkce $\xi = \eta^{-1}$. Zkusme derivovat tuto funkci:

$$\xi'(y) = \frac{1}{\eta'(\xi(y))} = \frac{1}{g(\eta(\xi(y)) = \frac{1}{g(y)}}.$$

Tedy $\xi(y)$ je primitivní funkcí k $1/g(y)$, jinými slovy existuje konstanta c taková, že $\xi(y) = G(y) + c, \forall y \in J$. Pokud v této rovnosti dosadíme za y například $\eta(t)$[12], dostáváme

$$\xi(\eta(t)) = G(\eta(t)) + c \Rightarrow t - c = G(\eta(t)) \Rightarrow \eta(t) = G^{-1}(t-c).$$

Vidíme tedy, že $\eta(t)$ má tvar jednoho z řešení, které jsme již popsali.

Poznámka: Zkoumejme ještě, co se děje s řešeními rovnice

$$y' = g(y) \tag{12}$$

bodech, kde $g(y) = 0$. Nechť je tedy $g(y)$ spojitá na intervalu $J = (b, c)$ a $g(y) \neq 0$ na $J \setminus \{a\}$, $g(a) = 0$. Označme $J_- = (b, a), J_+ = (a, c)$ a dále G_- (resp. G_+) primitivní funkce k $1/g(y)$ na J_- (resp. J_+). Z předchozí věty víme, že k těmto primitivním funkcím existují funkce inverzní a G_-^{-1} (resp. G_+^{-1}) budou řešeními rovnice (12) v $\mathbb{R} \times J_-$ (resp. $\mathbb{R} \times J_+$) na příslušném intervalu I_- (resp. I_+). Označme

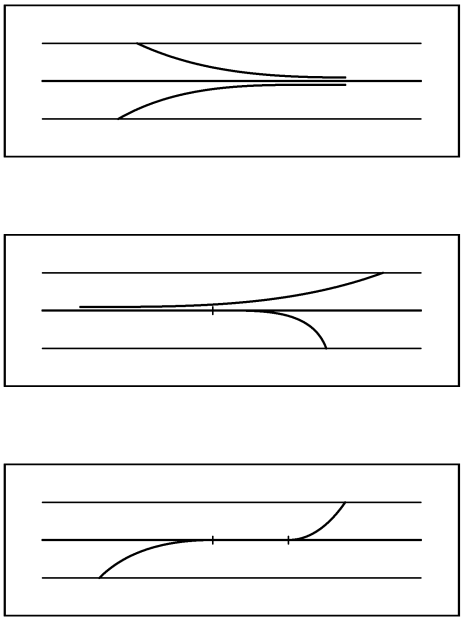
$$\alpha_\pm = \lim_{y \to a^\pm} G_\pm(y) + c;$$

$\alpha_- = (\alpha_+)$ tedy říká, v jakém čase se řešení $y(t) = G^{-1}(t-c)$ na I_- (I_+) dotkne přímky $y = a$ (samozřejmě tento čas již do $I_\pm$ nepatří, neboť se jedná o otevřený interval). V závislosti na $\alpha_\pm$ pak mohou nastat tyto situace.

1. obě $\alpha_\pm$ jsou nevlastní[13],
2. jedno z čísel $\alpha_\pm$ je reálné, druhé nevlastní a
3. čísla $\alpha_\pm$ jsou obě reálná.

Pokud je např. α_+ reálné, znamená to, že libovolné řešení na I_+ bude „končit“ na ose $y = a$ v čase α_+ (jeho konkrétní hodnota už samozřejmě bude záviset na c). Naopak, pokud je α_+ nevlastní, žádné řešení na I_+ se osy $y = a$ nedotkne, řešení budou „ubíhat“ do nekonečna a k ose $y = a$ se budou pouze blížit (např. exponenciálně).
Bude možno řešení na obou intervalech $I_\pm$ na sebe napojit? Vidíme, že kdykoliv je některé z čísel $\alpha_\pm$ nevlastní, možné to rozhodně nebude. Triviálním řešením ovšem bude vždy funkce $y \equiv a$, a pokud bude alespoň jedno z čísel $\alpha_\pm$ reálné, bylo by snad možné napojit řešení na příslušném intervalu na toto triviální řešení (stejně jako jsme to udělali v posledním příkladu: např. $y(t) = G_+^{-1}(t-c)$ pro $t > \alpha_+$ a $y(t) = a$ pro $t \leq \alpha_+$[14]). V případě 3. bychom mohli uvažovat o napojení obou řešení v I_+ i I_-, pokud $\alpha_+ = \alpha_-$ (obě tato čísla závisejí na konstantách c, které nejsou totožné v I_+ a I_- a odrážejí počáteční podmínky, tj. určují, kterým bodem v $\mathbb{R} \times J_+$ (resp. $\mathbb{R} \times J_-$) má příslušné řešení procházet). Podmínkou však je, aby

[11] Kdyby nějaká taková hodnota y_x do J patřila, pak by $G(y_x)$ muselo patřit do I, čímž by I nemohl být otevřený.
[12] Rovnost platí pro každé y z J a $\eta(t)$ je řešením naší rovnice na $\mathbb{R} \times J$, tedy $\forall t \in \mathbb{R} : \eta(t) \in J$.
[13] Skutečnost, že $\alpha_\pm$ je vlastní (nevlastní) nemůže změnit žádná reálná konstanta c.
[14] Smysl nerovností zde samozřejmě závisí na tom, zda G^{-1} je rostoucí či klesající — zde by například byla rostoucí.



Obr. 9: Napojování řešení na J_+ a J_- — obě $\alpha_\pm$ nevlastní; α_+ nevlastní, α_- vlastní; obě $\alpha_\pm$ vlastní, lze spojit.

byla obě řešení zároveň rostoucí nebo zároveň klesající (tedy aby $g(y)$ měla stejné znaménko na J_+ i J_-) — jinak by totiž k $y = a$ „přicházela“ ze stejné strany a nebylo by tudíž možno jejich spojením vytvořit funkci (na posledním obrázku je případ, kdy řešení lze spojit, druhý případ je podobný prostřednímu obrázku, s tím, že $\alpha_+ \in \mathbb{R}$). Pokud jsou v tomto případě $\alpha_\pm$ různá (pokud jsou např. řešení rostoucí, je ještě třeba, aby $\alpha_- \leq \alpha_+$), bylo by možno tato řešení propojit částí $y = a$, opět stejně, jako jsme to učinili v příkladu.

Když jsme mluvili o propojování, nezmínili jsme jeden důležitý bod: nově vzniklá funkce bude jistě vyhovovat rovnici (12) všude kromě bodu propojení ($\alpha_\pm$). Musíme prověřit, že existuje derivace nové funkce v tomto bodě a že je rovna nule (neboť v tomto bodě je $y' = g(a) = 0$). Jednostranná derivace směrem „od $y = a$“ je samozřejmě nula, ovšem jaká je derivace ze směru netriviální části řešení? Ve skutečnosti platí

Lemma : Pokud α_+ je reálné číslo, tj. řešení $y(t)$ rovnice (12) na I_+ se pro toto t „dotkne osy y=a“ (přesněji: jeho příslušná[15] limita v $t \to \alpha_+$ je a), pak je jednostranná derivace v α_+ (ze směru tohoto řešení) nulová — pokud dodefinujeme $y(\alpha_+) = a$.

Důkaz lemmatu: Nechť je například $g(y)$ kladná na I_+. Řešení $y(t)$ na I_+ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $G^{-1}(t-c)$ (viz předchozí větu ((43))), a je tudíž rostoucí. Toto řešení má první derivaci, a tedy je spojité. Pro výpočet derivace v α_+ proto lze použít (jednostrannou) limitu derivací

$$y'_+(\alpha_+) = \lim_{t\to\alpha_+^+} y'(t) = \lim_{t\to\alpha_+^+} \frac{1}{G'(G^{-1}(t-c)} = \lim_{t\to\alpha_+^+} g(G^{-1}(t-c)) = g(a) = 0.$$

Větu o limitě složené funkce lze použít např. protože $G^{-1}(t-c)$ je v α_+ ryze monotónní, čímž je důkaz hotov (pro $g(y)$ zápornou je postup analogický).

V bodě α_+ jsou tedy obě jednostranné derivace rovny nule, tedy existuje i oboustranná derivace a splňuje rovnici (12). Lemma lze samozřejmě použít i pro I_- (někde se ovšem mění + a − ve směrech limit) a celkově tedy vidíme, že lze napojovat jak libovolné řešení s příslušným $\alpha_\pm$ reálným na $y = a$, ale i dvě netriviální řešení v I_+ a I_- přímo na sebe. Na čtenáři ponecháváme diskuzi o tom, kolik řešení

[15] Je-li $y(t)$ rostoucí (klesající) na I_+, myslíme limitu zprava (zleva).

procházejících daným bodem z Ω má rovnice (12) — opět viz poslední příklad.
Příklad: nepovinně. Ukážeme, že pokud je pro diferencovatelnou funkci $g(y)$ splněna Lipschitzova podmínka, jsou $\alpha_\pm$ nevlastní. Tím zajistíme, že řešení na I_+ a I_- nebude možno propojovat navzájem ani s $y = a$ a každým bodem bude tedy procházet jediné řešení (na druhou stranu ale vidíme, že se nejedná o podmínku nutnou — pokud bude nevlastní např. jen číslo α_+, budou stále řešení procházející daným bodem v $\mathbb{R} \times J_+$ nebo $\mathbb{R} \times J_-$ jednoznačná, problémy nastanou pouze s body (t, a); stejná situace nastane, pokud budou sice obě čísla $\alpha_\pm$ reálná, ale $g(y)$ bude mít na $J_\pm$ různá znaménka, např. $y^{1/3}$).
Z Lipschitzovy podmínky pro $g(y)$ plyne, že $g'(y)$ *není* nevlastní, tedy *je* omezená na určitém okolí $\mathrm{U}(a)$. Nechť je tedy např. $g(y)$ klesající na I_+. Je-li derivace $g'(y)$ omezena na intervalu $J' = (a - \delta, a)$ (záporným) číslem β ($g'(y) > \beta$), musí zřejmě na J' platit $g(y) \leq \beta y + k$, kde k určíme tak, aby $0 = g(a) = \beta a + k$. Věta (??) ovšem říká, že

$$\frac{1}{g(y)} \geq \frac{1}{\beta y + k} \Rightarrow \int_{a-\delta}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} \geq \int_{a-\delta}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{\beta y + k} = \left[\frac{1}{\beta} \ln|\beta y + k|\right]_{a-\delta}^{x}.$$

Poslední logaritmus však pro $x \to a^-$ diverguje (hodnota integrálu jde k $+\infty$), tedy i primitivní funkce k $1/g(y)$ musí jít k $+\infty$ při $y \to a^-$.

Na závěr vyřešme dvě jednoduché diferenciální rovnice:
Příklad: $y' = y$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Již z dřívějších dob víme, že řešením je $y = ke^t$. K tomuto výsledku dospějeme i snadno naším postupem:

$$\frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|y| = t + c \Rightarrow y = ke^t, |k| = e^c.$$

Řešení na intervalech $(-\infty, 0)$ ($k < 0$) a $(0, \infty)$ ($k > 0$) na sebe zřejmě nenapojíme (exponenciály se nikdy nedotknou $y = 0$, což je také triviální řešení ($k = 0$)). Budeme tedy očekávat, že řešení procházející daným bodem je jednoznačné (obě $\alpha_\pm$ jsou $+\infty$) — skutečně, Lipschitzova podmínka je pro $g(y) = y$ splněna (znovu se však upamatujme, že tato podmínka není nutná).

Příklad: Najděme funkci $y(t)$ splňující $y' = y^2$, $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \overset{\int \mathrm{d}t}{\Longrightarrow} -\frac{1}{y} = t - c \Rightarrow y = -\frac{1}{t - c}.$$

Řešením jsou tedy rovnoosé hyperboly s asymptotami $y = 0$ a $t = c$, popřípadě funkce $y \equiv 0$. Řešení v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$ opět nebude možné propojit ($y(t)$ se však k 0 tentokrát nebude blížit exponenciálně), také Lipschitzova podmínka je pro $g(y) = y^2$ splněna, každým bodem (t_0, y_0) tedy prochází právě jedno řešení. Musíme si ale uvědomit, že nedokážeme předem říci, na jak velkém intervalu I to bude řešení: I totiž bude ohraničen bodem c. Čím bude větší y_0, tím bude t_0 blíže k c (kreslete si), a I bude menší — pro libovolné konečné y_0 však bude $t_0 \neq c$, a tedy bude existovat okolí (t_0, y_0), na němž bude existovat řešení naší rovnice.

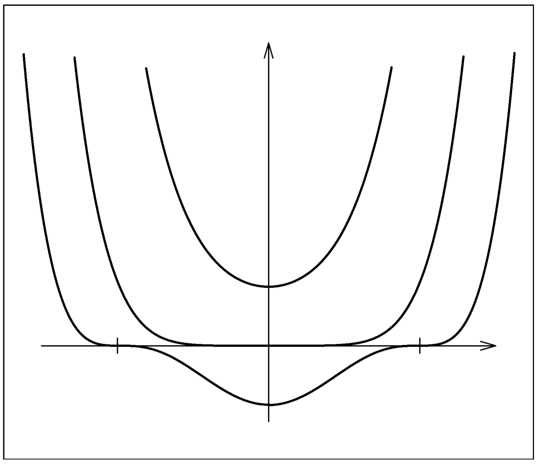
3.3 Separace proměnných, $y'(t) = f(t).g(y)$

Postup bude podobný jako v předchozím článku. Bereme $\Omega = \mathbb{R} \times J$ a za předpokladu $g(y) \neq 0$ zapíšeme derivaci pomocí diferenciálů a provádíme formální úpravy:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t).g(y) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\int \mathrm{d}t}{\Longrightarrow} G(y) = F(t) \Rightarrow y(t) = G^{-1}(F(t)),$$

je-li $G(y)$, resp. $F(t)$ některá primitivní funkce k $1/g(y)$, resp. $f(t)$. Správnější zápis by pak vyžadoval integrovat substituční metodou

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t) \Rightarrow \int \frac{y'(t)\,\mathrm{d}t}{g(y(t))} = \int f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}\phi}{g(\phi)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow G(y) = F(t) \text{ atd.}$$



Obr. 10: Řešení rovnice $y' = ty^{2/3}$

Navíc pokud existuje $y_0 \in J$, pro něž $g(y_0) = 0$, pak i funkce $y \equiv y_0$ je řešením a můžeme uvažovat o případném napojování řešení, stejně jako u řešení rovnic $y' = g(y)$.
Příklad: Řešme $y' = ty^{2/3}$.

$$\frac{y'}{y^{2/3}} = t \Rightarrow 3y^{1/3} = \frac{t^2}{2} + \frac{c}{2} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{6^3}(t^2 + c)^3. \tag{13}$$

Dále bude jistě řešením $y \equiv 0$. Zajímejme se dále o případnou jednoznačnost řešení procházejících daným bodem. Obecně vidíme, že Lipschitzova podmínka splněna není. Pro $c > 0$ se ale netriviální řešení nedotýkají $y = 0$, a tak po zkušenostech z předchozího článku hádáme, že taková řešení budou jednoznačná — skutečně vidíme, že libovolným bodem v oblasti $\{(t, y); y > t^6/216\}$ prochází právě jedno řešení ve tvaru (13) a vzhledem k tomu, že touto oblastí neprochází $y = 0$, je tato domněnka do jisté míry potvrzena. Pokud ovšem $c \leq 0$, protíná řešení (13) osu $y = 0$ v bodech $\pm\sqrt{|c|}$, přičemž v těchto bodech má nulovou derivaci (viz obrázek). To znamená, že můžeme řešení (13) volně napojovat na triviální $y \equiv 0$. Naprosto stejným způsobem jako u rovnice $y' = y^{2/3}$ tak můžeme generovat nekonečně mnoho řešení procházejících daným bodem v oblasti $\{(t, y); y \leq t^6/216\}$.

Nyní postup shrneme:
Věta 44: Řešení rovnice $y'(t) = f(t).g(y)$
Nechť f je spojitá na (a, b) a g je spojitá a nenulová na (c, d). Označme $F(t)$ primitivní funkci k $f(t)$ a $G(y)$ primitivní funkci k $1/g(y)$. Potom existuje inverzní funkce k $G(y)$ na (c, d) a každým bodem $(t_0, y_0) \in \Omega = (a, b) \times (c, d)$ prochází právě jedno maximální řešení rovnice $y'(t) = f(t)g(y)$ na intervalu D. D je největší podinterval (a, b) splňující formální inkluzi $G^{-1}(F(D)) \subset (c, d)$. Řešení bude mít tvar $y(t) = G^{-1}(F(t))$.

Důkaz: vynecháme s tím, že postup by byl podobný jako u věty ((43)).

Poznámka: Zde již nemusí platit, že pokud se netriviální řešení dotkne osy $y = y_0, g(y_0) = 0$, lze toto řešení napojit na triviální $y \equiv y_0$. Zkuste například řešit rovnice $y' = y/t$, $y' = y/t^2$ (které zřejmě vyhovují Lipschitzově podmínce).

§4. Lineární diferenciální rovnice

4.1 Základní věty

Definice 14: Lineární diferenciální rovnice
Nechť $a_0(t), ..., a_n(t), f(t)$ jsou funkce $\mathbb{R} \supset \mathrm{M} \mapsto \mathbb{C}$, $a_n(t) \not\equiv 0$ na M. Rovnici

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \tag{14}$$

nazveme lineární diferenciální rovnicí na $\Omega = \mathrm{M} \times \mathbb{C}^n$. Rovnice

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0 \tag{15}$$

se nazývá odpovídající homogenní rovnice k (14) (též rovnice bez pravé strany), $a_k(t)$ označujeme jako koeficienty této rovnice a $f(t)$ jako její pravou stranu.

Označení: Pro zkrácení zápisu obvykle výraz na levé straně lineární diferenciální rovnice označujeme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)}(t) \equiv \mathrm{L}y, \text{ tedy } \mathrm{L} \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}.$$

Rovnici (14) pak píšeme ve tvaru $\mathrm{L}y = f(t)$ a její homogenní rovnici $\mathrm{L}y = 0$.

Věta 45: Jednoznačnost řešení lineární diferenciální rovnice
Nechť koeficienty $a_0(t), ..., a_n(t)$ a $f(t)$ v rovnici (14) jsou spojité na $I \subset \mathbb{R}$, $a_n(t) \not\equiv 0$ na I. Pak pro každé $t_0 \in I$ a každé $(y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ existuje právě jedno řešení (14), pro něž platí $y^{(k)}(t_0) = y_k, k \in \{0, ..., n-1\}$.

Tuto větu přijmeme bez důkazu.
Poznámka (triviální důsledek): Pokud jsou splněny podmínky této věty a funkce $y(t)$, která je řešením rovnice (14), splňuje pro některé $t_0 \in I$ podmínku $y^{(k)}(t_0) = 0, k \in \{0, ..., n-1\}$, pak je $y(t) = 0$ na I. Funkce $y(t) \equiv 0$ je totiž zřejmě řešení vyhovující okrajovým podmínkám $y^{(k)}(t_0) = 0$ a dle předchozí věty je toto řešení jednoznačné.

4.2 Homogenní rovnice

Označení: Řešení diferenciální rovnice k-tého řádu na intervalu I bývá vhodné hledat v množině

$$C^{(k)}(I) = \{\forall f : I \mapsto \mathbb{C}; \exists f^{(k)} \text{ na } I\}, \text{ resp. } C^{(k)}(I)_{\mathbb{R}} = \{\forall f : I \mapsto \mathbb{R}; \exists f^{(k)} \text{ na } I\}.$$

Poznámka: Tyto dvě množiny jsou vektorové prostory nekonečné dimenze na tělesem $\mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}$ (uvědomte si proč, jak je definováno sčítání dvou funkcí a násobení prvkem z tělesa).

Poznámka: Nulovým prvkem v $\mathbb{C}^{(k)}(I)$ (resp. $\mathbb{C}^{(k)}_{\mathbb{R}}(I)$) je funkce $y = 0$ na I. Lineární nezávislost množiny funkcí $\{f_1, ..., f_n\} \subset \mathbb{C}^{(k)}(I)$ je pak samozřejmě definována takto

$$\{f_1, ..., f_n\} \text{ jsou lineárně nezávislé } \Leftrightarrow \forall\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathbb{C} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0.$$

Není snad třeba připomínat, že uvedená suma se nazývá lineární kombinací prvků $f_1, ..., f_n$, bez ohledu na to, zda je výsledkem této sumy $y \equiv 0$[16], či jakákoliv jiná funkce.

Po tomto opakování se můžeme vrátit k lineárním diferenciálním rovnicím. Již v úvodní kapitole o limitách jsme si všimli, že řešení homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty ($a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$) je vektorový prostor dimenze 2. Toto tvrzení nyní zobecníme a dokážeme:
Věta 46: Množina řešení homogenní lineární diferenciální rovnice
Množina všech řešení rovnice (15) n-tého řádu na intervalu I tvoří vektorový podprostor $C^{(n)}(I)$ nad $\mathbb{C}$

[16] Pro pořádek $y \equiv 0$ značíme funkci $y(t) = 0, \forall t \in I$.

(resp. $C^{(n)}_{\mathbb{R}}(I)$ nad $\mathbb{R}$) dimenze n.

Důkaz: Množina řešení K tvoří vektorový podprostor $C^{(n)}(I)$ ($C^{(n)}_{\mathbb{R}}(I)$): je zřejmé, že každý prvek z K leží zároveň v $C^{(n)}(I)$ ($C^{(n)}_{\mathbb{R}}(I)$) (pročpak?). Dále musíme ukázat, že součet dvou prvků y_1, y_2 z K leží v K a že c-násobek libovolného prvku y z K leží v K. Snadno ovšem ukážeme

$$0 \overset{?}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i(t)(y_1 + y_2)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)y_1^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} a_i(t)y_2^{(i)} = 0 + 0 = 0,$$

$$0 \overset{?}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i(t)(cy)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} ca_i(t)y^{(i)} = c\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)} = c.0 = 0.$$

Dále chceme určit dimenzi K. Za tím účelem se pokusíme sestrojit bázi B prostoru K — počet prvků B pak bude samozřejmě roven dimenzi. Zkusme vzít třeba množinu řešení (15) $B = \{y_1, ..., y_n\} \subset C^{(n)}(I)$ ($C^{(n)}_{\mathbb{R}}(I)$), o nichž budeme pouze předpokládat, že v nějakém pevném bodě $t_0 \in I$ splňují

$$y_i^{(j-1)}(t_0) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, ..., n\}$$

Kroneckerův delta symbol je sice známý, připomeňme však pro jistotu, že $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$. Že taková množina řešení existuje, to nám zaručí věta ((45)) — zvolíme vždy bod $(0, .., 0, 1, 0, .., 0)$ a dle této věty tímto bodem prochází (právě) jedno řešení y_i.
O množině B nyní dokážeme, že je bází K, tedy že je lineárně nezávislá a zároveň „generuje všechno“, tedy každý prvek z K lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků z B. Uvažujme tedy nějakou lineární kombinaci prvků z B rovnou $y \equiv 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(t) \equiv 0. \tag{16}$$

Má-li být tato rovnost splněna na celém I, musí platit i pro $t = t_0$. Dosadíme-li tedy do ní, zjistíme, díky vhodné volbě funkcí y_i, musí být $\alpha_1.1 = 0$, tj. $\alpha_1 = 0$ ($y_i(t_0) = 0$ pro $i \in \{2, ..., n\}$). Pokud obecně (16) $(j-1)$-krát zderivujeme, dostaneme v bodě $t = t_0$

$$0 \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(t)\right)^{(j-1)}_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^{(j-1)}(t)_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j.$$

Vidíme, že pro i libovolné $j \in \{2, ..., n\}$ tedy musí být $\alpha_j = 0$, pročež je tedy množina B lineárně nezávislá.
Nakonec musíme ještě dokázat, že každý prvek z K je lineární kombinací prvků B. Nechť proto je $y \in K$ řešením (15). Hodnoty jeho derivací v t_0 označme $d_j = y^{(j)}(t_0), j \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Rádi bychom dokázali, že potom platí

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} d_j y_j(t), \forall t \in I, \text{ tj. } g(t) \equiv y(t) - \sum_{j=1}^{n} d_j y_j(t) \equiv 0.$$

O hodnotách funkcí $y, y_1, ..., y_n$ na I ovšem nevíme zhola nic kromě bodu t_0. Víme však, že $g(t_0) = 0$, a pokud funkci g k-krát zderivujeme ($k \in \{1, ..., n-1\}$), bude

$$g^{(k)}(t_0) = y^{(k)}(t_0) - \sum_{i=1}^{n} d_j y_j^k(t_0) = d_k - \sum_{j=1}^{n} d_j \delta kj = d_k - d_k = 0.$$

Podle důsledku věty (45) to ovšem znamená, že $g(t) = 0$ na I, a tedy funkce $y(t)$ je totožná s výšeuvedenou lineární kombinací prvků z B.
Množina B je tedy bází K, a proto má K dimenzi n.

Definice 15: Fundamentální systém řešení
Buďte $y_1(t), ..., y_n(t)$ lineárně nezávislá řešení rovnice n-tého řádu $\mathrm{L}y = 0$ na J. Pak tuto n-tici nazveme

fundamentální systém řešení L$y = 0$ na J.

Definice 16: Wronskiho determinant
Jsou-li $a_1(t), ..., a_n(t)$ funkce s $(n-1)$. derivacemi, pak se funkce

$$W[a_1, ..., a_n](t) \equiv \begin{vmatrix} a_1(t) & \dots & a_n(t) \\ a_1'(t) & \dots & a_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n-1)}(t) & \dots & a_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \tag{17}$$

nazývá Wronskiho determinant (též wronskián).

Věta 47: Užití wronskiánu obecně
Pokud jsou funkce $u_1, ..., u_n \in \mathbb{C}^{(n)}(I)$ lineárně závislé na I, potom $W[u_1, ..., u_n](t) = 0$ na I.

Důkaz: Z lineární závislosti $u_1, ..., u_n$ plyne, že existují čísla $c_1, ..., c_n$, z nichž alespoň jedno není nula, pro něž

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i \equiv 0.$$

Tuto rovnost můžeme až $(n-1)$-krát derivovat, čímž získáme vztah

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i^{(j)} \equiv 0, \forall j \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Pokud si definujeme sloupcový vektor $\mathbf{v_k}$, jehož j-tá složka je j-tá derivace u_k, pak předchozí vztah zapsat ve tvaru

$$\mathbf{v_k} = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ u_k'(t) \\ \vdots \\ u_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v_i} \equiv \mathbf{0}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

To ale znamená, že sloupce ve Wronskiho determinantu jsou lineárně závislé, a tedy je tento determinant roven nule.

Poznámka: Samozřejmě se nabízí otázka, zda toto tvrzení platí i naopak, tj. zda wronskián lineárně nezávislých funkcí musí být nenulový (alespoň na některých bodech I — $W \not\equiv 0$). Berme obměněnou implikaci: musejí být funkce lineárně závislé, pokud je wronskián nulový na celém I? Víme, že pro každé $t \in I$ existuje nulová netriviální lineární kombinace sloupců ve Wronskiho determinantu. Koeficienty těchto lineárních kombinací ovšem mohou záviset na zvoleném t, zatímco pro zkoumání lineární závislosti funkcí musejí být tyto koeficienty konstanty na I. Tušíme tedy, že tudy vede cesta k vyvrácení opačné implikace:

Příklad: Uvažujme na $I = \mathbb{R}$ funkce u_1, u_2 definované takto

$$u_1(t) = 0, t \in (-\infty, 0), \quad u_1(t) = t^2, t \in \langle 0, \infty),$$

$$u_2(t) = t^2, t \in (-\infty, 0), \quad u_1(t) = 0, t \in \langle 0, \infty).$$

Snadno ověříme, že se jedná o funkce lineárně nezávislé — do rovnice $au_1(t) + bu_2(t) \equiv 0$ dosadíme nejprve např. $t = 1$ a potom $t = -1$, z čehož zjistíme $a = b = 0$. Derivace u_1' (resp. u_2') na $(-\infty, 0)$, a $\langle 0, \infty)$ budou 0 a $2t$ (resp. $2t$ a 0), z čehož vypočteme wronskián

$$W[u_1, u_2] = u_1 u_2' - u_2' u_1 \equiv 0.$$

Obrácená implikace k ((47)) tedy obecně neplatí. Situace se však mění, pokud zkoumáme pouze funkce, jež jsou řešením rovnice L$y = 0$:

Věta 48: Užití wronskiánu na řešení homogenní lineární diferenciální rovnice
Nechť $y_1(t), ..., y_n(t)$ jsou řešení L$y = 0$ na I. Pak nastane právě jedna z možností

1. $\forall t \in I : W[y_1, ..., y_n](t) = 0$,
2. $\forall t \in I : W[y_1, ..., y_n](t) \neq 0$.

Navíc 1. možnost platí, právě když jsou řešení $y_1, ..., y_n$ lineárně závislá, 2. možnost, právě když jsou lineárně nezávislá.
K důkazu této věty vyslovíme ještě jedno tvrzení
Věta 49: Výpočet wronskiánu na I z jeho hodnoty v jednom bodě
Jsou-li $y_1, ..., y_n$ řešení $\mathrm{L}y = 0$ na I a $W(t) = W[y_1, ..., y_n](t)$, pak

$$W'(t) = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} W(t), \forall t \in I, \tag{18}$$

a tedy pro libovolná $t, t_0 \in I$ platí

$$W(t) = W(t_0).e^{\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)} \, \mathrm{d}\xi}. \tag{19}$$

Lemma Derivace determinantu: Nechť $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ je matice funkcí diferencovatelných na I. Potom platí

$$[\det(a_{ij}(t))]' = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(j-1)1}(t) & \dots & a_{(j-1)n}(t) \\ a'_{j1}(t) & \dots & a'_{jn}(t) \\ a_{(j+1)1}(t) & \dots & a_{(j+1)n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n-1)}(t) & \dots & a_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \equiv \sum_{j=1}^{n} \det(A^{(j)}). \tag{20}$$

Poznámka: Determinant (a_{ij}) je součet určitých součinů, přičemž každý součin obsahuje n činitelů. V derivaci determinantu tedy na každý takový součinu připadne n členů, v nichž bude vždy jeden činitel derivován a ostatní budou ponecháni beze změny. Dále si uvědomíme, že v každém součinu se vyskytuje právě jeden zástupce z každé řádky matice (a_{ij}). Pokud tedy ve zderivovaném determinantu z každé n-tice vzniklé z derivace součinu vybereme vždy člen se zderivovaným prvkem z první řádky, získáme determinant matice $A^{(1)}$, tedy matice shodné s (a_{ij}) až na to, že v prvním řádku jsou místo funkcí a_{1j} jejich derivace. Podobně vybereme členy se zderivovaným k-tým prvkem a získáme $\det(A^{(k)})$.
Pokud jste tuto názornou úvahu nepochopili, nezoufejte, nyní provedeme sice méně názorný, avšak precizní

Důkaz lemmatu: Budeme postupovat indukcí podle rozměru matice n.
Pro $n = 1$ je rovnost (20) triviální, uvažujme tedy, že platí pro nějaké pevné n a pokusme se určit derivaci determinantu matice $(n+1) \times (n+1)$. Derivovaný determinant rozvineme podle prvního řádku:

$$(\det A)' = (\sum_{k=1}^{n+1} a_{1k}(-1)^{1+k} \det(M_{1k}))' = \sum_{k=1}^{n+1} a'_{1k}(-1)^{1+k} \det(M_{1k}) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{1k}(-1)^{1+k} (\det(M_{1k}))'.$$

Připomeňme, že $\det(M_{kl})$ značí minor (prvního stupně) odpovídající prvku a_{kl}, M_{kl} je matice vytvořená z (a_{ij}) vyškrtnutím k-tého řádku a l-tého sloupce. Druhá suma potom obsahuje derivace minorů — M_{1k} jsou ale již matice n-tého řádu, tedy můžeme využít indukční předpoklad a derivovat je podle (20):

$$(\det A)' = \sum_{k=1}^{n+1} a'_{1k}(-1)^{1+k} \det(M_{1k}) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{1k}(-1)^{1+k} \sum_{l=1}^{n} \det(M_{1k}^{(l)}) =$$

$$= \det(A^{(1)}) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{1k}(-1)^{1+k} \sum_{l=1}^{n} \det(M_{1k}^{(l)}) = \det(A^{(1)}) + \sum_{l=2}^{n+1} \det(A^{(l)}) = \sum_{l=1}^{n+1} \det(A^{(l)}).$$

Rozvinuté determinanty jsme opět „svinuli“, přičemž si bylo potřeba uvědomit, že pokud v matici $M_{1j}^{(l)}$ derivujeme l-tý řádek a z minorů $\det(M_{1j})^{(l)}$ potom vybudujeme zpět determinant matice $(n+1)\times(n+1)$, bude v této matici zderivovaný $(l+1)$. řádek.

Důkaz věty: Nyní se vrátíme k větě (49). Řádky wronskiánu zapíšeme pomocí vektorů $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbf{y^{(k)}} = (y_1^{(k)}, ..., y_n^{(k)})$ a derivaci wronskiánu spočteme podle vzorce (20):

$$a_n(t).W'(t) = a_n \left[\det\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y^{(n-1)}} \end{pmatrix}\right]' =$$

$$= a_n \left(\det\begin{pmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}'' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}'' \\ \mathbf{y}'' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} + ... + \det\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ \mathbf{y}^{(n)} \end{pmatrix}\right).$$

Všechny determinanty kromě posledního jsou ale nulové, neboť jsou použity na matici se dvěma stejnými řádky. S využitím multilinearity determinantu tedy píšeme

$$a_n(t).W'(t) = a_n \det\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ a_n\mathbf{y}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Nyní použijeme skutečnost, že $y_1, ..., y_n$ jsou řešení $\mathrm{L}y = 0$. Od posledního řádku tedy můžeme odečíst nulový vektor $\mathbf{Ly}$ a dále k němu přičíst a_{i-1}-násobek i-tého řádku $i = 1, ..., n-1$, čímž hodnotu determinantu nezměníme:

$$a_n(t).W'(t) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i\mathbf{y}^{(i)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ -a_{n-1}\mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= -a_{n-1}\det\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} = -a_{n-1}(t).W(t).$$

Ověřili jsme tedy vztah (18). Ten ovšem můžeme považovat za jednoduchou diferenciální rovnici prvního řádu se separovatelnými proměnnými. Vyřešíme ji:

$$\frac{W'(\xi)}{W(\xi)} = -\frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)} \overset{\int_{t_0}^t \mathrm{d}\xi}{\Rightarrow} \ln W(t) - \ln W(t_0) = -\int_{t_0}^t \frac{a_n(\xi)}{a_{n-1}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Odlogaritmováním tohoto vztahu získáváme již (19).

Důkaz věty: Konečně se můžeme vrátit i k ústřední větě tohoto článku (48). Vztah (19) ukazuje, že pokud pro některé $t_0 \in I$ bylo $W(t_0) = 0$, pak musí být i pro ostatní $t \in I$ platit $W(t) = 0$. Naopak, pokud pro některé $t_0 \in I$ bylo $W(t_0) \neq 0$, pak musí být $W(t)$ nenulové a v reálném oboru musí mít dokonce i stejné znaménko[17] jako $W(t_0)$ i pro všechna ostatní $t \in I$, neboť e^x je kladné pro všechna

[17] To však není zas takový div — když je funkce $W(t)$ spojitá a nenulová, těžko může měnit znaménko.

$x \in \mathbb{R}$, resp. nenulové pro všechna $x \in \mathbb{C}$.
Druhá část věty (48) se zabývala vztahem mezi wronskiánem a lineární závislostí řešení a obsahovala celkem čtyři implikace. Dvě z nich plynou přímo z věty (47) (lineární závislost implikuje $W(t) \equiv 0$). Opačné implikace tvrdily, že pokud je wronskián nulový, jsou řešení lineárně závislá. Z toho lze usoudit[18], že pro každé t jsou řádky wronskiánu lineárně závislé, tj. jedna jejich netriviální lineární kombinace je nulová, nevíme však, zda tato kombinace bude pro všechna $t \in I$ stejná — pokud by skutečně byla, mohli bychom s jejími koeficienty skombinovat funkce y_i a museli bychom dostat $y \equiv 0$. Určitě platí

$$\forall t \in I : W(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in I \exists c_1, ..., c_n ; \forall k = 0, 1, ..., n-1 :\equiv \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(t) = 0.$$

Vyberme si tedy jedno libovolné $t_0 \in I$, najdeme koeficienty $c_1, ..., c_n$ a pro tyto koeficienty označíme $y(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t)$. Pro funkce $y(t)$ pak ovšem platí $y(t_0) = y'(t_0) = ... = y^{(n-1)}(t_0) = 0$. Zároveň je však lineární kombinací řešení $y_1, ..., y_n$, což podle důsledku věty (45) znamená, že $\forall t \in I : y(t) = 0$. Tím pádem jsou řešení $y_1, ..., y_n$ lineárně závislá.

Na závěr zkusme řešit jeden zajímavý speciální případ homogenní lineární rovnice:
Příklad: Nechť $u(t)$ je jedním z řešení rovnice

$$y'' + p(t)y' + q(t) = 0. \tag{21}$$

Najděme druhé lineárně nezávislé řešení této rovnice.
V o trochu méně obecném případě vyslovíme pro nalezení druhého řešení drobné lemma:

Lemma : Nechť $u(t)$ je řešením (21) na I a nechť $u(t) \neq 0$ na I. Pokud $y(t)$ je řešením rovnice

$$uy' - u'y = e^{-} \int_{t_0}^{t} p(\xi)\ \mathrm{d}\xi, \tag{22}$$

pak $\{u, y\}$ je fundamentální systém řešení (21).

Důkaz: Okamžitě vidíme, že y a u jsou lineárně nezávislé funkce, neboť jejich wronskián je levá strana rovnice (22), která má být rovna nenulovému číslu e^x. Stačí už jen zjistit, zda y je skutečně řešením (21). Rádi bychom jako důsledek platnosti rovnice (22) získali rovnici (21) s dosazenou funkcí y. Máme-li v (22) pouze první derivace, napadne nás zderivovat ji:

$$u'y' + uy'' - u''y - u'y' = -e^{-} \int_{t_0}^{t} p(\xi)\ \mathrm{d}\xi p(t).$$

Využijeme že u je řešením (21), dosadíme za u'' a integrál na pravé straně odstraníme pomocí (22):

$$uy'' - y(-pu' - qu) = -(uy' - u'y)p \Rightarrow u(y'' + py' + q) = 0.$$

Pokud je u nenulová na I, znamená to, že y je skutečně řešením (21).

Nyní se ještě podívejme, jak z u pohodlně spočítat y. Všimneme si, že levá strana rovnice (22) nápadně připomíná derivaci podílu funkcí y a u, tedy že

$$\left(\frac{y}{u}\right)' = \frac{uy' - u'y}{u^2} = \frac{1}{u^2} e^{-} \int_{t_0}^{t} p(\xi)\ \mathrm{d}\xi.$$

Tím je však už návod hotov:

$$y(t) = u(t) \int \frac{1}{u^2(t)} e^{-} \int_{t_0}^{t} p(\xi)\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}t.$$

4.3 Nehomogenní rovnice, variace konstant

Poznámka: Jak je známo z lineární algebry, pro každé lineární zobrazení $\mathrm{L} : V \rightarrow V$ na lineárním

[18] Viz diskuzi za větou (47).

vektorovém prostoru V platí, že řešení rovnice $\mathrm{L}(x) = a$ pro nějaké $a \in V$ je buď prázdná množina, anebo afinní prostor $\alpha + W$, kde $W = \mathrm{Ker}(H)$ a $H(\alpha) = a$[19]. Tématem dalšího bude popis metod, jak nalézt počátek A tohoto afinního prostoru.

Věta 50: Variace konstant
Buď $n \in \mathbb{N}$ a $y_1, ..., y_n$ fundamentální systém řešení rovnice $\mathrm{L}y = 0$ (viz (14), (15)). Nechť $c_1', ..., c_n'$ jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} c_1'.y_1 + \ldots + c_n'.y_n &= 0 \\ c_1'.y_1' + \ldots + c_n'.y_n' &= 0 \\ &\ldots \\ c_1'.y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n'.y_n^{(n-2)} &= 0 \\ c_1'.y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'.y_n^{(n-1)} &= \frac{f}{a_n}. \end{aligned} \tag{23}$$

Pak funkce $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t).y_i(t)$ řeší rovnici $\mathrm{L}y = f$.

Důkaz: Nechť jsou splněny rovnice (23). Položme $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t).y_i(t)$ a dosaďme tuto funkci do rovnice $\mathrm{L}y = f$. Napišme nejprve, čemu je rovno $y'(t)$:

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i.y_i \right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i',$$

neboť podle první rovnice (23) je první suma rovna nule. Nyní spočteme druhou derivaci a opět zjistíme, že jedna se sum bude nulová, tentokrát s ohledem na druhou rovnici (23). Tímto postupem snadno nahlédneme, že

$$y^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(j)}, \ \forall j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Konečně u n-té derivace použijeme poslední rovnici (23), čímž dostaneme

$$y^{(n)} = \frac{f}{a_n} + \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n)}.$$

Nyní již jen dosadíme do rovnice $\mathrm{L}y = f$:

$$\mathrm{L}y = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n \frac{f}{a_n} + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k c_i y_i^{(k)} = f + \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=0}^{n} a_k y_i^{(k)} = f.$$

Poslední krok využíval skutečnost, že každé y_i je řešením homogenní rovnice $\mathrm{L}y = 0$.
Důkaz je tedy uzavřen.

Poznámka (intuitivní): Hledali jsme jeden prvek $y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{L})_f$, což je prostor dimenze n. Nejprve jsme měli na y jen jedinou podmínku, tj. aby $\mathrm{L}y = f$, která nám sice ponechává více stupňů volnosti ve výběru y, ale kterou neumíme v obecném případě efektivně využít. Soustava (23) naproti tomu na výběr y klade n podmínek, o nichž jsme ukázali, že implikují $\mathrm{L}y = f$; n koeficientů c_i v hledané lineární kombinaci by tím mělo být pevně určeno. Toto je samozřejmě jen intuitivní představa, neboť tyto koeficienty nejsou

[19]Toto budiž i definice afinního prostoru: $W_\alpha = \{x \in V; \exists w \in W, x = \alpha + w\}$.

konstanty, ale funkce.

Cvičení: Pokusme se najít přímo vzoreček pro výpočet c_i. Z (23) je podle Cramerova pravidla

$$c_i'(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1(t)' & \dots & y_{i-1}'(t) & 0 & y_{i+1}'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(t)^{(n-2)} & \dots & y_{i-1}(t)^{(n-2} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n(t)^{(n-2)} \\ y_1(t)^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}(t)^{(n-1)} & \frac{f(t)}{a_n(t)} & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & y_n(t)^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Vidíme, že výraz ve jmenovateli, wronskián $W(t)$ funkcí $y_1, \dots, y_n$ je nenulový, neboť $y_1, \dots, y_n$ jsou fundamentální systém řešení. Tím také potvrzujeme výrok z minulé poznámky, že c_i jsou určena jednoznačně (rovnice (23) jsou nezávislé). Dále zřejmě platí

$$c_i(t) = \int_{t_0}^{t} c_i(\tau)\ \mathrm{d}\tau,$$

kde t_0 je libovolný čas z intervalu, na kterém řešíme rovnici. Nyní se pokusíme upravit výraz pro y za využití multilinearity determinantu a pravidel pro počítání s integrály:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \frac{f(\tau)\ \mathrm{d}\tau}{a_(\tau) W(\tau)} \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_{i-1}(\tau) & 0 & y_{i+1}(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y_1(\tau)' & \dots & y_{i-1}'(\tau) & 0 & y_{i+1}'(\tau) & \dots & y_n'(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\tau)^{(n-2)} & \dots & y_{i-1}(\tau)^{(n-2} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(\tau) & \dots & y_n(\tau)^{(n-2)} \\ y_1(\tau)^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}(\tau)^{(n-1)} & 1 & y_{i+1}^{(n-1)}(\tau) & \dots & y_n(\tau)^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)\ \mathrm{d}\tau}{a_(\tau) W(\tau)} \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y_1(\tau)' & \dots & y_n'(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\tau)^{(n-2)} & \dots & y_n(\tau)^{(n-2)} \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix}.$$

Rozeberme ještě poslední krok: každý z n determinantů v sumě jsme nejprve rozvinuli podle i-tého sloupce. V sumě se tím pádem objevily výrazy odpovídající rozvoji posledně uvedeného determinantu podle posledního řádku:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} y_i(t) \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_{i-1}(\tau) & y_{i+1}(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y_1(\tau)' & \dots & y_{i-1}'(\tau) & y_{i+1}'(\tau) & \dots & y_n'(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\tau)^{(n-2)} & \dots & y_{i-1}(\tau)^{(n-2)} & y_{i+1}^{(n-2)}(\tau) & \dots & y_n(\tau)^{(n-2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y_1(\tau)' & \dots & y_n'(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\tau)^{(n-2)} & \dots & y_n(\tau)^{(n-2)} \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix}.$$

4.4 Rovnice s konstantními koeficienty

Poznámka: Zkoumejme nyní lineární diferenciální operátory s konstantními koeficienty, čímž myslíme přesněji: Buďte $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$, pak lineárním diferenciálním operátorem s konstantními koeficienty n-tého řádu rozmíme (lineární zobrazení) L na prostoru všech alespoň n-kráte diferencovatelných funkcí reálné proměnné, které takovéto libovolné funkci y přiřadí $\mathrm{L}y \equiv \mathrm{L}(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i . y^i$.

Lemma : $\mathrm{L}(e^{\lambda.t}) = P(\lambda).e^{\lambda.t}$, kde P je polynom. Jestliže $P(\lambda) = 0$, tak $L(e^{\lambda t}) = 0$.

Důkaz: nechť si čtenář provede dosazením.

Definice 17: Charakteristický polynom
Je-li $\mathrm{L}y = 0$ lineární diferenciální rovnice, pak funkci

$$P(\lambda) \equiv a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

nazýváme charakteristickým polynomem této rovnice.

Poznámka: Aby nemohlo dojít k nedorozumnění: polynom $P(\lambda)$ z definice a z lemmatu jsou totožné (ověřili jste?).

Věta 51: Řešení homogenní rovnice s konstantními koeficienty ve speciálním případě
Má-li charakteristický polynom $P(x)$ stupně n právě n různých kořenů $x_1, ..., x_n$, pak fundamentální soustavou řešení rovnice $\mathrm{L}y = 0$ je $e^{x_1 t}, ..., e^{x_n t}$ na libovolném intervalu J.

Důkaz: Z lemmatu výše je zřejmé, že se jedná o řešení. Ověřme, že je tento systém lineárně nezávislý. Spočteme-li wronskián pro $t = 0$, vyjde díky multilinearitě

$$\exp\,(t \sum_{i=1}^{n} x_i) \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \exp\,(t \sum_{i=1}^{n} x_i) \prod_{i<j} (x_i - x_j),$$

tzv. Vandermondtův determinant. Jelikož jsou x_i navzájem různé, wronskián je nenulový pro $t = 0$, a proto dle věty (48) nenulový pro všechna $t \in J$.

Věta 52: Řešení rovnice s konstantními koeficienty pro vícenásobné kořeny charakteristického polynomu
Je-li λ kořen násobnosti právě $k \leq n$ charakteristického polynomu $P(\lambda)$ lineárního diferenciálního operátoru L s konstantními koeficienty stupně n, pak $t.e^{\lambda t}, ..., t^{k-1}.e^{\lambda t}$ jsou řešeními rovnice $\mathrm{L}y = 0$.

Důkaz: přímočarou verzi (dosazení do $\mathrm{L}y = 0$) ponecháme jako poměrně náročné cvičení čtenáři. Předvedeme elegantnější způsob.
Je-li $\lambda = 0$ k-násobným kořenem $P(\lambda)$, znamená to, že prvních k koeficientů v $P(\lambda)$ (bráno od nižších mocnin) je nulových, tedy

$$\mathrm{L}y = \sum_{i=k}^{n} a_i y^{(i)}.$$

Dosadíme-li však $y = t^j e^{\lambda t} = t^j, 0 < j < k, j \in \mathbb{N}$, budou všechny derivace y v sumě nulové, a rovnice bude tedy splněna triviálně.
Pokud $\lambda \neq 0$, dosadíme $y = z(t).e^{\lambda t}$ ($z(t)$ je nějaká obecná funkce) a zkoumáme $\mathrm{L}y$:

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}(z.e^{\lambda t}) = a_0 z e^{\lambda t} + a_1(z' e^{\lambda t} + z\lambda e^{\lambda t}) + a_2(z'' e^{\lambda t} + 2z'\lambda e^{\lambda t} + z\lambda^2 e^{\lambda t}) + \ldots = e^{\lambda t}\mathrm{M}z.$$

Vidíme, že z $\mathrm{L}y$ lze vytknout $e^{\lambda t}$ a zbylý výraz bude lineárně závislý pouze na $z(t)$ a jejích derivacích (M bude lineární operátor s konstantními koeficienty). Ptejme se, jaký bude charakteristický polynom $Q(\mu)$ operátoru M — položíme $z(t) = e^{\mu t}$ a použijeme takovýto trik (pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$):

$$Q(\mu) = \frac{\mathrm{M}(e^{\mu t})}{e^{\mu t}} = \frac{\mathrm{L}(e^{\mu t}.e^{\lambda t})}{e^{\mu t}e^{\lambda t}} = \frac{\mathrm{L}(e^{(\mu+\lambda)t})}{e^{(\mu+\lambda)t}} = P(\mu + \lambda).$$

Tedy pokud λ je k-násobným kořenem P, pak nula je k-násobným kořenem Q a tím pádem $0 = \mathrm{M}(t^j) = \mathrm{L}(t^j e^{\lambda t})$ pro libovolné $j \in \mathbb{N}, j < k$.

Lemma : Nechť $m \in \mathbb{C}$ je nenulové a $P(t)$ je nenulový polynom nad tělesem komplexních čísel. Pak existuje nenulový polynom $Q(t)$ nad tělesem komplexních čísel takový, že platí: $(P.e^{mt})' = Q.e^{mt}$, přičemž stupně polynomů P a Q jsou stejné.

Důkaz: je triviální, a proto přenechán čtenáři.

Lemma : Nechť $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$ jsou vesměs různá. Nechť $P_1, ..., P_n$ jsou polynomy nad $\mathbb{C}$. Nechť je na nějakém intervalu I je $\sum_{j=1}^{n} P_i.e^{x_j t} = 0, \forall t \in I$. Pak pro každé $i = 1, ..., n$ platí $P_i \equiv 0$.

Důkaz: Provedeme indukcí.

1. Pro $n = 1$ platí tvrzení triviálně, neboť $\forall x \in \mathbb{C} : e^x \neq 0$.
2. Předpokládejme platnost pro $n - 1$. Jednoduchou úpravou zjistíme, že chceme dokázat

$$P_n = -\sum_{j=1}^{n-1} P_j.e^{x_j - x_n}.$$

Zderivujme tuto rovnost $(k+1)$- krát, kde k je stupeň polynomu P_n. Protože $x_j \neq x_n$, dostáváme podle předchozího lemmatu

$$0 \equiv P_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} Q_j.e^{(x_j - x_n).t},$$

přičemž buď $st(Q_j) = st(P_j)$, anebo $Q_j \equiv 0$, právě když $P_j \equiv 0$. Podle indukčního předpokladu je proto $Q_j \equiv 0$ pro $j = 1, ..., n-1$, a tedy i $P_n \equiv 0$ na I, c.b.d.

Nyní máme již vše připraveno k tomu, abychom mohli vyslovit větu, která je pro naše účely, totiž pro hledání jádra daného lineárního diferenciálního operátoru s konstantními koeficienty, větou základní.
Věta 53: O řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty
Nechť $\lambda_1, ..., \lambda_k$ jsou všechny kořeny charakteristického polynomu $P(\lambda)$ a $\nu_1, ..., \nu_k$ po řadě příslušné jejich násobnosti. Pak množina funkcí

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 t}, ..., t^{\nu_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, ..., t^{\nu_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \\ \cdots \\ e^{\lambda_k t}, ..., t^{\nu_k - 1} e^{\lambda_k t} \end{gathered} \tag{24}$$

je fundamentální systém řešení rovnice $\mathrm{L}y = 0$.

Důkaz: Tyto funkce jsou řešeními, jak plyne z předešlé věty. Fakt, že jsou lineárně nezávislé plyne z předchozího lemmatu (pokud sestrojíme lineární kombinaci všech shora vypsaných funkcí, můžeme všechny členy obsahující $e^{\lambda_i t}$ sečíst, čímž dostaneme jediný člen $P(t)e^{\lambda_i t}$; pak již budou všechny sčítance mít v exponentech různá čísla λ_i). To, že generují všechna řešení je zřejmé, když zjistíme, že jejich jejich počet je roven součtu všech násobností, tj. stupni charakteristického polynomu, a tedy i řádu diferenciálního operátoru L.

Poznámka: Věta (53) poskytuje návod, jak vypočítat bázi Ker(L). Budou-li však koeficienty L reálné, věta (53) nemusí ještě zajistit, aby i řešení byla reálná. Proto uveďme následující jednoduché, i když trochu neobratně formulované lemma.

Lemma o reálných řešeních pro operátory s reálnými koeficienty:

Nechť L je lineární diferenciální operátor s konstantními reálnými koeficienty řádu n. Nechť reálné kořeny charakteristického polynomu $P(x)$ jsou $m_1, ..., m_k$ s násobnostmi $r_1, ..., r_k$ a ostatní $n_1, \overline{n_1}, ..., n_s, \overline{n_s}, 2s + k = n$ s násobnostmi $p_1, p_1, ..., p_s, p_s$. Pak řešení rovnice $\mathrm{L}y = 0$ lze napsat ve tvaru

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{e^{m_1 t}, ..., t^{r_1-1}.e^{m_1 t}} \\
\multicolumn{2}{c}{\dots} \\
\multicolumn{2}{c}{e^{m_k t}, ..., t^{r_k-1}.e^{m_k t}} \\
\mathrm{Re}(e^{n_1}), ..., t^{p_k-1}.\mathrm{Re}(e^{n_1 t}) & \mathrm{Im}(e^{n_1}), ..., t^{p_1-1}.\mathrm{Im}(e^{n_1 t}) \\
\dots & \dots \\
\mathrm{Re}(e^{n_s}), ..., t^{p_s-1}.\mathrm{Re}(e^{n_s t}) & \mathrm{Im}(e^{n_s}), ..., t^{p_s-1}.\mathrm{Im}(e^{n_s t}).
\end{array}
\tag{25}
$$

Důkaz: Rozmyslete si, jak lze pomocí těchto funkcí lineárně nakombinovat funkce (24) (uvědomte si vztah mezi $e^x, \mathrm{Re}(e^x), \mathrm{Im}(e^x)$). Protože se nám to podaří pro všechny funkce (24) a funkcí (25) je právě n, musí funkce (25) nutně tvořit bázi Ker(L).

4.5 Partikulární řešení rovnic se speciální pravou stranou

Je-li $P(t)$ polynom stupně k, pak existuje řešení lineární rovnice s konstantními koeficientyy

$$\mathrm{L}y = P(t)e^{\mu t}$$

ve tvaru $y(t) = t^\rho Q(t)e^{\mu t}$. Zde je $\rho = 0$, pokud μ není kořenem charakteristického polynomu operátoru L, v opačném případě je ρ rovno násobnosti μ. $Q(t)$ je polynom stupně nejvýše k.
Pokud je na pravé straně lineární rovnice výraz typu

$$e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$$

s polynomy P, Q stupně nejvýše k, bude existovat řešení ve tvaru $t^\rho e^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$. Hodnota ρ se určí podle stejného klíče jako v předchozím případě s tím, že zkoumáme násobnost čísla $\alpha + \imath\beta$ jako kořene charakteristického polynomu L. Polynomy R, S jsou opět stupně nejvýše k (nemusí ovšem například platit, že stupeň R je nejvýše roven P).
Závěrem si uvědomme, že pokud y_1 a y_2 splňují

$$\mathrm{L}y_1 = f,\ \mathrm{L}y_2 = g,$$

pak rovnici

$$\mathrm{L}y = \alpha f + \beta g \tag{26}$$

jistě řeší $\alpha y_1 + \beta y_2$.
Cvičení: Uvědomte si alespoň rámcově, proč platí první tvrzení — dosaďte navrhované řešení do rovnice. Zkuste nejprve případ $\rho = 0$. Dále uvažte, jaký je stupeň polynomu na levé straně rovnice, pokud je stupeň Q právě k a $\rho = 1$ (zjistíte, že stupeň Q je nutno o jedničku zvýšit).
Druhý případ s goniometrickými funkcemi lze snadno převést na lineární kombinaci komplexních exponenciál (cvičně proveďte). S uvážením vztahů (26) budeme hledat řešení pro každou z exponenciál zvlášť a řešení opět „lineárně skombinujeme“. Budeme-li se chtít na závěr zbavit exponenciál, použijeme opět vztahy mezi $e^{\imath x}$ a goniometrickými funkcemi. Vidíme, že i když na pravé straně bude například pouze funkce sinus (tj. $P \equiv 0$), není vůbec jasné, zda v se v řešení kosinus vyskytovat bude či nikoliv (ve skutečnosti tam často bývá).

Příklad: Řešme rovnici

$$y''' - y'' + y' - y = \sin t.$$

Řešíme nejprve odpovídající homogenní rovnici, a potřebujeme tudíž znát kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1).$$

Vidíme, že kořeny jsou $1, \imath, -\imath$ a fundamentální systém řešení je tedy $\{e^t, e^{\imath t}, e^{-\imath t}\}$, případně (dle lemmatu na konci předešlého článku) $\{e^t, \sin t, \cos t\}$.

Protože číslo $0+\imath$ je jednonásobným kořenem charakteristického polynomu, očekáváme partikulární řešení ve tvaru $y = at\cos t + bt\sin t$, kde a, b jsou polynomy nultého stupně (konstanty). Toto řešení (ansatz) dosadíme do původní rovnice, čímž zjistíme podmínku pro a, b

$$(-2a - 2b)\cos t + (2a - 2b)\sin t = \sin t.$$

Vidíme, že členy obsahující t v první mocnině se vyrušily, což, jak jsme objevili v předchozím cvičení, souvisí s násobností kořene $0 + \imath$. Vzhledem k lineární nezávislosti[20] funkcí sinus a kosinus musí platit

$$-2a - 2b = 0,\ 2a - 2b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}.$$

Jedním partikulárním řešením je tedy $t/4.(\cos t - \sin t)$ a obecné řešení je

$$y = c_1 e^t + c_2 \sin t + c_3 \cos t + \frac{t}{4}(\cos t - \sin t).$$

4.6 Eulerovy rovnice

Definice 18:
Rovnice $\mathrm{L}y = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)} = 0$, kde $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, se nazývá Eulerova rovnice.

Protože koeficient $a_n t^n$ je nulový pro $t = 0$, budeme rovnici řešit zvlášť na intervalu $t \in (-\infty; 0)$ a zvlášť na intervalu $t \in (0; \infty)$. Nejprve se omezme na interval $t \in (0; \infty)$. K řešení rovnice lze přistoupit dvěma způsoby: hledat řešení v jistém speciálním tvaru nebo se pokusit rovnici převést substitucí na lineární rovnici s konstatntními koeficienty.

- Hledejme řešení ve tvaru $y(t) = t^\lambda$. Potom přejde původní rovnice do tvaru:

$$\mathrm{L}(t^\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \prod_{j=0}^{i-1} (\lambda - j) t^{\lambda - i} = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \prod_{j=0}^{i-1} (\lambda - j) \right) t^\lambda$$

  Úloha se tedy redukuje na nalezení kořenů rovnice n-tého stupně:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i \prod_{j=0}^{i-1} (\lambda - j) \right) = 0$$

  Pokud λ_0 řeší tuto rovnici, potom t^{λ_0} řeší rovnici $Ly = 0$.

- Pokusme se rovnici vyřešit substitucí $\xi = \ln t$; rovnici stále řešíme pro $t \in (0; \infty)$. Označme $z(\xi) = z(\ln t) = y(t)$. Budu vyjadřovat $y^i(t)$ pomocí $z(\xi)$:

$$y(t) = z(\xi)$$

$$y'(t) = (z(lnt))' = (z(\xi(t)))' == z'(\ln t)\xi'(t) = z'(\xi)\frac{1}{t}$$

  Použita věta o derivaci složené funkce.

$$y''(t) = z''(\xi)\frac{1}{t^2} + z'(\xi)\frac{1}{-t^2} = \frac{1}{t^2}\left(z''(\xi) - z'(\xi)\right)$$

$$y^{(i)}(t) = \frac{1}{t^i} \sum_{j=1}^{i} \gamma_{i,j} z^{(j)}(\xi)$$

[20] Kdo není spokojen s tímto vysvětlením, nechť do rovnice dosadí $t = 0$ a $t = \pi/2$.

Koeficienty $\gamma_{i,j}$ jsou pevné, tj. $\gamma_{i,j} \in C$. Po dosazení do původní rovnice:

$$L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \gamma_{i,j} z^{(j)}(\xi)$$

Tato rovnice je však lineární diferenciální rovnice n-tého řádu pro neznámou funkci $z(\xi)$. Řeší-li $z(\xi)$ tuto rovnici, potom $y(t) = z(lnt)$ řeší původní rovnici a naopak. Substituci $\xi = \ln t$ lze provést i pro rovnici s nenulovou pravou stranou a převést tak Eulerovu rovnici na rovnici s konstantními koeficienty s nenulovou pravou stranou. Ze substituované rovnice lze také snadněji získat řešení pro vícenásobné kořeny charakteristické rovnice.

Nechť nyní $t \in (-\infty; 0)$. Rovnici $L(y(t)) = 0$ převedu substitucí $\tau = -t$ na Eulerovu rovnici, kterou pro $t \in (-\infty; 0)$ řeším pro $\tau \in (0; \infty)$. Jejím řešením je funkce $(-t)^\lambda$, kde λ je řešení příslušné charakteristické rovnice; řešení na obou intervalech lze zapsat jako $|t|^\lambda$.

§5. Speciální případy diferenciálních rovnic

5.1 Homogenní rovnice

Definice 19: Nechť $\Omega \in R^n$ je množina, pro kterou platí: $x \in \Omega \Rightarrow \mu x \in \Omega, \mu \in R^+$. Řekneme, že funkce $f : \Omega \to R$ je homogenní funkce stupně α, $\alpha \in R$, pokud pro každé $x \in \Omega$ platí $f(\mu x) = \mu^\alpha f(x)$. Řekneme, že funkce $y' = f(t, y)$ je homogenní v $\Omega \subset R^2$, pokud funkce f je homogenní stupně 0.

Poznámka: Jsou-li $M(t, y)$ a $N(t, y)$ homogenní funkce na Ω stupně α a $N \neq 0$, potom $f(t, y) = \frac{M(t,y)}{N(t,y)}$ je homogenní stupně 0.

Poznámka: Hodnota homogenní funkce $f(t, y)$ stupně 0 závisí pouze na hodnotě y/t (tedy na směru vektoru (t, y), nikoliv na jeho délce). Navrhneme tedy následující postup:

Je-li $f(t, y)$ homogenní funkce, potom řešte rovnici $y' = f(t, y)$ substitucí $z = \frac{y}{t}$ na množinách $\Omega_+ = \{(t, y) \in \Omega, t > 0)\}$ a $\Omega_- = \{(t, y) \in \Omega, t < 0\}$.

Příklad: Řešme v Ω_+. Označme $g(z) = f(1, z)$, potom $f(t, y) = g(\frac{y}{t})$. Rovnici $y' = f(t, y)$ tedy převedeme na rovnici $(tz(t))' = g(\frac{y}{t}) = g(z)$, tedy na $z't + z = g(z)$, kterou lze rozřešit separací proměnných $z' = \frac{1}{t}(g(z) - z)$. Tedy například:

$$y' = \frac{y}{t} + 1$$
$$z't + z = z + 1$$
$$z' = \frac{1}{t}$$
$$z = \ln t + C$$
$$y = t \ln t + Ct$$

Obdobně postupujeme v Ω_-, přičemž $g(z) = f(-1, \frac{y}{-t}) = f(t, y)$.

5.2 Snižování řádu diferenciálních rovnic

1. Diferenciální rovnice tvaru $y^{(n)} = f(t)$ mají řešení pro zadané počáteční podmínky $y^0(t_0), \ldots$ $\ldots, y^{(k-1)}(t_0)$, zkráceně pišme $y_k = y^{(k)}(t_0)$, ve tvaru:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_1} \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\ \mathrm{d}\tau_n \ldots\ \mathrm{d}\tau_2\ \mathrm{d}\tau_1 + y_0 + y_1(t - t_0) + \ldots + y_{n-1} \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$y(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\ \mathrm{d}\tau + \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{(t-t_0)^k}{k!}$$

Celý vztah stejně tak i použitou úpravu lze ověřit matematickou indukcí.

2. Diferenciální rovnici tvaru $y^{(n)} = f(t, y^{(n-1)})$ lze řešit substitucí $z = y^{(n-1)}$ a řešit rovnici $z' = f(t, z)$. Po jejím vyřešení je třeba rozřešit rovnici $y^{(n-1)} = z$, která má tvar diskutovaný v bodě 1.

3. Rovnice tvaru $y^n = f(t, y^{(n-2)})$ lze řešit substitucí $z = y^{(n-2)}$ a následujícími úpravami:

$$z'' = f(t, z)$$

$$2z'z'' = 2z'f(t, z)$$

$$((z')^2)' = 2z'f(t, z)$$

$$(z')^2 = 2F(z) + C$$

$$z' = \pm\sqrt{2F(z) + C}$$

kde $F(z) = \int f(z)\ \mathrm{d}z$.
Příklad: Řešte $y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}$, s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ a $y''(0) = 1$. Rovnice bude řešena zavedením substituce $z = y'$.

$$y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}$$

$$z'' = \frac{1}{4\sqrt{z}}$$

$$2z'z'' = \frac{2z'}{4\sqrt{z}}$$

$$((z')^2)' = \frac{z'}{2\sqrt{z}}$$

$$(z')^2 = \sqrt{(z)} + C_1$$

Díky počátečním podmínkám je $C_1 = 0$, neboť $y_1 = 1$ a $y_2 = 1$.

$$z' = \sqrt[4]{z}$$

$$\frac{z'}{z^{\frac{1}{4}}} = 1$$

$$\frac{4}{3} z^{\frac{3}{4}} = t + C_2$$

$$z^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}t + \frac{3}{4}C_2$$

Díky počátečním podmínkám je $C_2 = 1$, neboť $y_1 = 1$.

$$z = (3/4t + 1)^{4/3}$$

$$y = \int\limits_0^t (3/4\tau + 1)^{4/3}\ \mathrm{d}\tau = \frac{4}{7}(3/4t + 1)^{7/3} - frac47 + C_3$$

Díky počátečním podmínkám je $C_3 = 0$, neboť $y_0 = 0$.

4. Rovnice $y^{(n)} = f(t, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})$ se řeší substitucí $z = y^{(k)}$ a poté rozřešením rovnice $y^{(k)} = z$ diskutované v bodě 1.

5. Rovnice $F(y,\dots,y^{(n)})=0$, tedy rovnice kde se nevyskytuje nezávisle proměnná t, lze řešit následujícím způsobem: Budu hledat $p(z)$ tak, aby platilo $y'(t)=p(y(t))$. Takže:

$$y(t)=z$$
$$y'(t)=y'(y^{-1}(y(t)))=p(y(y^{-1}(y(t))))=p(y(t))=p(z)$$
$$y''(t)=(p(y(t)))'=p'(y(t))y'(t)=p'(z)p(z)$$
$$y'''(t)=(p'(z)p(z))'=p''(z)p(z)p(z)+(p'(z))^2p(z)$$

atd.
Příklad: Řešte: $y''=2yy'$

$$p'(z)p(z)=2zp(z)$$
$$p'(z)=2z$$
$$p=z^2+C$$
$$y'=y^2+C$$

6. Rovnice $F(t,y,y',\dots,y^n)=0$, přičemž platí $F(t,\mu z_0,\dots,\mu z_n)=\mu^\alpha F(t,z_0,\dots,z_n)$, tj. F je homogenní funkce stupně α v $(z_0,\dots,z_n)$, lze řešit substitucí $z(t)=\frac{y'(t)}{y(t)}$. Takže:

$$y'(t)=z(t)y(t)$$
$$y''(t)=z'(t)y(t)+z(t)y'(t)=z'(t)y(t)+z(t)^2y(t)=y(t)(z(t)^2+z'(t))$$
$$y'''(t)=y(t)(z''(t)+3z(t)z'(t)+z(t)^3)$$
$$y^{(k)}(t)=y(t)P_k(z(t),\dots,z^{(k-1)}(t))$$

kde P_k je polynom. Potom lze původní rovnici upravit na rovnici nižšího řádu:

$$F(t,y,yP_1(z),\dots,yP_k(z,\dots,z^{(k-1)}))=y^\alpha F(t,1,P_1(z),\dots,P_k(z,\dots,z^{(k-1)}))=0,\ \text{tedy}$$
$$F(t,1,P_1(z),\dots,P_k(z,\dots,z^{(k-1)}))=0.$$

7. Rovnice, kde $F(\mu,\mu^m z_0,\dots,\mu^{(m-n)}z_n)=F(1,z_0,\dots,z_n)\mu^\beta$, kde $\mu>0,\beta\in R,m\in N$, lze řešit zavedenim substituce $z(\xi)=y(e^\xi)e^{-m\xi}$, kde $t=e^\xi$, tedy $\xi=\ln t$. Potom platí:

$$y(t)=z(\ln t)t^m$$
$$y'(t)=z'(\xi)t^{-1}t^m+zmt^{m-1}=(z'(\xi)+mz)t^{(m-1)}$$

Po dosazení do rovnice se podobně jako v bodě 6 podaří vyloučit t; řád rovnice se sníží a rovnice bude převedena do tvaru diskutovaného v bodě 5.

Poznámka: Zkoumejme řešení soustavy rovnic zapsané jako $\dot y=Ay$, kde A je matice a y a $\dot y$ představují n-tice funkcí zapsané jako sloupcové matice. Označím-li $Y(t)=e^{At}$, $e^B=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!}$ je exponenciála matice B, potom platí $\dot Y(t)=Ae^{At}$ a sloupce $Y(t)$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy rovnic, tj. jsou nezávislé, což lze snadno ověřit pro $t=0$. Označím λ_i vlastní čísla matice A, tj. kořeny rovnice $\det(A-\lambda)=0$; dále označme ν_i jejich násobnosti a m jejich počet. Nulové prostory $V_i=\{v\in R^n,(A-\lambda_i)^{\nu_i}=0\}$ vytváří, viz lineární algebra, celý prostor R^n, tj. $R^n=\bigoplus\limits_{i=1}^{m}V_i$, a jejich jediným společným prvkem je nulový prvek, tj. $\forall j\neq k: V_j\bigcap V_k=0$. Je-li $v_i\in V_i$, potom $e^{At}v_i=e^{(\lambda_i+A-\lambda_i)t}v_i=e^{\lambda_i t}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{(A-\lambda_i)^j}{j!}v_i$, kde pro $j\geq\nu_i$ je výraz $\frac{(A-\lambda_i)^j}{j!}$ v sumě nulová matice, tj. součet je tvořen pouze konečně mnoha nenulovými členy. Každý $v\in R^n$ lze jednoznačně rozložit na $v=\sum\limits_{j=1}^{m}v_j$, kde $v_j\in V_j$. K určení e^{At} stačí nyní najít pouze projektory (tj. zobrazení), které $v \in R^n$ přiřadí odpovídající $v_i \in V_i$. Charakteristický polynom matice A je $\chi(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} (-1)^n$. Nechť platí:

$$\frac{1}{\chi(\lambda)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}}$$

kde $P_i(\lambda)$ jsou polynomy stupně nejvýše $\nu_i - 1$ (rozklad na parciální zlomky).

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}} \chi(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\lambda) \prod_{i \neq j} (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$$

Jednotlivé sčítance $P_i(\lambda) \prod\limits_{i \neq j} (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$ jsou hledané projektory, neboť každý z nich je lineární zobrazení, jehož jádro (nulový prostor) tvoří lineární obal všech V_j pro $j \neq i$, a jejich součet je identické zobrazení. Označím každý z těchto projektorů $\prod_i$. Potom platí:

$$e^{At} v = \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{\nu_i - 1} \frac{(A - \lambda_i)^j}{j!} \Pi_i v$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic:

$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = -y_1$$

Tedy:

$$\dot{y} = Ay, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděme nejprve vlastní čísla A:

$$\chi(\lambda) = -\lambda^2 - 1 = 0, \lambda = \pm i$$

$$\frac{1}{\lambda^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2} i}{\lambda + i} + \frac{\frac{-1}{2} i}{\lambda - i}$$

$$\Pi_1(A) = \frac{1}{2i}(\lambda + i) = \frac{1}{2i}(A + i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2(A) = \frac{-1}{2i}(\lambda - i) = \frac{-1}{2i}(A - i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{it} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_1(A) + e^{-it} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_2(A)$$

$$e^{At} = e^{it} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + e^{-it} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} & \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ \frac{e^{it} - e^{-it}}{-2i} & \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Poznámka: Povšimněme si, že $e^{At} = 1$ pro $t = 0$.

Poznámka: Povšimněme si, že $A^2 = -1$:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 \cos t + A \sin t$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_1$$

Tedy:

$$\dot{y} = Ay, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

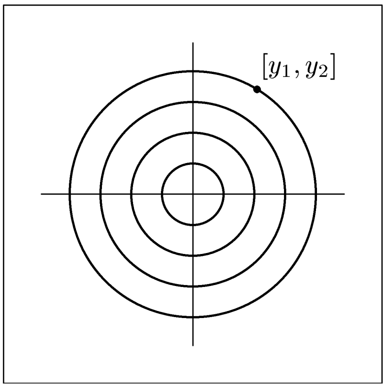
Povšimněme si, že $A^2 = 1$. Výpočet exponenciály bude tedy možno provést přímo:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 \cosh t + A \sinh t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Poznámka: Pro počáteční podmínky udané sloupcovým vektorem $y(0)$ je řešením soustavy $y(t) = e^{At}y(0)$. V prvním příkladu je tedy obecné řešení s počátečními podmínkami $y(0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ udáno jako:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \cos t + y_2 \sin t \\ -y_1 \sin t + y_2 \cos t \end{pmatrix}$$

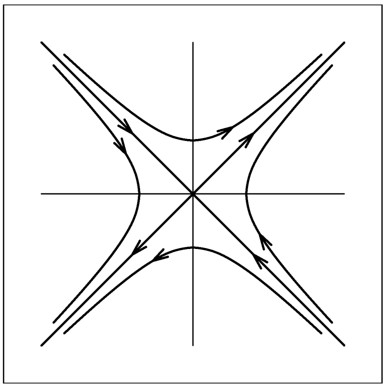
Povšimněme si, že platí: $y_1(t)^2 + y_2(t)^2 = y_1^2 + y_2^2$, tedy trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ tvoří kružnice se středem v počátku, viz obrázek.



Ve druhém případě:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \cosh t + y_2 \sinh t \\ y_1 \sinh t + y_2 \cosh t \end{pmatrix}$$

Povšimněme si, že platí: $y_1(t)^2 - y_2(t)^2 = y_1^2 - y_2^2$. Trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ jsou znázorněny na obrázku.



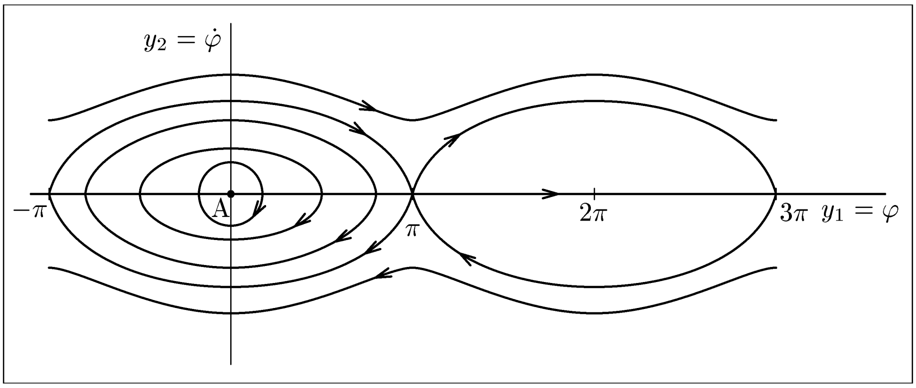
Bod $[0,0]$ znázorněný na obrázku, ke kterému se řešení blíží a poté se zase vzdalují (v čase, tj. jako funkce t) se nazývá sedlový bod.

Poznámka: Zkoumejme řešení soustavy rovnic (srov. s matematickým kyvadlem):

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -siny_1$$

Pro y_1 blízké sudým násobkům π, tj. speciálně blízké nuly, soustava rovnic přejde na soustavu diskutovanou v příkladě nula. Pro malé výchylky koná matematické kyvadlo harmonické kmity (téměř kružnicové trajektorie ve stavovém prostoru). Naopak pro y_1 blízké lichým násobkům π, je přibližně $siny_1 = (2k+1)\pi - y_1$ a soustava rovnic přejde na soustavu diskutovanou v druhém příkladě. Lze též zjistit, že pro každé t platí: $\frac{y_2^2}{2} + 1 - \cos y_1 = konst.$. Znázornění trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ je na obrázku.



8 Funkce více proměnných

Poznámka: Zajímáme se o zobrazení $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$. Toto zobrazení můžeme chápat jako uspořádanou n-tici $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, v níž je každá komponenta zobrazení $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$. Pod $\mathbb{R}^n$ budeme rozumět n-rozměrný Euklidovský prostor, čili reálný vektorový prostor se skalárním součinem zavedeným následující definicí:

Definice 20: Skalární součin
Skalární součin na $\mathbb{R}^n$ je zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $[x, y] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto (x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Tento skalární součin indukuje normu $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.

Poznámka: Takto zavedená norma má následující vlastnosti:

1. $||x|| \geq 0$, přičemž rovnost nastává pouze pro $x = 0$.
2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (trojúhelníková nerovnost)

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tyto vlastnosti jsou dokonce zcela obecné axiomy pro zavedení jakékoli normy, nemusí jít jen o normu indukovanou skalárním součinem.
Definice 21: Okolí bodu
Každou množinu tvaru $U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} | ||x - y|| < \varepsilon\}$, kde $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ nazýváme *okolím* bodu x o poloměru ε.
Množinu tvaru $U^*_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x) \backslash \{x\}$ nazýváme *redukované okolí* bodu x.

Poznámka: Někdy se množině $U_\varepsilon(x)$ říká též *otevřená koule* a *okolím* se pak míní jakákoliv množina obsahující nějakou otevřenou kouli jako podmnožinu.
Upřesněme ještě, co se míní pod pojmem otevřená, resp. uzavřená množina. Tedy:

Definice 22: Otevřená množina, uzavřená množina
Množina M se nazývá otevřená, pokud $x \in M \Rightarrow \exists U(x) : U(x) \subset M$.
Množina M je uzavřená ve V, $M \subset V$, pokud doplněk M do V je otevřená množina.

Poznámka: Nejlépe si lze toto představit na otevřených a uzavřených intervalech. Nezapomeňme, že interval z jedné strany otevřený a z druhé uzavřený není ani otevřená ani uzavřená množina.

Definice 23: Limita funkce více proměnných
Nechť $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\exists \delta \quad U^*_\delta(x_0) \subset D_F$. Číslo $A \in \mathbb{R}^n$ nazveme *limitou* funkce F v bodě x_0, právě když

$$\forall U(A) \quad \exists U^*(x_0) \quad \forall x \in U^*(x_0) \quad F(x) \in U(A).$$

Takto zavedený pojem limity je přímočarým zobecněním pojmu limity funkce jedné proměnné. Jak ale uvidíme na následující sérii příkladů, výpočet limit se přechodem do vyšších dimenzí velmi komplikuje.
Rozmysleme si ještě předem drobné tvrzení. Nechť existuje limita zobrazení f v bodě x_0 a nechť je rovna A. Zvolíme-li libovolnou spojitou křivku c procházející bodem x_0, musí v x_0 existovat i limita zobrazení f na množině $D_f \cap c$ rovná A. Názorně řečeno: limita musí vyjít A, ať se k bodu x_0 blížíme po jakékoliv křivce.
Příklad: Hledejme limitu funkce $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ v bodě $(0, 0)$. Nejprve si uvědomme, že tato limita nemůže být různá od nuly. Sledujeme-li chování funkce f na množině $(x, 0)$, $x \neq 0$ (první souřadná osa bez počátku), seznáme, že je na této množině nulová, a tudíž limita f zúžené na tuto množinu je nula. Pak ale $\lim\limits_{(x_1, x_2) \to (0,0)} f(x_1, x_2)$ buď neexistuje, nebo je nulová.
Chceme nyní dokázat, že limita je nula. Rozepišme tento požadavek podle definice:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x = (x_1, x_2) \quad 0 < ||x|| < \delta \quad ||f(x)|| = |f(x)| < \varepsilon$$

Pro každé dvě $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí jednoduchá nerovnost $|2x_1x_2| \leq x_1^2 + x_2^2$. Použijeme-li tento odhad ve vyjádření funkce f, dostáváme

$$\left|\frac{x_1^2x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right| \leq \frac{|x_1|}{2} \leq \frac{\|x\|}{2}$$

Ke každému ε stačí tedy zvolit $\delta = 2\varepsilon$.

Věta 54: O limitě složeného zobrazení
Nechť $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť

1. existuje $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = y_0 \in \mathbb{R}^m$
2. existuje $\lim\limits_{y \to y_0} G(y) = z_0 \in \mathbb{R}^k$
3. $\exists U^*(x_0) \quad \forall x \in U^*(x_0) \quad F(x) \neq y_0$

Pak $\lim\limits_{x \to x_0} G(F(x)) = z_0$.
Důkaz: Provádí se naprosto stejně jako pro funkce jedné proměnné.

Příklad: Zkoumejme, zda existuje limita funkce $f(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$ opět v bodě $(0, 0)$. Budeme sledovat chování této funkce na přímkách procházejících počátkem s různou směrnicí k. To je totéž, jako uvažovat složenou funkci $f \circ g_k$, kde vnitřní funkce g_k jsou zobrazení $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaná předpisem $g_k(x) = (x, kx)$. Všechny funkce g_k mají limitu $(0, 0)$ a pro $x \neq 0$ je $g_k(x) \neq 0$. Můžeme tedy použít předchozí větu: $\lim\limits_{x \to 0} f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2}$. To je ovšem konstanta závislá na k, čili na způsobu přibližování se k nule, limita neexistuje.

Poznámka: Pozor, pokud by limita po všech přímkách byla stejná, neimplikuje to existenci limity celé funkce.

Příklad: Limita funkce $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}$ v nule. Je-li (x_1, x_2) tvaru $(x, 0)$ nebo $(0, x)$, pak $f(x_1, x_2) = 0$, v opačném případě existuje $k \neq 0$ takové, že (x_1, x_2) je tvaru (x, kx). Potom $\lim\limits_{x \to 0} f(x, kx) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{kx^3}{x^2(x^2+k^2)} = 0$. Na všech přímkách procházejících počátkem je tedy limita nulová. Tak zkusíme třeba parabolu $(x_1, x_2) = (x, x^2)$. Hodnota funkce $f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4}$ je stále jedna polovina, limita podél paraboly je tudíž také $\frac{1}{2}$, z čehož plyne, že limita celé funkce nemůže existovat. Je možné si to představit také tak, že přímky (x, kx) protnou tuto parabolu každá jen jednou, a i když v místě průsečíku je funkční hodnota jedna polovina, jedná se jen o jediný bod, který limitní proces podél přímky neovlivní.

Poznámka: Z předchozího příkladu je patrné, že při důkazu existence limity se nemohu omezit na nějakou speciální třídu křivek jako přímky nebo kvadriky. Ke každému speciálnímu způsobu přibližování lze vymyslet funkci, kde selže. Jediné, co v tomto ohledu opravdu platí, je stará známá Heinova věta:

Věta 55: Heine
Nechť $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} = A \in \mathbb{R}^n$ právě když $\forall x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0 \Rightarrow F(x_n) \to A$.

Důkaz: Je opět přímou analogií důkazu pro funkce jedné proměnné.

Věta 56: Bolzano-Cauchyova podmínka
Nechť $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$.

$$\lim_{x \to x_0} F(x) \text{ existuje} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U^*(x_0) \quad \forall x, y \in U^*(x_0) \quad \|x - y\| < \varepsilon$$

Poznámka: K zavedení pojmů limity a spojitosti a k platnosti uvedených vět není třeba tak silných požadavků, jako jsou vlastnosti Euklidovského prostoru. Existuje teorie takzvaných *topologických prostorů*, která k tomuto problému přistupuje obecně. Speciálně si zde můžeme uvést definici *metrického prostoru*, kde tyto zákonitosti platí také. Pod metrickým prostorem rozumíme dvojici množina M a zobrazení $\rho : M \times M \mapsto \mathbb{R}_0^+$, které splňuje tyto axiomy:

1. $\rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$
2. $\forall x,y \in M \quad \rho(x,y)=\rho(y,x)$
3. $\forall x,y,z \in M \quad \rho(x,z) \le \rho(x,y)+\rho(y,z)$

Toto zobrazení se nazývá metrika (vzdálenost, distance). Okolí v metrickém prostoru je množina $\{y \in M|\rho(y,x)<\varepsilon\}$.
Věta 57: Limitní přechod po složkách
Nechť $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $f=(f_1,f_2,\dots,f_k)$, kde $f_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Pak $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=y\equiv(y_1,y_2,\dots,y_k) \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,k\} \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_i(x)=y_i$

Důkaz: Pro jednoduchost zkoumejme funkci $g(x)\equiv f(x)-y$ se složkami $g_i(x)=f_i(x)-y_i$. Pro každý bod m-rozměrného prostoru platí nerovnosti

$$|z_i| \le \|z\| \le \sum |z_i| \le m \max |z_i|$$

Odtud snadno plynou oba směry implikace. Pokud $\lim g(x)=0$, pak ke každému ε najdeme δ, že $\|x\|<\delta \Rightarrow \|g(x)\|<\varepsilon$. Podle první části nerovnosti platí, že potom pro tato x také $|g_i(x)|<\varepsilon$. Naopak, pokud pro každé i $\lim g_i(x)=0$, pak ke každému ε najdeme $\delta_1,\delta_2,\dots\delta_k$, že $\|x\|<\delta_i \Rightarrow |g_i(x)|<\varepsilon$. Pro $\|x\|<\min\delta_i$ pak podle druhé části nerovnosti platí $\|g(x)\| \le k\varepsilon$.

Definice 24: Spojitost zobrazení
Nechť $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je spojité v a, pokud

$$\forall U(f(a)) \quad \exists U(a) \quad \forall x \in U(a) \quad f(x) \in U(f(a)).$$

Věta 58: Zachování spojitosti při operacích se spojitými zobrazeními, limita spojitého zobrazení
Nechť $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$, $g:\mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^l$ zobrazení, f spojité v $x_0 \in \mathbb{R}^n$, g spojité v $f(x_0) \in \mathbb{R}^k$. Pak $g\circ f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$ je spojité v x_0.
Nechť $f,g:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ zobrazení spojitá v a, pak
1. $(f+g)(x)$ spojité v a,
2. $(fg)(x)$ spojité v a,
3. $g(a)\neq 0 \Rightarrow (\frac{f}{g})(x)$ spojité v a.

f je spojité v $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
Důkaz: Je opět zcela stejný jako pro funkce jedné proměnné.

Poznámka: Poslední dvě věty nám dávají prostředky pro konstrukci poměrně velké třídy spojitých funkcí více proměnných. Víme například, že polynomy jedné reálné proměnné jsou spojité funkce. Tedy budou spojité i polynomy více proměnných, protože ty jsou v každé své složce polynomem jedné proměnné. Spojité jsou tedy i racionální funkce, jejich logaritmy, exponenciely ...

§1. Parciální derivace

Definice 25: Derivace ve směru
Nechť $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{l}$ vektor z $\mathbb{R}^n$ [21] Derivací ve směru $\mathbf{l}$ v bodě a rozumíme

$$\partial_{\mathbf{l}} f(a) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\mathbf{l})-f(a)}{t}$$

[21] Algebraik by asi přesněji rozlišil, že a je element *afinního* prostoru (prostoru bodů), zatímco $\mathbf{l}$ náleží jeho *zaměření*, tedy příslušnému vektorovému prostoru nad tímto afinním prostorem. Pro naše účely je rozdíl nepodstatný.

Speciálně derivace ve směru bázových vektorů značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Poznámka: Analogicky se definují vyšší derivace.
$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \Rightarrow \partial_l f(a) = (\partial_l f_1, \partial_l f_2, \dots, \partial_l f_n)$.

Věta 59: Záměnnost pořadí parciálních derivací
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, nechť existují $\partial f/\partial x_i$, $\partial f/\partial x_j$ v nějakém $U(a)$, nechť existuje $\partial^2 f(x)/(\partial x_i \partial x_j)$ spojitá v a.
Pak existuje $\partial^2 f(a)/(\partial x_j \partial x_i)$ a rovná se $\partial^2 f(a)/(\partial x_i \partial x_j)$.

Důkaz: Čtenář jej nalezne například v klasické učebnici Vojtěcha Jarníka…

… cítí-li se však ošizen, nechť zkusí dokázat rovnost obou parciálních derivací alespoň pro reálně analytickou funkci (zapsanou pomocí nekonečné řady).

Úmluva: Pro funkce spojitě diferencovatelné do řádu k budeme používat označení

$$D^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

kde $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \le k$.

Příklad: Pro většinu „rozumných“ funkcí lze záměnu parciálních derivací provést bez nebezpečí. Není ale složité vymyslet funkci, pro niž se smíšené derivace nebudou rovnat. Čtenář sám ověří, že pro funkci dvou proměnných, definovanou

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & |x| < |y| \\ xy, & |x| \ge |y| \end{cases}$$

se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ rovná 1, zatímco $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$.

§2. Parciální derivace a spojitost

Poznámka: Pokud existuje $\partial_l f(a)$, pak $\psi \equiv f(a + tl)$ je spojitá v $t = 0$. Toto tvrzeníčko je jednoduchý výsledek z teorie funkcí jedné proměnné.

Věta 60: Souvislost parciálních derivací a spojitosti
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ nechť existuje okolí bodu a, takové, že ve všech bodech tohoto okolí existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a jsou tam omezené. Pak f je spojitá v a.

Lemma o střední hodnotě pro funkce více proměnných: Nechť existují $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ v $I = \prod\limits_{i=1}^{n} (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$. Pak $\forall x \in I \quad \exists \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)} \in I$ takové, že

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^{(i)})(x_i - a_i).$$

Důkaz lemmatu: Abychom se vyvarovali chaosu ve značení, provedeme pro $n = 2$, i při tomto zjednodušení bude jasně patrné, jak postup zobecnit ve vyšších dimenzích.

$$f(x) - f(a) \equiv f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) + f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi^{(2)})(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi^{(1)}, a_2)(x_1 - a_1)$$

Poslední úprava je aplikace Lagrangeovy věty o střední hodnotě na funkci $\phi(x) \equiv f(x_1, x)$ resp. $f(x, a_2)$, což už je funkce jedné proměnné.

Důkaz věty: Do každého okolí mohu vepsat obdélníček (součin neprázdných intervalů) z lemmatu.

Podle lemmatu a trojúhelníkové nerovnosti

$$|f(x) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^{(i)}) \right| |x_i - a_i|$$

Předpoklady věty říkají, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou v obdélníčku omezené nějakou konstantou C, proto

$$|f(x) - f(a)| \leq C \sum_{i=1}^{n} \leq Cn\|x - a\|$$

odkud už přímo plyne spojitost f v a.

§3. Totální diferenciál

Definice 26: Totální diferenciál
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f má v a totální diferenciál L, pokud existuje *lineární* zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a existují okolí $U(0)$ a zobrazení $\eta : U(0) \mapsto \mathbb{R}^k$ taková, že

1. $\forall h \in U(0) \quad f(a + h) = f(a) + L(h) + \eta(h)$
2. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\eta(h)}{\|h\|} = 0$

Poznámka: Zobrazení $h \mapsto f(a) + L(h)$ (častěji se L značí $\mathrm{d}f(a)$, jeho hodnota $\mathrm{d}f(a)(h)$) je nejlepší lineární aproximace funkce f v bodě a (ve stejném smyslu jako jsou Taylorovy polynomy nejlepšími polynomiálními aproximacemi funkcí jedné proměnné). Je reprezentováno maticí a_{ij} tvaru $n \times k$. Koeficienty této matice nejsou jen tak ledajaká čísla, jak brzy uvidíme.

Věta 61: Totální diferenciál zobrazení
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f \equiv (f_1, f_2, \ldots, f_k)$. Pak

1. $\exists\, \mathrm{d}f(a) \Leftrightarrow \forall i = (1, \ldots, k) \quad \exists\, \mathrm{d}f_i(a)$
2. $\mathrm{d}f(a) = (\,\mathrm{d}f_1(a),\ \mathrm{d}f_2(a), \ldots,\ \mathrm{d}f_k(a))$

Důkaz: Věta plyne přímo z věty o limitním přechodu po složkách a definice totálního diferenciálu.

Věta 62: Souvislost totálního diferenciálu a spojitosti
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť existuje totální diferenciál v a. Potom

1. f je spojitá v a
2. $\mathrm{d}f(a)(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$

Důkaz: Ad 1. Podle definice $f(a + h) - f(a) = df(a)(h) + \eta(h) = \sum \alpha_j h_j + \eta(h)$. Jde-li h k nule, jdou oba členy vpravo k nule a tudíž $f(a + h) \to f(a)$.
Ad 2. Napišme druhou podmínku z definice

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - df(a)(h)}{\|h\|}$$

a interpretujme ji speciálně na $h_t = t\mathbf{e}^{(i)}$[22], tedy ve směru bázových vektorů:

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{|f(a + h_t) - f(a) - df(a)(h_t)|}{\|h\|} = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(a + t\mathbf{e}^{(i)}) - f(a)}{t} - \alpha_i \right|$$

Absolutní hodnoty, které přibyly oproti podmínce, samozřejmě limitní proces v nule neovlivňují. V prvním členu uvnitř poslední absolutní hodnoty poznáváme definici derivace ve směru vektoru $\mathbf{e}^{(i)}$ neboli parciální

[22] $\mathbf{e}^{(i)} = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$

derivaci podle x_i, tedy $\partial f/\partial x_i = \alpha_i$.

Příklad: Spočtěme totální diferenciál $f(x,y) = x^2+y^2$ v bodě $a = (x_0, y_0)$ a ověřme, zda platí vlastnosti z definice.
Totální diferenciál určíme podle předchozí věty $df(a)(h) = 2x_0h_1 + 2y_0h_2$. Platí

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\eta(h)}{||h||} = \lim_{|h|\to 0} \frac{(x_0+h_1)^2 + (y_0+h_2)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0h_1 - 2y_0h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{|h|\to 0} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0,$$

přesně jak jsme očekávali.

Příklad: Lze samozřejmě vymyslet řadu příkladů funkcí, které v nějakém bodě totální diferenciál nemají, ačkoliv mají spojité parciální derivace podle všech proměnných[23]. Například funkce f definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \geq x \\ y, & x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \leq x \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

je všude kromě prvního kvadrantu nulová a v prvním kvadrantu vytváří symetrickou stříšku. Čtenář snadno ověří, že jediný kandidát na totální diferenciál v $(0,0)$ - lineární forma s koeficienty rovnými parciálním derivacím, má zbytek $\eta(x)$ roven funkci samotné. Tento zbytek ale evidentně nesplňuje druhou podmínku z definice, protože například na kladné části přímky $x = y$ je $\lim\limits_{h_1,h_2\to 0} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, zatímco na záporné části téže přímky je stejná limita rovna nule.

Věta 63: Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, nechť v nějakém okolí $U(a)$ existují všechny první parciální derivace a jsou spojité v a.
Pak existuje totální diferenciál $\mathrm{d}f(a)$.

Důkaz: Máme dokázat, že za předpokladů věty platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i}{||h||} = 0$$

Podle věty o střední hodnotě pro funkce více proměnných, která byla dokázána jako lemma, existují taková $\xi^{(i)}$, $||\xi^{(i)}|| \leq ||h||$, že $f(a+h) - f(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^{(i)})h_i$. Absolutní hodnotu výrazu uvnitř limity můžeme tedy s pomocí tohoto a trojúhelníkové nerovnosti odhadnout

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i}{||h||} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\xi^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| \frac{|h_i|}{||h||} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\xi^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|$$

Poslední výraz jde díky spojitosti derivací k nule a věta je tím dokázána.

§4. Totální diferenciál složeného zobrazení

Věta 64: Totální diferenciál složeného zobrazení
Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ Nechť v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ existuje $\mathrm{d}g(a)$ a nechť v bodě $b = g(a) \in \mathbb{R}^k$

[23] Pozorný čtenář se jistě nenechal oklamat a ptá se, zda stačí existence derivací ve všech směrech. Ne: berme např. funkci všude nulovou, jen na $(x,0)$ definovanou jako $f(x,y) = x$.

existuje $\mathrm{d}f(g(a))$.
Pak existuje $\mathrm{d}(f\circ g)(a) = \mathrm{d}f(g(a))\circ \mathrm{d}g(a)$ a navíc

$$\frac{\partial f\circ g}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_j}(g(a))\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a).$$

Lemma : Nechť $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení, $L_i(h)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ij}h_j$. Pak L je spojité a $\exists C\in\mathbb{R}\quad \forall h\in\mathbb{R}\quad \|L(h)\|\le C\|h\|$

Důkaz lemmatu: Spojitost L je zcela zřejmá, druhé tvrzení dokážeme pomocí jednoduchých odhadů:

$$\|L(h)\|\le\sum_{i=1}^{k}|L_i(h)| = \sum_{i=1}^{k}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}h_j\right|\le\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\|h\| = C\|h\|.$$

Poznámka: Tvrzení o spojitosti lineárních zobrazení platí pouze v konečné dimenzi.

Důkaz věty: Nejprve napíšeme, co znamená fakt, že funkce má diferenciál:

$$\exists\ \mathrm{d}g(a)\Rightarrow\exists\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k \text{ spojitá},\quad \varphi(0)=0\quad g(a+h)-g(h) = \mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\|h\|$$

$$\exists\ \mathrm{d}f(g(a))\Rightarrow\exists\psi:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R} \text{ spojitá},\quad \psi(0)=0\quad f(g(a)+l)-f(g(a)) = \mathrm{d}f(g(a))(l)+\psi(l)\|l\|$$

Chceme dokázat obdobnou vlastnost pro diferenciál složené funkce, tedy dospět k

$$\lim_{h\to0}\frac{|f(g(a+h))-f(g(a))-\ \mathrm{d}f(g(a))[\ \mathrm{d}(g(a)(h))]|}{\|h\|}=0$$

Rozepišme tedy rozdíl složené funkce pomocí funkce $\psi(x)$:

$$f(g(a+h))-f(g(a)) = \mathrm{d}f(g(a))[g(a+h)-g(a)]+\psi(g(a+h)-g(a))\|g(a+h)-g(a)\|$$

Úlohu l zde hraje výraz $g(a+h)-g(a)$ Podobně můžeme rozepsat i tento výraz pomocí funkce $\varphi(h)$:

$$\mathrm{d}f(g(a))[\ \mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\|h\|]+\psi\,[(\ \mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\|h\|]\cdot\|dg(a)(h)+\varphi(h)\|h\|\|$$

Totální diferenciál je lineární forma, tudíž tento výraz lze upravit na

$$\mathrm{d}f(g(a))[\ \mathrm{d}g(a)(h)]+\|h\|\ \mathrm{d}f(g(a))[\varphi(h)]+\psi\,[(\ \mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\|h\|]\cdot\|\ \mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\|h\|\|$$

Teď už stačí, aby

$$\lim_{h\to0}\frac{\|h\|\,|\ \mathrm{d}f(g(a))[\varphi(h)]|+|\psi(\ \mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\,\|h\|)\cdot(\|\ \mathrm{d}g(a)(h)\|+\|\varphi(h)\|\,\|h\|)|}{\|h\|}=0$$

První výraz ve jmenovateli má i po vydělení $\|h\|$ limitu nulovou, protože $\varphi(0)=0$ a také $\mathrm{d}f(g(a))(0)=0$. Druhý sčítanec je tvořen dvěma činiteli. První má limitu nula, druhý je opět tvořen součtem dvou sčítanců $\|\ \mathrm{d}g(a)(h)\|$ a $\|\varphi(h)\|\|h\|$. První výraz je podle lemmatu omezen $C\|h\|$, druhý jde do nuly i po vydělení $\|h\|$. Celý součin jde tedy také do nuly i po vydělení $\|h\|$ a limita celého zlomku je skutečně rovna nule.
Druhá část věty je už jen přepisem totálních diferenciálů pomocí parciálních derivací:

$$\mathrm{d}f(g(a))(l)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_j}(g(a))l_j,\qquad \mathrm{d}g(a)(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)h_i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{d}f(g(a))(\ \mathrm{d}g(a)(h))=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)h_i.$$

Poznámka: Skládání diferenciálů (jakožto speciálních lineárních zobrazení) mohu formálně chápat jako násobení tzv. Jacobiho matic[24], jejichž členy jsou jednotlivé složky prvních parciálních derivací. Zobrazení $\mathrm{d}f$ je reprezentováno maticí $(\partial f_i/\partial y_j)$, zobrazení $\mathrm{d}g$ maticí $(\partial g_j/\partial x_m)$.

Věta 65: Souvislost derivace ve směru a parciálních derivací
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v a totální diferenciál. Nechť $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je vektor jednotkové velikosti. Pak

$$\partial_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i.$$

Důkaz: Podle definice totálního diferenciálu platí, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \right|}{||h||} = 0$$

Omezíme-li se na h tvaru $t\mathbf{v}$, toto tvrzení bude i nadále pravdivé, a pomocí symbolu $o(x)$ ho můžeme přepsat na

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{t\,||\mathbf{v}||} = \frac{1}{t\,||\mathbf{v}||} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) t v_i + o(t\,||\mathbf{v}||)$$

Limitním přechodem odtud dostaneme tvrzení věty.

Definice 27: Gradient funkce
Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

se nazývá gradient funkce f v bodě a a značí se $\nabla f(a)$. Tento zápis lze chápat tak, že skalár $f(a)$ násobíme formálním vektorem

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

K čemu je dobrý gradient, ukáží následující dvě poznámky:
Poznámka: Jak plyne z předchozí věty, derivaci ve směru $\mathbf{v}$ lze psát pomocí skalárního součinu s gradientem jako $|\nabla f(a)| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\phi)$. Tento výraz bude maximální pro $\phi = 0$, tedy tehdy, je-li gradient rovnoběžný s $\mathbf{v}$. Gradient tudíž udává směr maximálního růstu funkce v daném bodě a.

Poznámka: Je-li f funkce, u níž lze zavést vrstevnice (křivky, podél nichž platí $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$) a parametrizovat je diferencovatelnými funkcemi $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, pak je gradient na tyto vrstevnice kolmý. To nejlépe ukážeme zderivováním rovnice $f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = C$ podle parametru t. Jsou-li splněny předpoklady věty o derivování složené funkce, dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\dot{x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\dot{x_n} = 0.$$

Vektor $(\dot{x_1}, \dot{x_2}, \dots, \dot{x_n})$ je tečný k vrstevnici v každém jejím bodě, získaná podmínka říká, že tento vektor je kolmý ke gradientu.

§5. Diferenciály vyšších řádů

Definice 28: Existence totálního diferenciálu
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál k-tého řádu, jestliže všechny k-té

[24] S těmito maticemi se ještě vbrzku setkáme.

(i smíšené) derivace mají v a diferenciál prvního řádu. Značíme jej $\mathrm{d}^{(k)} f(a)(h^1, h^2, \dots h^n)$.

Věta 66: Existence totálního diferenciálu k-tého řádu, postačující podmínka
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má na okolí $U(a) \in \mathbb{R}^n$ spojité všechny k-té derivace. Pak f má v a diferenciál k-tého řádu.

Důkaz: Provedeme pro $k = 2$. Označme $g_i(x) \equiv \partial f / \partial i(x)$, pak $\forall j$ jsou $\partial g_i / \partial x_j$ spojité v a, a tudíž všechny g_i mají v a diferenciál prvního řádu.

Definice 29: Totální diferenciál
Totálním diferenciálem funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ řádu k v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ rozumíme k-lineární formu danou předpisem

$$\mathrm{d}^{(k)} f(a)(h^1, h^2, \dots, h^n) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h^1_{i_1} h^2_{i_2} \dots h^k_{i_k}.$$

Poznámka: Pozor. Vyšší diferenciály jsou multilineární formy, tedy jednotlivé vektory $h^1, h^2, \dots, h^n$ jsou vzájemně nezávislé. V dalším paragrafu o Taylorově rozvoji budeme pokládat $h = h^1 = h^2 = \dots = h^n$, takže tam už půjde o formu kvadratickou, kubickou apod.

Poznámka: Pro matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

vyčíslenou v bodě a se někdy užívá názvu hessián a označuje se $Hf(a)$.

Poznámka: Čtenář si možná všiml logického skoku mezi definicí existence totálního diferenciálu a definicí totálního diferenciálu samotného. Bylo by korektní nějak ověřit, zda tyto dvě definice nejsou v rozporu. My toto ověření provádět nebudeme, lze ho nalézt v Jarníkově Diferenciálním počtu II. Podobně diskusi, kdy lze zaměňovat pořadí parciálního derivování podle různých proměnných, ponecháme zájemcům k nastudování z jiných zdrojů.

§6. Taylorovy řady

Definice 30: Konvexní množina
Konvexní kombinací dvou vektorů x a y rozumíme vektor $\lambda x + (1 - \lambda) y$ pro $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ [25]. Konvexní množina je pak taková množina, která s každými svými dvěma body obsahuje i všechny jejich konvexní kombinace.

Věta 67: O střední hodnotě funkce více proměnných, jinak
Nechť B je otevřená[26] konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$ a nechť $f : B \to \mathbb{R}$ má na B spojité první derivace. Pak $\forall a, b \in B \quad \exists t \in (0,1) \quad f(a) - f(b) = \sum_{i=1}^{n} \partial f / \partial x_i (a + t(b-a))(b_i - a_i)$.

Důkaz: Definujme funkci $F(t) \equiv f(a + t(b - a))$. Z pravidel o derivování složené funkce plyne, že pokud má f spojité derivace na B, má F spojitou derivaci na $\langle 0, 1 \rangle$. Můžeme tedy aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě, podle níž existuje t_0, že $F(1) - F(0) = F'(t_0)$. Dosadíme-li sem za $F(t)$ zpátky $f(a + t(b - a))$ a aplikujeme-li větu o derivaci složené funkce, získáváme

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b - a))(b_i - a_i).$$

[25] Jedná se o body na úsečce spojující x a y

[26] Připomeňme, že otevřená množina je taková množina, která s každým svým bodem obsahuje i nějaké jeho okolí.

Poznámka: Má-li f na otevřené konvexní B nulové parciální derivace, je na B konstantní.

Věta 68: Taylorův rozvoj
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace řádu $k+1$ v nějaké otevřené množině G. Nechť $a, h \in \mathbb{R}^n$ taková, že $\forall t \in \langle 0,1\rangle \quad a+th \in G$. Pak existuje $\tau \in (0,1)$ takové, že

$$f(a+h) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\ \mathrm{d}^{(i)} f(a)(h,h,\ldots,h) + \frac{1}{(k+1)!}\ \mathrm{d}^{(k+1)} f(a+\tau h)(h,h,\ldots,h).$$

Důkaz: Zaveďme opět funkci $F(t)$ podobně jako v předchozí větě ($a+h \equiv b$). Z existence $(k+1)$. derivací funkce f plyne existence $(k+1)$. derivace funkce F. Podle věty o Taylorově rozvoji funkce jedné proměnné platí

$$F(1) = \sum_{i=1}^{k} \frac{F^{(i)}(0)}{i!} + \frac{F^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}$$

Nyní sem postupně dosaďme:

$$F(1) = f(a+h) \qquad F(0) = f(0)$$

$$[F'(t)]_{t=0} = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a) h_{i_1} = \ \mathrm{d} f(a)(h)$$

$$[F''(t)]_{t=0} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a) h_{i_1} h_{i_2} = \ \mathrm{d}^{(2)} f(a)(h,h)$$

$$\vdots$$

$$[F^{(k)}(t)]_{t=0} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k} = \ \mathrm{d}^{(k)} f(a)(h,h,\ldots,h)$$

Tím je důkaz proveden.

§7. Potenciál vektorového pole

Definice 31: Potenciál
Nechť $T = (T_1, T_2, \ldots T_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce (pole) a nechť $B \subset \mathbb{R}^n$ je množina. Existuje-li funkce $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s vlastností

$$T_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad \forall x \in B \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

nazveme ji potenciálem vektorového pole T.

Poznámka: Je-li B otevřená a konvexní množina, pak je k T potenciál určen až na konstantu. Uvažujme dva potenciály U_1 a U_2 a jejich rozdíl $G = U_1 - U_2$. Pak pro všechna i platí $\frac{\partial G}{\partial x_i} = 0$ a podle Lagrangeovy věty je tedy G konstantní na B.

Poznámka: Proč zavádíme potenciál? Často se v praxi setkáváme s diferenciálními rovnicemi tvaru $T_1(x,y)\dot{x} + T_2(x,y)\dot{y} = 0$. Pokud bychom znali potenciál U funkce $T = (T_1, T_2)$ nebo dokázali rovnici přenásobit nějakou funkcí μ tak, aby funkce μT měla potenciál, měli bychom vyhráno, neboť

$$0 = T_1(x,y)\dot{x} + T_2(x,y)\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} = \frac{dU}{dt} \Leftrightarrow U(x,y) = C.$$

Poznámka: Ve fyzice se obvykle pro proměnné v totálním diferenciálu nepoužívá značení $h^1, h^2, \ldots h^n$, běžnější je $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ apod., například

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\ \mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\ \mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\ \mathrm{d}z.$$

Věta 69: Nutná podmínka existence potenciálu
Nechť je U je potenciál k T na nějaké množině $B \subset \mathbb{R}^n$, spojitě diferencovatelný do druhého řádu. Pak platí $\partial T_i/\partial x_j = \partial T_j/\partial x_i$[27].

Důkaz: Plyne ihned z věty o záměně smíšených derivací:

$$\text{Je-li } T_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ a } \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i}.$$

Poznámka: Takto vyslovená „nutná podmínka“ pro existenci potenciálu U je poměrně slabá, neboť požaduje existenci druhých derivací U, tj. prvních derivací T. Ve fyzice se ovšem často setkáváme s případy, kdy tyto derivace neexistují (např. elektrické pole homogenně nabité koule). Vektorová pole[28], jejichž potenciál nemá druhé derivace, tedy nejsou nijak „neobvyklá“, a tedy pokud není splněna uvedená „nutná“ podmínka, mnoho jsme ve skutečnosti nezjistili.

Lemma : Nechť f je spojitá v $J = (\alpha, \beta) \times \langle A, B \rangle$, kde meze A, B jsou konečné.
Pak $F(x) = \int_A^B f(x,y)\ \mathrm{d}y$ je spojitá v (α, β).

Důkaz: $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_A^B [f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)]\ \mathrm{d}y$.
Zvolíme $h_0 > |h|$ kladné takové, že $\langle x_0 - h_0, x_0 + h_0 \rangle \subset (\alpha, \beta)$ Na intervalu $\langle x_0 - h_0, x_0 + h_0 \rangle \times \langle A, B \rangle$ je funkce f spojitá a stejnoměrně spojitá, protože se jedná o uzavřený interval. Integrand tedy můžeme odhadnout nějakým univerzálním ε a celý integrál je menší než $\varepsilon(B - A)$, odtud F je spojitá.

Věta 70: Postačující podmínka pro existenci potenciálu
Nechť $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ je pole a nechť všechny složky mají spojité parciální derivace v otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}^n$, které splňují podmínku $\partial T_i/\partial x_j = \partial T_j/\partial x_i$ pro všechna i, j. Pak T má potenciál.

Důkaz: Provedeme pro $n = 2$ a bude trochu trikový. Nechť $a, b \in J \subset \mathbb{R}^2$. Definujme

$$U(x,y) = \int_a^x T_1(\xi, b)\ \mathrm{d}\xi + \int_b^y T_2(x, \eta)\ \mathrm{d}\eta$$

Dokážeme o U, že je potenciálem (T_1, T_2). Podle pravidla o derivování podle proměnné v integrační mezi dostáváme

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = T_2(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = T_1(x,b) + \int_b^y \frac{\partial T_2}{\partial x}(x,\eta)\ \mathrm{d}\eta$$

Integrál upravíme v souladu s podmínkou $\partial T_1/\partial y = \partial T_2/\partial x$:

$$T_1(x,b) + \int_b^y \frac{\partial T_1}{\partial y}(x,\eta)\ \mathrm{d}\eta = T_1(x,b) + T_1(x,y) - T_1(x,b) = T_1(x,y)$$

Tedy U je potenciálem T.

Definice 32: Integrační faktor
Funkci $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme integračním faktorem funkce T, jestliže $\tilde{T} \equiv \mu T$ má potenciál.

[27] Ve třech rozměrech to znamená, že rotace vektorového pole T $(\nabla \times T)$ je nulová.
[28] Pojmem skalární, resp. vektorové pole rozumějme zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

§8. Věta o implicitních funkcích

Poznámka: Existuje mnoho způsobů jak zadat funkci:
Nejpřímější cesta je tabulka hodnot, čili výčet. K obtížím ovšem dojde hned, jakmile je definiční obor funkce nekonečná množina.
Jiná možnost je zadat předpis, jak k danému x spočíst $f(x)$. Tento způsob je velmi pohodlný, ovšem ne vždy lze zadanou funkci takto vyjádřit pomocí běžných funkcí (logaritmus, goniometrické atd.).
Můžeme ale také říci, že funkce f je množina všech uspořádaných dvojic $(x,y) \equiv (x, f(x))$, které splňují například rovnost $F(x,y) = 0$. Je-li $F(x,y)$ funkce dvou proměnných, zdaleka z toho ovšem ještě neplyne, že f je funkce. Nejprve se tedy budeme zajímat o to, jaké požadavky je nutno klást na F, aby f funkce byla, přinejmenším lokálně, tj. v okolí zadaného bodu x.

Příklad: Položme $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Víme, že množina $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; F(x,y) = 0\}$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1, tedy globálně to funkce není. Z rovnice $F(x,y) = 0$ můžeme ovšem y „vypočítat“: $y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Pokud zvolíme libovolný bod (x_0, y_0) množiny K různý od $(\pm 1, 0)$, bude tento předpis pro $y(x)$ (když zvolíme správné znaménko, podle znaménka y_0) skutečně udávat funkci, která se bude shodovat s K alespoň na malém okolí bodu (x_0, y_0). V bodech $(\pm 1, 0)$ zřejmě taková funkce $y(x)$ neexistuje na žádném jejich (oboustranném) okolí. Zde ale můžeme vyjádřit funkci $x(y)$.
Celkově tedy vidíme, že v případě této funkce $F(x,y)$ můžeme v každém bodě K lokálně vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé.

Příklad: Berme $F(x,y) = x^2 - y^2$. Grafem G této množiny je sjednocení přímek $y = x$ a $y = -x$. Snadno zjistíme, že ve všech bodech G kromě $(0,0)$ lze lokálně vyjádřit $y = y(x)$ i $x = x(y)$ (právě pomocí rovnic $y = x$, resp. $y = -x$). V bodě $(0,0)$ neuspějeme ani v jednom případě.

Naším cílem bude nyní vyslovit kritérium pro funkce postačující k tomu, aby bylo možno z množiny $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ vyjádřit y jako funkci zbylých proměnných $x_1, \dots, x_n$.
Lemma : Nechť $F(x_1, \dots, x_n, y)$ je funkce $n+1$ reálných proměnných spojitá na okolí bodu $(x^0, y^0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Buď $F(x^0, y^0) = 0$ a předpokládejme, že $\exists U(x^0, y^0) = U(x^0) \times U(y^0)$ takové, že $\forall \bar{x} \in U(x^0)$ je funkce $F(\bar{x}, y)$ ryze monotónní funkcí y na $U(y^0)$. Potom

1. $\exists U'(x^0, y^0) = U'(x^0) \times U'(y^0)$ takové, že $\forall x \in U'(x^0) \exists! y \in U'(y^0) : F(x,y) = 0$; na $U'(x^0, y^0)$ je tedy podmínkou $F(x,y) = 0$ definována funkce $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, y : x \mapsto y, F(x,y) = 0$ a
2. funkce $y(x)$ je spojitá na $U'(x_0)$.

Poznámka: Názornou představu si lze udělat pro $n = 1$, tj. funkci $F(x,y)$. Protože funkce $f(y) \equiv F(x^0, y)$ má pro $y = y^0$ hodnotu nula a je např. rostoucí na nějakém $U(y^0)$, musí být „kousek pod“ bodem (x^0, y^0) (např. v $(x^0, y^0 - \varepsilon), \varepsilon > 0$) záporná a „kousek nad“ ním kladná (v $(x^0, y^0 + \varepsilon)$). Ze spojitosti F usoudíme, že $F(x, y^0 + \varepsilon)$ musí být kladná nejen v $x = x^0$, ale i na nějakém okolí $U'(x^0)$, podobně pro záporné hodnoty. Všechny funkce $f_x(y) \equiv F(x,y), x \in U'(x^0)$ jsou tedy rostoucí a $f_x(y^0 - \varepsilon) < 0, f_x(y^0 + \varepsilon) > 0$. Z toho ovšem plyne, že pro každá tato funkce má právě jeden nulový bod (Darbouxova věta). Formální důkaz prvního tvrzení je nyní již jednoduchý.

Důkaz: Buď $F(x^0, y)$ například rostoucí. Potom $\exists \varepsilon > 0 : F(x^0, y + \varepsilon) > 0, F(x^0, y - \varepsilon) < 0$ (volíme ε dostatečně malé tak, aby oba tyto body ležely v $U(x^0, y^0)$). Dále protože F je spojitá na $U(x^0, y^0)$, tak $\exists U'(x^0) \subset U(x^0); \forall x \in U'(x^0) : F(x, y + \varepsilon) > 0, F(x, y - \varepsilon) < 0$. Funkce $f_x(y) = F(x,y), x \in U'(x^0)$ definované na $U'(y^0) \equiv (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ jsou dle předpokladu monotónní, a tudíž dle právě ukázaného rostoucí. Protože jsou všechny spojité, mají na svém definičním oboru $(U'(y^0))$ dle Darbouxovy věty právě jeden nulový bod. Tvrzení 1 tedy platí na $U'(x^0) \times U'(y^0)$.
Pro důkaz spojitosti $y(x)$ v $\bar{x}$ zopakujeme naznačený postup ještě jednou:

$$\forall \varepsilon > 0 : F(\bar{x}, y(\bar{x}) + \varepsilon) > 0, F(\bar{x}, y(\bar{x}) - \varepsilon) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0; \forall x \in U_\delta(\bar{x}) : F(x, y(\bar{x}) + \varepsilon) > 0, F(x, y(\bar{x}) - \varepsilon) < 0.$$

Z toho ovšem plyne, že $\forall x \in U_\delta(\bar{x})$ leží $y(x)$, pro něž $F(x, y(x)) = 0$, v intervalu $U_\varepsilon(y(\bar{x}))$, což bylo dokázat.

Ověřovat samotnou monotonii může být poměrně pracné, proto vyslovíme poněkud méně obecnou, leč velmi praktickou větu.

Věta 71: O implicitně zadané funkci (postačující podmínka)
Nechť $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ je spojitá na okolí $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Nechť platí

1. $F(x^0, y^0) = 0$,
2. existuje spojitá $\frac{\partial F}{\partial y}$ na okolí bodu (x^0, y^0) a
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U'(x^0, y^0)$, na němž podmínka $F(x, y) = 0$ určuje spojitou funkci $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$.

Důkaz: Dokazované tvrzení je shodné s tvrzením lemmatu, stačí tedy ukázat, že z předpokladů věty plynou předpoklady lemmatu. To je však snadné: je-li derivace $\partial F/\partial y$ nenulová v (x^0, y^0), plyne z její spojitosti, že je nenulová i na určitém okolí tohoto bodu U''. Pokud je například stále kladná (proč nemůže být někde kladná a někde záporná?), znamená to, že pro konstantní x je funkce $F(x, y)$ rostoucí (dbáme-li, aby $(x, y) \in U''$).

Příklad: U funkce $x^2 + y^2 - 1$ (resp. $x^2 - y^2$) se snadno přesvědčíme, že předpoklady právě dokázané věty jsou splněny ve všech bodech (resp. jsou splněny všude mimo $(0, 0)$).

Věta 72: Derivace implicitní funkce
Nechť $F(x, y)$ splňuje v $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ předpoklady předchozí věty a nechť má navíc spojité všechny parciální derivace (i smíšené) až do řádu k na $U(x^0, y^0)$. Potom i funkce $y = y(x)$ má na svém definičním oboru spojité všechny parciální derivace až do řádu k.

Důkaz: Budeme samozřejmě postupovat indukcí podle k. Klíčový bude důkaz pro první derivaci. Vezměme zřejmou rovnost $F(x, y(x)) = 0$ a derivujme ji podle x_i. Předpokládáme-li[29], že v (x^0, y^0) existuje derivace $\partial y/\partial x_i$, můžeme použít větu o derivaci složeného zobrazení:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}.$$

Stejným způsobem bychom dostali i vztahy pro libovolné vyšší derivace (nechť čtenář vyzkouší sám).

Poznámka (nepovinná): Existenci derivace je ovšem třeba dokázat. Víme, že na určitém okolí (x^0, y^0) platí $F(x, y(x)) = 0$, což můžeme také zapsat jako

$$0 = F(x^0 + te^i, y(x^0 + te^i)) - F(x^0, y(x^0)), e^i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots), \text{ tj. } e^i_j = \delta_{ij}, t \in U(0).$$

Předpoklady zaručují existenci totálního diferenciálu F na okolí (x^0, y^0), tedy tento fakt můžeme také zapsat

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x^0, y(x^0))\delta_{ij}t + \frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)\left(y(x^0 + te^i) - y(x^0)\right) + \xi(x^0 + te^i, y(x^0 + te^i)),$$

kde ξ je zbytek velikosti $o(t)$[30]. Nyní již určíme vztah pro $\partial y/\partial x_i$:

$$\frac{-1}{\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0, y(x^0)) - \frac{\xi(x^0 + te^i, y(x^0 + te^i))}{t}\right) = \frac{y(x^0 + te^i) - y(x^0) + \xi(x^0 + te^i, y(x^0 + te^i))}{t};$$

stačí zkoumat limitu této rovnosti pro $t \to 0$.
Tuto úvahu bychom mohli provést nejen v bodě $(x^0, y(x^0))$, ale i v libovolném bodě $U(x^0, y^0)$ — dle

[29] Viz poznámka.
[30] Přesněji řečeno $o(||\eta||)$, kde $\eta = (0, \ldots, t, \ldots, 0, y(x^0 + te^i) - y(x^0))$.

předpokladů věty bychom pak zjistili, že na tomto okolí existují všude parciální derivace. Potom bychom stejným způsobem ukázali, že na $U(x^0, y^0)$ existují i všechny druhé parciální derivace, z čehož plyne spojitost prvních derivací. Tím pádem existuje totální diferenciál funkce y v x^0 (věta (63)) a lze použít větu o derivaci složeného zobrazení (64).

Cvičení: Ověřte, že pro

$$F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

je předpisem $F(x,y) = 0$ v bodě $(1,0)$ určená funkce $y = y(x)$.

Příklad: Spočtěme derivaci y' v $x = 1$ u funkce z předchozího cvičení.
Ve cvičení jsme zjistili, že $\partial F/\partial y(1,0) = -1$, tedy

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)} = \partial F/\partial x(1,0) = 1.$$

Poznámka: Explicitní předpis pro funkci y bychom hledali těžko. Pokud by vás přesto zajímal graf množiny $F(x,y)$, zkuste přejít do polárních souřadnic. Tak také snadno ověříte přinejmenším správnost znaménka vypočtené derivace.

Pro zobecnění věty o implicitní funkci budeme potřebovat zavést následující pojem: **Definice 33: Jacobiho determinant**
Nechť funkce $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n + m \to \mathbb{R}^n$ má všechny parciální derivace v bodě $x \in \mathbb{R}^{n+m}$. Potom definujeme Jacobiho determinant (jakobián)

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \equiv \det\left(\frac{\partial F_i(x)}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^n = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1(x)}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Věta 73: O implicitním zobrazení (postačující podmínka)
Nechť funkce $F = (F_1, \ldots, F_p) : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ má spojité parciální derivace na okolí bodu $(x^0, y^0) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^{n+p}$. Nechť dále $F(x^0, y^0) = 0$. Nechť

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_p)}{\partial(y_1,\ldots,y_p)}(x^0,y^0) \neq 0.$$

Pak

1. existují okolí $U(x^0), V(y^0)$ tak, že $\forall x \in U(x^0) \exists! y \in V(y^0) : F(x,y) = 0$, tedy podmínka $F(x,y) = 0$ na $U \times V$ definuje funkci $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, x \mapsto y(x)$,
2. tato funkce $y(x)$ má na U spojité parciální derivace a
3. pokud navíc F má spojité parciální derivace až do řádu k, platí totéž i pro y.

Důkaz: Se provádí indukcí dle p. Pro $p = 1$ je tvrzení věty zaručeno již dokázanými větami (o implicitní funkci). Indukční krok ponecháme bez důkazu s odvoláním na Jarníkův Diferenciální počet.

Poznámka: Použití determinantu lze vysvětlit zhruba takto: pro malé vektory Δx zhruba platí

$$\mathrm{d}F(a^0)(\Delta a) = F(a^0 + \Delta a) - F(a^0),\ \Delta a, a^0 \in \mathbb{R}^{n+p}.$$

Bereme-li $\Delta a = (0, \ldots, 0, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_p)$, představuje tato rovnost p rovnic (neboť F má p složek) o p neznámých Δy_i. Tyto neznámé chceme ze soustavy vypočítat — získáme tím určitý vztah pro y_i. Jednoznačné řešení (a o to nám jde — cheme, aby y_i byly funkce) však existuje pouze pokud jsou tyto rovnice nezávislé, což zaručí nenulový jakobián v a^0 (jelikož je jakobián spojitý v a^0, musí být nenulový také v určitém okolí a^0).

Poznámka: Samozřejmě není nutné, aby proměnné, jimž odpovídající jakobián je nenulový, byly seřazeny „na konci". Pokud pro $F(x_1, \ldots, x_{n+p}) = (F_1, \ldots, F_p)$ existují indexy $i_1, \ldots, i_p$, pro něž je

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_p)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})}(a^0) \neq 0,$$

lze vyjádřit $x_{i_j}, j = 1, \ldots, p$ jako funkce ostatních proměnných, aniž by to nezbytně musely být zrovna $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}$.

§9. Věta o inverzním zobrazení

Poznámka: U funkcí jedné reálné proměnné jsme zjistili, že pro existenci inverzní funkce k f (tedy aby f bylo prosté) na nějakém okolí bodu x_0 stačí, aby $f'(x_0) \neq 0$. Nepřekvapí nás proto následující tvrzení pro funkce n reálných proměnných.

Věta 74: O inverzním zobrazení
Nechť $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité diferencovatelné v x_0[31]. Nechť

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x^0) \neq 0.$$

Potom

1. $\exists U'(x^0)$ takové, že F je prosté na $U'(x^0)$,
2. $F(U'(x^0))$ je otevřená množina
3. označíme-li $G \equiv F^{-1}$ na $F(U'(x^0))$, pak G má spojité parciální derivace na $F'(U'(x^0))$,
4. na $U'(x^0)$ platí
$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) \cdot \frac{\partial(G_1, \ldots, G_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(F(x)) = 1,$$
5. Má-li F spojité derivace až do řádu k, platí totéž pro G.

Poznámka: Jádrem důkazu bude obecnější věta o implicitním zobrazení, nepřehledné úvahy o různých okolích nejsou to úplně nejdůležitější.

Důkaz: Definujme zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto \Phi(x, y) = y - F(x)$. Je zřejmé, že $\Phi(x, F(x)) \equiv 0$. Z této podmínky bychom chtěli odvodit vztahy pro $x_1, \ldots, x_n$. Budeme se snažit použít větu o implicitním zobrazení. Prověřme, zda jsou splněny její předpoklady.
$\Phi(x^0, F(x^0)) = 0$ je splněno triviálně. Parciální derivace $\Phi(x, y)$ podle x_i jsou rovny $\partial F/\partial x_i$ a zřejmě $\partial F/\partial y_i = 1$, tedy všechny jsou spojité na nějakém okolí $(x^0, F(x^0))$. Konečně platí

$$\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x^0) = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x^0) \neq 0,$$

tedy větu skutečně můžeme použít. Znamená to, že existuje funkce s patřičným počtem spojitých parciálních derivací (jak požadujeme v bodech 3 a 5), která zobrazuje okolí V bodu $F(x^0)$ do $\mathbb{R}^n$ a je inverzní k F.
Toto bohužel ještě neurčuje, zda je F na nějakém okolí x_0 prostá (viz příklad za důkazem). Musíme ještě použít předpoklad spojitosti F: víme, že G (jednoznačně) zobrazuje okolí $V(F(x^0))$ do okolí bodu x^0 (neboť G je spojitá); jistě existuje okolí $W(x^0)$ takové, že $F(W(x^0)) \subset V(F(x^0))$. Předpokládejme, že

[31] Tím máme na mysli existenci a spojitost všech parciálních derivací na nějakém okolí x^0, z čehož plyne existence totálního diferenciálu.

dva prvky $x^1, x^2 \in W(x^0)$ budou mít stejné obrazy $F(x^1) = F(x^2) \in V(F(x^0))$. Na tomto okolí je však F^{-1} funkce, a tedy $x^1 = x^2$. Uvědomme si také, že F zobrazuje každé okolí $W(x^0)$ *na* množinu obsahující nějaké okolí $F(x^0)$ (podobný postup — každý prvek $V(F(x^0))$ se v G zobrazí *do* nějakého okolí $X(x^0)$[32]; potom ale $F(X(x^0))$ obsahuje okolí V bodu $F(x^0)$).
Nyní k tvrzení 2. Budiž $y \in F(W(x^0))$, tedy $G(y) \in W(x^0)$. V $W(x^0)$ existuje okolí $Y(G(y))$, neboť W je otevřená množina. Potom ale $Z = F(Y(G(y)))$ je podmnožinou $F(W(x^0))$. Z přitom zřejmě obsahuje bod y a obsahuje nějaké okolí tohoto bodu (poslední věta předcházejícího odstavce).
Poslední zatím neprobraný bod je 4. Ukážeme dokonce, jak vypočíst derivace G. Na $W(x^0)$ platí pro každé x rovnost $G_j(F(x)) = x_j$; tu můžeme derivovat podle x_i (za využití věty o derivaci složeného zobrazení):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_j(F(x))}{\partial y_k} \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i} = \delta_{ij}.$$

Stačí si pouze uvědomit, že tento zápis odpovídá součinu matic

$$\left\{ \frac{\partial G_i(F(x))}{\partial y_k} \right\}_{i,k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_j} \right\}_{k,j=1}^{n} = \{\delta_{ij}\}_{i,j=1}^{n},$$

čili sadě n soustav n rovnic o n neznámých, z nichž lze vypočítat n^2 parciálních derivací $\partial G_i / \partial y_j$. Aplikujeme-li na obě strany této maticové rovnosti determinant a použijeme-li známe rovnosti $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$, získáme tvrzení 4.

Příklad: Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in (-\infty, -1) \\ 1, & x \in \langle -1, 1 \rangle \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \\ -1 + x, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Zvolíme-li okolí bodu $f(0)$ např. s poloměrem $1/2$, najdeme snadno funkci, která každému $f(x) \in (-1/2, 1/2)$ jednoznačně přiřadí x. Přitom f není prostá na žádném okolí nuly. Vidíme, že byl skutečně zapotřebí předpoklad spojitosti f.

Poznámka(důležitá): v důkazu minulé věty byl naznačen způsob, jak počítat derivace inverzního zobrazení. Zkusme najít obecný vztah pro počítání derivací implicitně zadaného zobrazení.
Budiž tedy $F = (F_1, \ldots, F_p) : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$,

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(x^0) \neq 0.$$

Tentokrát použijeme rovnosti $F_i(x, y(x)) = 0$ platné pro $i = 1, \ldots, p$ a každé x z určitého okolí x^0. Derivováním těchto p rovnic podle žádaného x_i získáme soustavu p lineárních rovnic o p neznámých

$$\begin{array}{c} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F_1}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0 \\ \ldots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F_p}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0. \end{array}$$

Vidíme, že determinant této soustavy je právě jakobián, tedy derivace jsou určeny jednoznačně.
Pokud bychom chtěli počítat druhou derivaci, postupovali bychom stejně. Získali bychom opět soustavu $p \times p$, v níž by se ovšem vyskytovaly i kromě $\partial^2 y_k / (\partial x_i \partial x_j)$ i první derivace y_k. Za ty bychom dosadili hodnoty (funkce) spočtené z předchozí soustavy.

Definice 34: Regulární zobrazení

Budiž $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zobrazení, jehož definiční obor je otevřená množina. Řekneme, že F je regulární na

[32] Velikost $X(x^0)$ si můžeme libovolně volit díky spojitosti G.

Ω, pokud má F na této množině spojité parciální derivace a jeho jakobián je všude na Ω nenulový.

Poznámka: Již jsme ukázali, že regulární zobrazení je lokálně prosté. Globálně být prosté nemusí.

Příklad: Významnou část regulárních zobrazení tvoří transformace souřadnic. Zde je požadavek na lokální prostotu pochopitelný.
Vezměme například souřadnice polární v $\mathbb{R}^2$. Transformační vztahy jsou $x = r\sin\varphi,\ y = r\cos\varphi$, jakobián

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos x & -r\sin x \\ \sin x & r\cos x \end{vmatrix} = r^2$$

je nenulový pro $r \neq 0$. To odpovídá našim zkušenostem — všechny souřadnice $(0,\varphi)$ skutečně popisují jediný bod. Také víme, že body o souřadnicích (r,φ), $(r,\varphi+2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ jsou totožné, a tedy polární souřadnice nejsou globálně jednoznačné (prosté).
Poznamenejme ještě, že mluvíme o křivočarých souřadnicích, pokud křivky $(x_1,y),(x,y_1),x_1,y_1 =$ konst. nejsou přímky a o souřadnicích pravoúhlých (ortogonálních), resp. kosoúhlých, pokud se tyto křivky protínají, resp. neprotínají pod pravými úhly.

Obsah

Matematická analýza II.

Vladimír Souček a kol.