9 Variační počet

§1. Historický úvod

Variační počet můžeme rozdělit, byť je vzniklá hranice neostrá, jak z obsahového, tak z historického hlediska na dvě části: klasický a abstraktní.

Svým vznikem sahá klasický variační počet až do 17. století. Mezi těmi, kteří se významně podíleli na jeho rozpracování, jmenujme alespoň Leonharda Eulera (1707-1783), Josepha Louise de Lagrangea (1736-1813); zrovna tak je ale možné jmenovat Isaaca Newtona či bratry Bernoulliovy, působící bezmála o sto let dříve.

Základní úloha klasického variačního počtu je analogická problému, který jsme řešili při hledání extrémů funkcí více proměnných. Ve variačním počtu však nehledáme extrém funkce na nějaké otevřené podmnožině $\mathbb{R}^n$, ale extrém funkcionálu, zobrazujícího podmnožinu (ne nutně konečnědimenzionálního) vektorového prostoru (převážně reálných funkcí) do množiny reálných čísel. Řešením tohoto problému je pak funkce, na které nabývá funkcionál svého extrému.

Metody této partie variačního počtu jsou četně užívány analytickou mechanikou. Jeden ze zákonů analytické mechaniky lze zapsat $\delta S = 0$: děj, který se uskuteční, je charakterizován extremální hodnotou akce S. Definice funkcionálu je $S = \int_{t_0}^{t_1} L \, \mathrm{d}t$, kde L je tzv. lagrangeián, definovaný

$$L\big(x, y, z, x'(t), y'(t), z'(t), t\big) = \frac{1}{2} m \big(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)\big) - U(x, y, z, t),$$

kde U je potenciální energie v daném bodě a čase $[x, y, z, t]$. Jiným příkladem je klasická úloha o brachistochroně[1], která v této kapitole bude probrána. Podmínka $\delta S = 0$ nápadně připomíná podmínku pro extrém funkce více reálných proměnných na otevřené množině. Klíčový je znak δ, který bude předmětem našeho dalšího šetření.

Abstraktní variační počet souvisí se jmény Banacha a Hilberta, kteří odhlédli od praktického užití klasického variačního počtu a vhodným zobecněním problémů se zasloužili o rozvoj funkcionální analýzy, jejíž je variační počet v jistém smyslu součástí.

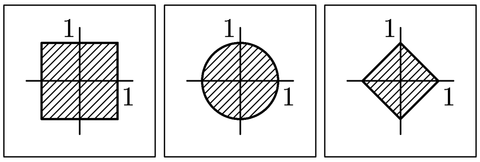
§2. Prostory funkcí: Skalární součin. Norma. Ekvivalence norem. Cauchyovskost a konvergence. Úplnost. Hilbertovy a Banachovy prostory.

Definice 1: Skalární součin
Buď V vektorový prostor nad tělesem reálných (resp. komplexních) čísel. Funkci f nazveme skalárním součinem, pokud f je pozitivně definitní bilineární (resp. sesquilineární) forma na V nad tělesem reálných (resp. komplexních) čísel.

Poznámka: Proveďme podrobně reformulaci definice (1) pro vektorové prostory nad tělesem komplexních čísel. Požadujeme, aby současně

1. f byla funkce s definičním oborem $D(f) = V \times V$ a oborem hodnot $R(f) \subseteq \mathbb{C}$,
2. $(\forall x, y, z \in V)(\forall \alpha, \beta \in C)\big(f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)\big)$ — lineárnost v 1. složce,
3. $(\forall x, y \in V)\left(f(x, y) = \overline{f(y, x)}\right)$ — antilineárnost ve 2. složce,
4. $(\forall x \in V)\big(x \neq 0 \Rightarrow f(x, x) > 0\big)$ — pozitivní definitnost.

[1] Mezi dvěma body A, B pevnými v prostoru máme natáhnout drátek tak, aby korálek vypuštěný z bodu A volně po drátku klouzající dorazil do bodu B za nejkratší možný čas. Předpokládáme, že na korálek působí kromě vazbových sil jen jeho vlastní tíha.



Obr. 1: Okolí bodu $(0,0)$ o poloměru 1 indukovaná normami $||.||_\infty$, $||.||_2$, $||.||_1$.

Podmínky 2. a 3. se někdy souhrnně nazývají sesquilineárnost.

Úmluva: Ve fyzikálních aplikacích bývá zvykem, že funkční hodnota skalárního součinu v bodě $[x,y]$, tj. $f(x,y)$, je označována stručně (x,y) (v kvantové fyzice pak braketovým zápisem) $\langle x|y\rangle$). Zde budeme skalární součin označovat (x,y), popř. $\langle x,y\rangle$.

Definice 2: Norma
Buď X vektorový prostor nad tělesem komplexních čísel. Funkci $||.|| : X \to \mathbb{R}$ nazveme normou na X, pokud platí zároveň

1. $(\forall x \in X)\big((||x|| \geq 0) \wedge (||x|| = 0 \Rightarrow x = 0)\big)$,
2. $(\forall \lambda \in \mathbb{C})(\forall x \in X)(||\lambda x|| = |\lambda|||x||)$ a
3. „trojúhelníková nerovnost“ $(\forall x, y \in X)(||x+y|| \leq ||x|| + ||y||)$.

Příklad: Často se používají tyto normy (závislé na volbě báze v X):

$$\forall x \in X,\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ ||x||_p \stackrel{\text{df}}{=} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ pro dané } p \in \mathbb{R}^*,\ p \geq 1$$

$$p = 1:\ ||x||_1 \stackrel{\text{df}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \tag{1}$$

$$p = 2:\ ||x||_2 \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}, \tag{2}$$

$$p = \infty:\ ||x||_\infty \stackrel{\text{df}}{=} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|. \tag{3}$$

Úkol 1: Dokažte z definice, že tato zobrazení $X \to \mathbb{C}$ jsou normy.

Úkol 2: Dokažte, že $f(x,y) = ||x-y||$ je metrika (definice byla probrána v minulém semestru) pro každou normu $||.||$.

Definice 3: Vektorový normovaný prostor
Uspořádanou dvojici (A, ν) nazveme vektorový normovaný prostor, pokud A je vektorový prostor a ν je norma na A. Obdobně definujeme vektorový prostor se skalárním součinem.

Poznámka: Připomeňme si, že v normovaných prostorech máme pro kladné ε a $a \in X$ pojem okolí definovaný takto: $U_\varepsilon(a) = \{x \in X|\ ||x-a|| < \varepsilon\}$. Tato okolí vypadají ovšem pro různé normy různě. Na obrázcích jsou znázorněna okolí bodu $(0,0)$ v E_2 s poloměrem 1.

Poznámka: Jak je nám známo z minulého ročníku, pomocí okolí je definována též limita, spojitost i konvergence. Zopakujme např. definici limity. Buď (X, ν) vektorový normovaný prostor nad $\mathbb{C}$. Buď $Y \in X$, $y_0 \in X$, $\Phi : X \to X$ a nechť $(\exists U^*(y_0) \subseteq D(\Phi))$. Řekneme, že limita Φ v bodě y_0 je Y, pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big(\forall y \in U_\delta^*(y_0)\big)(\Phi(y) \in U_\varepsilon(Y))$.

Poznámka: Eukleidovský prostor E_n nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ je s spolu se skalárním součinem $(x,y) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i y_j$, kde $\{\alpha_{ij}\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$ je pozitivně definitní matice, skládající se z prvků tělesa $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$, vektorovým prostorem se skalárním součinem. Skalární součin (x, y) generuje normu $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, a proto $(E_n, \|.\|)$ tvoří normovaný vektorový prostor.

Úkol 3: Dokažte, že platí následující tvrzení (o konvergenci po složkách): Nechť pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^m) \in \mathbb{R}^m$ vůči libovolné bázi B v $\mathbb{R}^m$, pak platí: $(\forall j \in \{1, \ldots, m\})$ $(\exists \lim x_i^j) \Leftrightarrow (\exists \lim x_i)$.
Připomenutí: zopakujte si bod 3. v definici normy (2).
Ukažte, že navíc platí: pokud je splněna existence alespoň na jedné staně, pak je

$$\lim(x_i) = (\lim x_i^1, \ldots, \lim x_i^m)$$

Tuto rovnost uvažujeme opět vůči bázi B v $\mathbb{R}^m$.
Takovou větu známe již z minulého ročníku.

P o z n á m k a: Připomeňme, že ve tvrzení o konvergenci po složkách je podstatná konečná dimenze X, ovšem pouze v jednom směru — ve kterém?

Definice 4: Ekvivalence norem
Buď X vektorový prostor, $\|.\|_1, \|.\|_2$ normy na X. Řekneme, že $\|.\|_1$ je ekvivalentní $\|.\|_2$, pokud $(\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in X)(c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1)$. Tuto skutečnost zapíšeme $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$.

P o z n á m k a: Pokud X je vektorový prostor, pak relace $R = \{(\nu_1, \nu_2) | \nu_1, \nu_2$ jsou normy na X a $\nu_1 \sim \nu_2\}$ je relace ekvivalence, neboť:

1. pro reflexivnost stačí v definici výše položit $c_1 = c_2 = 1$,

2. pro symetrii uvážit, že pokud $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$, pak existují příslušná kladná c_1, c_2, aby pro každé $x \in X$ platilo: $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$. Z těchto nerovností plyne: $(1/c_2)\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq (1/c_1)\|x\|_2$, což bylo dokázat.

3. Tranzitivnost odvodíme stručněji: $a \sim b \Rightarrow c_1 a(x) \leq b(x) \leq c_2 a(x)$ a $b \sim c \Rightarrow d_1 b(x) \leq c(x) \leq d_2 b(x)$, proto $c_1 d_1 a(x) \leq c(x) \leq d_2 c_2 a(x)$, což značí $a \sim c$.

Věta 1: Ekvivalence norem na konečnědimenzionálních prostorech
Buď X vektorový prostor nad tělesem T, buď $n \in \mathbb{N}$ a $\dim_T X = n$, pak platí: Je-li a norma na X a b norma na X, pak $a \sim b$.

Důkaz: Na přednášce nebyl proveden. Sporem. Nechť pro každé $c > 0$ existuje $x \in X$, že $a(x) > cb(x)$ (zbylý případ je analogický). Z toho plyne, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje $x_m \in X$, že $a(x_m) > mb(x_m)$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ a příslušná x_m položme $y_m \overset{\text{df}}{=} \frac{x_m}{a(x_m)}$. Platí, že $a(y_m) = a\left(\frac{x_m}{a(x_m)}\right) = \frac{1}{a(x_m)}a(x_m) = 1$, což dle výšeuvedeného značí, že

$$\frac{1}{a(x_m)}a(x_m) > \frac{1}{a(x_m)}mb(x_m) = \frac{1}{a(x_m)}mb(\frac{x_m}{a(x_m)}a(x_m)) = \frac{1}{a(x_m)}ma(x_m)b(\frac{x_m}{a(x_m)}) = mb(y_m),$$

$$\text{tedy } 1 > mb(y_m).$$

Takto odhadneme $b(y_m) < \frac{1}{m}$, a proto $\lim\limits_{m\to\infty} b(y_m) = 0$. Jelikož $\dim X = n$, existuje $\{e_1, ...e_n\} \subseteq X$ báze X, a proto existují pro každé $m \in N$ a každé $i \in \{1, ..., n\}$ čísla $f_i^m \in T$, že $y_m = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i^m e_i$. Z řešení úkolu[2] (3) je zřejmé, že $\lim f_i^m = 0$ pro každé $i \in \{1, ..., n\}$. Z toho (opět pomocí tvrzení úkolu (3), použitého tentokrát v opačném směru a pro jinou normu) plyne, že $\lim a(y_m) = 0$, což je spor s tím, že $a(y_m) = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$.

P o z n á m k a: Dobře si všimněme, kdy jsme v důkazu věty 1 potřebovali, aby prostor X byl konečné dimenze. Ukazuje se, že klíčovou vlastností konečnědimenzionálních prostorů, která zaručuje platnost věty 1, je v tomto důkazu tvrzení o konvergenci po složkách (viz úkol (3)), které pro tyto prostory platí.

Úkol 4: Dokažte, že platí následující tvrzení. Pokud ν, μ jsou ekvivalentní normy na vektorovém prostoru X a platí-li, že $f \to a$ na (X, μ), pak $f \to a$ na (X, ν). Návod: přepište definici konvergence a ukažte, že

[2] Norma, s níž jsme v tomto úkolu počítali byla zcela obecná.

z definice ekvivalence norem plyne, že okolí, zadaná těmito různými ekvivalentími normami, lze do sebe „vpisovat“.

P o z n á m k a : Důsledkem věty (1) a obsahu úkolu (1) je skutečnost, že dokážeme-li konvergenci zobrazení na konečnědimenzionálním prostoru V nad tělesem T vůči normě d, pak můžeme prohlásit platnost této konvergence na prostoru V vůči libovolné normě definované na tomto prostoru, neboť tyto normy jsou ekvivalentní.

P o z n á m k a : Vyhraďme tyto symboly:

$$\mathbb{R}^\infty = \big\{ \{x_i\}_{i=1}^\infty \mid \{x_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R} \big\},$$

$$\ell_2 = \Big\{ \{x_i\}_{i=1}^\infty \mid \Big(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < +\infty \Big) \wedge \big(\{x_i\}_{i=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty \big) \Big\}$$

Pokud zjišťujeme, zda je ℓ_2 vektorový prostor, potřebujeme prozkoumat předně uzavřenost vzhledem ke sčítání (u $\mathbb{R}^\infty$ je toto triviální). Použijeme následující úvahu:

$$\left(\frac{1}{2}(|x_i| - |y_i|)^2 \geq 0 \right) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i||\bar{y_i}| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^\infty |y_i|^2 \right),$$

tedy na ℓ_2 lze definovat také následující skalární součin, který indukuje příslušnou normu:

$$\big(\{x_i\}, \{y_i\} \big) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^\infty |x_i||\bar{y_i}|. \tag{4}$$

Úkol 5: Proveďte důkaz, že ℓ_2 je uzavřený na sčítání (z definice normy indukované tímto skalárním součinem).

Definice 5: Cauchyovská posloupnost
Buď (X, ν) vektorový normovaný prostor. Posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, jejíž obor hodnot je podmnožinou X, nazveme cauchyovskou vůči ν, pokud platí: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq m_0)\big(\nu(x_m - x_n) < \varepsilon\big)$.

Lemma (konvergence implikuje cauchyovskost):
Buď (X, ν) vektorový normovaný prostor nad $\mathbb{C}$, $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ buď posloupnost prvků z X. Pokud x_m konverguje na (X, ν), pak je $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ cauchyovská vůči ν.

Důkaz lemmatu: Limitu x_m označme A. Víme, že $A \in X$. Buď $\varepsilon > 0$; z definice konvergence máme

$$\left(\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \right) (\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0) \left(\nu(x_m - A) < \frac{\varepsilon}{2} \right). \tag{5}$$

Buď $n \geq m_0$, pak opět z konvergence máme:

$$(\forall n \geq m_0) \left(\nu(x_n - A) < \frac{\varepsilon}{2} \right). \tag{6}$$

Pro každé m, n platí, že

$$\nu(x_m - x_n) = \nu(x_m - A - x_n + A) \leq \nu(x_m - A) + \nu(x_n - A), \tag{7}$$

jak plyne z vlastností normy (ověřte, které všechny vlastnosti byly nutné). Pro $m, n > m_0$ pak dosadíme do výrazu (7) výrazy (5,6). Dostaneme: $\nu(x_m - x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, čímž je cauchyovskost dokázána.

P o z n á m k a : Tvrzení obrácené k tvrzení lemmatu tedy neplatí — na X existuje vůči ν cauchyovská posloupnost, která není konvergentní na (X, ν). Sestrojme ji. Uvažme konvergenci na $X = \mathbb{Q}$ (množina všech racionálních čísel) vůči normě posloupnosti definované takto: $\nu(x) = |x|$ pro každé $x \in \mathbb{Q}$. Definujme posloupnost $x_n = [\sqrt{2}.10^n]/10^n$, kde $[x]$ značí tzv. celou část x (číslo x zaokrouhlené dolů). Obor hodnot takto definované posoupnosti je jistě podmnožinou množiny všech racionálních čísel. Lehce ukážete, že

$\{x_n\}$ je cauchyovská. Spočtete-li však její limitu, zjistíte, že je rovna $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (Pamatujete si ještě důkaz z gymnázia?)

Definice 6: Úplný, Banachův a Hilbertův prostor
Buď (X, μ) metrický prostor. Řekneme, že (X, μ) je úplný, pokud každá posloupnost na X, která je vůči μ cauchyovská, je konvergentní v (X, μ) (tj. konverguje k nějakému $a \in X$).
Je-li (X, ν) vektorový normovaný prostor, který je navíc úplný, pak jej nazveme Banachův.
Vektorový prostor se skalárním součinem (X, f), který je úplný, nazveme Hilbertův.

Úmluva: Pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $X = \{f : \Omega \to \mathbb{R} |\ f$ spojitá a omezená na $D(f)\}$ označme $\|f\| = \sup\limits_{x \in \Omega} |f(x)|$.
Pokud $X = \big\{f : \Omega \to \mathbb{R} |\ \big(f \in C^k(\Omega)\big) \wedge (\forall i \in \{1, \ldots, k\})(f^{(i)}$ je omezená na $\Omega)\big\}$, položíme $\|f\|_k = \sum_{|\alpha|=k} \sup |D^\alpha f(x)|$, kde $|\alpha| = k$ značí, že sčítáme přes všechny $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, pro které jest $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, přičemž

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Například

$$\|f\|_2 = \sup_x \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right| + \sup_x \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right| + \sup_x \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \right| + \sup_x \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \right|.$$

P o z n á m k a : $\big(\ell_2,\ (x, y) = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i\big)$ je Hilbertův prostor. Důkaz byl proveden na cvičeních. Pomocí nerovnosti

$$\varepsilon \geq \big\|\{x^{(n)}\} - \{x^{(m)}\}\big\| = \Big(\sum_{i=1}^\infty (x_i^{(n)} - x_i^{(m)})^2\Big)^{1/2} \geq \big|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\big|$$

dokážeme konvergenci cauchyovské posloupnosti $\{x^{(k)}\}$ po složkách (každé $x^{(k)}$ je posloupnost): vybereme libovolné pevné i a $\{x_i^{(j)}\}_{j=1}^\infty$ je pak cauchyovská posloupnost *čísel.* Tuto limitu po složkách označíme $\{X_i\}$. Pak užíváme limitní přechody v nerovnostech; ty můžeme ovšem používat pouze pro posloupnosti čísel a nikoliv posloupností. Provedeme tedy následující obrat: pro libovolnou posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ označíme $\{\widetilde{x}_i\}_{i=1}^N$ „zkrácenou“ posloupnost (členy x_i pro $i > N$ dodefinujeme např. nulami).

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)$$
$$\varepsilon \geq \big\|\{x^{(n)}\} - \{x^{(m)}\}\big\| \geq \big\|\{\widetilde{x}^{(n)}\} - \{\widetilde{x}^{(m)}\}\big\| \overset{m\to\infty}{\geq} \big\|\{\widetilde{x}^{(n)}\} - \{\widetilde{X}\}\big\|$$
$$\varepsilon \geq \big\|\{\widetilde{x}^{(n)}\} - \{\widetilde{X}\}\big\| \overset{N\to\infty}{\Rightarrow} \varepsilon \geq \big\|\{x^{(n)}\} - \{X\}\big\|.$$

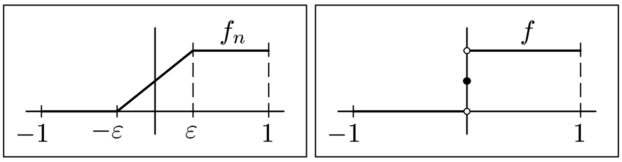
Oba dva limitní přechody jsme tedy prováděli s čísly (norma je pro $\{\widetilde{x}\}$ jen konečný součet) a nikoliv limitami (nekonečnými součty).

P o z n á m k a : Zvažme prostory analogické k ℓ_2 obsahující funkce na intervalu I místo posloupností:

$$X_1 = \Big\{f : I \to \mathbb{R} |(f \text{ spojitá na } \mathbb{R}) \wedge \Big(\int_I f(x)^2 \,\mathrm{d}x < +\infty\Big)\Big\},$$
$$X_2 = \Big\{f : I \to \mathbb{R} \Big| \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \,\mathrm{d}x < +\infty\Big)\Big\}$$
$$\text{se skalárním součinem } \forall f, g \in X\ \langle f, g\rangle \overset{\mathrm{df}}{=} \int_I f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Pokud v těchto definicích použijeme Riemannův integrál, ukáže se, že ani jeden z takto zavedených prostorů není úplný. To nás povede k zavedení nového integrálu (Lebesgueova), který bude indukovat prostory úplné.

Příklad: Tvrzení v poznámce dokážeme snadno protipříkladem. O limitách posloupností spojitých funkcí víme, že jsou spojité, pokud posloupnost konverguje stejnoměrně. Tedy musíme hledat mezi nestejnoměrně konvergujícími posloupnostmi, např. $g_n(x) \overset{\mathrm{df}}{=} 1/(1 + n^2x^2)$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ nebo $f_n(x)$ definovanou pro $\varepsilon = 1/n$ na obrázku.



Obr. 2: Spojité funkce $f_n(x)$ a jejich nespojitá limita

Pokud se zajímáme o prostor X_2, stačí seřadit racionální čísla na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ do posloupnosti a_n. Funkce $f_n(x)$ je pak rovna 1 ve všech bodech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a rovna 0 ve všech ostatních bodech. Limita posloupnosti f_n, tedy Dirichletova funkce, jak známo integrabilní není.

Poznámka: Zamyslete se nad tím, v jakém smyslu mohou být normy (1,2,3) analogické normám v prostorech nespočetné dimenze.

§3. Abstraktní variační počet: Gâteauxův diferenciál. Variace funkcionálu. Eulerova a Lagrangeova nutná podmínka.

Definice 7: Gâteauxův diferenciál, druhý Gâteauxův diferenciál
Buďte $(X, ||.||)$ vektorový normovaný prostor $h \in X$, $a \in X$ a funkcionál $\Phi : X \to \mathbb{R}$. Gâteauxovým diferenciálem funkcionálu Φ v bodě a ve směru h nazveme reálné číslo G, pokud existuje derivace $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Phi(a+th)]_{t=0}$ a je rovna G. Pro daný funkcionál Φ, daná a, h značíme toto G výrazem $\delta\Phi(a, h)$ nebo $\Phi_h(a)$. Zobrazení $\delta\Phi(a) : X \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \delta\Phi(a, h)$ nazveme variací funkcionálu Φ v a. Druhým Gâteauxovým diferenciálem míníme číslo $\delta^2\Phi(a; h, h) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[\Phi(a+th)]_{t=0}$.

Poznámka: Je-li $X = \mathbb{R}^n$, pak $\delta\Phi(a, h) \equiv \mathrm{d}\Phi(a, h)$ a $\delta\Phi(a, e_i) = \partial\Phi(a)/\partial x_i$.

Věta 2: Eulerova nutná podmínka pro extrém variovatelného funkcionálu
Pro každý normovaný vektorový prostor $(X, ||.||)$, pro každý funkcionál $\Phi : X \mapsto C$ a každé $a \in X$ platí následující tvrzení. Pokud existuje variace $\delta\Phi(a)$ na X a pokud Φ má v a lokální extrém, pak $\delta\Phi(a) \equiv 0$, tj. $(\forall h \in X)\big(\delta\Phi(a, h) = 0\big)$.

Důkaz: Pro každé $h \in X$ definujme funkci jedné reálné proměnné $\phi_h(t) = \Phi(a + th)$. Jelikož a je bod extrému Φ (berme například minimum), existuje okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že pro všechna $d \in U_\varepsilon(a)$, tj. pro d splňující $||d - a|| < \varepsilon$, je

$$\Phi(a) \leq \Phi(d).$$

Pro toto ε a libovolné $h \in X$ potom existuje okolí $V_r(0) \subseteq \mathbb{R}$ o poloměru $r = \varepsilon/||h||$, v němž platí $\big(\forall t \in V_r(0)\big)(||th|| < \varepsilon)$. Vektory $d \stackrel{\mathrm{df}}{=} a + th$ pak splňují $||d - a|| = ||th|| < \varepsilon$, „jsou od a vzdáleny méně než o ε“, a tím pádem pro ně platí nerovnost: $\Phi(a) \leq \Phi(d) = \Phi(a + th)$. Přepíšeme-li tuto nerovnost pomocí definice ϕ, dostaneme $\phi_h(t) > \phi_h(0)$, pro $\forall t \in V_r(0)$ a $\forall h \in X$, ϕ_h nabývá minima v $t = 0$ pro každé $h \in X$. Z předpokladu existence variace Φ v a plyne existence derivace funkce ϕ v bodě nula, $\phi'_h(0)$. V minulém ročníku byla vyslovena věta, která praví, že pokud funkce jedné reálné proměnné nabývá v některém bodě oboru hodnot extrému a v odpovídajícím bodě definičního oboru existuje její derivace, pak je tato derivace nulová. Proto pro každé $h \in X$ platí $\phi'_h(0) = 0$. Z definice Gâteauxova diferenciálu a funkce ϕ_h plyne závěr tvrzení věty (2) pro funkcionál Φ.

Poznámka: Důkaz této věty byl proveden důkladně, abychom se důkazy vět analogických nemuseli příliš podrobně zabývat a přenechali práci čtenáři. Důkaz kopíruje ideu důkazu analogické věty[3] z teorie funkcí více proměnných: opět se provádí restrikce na „přímku“, a problém se tak převádí na větu o funkci jedné reálné proměnné. Doposud jsme se však zajímali pouze o přímky ve směrech bázových vektorů.

[3] Probrané v minulém semestru.

Potíže nastanou, pokud budeme chtít extrém nalézt a X nebude konečné dimenze. Axiom výběru sice zaručuje existenci báze i v nekonečnědimenzionálním prostoru, ale rozepsání nekonečně mnoha (pro každý prvek báze jedné) podmínek $\phi'_h(t) = 0$ nebo snad jejich řešení obecně není technicky v našich možnostech. Proto zde požadujeme, aby derivace byla nulová v každém směru.

Následující větu formulujme již stručněji.

Věta 3: Lagrangeova
Nechť funkcionál Φ nabývá lokálního minima v $a \in X$ a nechť pro každé $h \in X$ existuje $\delta^2\Phi(a,h,h)$. Potom pro každé $h \in X$ je $\delta^2\Phi(a,h,h) \geq 0$.

Důkaz: je analogický důkazu věty předchozí, proto jej přenecháváme čtenáři.

Úkol 6: Obdobná věta platí i pro maximum. Dokažte přesně, jak analogie pro maximum plyne z Lagrangeovy věty (3). Uvědomte si, že pokud funkce f nabývá v nějakém bodě minima, pak funkce $-f$ nabývá v témže bodě maxima.

§4. Klasický variační počet: Výpočet variace typického funkcionálu. Eulerovy–Lagrangeovy rovnice a jejich první integrály.

Typický problém variačního počtu lze formulovat takto: Nechť $f \in C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$, $X = C^1(\langle a,b\rangle)$, $\Phi(y) \stackrel{\text{df}}{=} \int_a^b f\big(x, y(x), y'(x)\big)\,\mathrm{d}x$, kde $y \in X$, tj. $D(\Phi) = X$. Hledáme extrém (resp. maximum nebo minimum) funkcionálu Φ na X. Někdy bývá X modifikován dodatečnými okrajovými podmínkami: $\widetilde{X} = \big\{y \in C^1(\langle a,b\rangle) \big| \big(y(a) = A\big) \& \big(y(b) = B\big)\big\}$, pro nějaká $A, B \in \mathbb{C}$. Tehdy však $\widetilde{X}$ není[4] vektorovým prostorem právě tehdy, když $A \neq 0$ nebo $B \neq 0$.

Úmluva: Název „typický problém“ podržíme i níže. Pro funkcionál v typickém problému rezervujme název „typický funkcionál“ a značme jej pro danou f symbolem Φ_f. Jelikož velmi čato budeme užívat prostoru $\widetilde{X}$ nad $\langle a,b\rangle$ pro $A = B = 0$, rezervujme pro něj znak $\mathring{C}^1(\langle a,b\rangle)$.

Věta 4: Výpočet Gâteauxova diferenciálu typického funkcionálu
Buďte $f \in C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2) : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$, Φ_f odpovídající typický funkcionál a $x \in \langle a,b\rangle$, $y_0, h \in C^1(\langle a,b\rangle)$. Pak

$$\delta\Phi_f(y_0,h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big) h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big) h'(x) \right) \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Důkaz: Podstatné bude užití tvrzení „o záměně integrálu a derivace“, o němž se již mluvilo v předchozím semestru (pro funkce dvou proměnných), a které řádně dokážeme v kapitole o Lebesgueově integrálu. Předpoklad věty (existence spojitých parciálních derivací podle všech proměnných) je splněn. Další větou, kterou užijeme, bude věta o derivaci složené funkce, či chcete-li (v algebraické verzi), o skládání totálních diferenciálů. Užitím těchto dvou tvrzení při zvážení $\partial x/\partial t = 0$ dostaneme pro Gâteauxův diferenciál dosazením do definice:

[4] Pak se jedná o afinní prostor.

$$\delta\Phi_f(y_0,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\Phi_f(y_0+th)\big]_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_a^b f\big(x, y_0(x)+th(x), y_0'(x)+th'(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big]_{t=0} =$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[f\big(x, y_0(x)+th(x), y_0'(x)+th'(x)\big)\big]_{t=0}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big[f\big(x, y_0(x)+th(x), y_0'(x)+th'(x)\big)\big]_{t=0}\cdot\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_{t=0} + \right.$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}\big[f\big(x, y_0(x)+th(x), y_0'(x)+th'(x)\big)\big]_{t=0}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\big(y_0(x)+th(x)\big)\right]_{t=0} +$$
$$\left.+\frac{\partial f}{\partial z}\big[f\big(x, y_0(x)+th(x), y_0'(x)+th'(x)\big)\big]_{t=0}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\big(y_0'(x)+th'(x)\big)\right]_{t=0}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big)h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big)h'(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Úmluva: Derivace funkce f podle první, resp. druhé, resp. třetí proměnné značme: f_x, resp. f_y, resp. f_z. Často nebudeme uvádět argument funkce — tehdy míníme argument $(x, y_0(x), y_0'(x))$.

Poznámka: Cílem našeho snažení bude uvést podmínku, kterou musí splňovat funkce, pokud v ní nabývá klasický funkcionál extrému. Podmínka je ve tvaru obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu pro tuto funkci. Nalezneme-li její řešení, neznamená to ovšem, že na něm typický funkcionál nabývá extrému, je to pouze jeden z podezřelých bodů (někdy též nazývaný kritický či stacionární bod), tedy bod, kde je variace typického funkcionálu nulovou funkcí. Využijeme samozřejmě větu (2).

Poznámka: Poučeni Eulerovou podmínkou víme, že pokud $y_0 \in C^1(\langle a,b\rangle)$ je bod extrému variovatelného funkcionálu Φ, pak $\big(\forall h \in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle)\big)\big(\delta\Phi_f(y_0,h) = 0\big)$. Pro typický funkcionál lze tento vztah přepsat v rovnost:

$$\int_a^b (f_y h + f_z h') = 0. \tag{10}$$

Použijeme-li integraci per partes, dostaneme podmínku:

$$\int_a^b (f_y h) + [f_z h]_a^b - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z h\right) = \int_a^b \left(f_y h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z h\right) =$$
$$= \int_a^b \left[\left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z\right) h\right] = 0,\ \forall h \in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle). \tag{11}$$

Kdybychom se pohybovali na prostorech konečné dimenze (nikoliv na prostoru spojitých funkcí $\mathring{C}^1$) a integrál nahradili skalárním součinem na tomto prostoru (např. součinem generovaným eukleidovskou metrikou), pak by z rovnosti (11) již plynulo, že: $f_y - \mathrm{d}f_z/\,\mathrm{d}x = 0$. Jedna známá věta z lineární algebry totiž tvrdí, že pro konečně dimenzionální prostory se skalárním součinem existuje právě jeden vektor, který je kolmý ke každému vektoru — nulový vektor.
Další problém ovšem je, zda vůbec lze f_z derivovat podle x. K důkazu, že tomu tak je, použijeme dvou následujících lemmat.

Příklad: Nepovinně. Stejným „trikem s metodou per partes" bychom mohli dokázat podmínku postačující pro to, aby nalezený kritický bod byl minimem (či maximem). Pokud užijeme Lagrangeovu větu (3), můžeme ukázat, že minimum nastává, pokud platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} > 0.$$

Vypočteme nejprve druhý Gâteauxův diferenciál. Do výsledku věty (4) znovu dosadíme $y_0 \mapsto y_0 + th$ a derivujeme podle t v bodě $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
\delta^2\Phi_f(y_0,h,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y_0(x)+th(x), y_0'(x)+th'(x)\big)h(x) + \\
+\frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x)+th(x), y_0'(x)+th'(x)\big)h'(x)\Big)\,\mathrm{d}x\Big] = \\
= \int_a^b \big(f_{yy}h^2 + f_{yz}hh' + f_{zy}h'h + f_{zz}(h')^2\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(f_{yy}h^2 - h^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{yz} + f_{zz}(h')^2\Big)\,\mathrm{d}x = \\
= \int_a^b \Big(h^2\frac{\partial}{\partial y}\Big(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_z\Big) + f_{zz}(h')^2\Big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(h')^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

f_{yz} značí samozřejmě druhou parciální derivaci f nejprve podle y a pak podle z (předpokládáme ovšem záměnnost). Ve zmizivším členu čtenář zajisté poznal výraz, který jsme v minulé poznámce prohlásili za nulový v kritických bodech y_0 funkcionálu Φ_f.

Lemma 1:
Buď $\beta \in C(\langle a,b\rangle)$. Pokud $\big(\forall h \in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle)\big)\big(\int_a^b \beta(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = 0\big)$, pak $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a,b\rangle)(\beta(x) = c)$.

Důkaz: Ukážeme, že stačí volit konstantu c jako střední hodnotu β na $\langle a,b\rangle$, tj. $c \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b \beta(x)\,\mathrm{d}x$. Definujme $H(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_a^x \beta(\xi)\,\mathrm{d}\xi - c(x-a)$; $\beta(x)$ je spojitá, a tedy integrál existuje.

1. Ukažme, že $H \in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle)$: lehce zjistíme, že $H(a) = H(b) = 0$. Spočtěme ještě derivaci H: $H'(x) = \beta(x) - c$. Z předpokladu o funkci β plyne, že β je spojitá, a proto $H(x)$ náleží do třídy spojitě diferencovatelných funkcí.

2. Užijeme-li předpoklad lemmatu pro funkci $H(x)$ (to, že H splňuje vlastnosti požadované v lemmatu bylo ukázáno v prvním bodě důkazu), dostaneme, že $\int_a^b \beta(x)H'(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dosadíme-li za $h = H(x)$, obdržíme rovnost
$$\int_a^b \beta(x)(\beta(x)-c)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$
Uvědomme si ale také, že platí
$$\int_a^b c(\beta-c)\,\mathrm{d}x = c\Big(\int_a^b \beta(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b c\,\mathrm{d}x\Big) = c\Big(\int_a^b \beta(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b \beta(x)\,\mathrm{d}x\Big) = 0. \tag{13}$$
Odečteme-li výrazy (12) a (13) od sebe, získáme nulový výraz, a navíc bude platit:
$$0 = \int_b^a \big(\beta(\beta-c) - c(\beta-c)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\beta-c)^2\,\mathrm{d}x \tag{14}$$
Protože $\beta - c$ je spojitá, značí výraz (14) na základě známého tvrzení z teorie Riemannova integrálu, že $(\forall x \in \langle a,b\rangle)(\beta(x) = c)$, což bylo dokázati.

Lemma 2:
Jsou-li $\alpha, \beta \in C(\langle a,b\rangle)$ a pokud $\big(\forall h \in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle)\big)\big(\int_a^b \big[\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)\big]\,\mathrm{d}x = 0\big)$, pak

1. $\beta \in C^1(\langle a,b\rangle)$,
2. $(\forall x \in \langle a,b\rangle)\big(\alpha(x) = \beta'(x)\big)$.

Důkaz: Buď $A(x)$ jedna z primitivních funkcí k $\alpha(x)$ na $\langle a,b\rangle$, tj. $A'(x) = \alpha(x)$ na $\langle a,b\rangle$. Užitím metody integrace per partes a faktu, že $h(a) = h(b) = 0$ dostaneme, že:
$$0 = \int_a^b (\alpha h + \beta h') = \int_a^b (A'h + \beta h') = [Ah]_a^b - \int_a^b Ah' + \int_a^b \beta h' = \int_a^b (\beta - A)h' \tag{15}$$

Zjistili jsme, že pro každé $h \in \mathring{C}^1$ platí (15). Tím jsme ověřili platnost předpokladů lemmatu 1. Jeho závěr říká, že existuje $c \in \mathbb{R}$, že $(\forall x \in \langle a,b\rangle)\big(c = \beta(x) - A(x)\big)$. Jelikož A je spojitě diferencovatelná (neboť její derivace α je spojitá dle předpokladu), tak i β je spojitě diferencovatelná na $\langle a,b\rangle$. Snadno též spočteme, že $\beta'(x) = A'(x) = \alpha(x)$ na $\langle a,b\rangle$.

Nyní budeme formulovat větu se zásadním významem pro tuto kapitolu. Poskytne nám praktický prostředek, jak hledat stacionární body typického funkcionálu.

Věta 5: Eulerova–Lagrangeova rovnice
Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je prvek $C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$, Φ_f je typický funkcionál na $C(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$. Jestliže pro $y_0 \in C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$ platí $\big(\forall h \in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle)\big)\big(\delta\Phi(y_0,h)=0\big)$, pak

1. existuje derivace
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big)\right) \tag{16}$$
2. a pro y_0 platí tzv. Eulerova–Lagrangeova rovnice:
$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z = 0. \tag{17}$$

Důkaz: Stačí užít lemmatu 2 pro funkce:

$$\alpha(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial f}{\partial y} f\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big) \tag{18}$$
$$\beta(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big). \tag{19}$$

Poznámka: Uvažme dva speciální případy funkce f, úzce související s fyzikální problematikou. Věty nebudou formulovány zcela precizně. Pokud si čtenář nebude jist jejich významem, doporučujeme mu, aby si tvrzení přeformuloval přesněji — viz poznámku za následujícími dvěma větami.

Věta 6: 1. integrál Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro $f = f(x,z)$
Eulerova–Lagrangeova rovnice pro funkci $f(x,z)$ je tvaru:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big) = \text{konst.} \tag{20}$$

Důkaz: Stačí dosadit $f(x,z)$ do Eulerovy–Lagrangeovy rovnice a uvážit, že $f_y = 0$.

Věta 7: 1. integrál Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro $f = f(y,z)$
Eulerova–Lagrangeova rovnice pro funkci $f(y,z)$ je tvaru:

$$f - y' f_z = \text{konst.} \tag{21}$$

Důkaz: Zkoumejme derivaci rovnosti (21) pro $y = y_0$ s ohledem na $\partial f/\partial x = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f - y'\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{y=y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}y_0' + \frac{\partial f}{\partial z}y_0'' - y_0''\frac{\partial f}{\partial z} - y_0'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z} =$$
$$= y_0'\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,$$

jak plyne z obecné věty (5).

Poznámka: Uvědomte si, že věty tvrdí toto: Splňuje-li funkce y_0 Eulerovu–Lagrangeovu rovnici, pak splňuje rovnici jejího prvního integrálu. Obrácené tvrzení však obecně neplatí.

Na závěr tohoto paragrafu ukážeme, jak s pomocí Eulerovy–Lagrangeovy rovnice řešit klasický problém brachistochrony. Zopakujme zadání:

Příklad: Mezi dvěma body A, B v různé výšce (A je výše) je natažen drátek, po němž může volně klouzat hmotný korálek. Jaký má mít drátek tvar, aby korálek pouze působením tíhy sklouzl z A do B za nejkratší možný čas?

Tvar drátku popíšeme funkcí $y(x)$ na $\langle 0, b\rangle$, přičemž $y(0) = 0$ a $y(a) = b$. Skutečnost, že tvar lze popsat funkcí (drátek nevytváří smyčku, ale ani není v žádném úseku rovnoběžný s osou y) vezmeme jako „přijatelný předpoklad" — viz obrázek. Nejprve potřebujeme získat funkcionál T, který udává čas, za který korálek sklouzne, má-li drátek tvar podle $y(x)$. Abychom nemuseli vycházet přímo z pohybových rovnic pro korálek, pokusíme se při výpočtu využít zákon zachování energie. Označíme-li m hmotnost korálku, $v(x)$ jeho rychlost v bodě $[x, y(x)]$ a g tíhové zrychlení, pak platí $mv^2(x)/2 = -mgy(x)$. Dále použijeme několik úprav, které se důsledný čtenář může pokusit precizovat, my se však spokojíme s náznakem myšlenky. Označme $t(x)$ čas, za nějž dosáhne korálek bodu $[x, y(x)]$, $s(x)$ dráhu od počátku do $[x, y(x)]$, tedy délku příslušné části křivky y.

$$T(y) = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = \frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}t}v^{-1}(x).$$

Pro délku křivky platí vztah

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left[y'(\xi)\right]^2}\,\mathrm{d}\xi, \qquad \frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2},$$

a tím pádem

$$T(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Vidíme, že $T(y)$ není explicitně závislý na x, tedy pro nalezení kritických bodů lze použít věty (7). Jednodušší tvar diferenciální rovnice ovšem poskytuje věta (6), pro jejíž použití lze $T(y)$ upravit záměnou závislé a nezávislé proměnné. Budiž tedy dále y nezávislá proměnná a $x = x(y)$ — bereme-li toto jako substituci, dostáváme

$$T(x) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + 1/\left[x'(y)\right]^2}}{\sqrt{2gy}}x'(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \frac{\sqrt{\left[x'(y)\right]^2 + 1}}{\sqrt{2gy}}\,\mathrm{d}y; \quad f(x, z) = \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{\sqrt{2gx}}.$$

Podle věty (6) (nenechte se zmást změnou písmen — x je v této větě nezávislá proměnná, podle níž se integruje) nyní máme najít řešení rovnice (k je konstanta):

$$k = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{2gx(1 + z^2)}}, \qquad \text{tj. } k^2 2gx\big(1 + (x')^2\big) = (x')^2, \text{ po úpravě}$$

$$(x')^2\left(1 - \frac{x}{2c}\right) = \frac{x}{2c}, \quad c = \frac{1}{4k^2 g}.$$

Dosazením se můžeme přesvědčit (proveďte), že řešení této rovnice procházející bodem $[0, 0]$ v parametrickém tvaru je

$$x(\tau) = c(\tau - \sin\tau), \quad y(\tau) = c(1 - \cos\tau).$$

Konstantu c (potažmo k) nastavíme tak, aby řešení procházelo koncovým bodem B (je ovšem ještě třeba nalézt takové $\tau \in (0, \pi)$, že $x(\tau) = a, y(\tau) = b$.

Celkem vzato, celý postup takto není proveden příliš pečlivě, ale doufáme, že o to názorněji; nalezli jsme například pouze kritický bod, o němž ještě nevíme, zda je extrémem, natož pak minimem.

§5. Aplikace variačního počtu: analytická mechanika

Velice užitečným principem analytické mechaniky je Hamiltonův princip nejmenší akce. Tento princip (plynoucí z d'Alembertova principu, který je důsledkem Newtonových zákonů pohybu) je velmi obecný a má značný rozsah užití. Umožňuje takříkajíc mechanicky řešit velmi různorodé fyzikální problémy. Známe-li potenciální U a kinetickou energii T hmotného bodu, vyjádřenou v daných zobecněných souřadnicích, zobecněných rychlostech[5] a čase $q_1, \dots, q_n, \dot{q_1}, \dots, \dot{q_n}, t$, definujeme tzv. lagrangeián $L = T - U$. Nám bude stačit vědět, že obvykle $L \in C^1(\mathbb{R}^7)$. Hamiltonův princip říká, že funkcionál S (zvaný akce), definovaný $S(q) = \int_A^B L\big(t, q_i(t), \dot{q}_i(t)\big)\,\mathrm{d}t$ a přiřazující každé trajektorii $q(t)$ reálné číslo, je pro realizovaný pohyb stacionární. Realizována je jen ta trajektorie, jež odpovídá stacionární hodnotě akce. Tuto podmínku lze pomocí našeho formalizmu zapsat: $\delta S = 0$. Jelikož S je typický funkcionál pro funkci L, plyne z podmínky stacionárnosti, že lagrangeián L splňuje tzv. Lagrangeovu rovnici 2. druhu, v níž poznáváme Euler–Lagrangeovu rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \tag{22}$$

Pomocí lagrangeiánu lze definovat známé pojmy Newtonovy mechaniky:

1. $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ se nazývá kovektor hybnosti (zobecněná hybnost),
2. $f_i = \partial L / \partial q^i$ se nazývá kovektor síly (zobecněná síla),
3. $E(t, q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n \dot{q}^i p_i - L$ se nazývá zobecněná energie.

Nechť nadále index značí příslušnou parciální derivaci.

Buď $h \in \mathring{C}^1(\langle a, b\rangle)$ a $q_i = he_i$ (tedy $q_i = h\delta_{ji}$). Ve fyzice bývá zvykem psát následující řetězec vztahů:

$$\delta S_h(q) = \delta \int L(t, q_i(t), \dot{q}_i(t))\big|_{q=he_i}\,\mathrm{d}t = \int (L_{q_i}h + L_{\dot{q}_i}h')\,\mathrm{d}t = \int L_{q_i}h + \int L_{\dot{q}_i}h' =$$
$$= \int L_{q_i}h + [L_{\dot{q}_i}h]_a^b - \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_{\dot{q}_i}h = \int (L_{q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_{\dot{q}_i})h = 0.$$

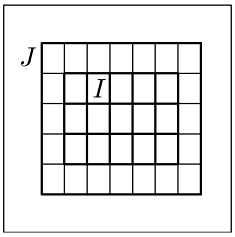
Položíme-li integrand rovný nule, dostaneme Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro akci či, chcete-li, Lagrangeovy rovnice druhého druhu (i probíhá hodnoty $1, \dots, n$).

Zmiňme ještě zákony zachování a první integrály Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro jednoduchost při $n = 1$.

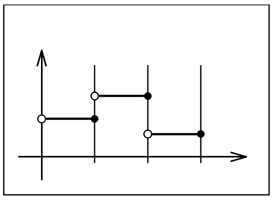
1. Nechť lagrangeián nezávisí na čase, tj. $L = L(q, \dot{q})$. První integrál Eulerovy–Lagrangeovy rovnice dle věty (7) je: $L(q, \dot{q}) - \dot{q}L_{\dot{q}}(q, \dot{q}) = $ konst. Dosadíme-li do této rovnice, obdržíme po derivaci levé strany podle t: $\mathrm{d}\,(L - \dot{q}.p)/\,\mathrm{d}t = 0$. Dle definice energie E dostáváme: $E =$ konst., tedy zákon zachování energie.

2. Pokud lagrangeián nezávisí na zobecněné souřadnici q, pak dle věty (6) získáme následující rovnici: $\mathrm{d}L_{\dot{q}}/\,\mathrm{d}t = 0$. Tato rovnost podle předchozích definic značí: $\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}t = 0$, tedy $p =$ konst. Získali jsme zákon zachování hybnosti.

[5] $\dot{q}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{d}q(t)/\,\mathrm{d}t$



Obr. 3: Interval v $\mathbb{R}_2$ a jeho dělení



Obr. 4: Elementární funkce nad intervalem v $\mathbb{R}$

10 Lebesgueův integrál

V minulém semestru jsme rozvinuli teorii funkcí více proměnných. Definovali jsme u nich pojmy více či méně analogické pojmům vztahujícím se k funkcím jedné proměnné — okolí, limitu, derivaci, naučili jsme se počítat parciální derivace, gradient, rozvíjet tyto funkce v Taylorovy řady. Integrovat je zatím korektně neumíme. Mohli bychom tedy rozšířit naše definice z kapitoly o Riemannově integrálu do více dimenzí. Byla by to ale práce zcela formální a ničím nová a přinesla by také jen malý užitek. Množina riemannovsky integrovatelných funkcí je totiž relativně malá, a co je podstatné, netvoří úplný metrický prostor — tuto vlastnost budou zanedlouho po integrálu požadovat fyzikové. Proto vybudujeme integrál nový — tzv. Lebesgueův.

Definice 8: Interval v $\mathbb{R}^n$ a jeho části

Intervalem I v $\mathbb{R}^n$ nazveme množinu $(a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2\rangle \times \ldots \times (a_n, b_n\rangle$; $a_i < b_i$. Stěnou intervalu I nazveme množinu $(a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2\rangle \times \ldots \times \{b_i\} \times \ldots \times (a_n, b_n\rangle$, přičemž jednobodová množina se v kartézském součinu vyskytuje právě jednou. Objem intervalu definujeme $V = \prod_i (b_i - a_i)$. Dělení intervalu I je takový systém disjunktních intervalů, jejichž sjednocením je celý I a množiny jejich krajních bodů v i-té složce tvoří dělení intervalu (a_i, b_i) ve smyslu definice dělení pro jednorozměrný Riemannův integrál. Zjemněním dělení intervalu rozumíme dělení, jehož všechna složková dělení zjemňují složková dělení původního dělení. Dělení intervalu $J \supset I$ je rozšířením dělení intervalu I, mají-li obě dělení stejné krajní body.

Příklad: V $\mathbb{R}^2$ je interval obdélník a dělení intervalu „čtvercová síť“, viz obrázek.

§1. Prostor schodovitých funkcí: elementární funkce a jejich vlastnosti

Definice 9: Schodovitá funkce

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá schodovitá (též elementární nebo jednoduchá)[6], pokud existují interval I,

[6] Čtenář se může setkat i s jinou definicí jednoduché funkce, ať už v rámci jiné metody budování Lebesgueova integrálu, nebo při výstavbě jiných integrálů.

jeho dělení I_j a čísla $f_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, N$ taková, že

$$f = \sum_{i=1}^{N} f_j \chi_{I_j}.$$

Zde χ_{I_j} označuje charakteristickou funkci intervalu I_j. Tato funkce je rovna jedné na tomto intervalu a nule všude jinde. Množinu všech schodovitých funkcí označíme H. Integrál ze schodovité funkce definujeme přirozeným vztahem

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{N} f_j V(I_j).$$

Poznámka: Rozšíříme-li dělení z intervalu I na větší interval J, integrál se nezmění, protože funkce je na množině $J \setminus I$ nulová (jsou zde nulové charakteristické funkce χ^{I_j}). Ani při zjemnění se integrál nezmění, jak každý hned vidí. Integrál tedy nezávisí na volbě dělení — pro dvě různá dělení stačí uvažovat jejich společné zjemnění.

Věta 8: O struktuře množiny H

1. Množina H je vektorový prostor.
2. Jestliže $f \in H$, pak $|f| \in H$.
3. $(\forall f, g \in H)\big(\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g\big)$.
4. $(\forall f \in H)\big((\forall x)\big(f(x) \geq 0\big)^7 \Rightarrow (\int f \geq 0)\big)$.
5. Buď $\{f_k\}_1^\infty$ posloupnost funkcí z H, $(\forall x)(f_k(x) \searrow 0)^8$, pak $\int f_k \to 0$.

Důkaz: První čtyři tvrzení této věty jsou natolik jednoduchá, že je čtenář po konfrontaci s definicí jistě prohlásí za zřejmá. Páté tvrzení je naproti tomu netriviální a jeho důkaz bude vyžadovat trochu opatrnější uvažování.

Označme I interval, mimo nějž je $f_1 = 0$. Z monotonie konvergence plyne, že žádná z funkcí f_k nemůže mimo tento interval nabývat nenulových hodnot. Dále označme I_j^k dělení intervalu I taková, že na každém podintervalu I_j^k je f_k konstantní (jedná se o dělení užitá v definici schodovité funkce). Každému takovému dělení přísluší konečná množina stěn S^k (zařaďme tam i vnější stěny intervalu I). Sjednocení všech S^k pro $k \in \mathbb{N}$ označíme Z. Množina Z je zjevně spočetná (obsahuje spočetně mnoho stěn).

Nejprve uvažme, že libovolnou stěnu je možné pro libovolně malé ε pokrýt intervalem K, jehož objem bude menší[9] než ε. Když potom seřadíme prvky spočetné množiny Z do posloupnosti indexované přirozenými čísly počínaje jedničkou a i-tý člen pokryjeme intervalem o objemu $V(K_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$, podaří se nám tak pokrýt celé Z systémem intervalů o celkovém objemu menším než libovolné kladné $\varepsilon = \sum_i \varepsilon/2^i$.

Nyní obraťme naši pozornost k zatím nepokrytému zbytku. Nechť ε je pevné, K_i je spočetný systém intervalů pokrývajících dohromady stěny, pro nějž platí $V(\bigcup K_i) < \varepsilon$. Každá z množin $I \setminus S^k$ je otevřená ($I \setminus Z$ obecně není) a f_k je na ní spojitá. Pro každé $x \in I \setminus Z$ existuje $k_0(x)$ takové, že $f_{k_0}(x) < \varepsilon$ (nerovnost samozřejmě díky monotonii platí i pro každé $k > k_0(x)$). Díky spojitosti existuje taková otevřená množina $J_x \subset I \setminus S^{k_0}(x)$, na níž je funkce f_{k_0} konstantní, tedy menší než ε. Intervaly J_x a K_i tvoří otevřené (ne nutně spočetné) pokrytí kompaktní množiny $\bar{I}$. Z tohoto pokrytí lze vybrat spočetné [10] a ze spočetného na základě Borelovy věty konečné $\{J_{x_1}, \ldots, J_{x_m}, K_{i_1}, \ldots, K_{i_p}\}$. Množinám J_{x_1} až J_{x_m} přísluší čísla $k_0(x_1)$ až $k_0(x_m)$, jejichž maximum označíme N. Pro každé $x \in I \setminus Z$ je $h_N(x) < \varepsilon$, můžeme tedy integrál z h_n pro $n \geq N$ omezit nerovností

$$\int h_n(x) \leq \int h_N(x) < \varepsilon V(I) + \varepsilon M,$$

[7] V dalším textu budeme používat zkráceného zápisu $f \geq 0$

[8] Monotónní konvergence: $(\lim f_k = 0) \wedge \big((\forall k)(f_{k+1} \leq f_k)\big)$

[9] Stěnu $(a_1, b_1\rangle \times \ldots \times \{c_i\} \times \ldots \times (a_n, b_n\rangle$ vložíme do kvádru $(a_1, b_1\rangle \times \ldots \times (a_n, b_n\rangle$, v němž $c_i \in (a_i, b_i)$ a $b_i - a_i < \varepsilon/(b_1 - a_1) \ldots (b_{i-1} - a_{i-1})(b_{i+1} - a_{i+1}) \ldots (b_n - a_n)$.

[10] To jsme zatím nedokázali. Nepovinně: tvrzení souvisí s existencí spočetné husté podmnožiny $\mathbb{R}^n$, což může být například $\mathbb{Q}^n$, pomocí níž můžeme sestrojit spočetnou tzv. bázi otevřených množin. To je systém, z něhož lze pomocí operace sjednocení vygenerovat libovolnou otevřenou množinu. Nejsnazší je konstrukce takové báze jakožto množiny všech otevřených koulí s racionálním poloměrem a středem v oné spočetné husté podmnožině. Máme-li pak nějaké otevřené pokrytí, můžeme každou z množin rozvinout podle této báze a obdržet tak celé pokrytí zapsané jako sjednocení nějaké podmnožiny báze, která je spočetná.

kde M je maximum funkce f_1.

Poznámka: V dalších důkazech budeme využívat pouze výsledků této věty a vlastností integrálu z jednoduché funkce jakožto zobrazení $H \to \mathbb{R}$. Tím dosáhneme určité nezávislosti našeho integrálu na volbě konkrétní definice jednoduché funkce. Čtenář zajímající se o danou problematiku pak bude moci vybudovanou teorii snadno užít i ke studiu jiných integrálů.

§2. Množiny míry nula: vlastnosti platné skoro všude

Integrál na konci předchozího důkazu je omezen součtem dvou členů. První z nich pochází z vyšetřování chování funkce na množině jen nepatrně se lišící od celého intervalu I, zatímco při určování druhého jsme s funkcí vůbec nepracovali. Množina stěn je v nějakém smyslu malá, k chování funkce zde je možné nepřihlížet, aniž bychom tím změnili hodnotu integrálu. Pojem „malá“ bychom chtěli matematicky zpřesnit. Jak vidno z předchozího důkazu, množiny s dimenzí menší než n malé jsou, dokonce i spočetné sjednocení takových množin je malé. To znamená, že vezmeme-li za body dělení ve všech složkách racionální čísla, dostaneme také malou množinu, a to i přesto, že bude tato množina hustá (v $I \setminus Z$ nezbyde žádné okolí) a bude mít „stejnou mohutnost“ jako celý prostor. Budeme tedy muset najít nějaký rafinovaný postup, jak se vypořádat i s takovýmito zákeřnostmi.

Ve zmiňovaném důkazu jsme pokrývali množinu Z intervaly K_i, které mohly mít libovolně malý objem. Objem intervalu můžeme zapsat pomocí jeho charakteristické funkce, která je zjevně schodovitá, jako $\int \chi^{K_i}$. Objem sjednocení můžeme omezit součtem objemů, chceme-li tedy, aby byl objem sjednocení menší či roven libovolnému kladnému ε, stačí, aby $(\forall k \in \mathbb{N})\big(\sum_1^k \int \chi_{K_i} < \varepsilon\big)$. Funkce $h_k \equiv \sum_1^k \chi^{K_i}$ jsou schodovité, tvoří neklesající posloupnost a jejich limita pro $k \to \infty$ (která je zároveň i jejich supremem) je v každém bodě Z větší nebo rovna jedné, protože v každém bodě je alespoň jedna $\chi^{K_i} = 1$.

Tyto úvahy nyní zobecníme formou definice.

Definice 10: Množina míry nula

Řekneme, že Z je množina míry nula, právě když $(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists \{h_k\}_1^\infty \in H\big)$ splňující:

1. $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq h_k \leq \ldots$
2. $(\forall k \in \mathbb{N})(\int h_k < \varepsilon)$
3. $(\forall x \in Z)\big(\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} h_k(x) \geq 1\big)$

Věta 9: Spočetné sjednocení množin míry nula

Sjednocení spočetně mnoha množin míry nula je množina míry nula.

Důkaz: Seřaďme množiny M_i míry nula do posloupnosti a sestrojme ke každé M_i funkce h_{ij} splňující požadavky definice, konkrétně pro pevné i budeme požadovat $(\forall j \in \mathbb{N})(\int h_{ij} < \frac{\varepsilon}{2^i})$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{h_{11}} & \leq & \boxed{h_{12}} & \leq & \boxed{h_{13}} & \leq & \cdots \to F_1 \geq \chi_{M_1} \\
h_{21} & \leq & h_{22} & \leq & h_{23} & \leq & \cdots \to F_2 \geq \chi_{M_2} \\
\vdots & \leq & \vdots & \leq & h_{33} & \leq & \cdots \to F_3 \geq \chi_{M_3}
\end{array}$$

Na základě naznačeného schématu volme funkce H_j jakožto maxima z funkcí uzavřených v plně vyznačených obdélnících, tedy $H_j = \max\limits_{1 \leq i \leq j} h_{ij}$. Zároveň jsou to maxima přes čárkované čtverce (vyznačili jsme jen jeden). Integrál z maxima k nezáporných funkcí je menší nebo roven integrálu z jejich součtu (rozmyslete) tedy $\int H_j < \varepsilon$. Jelikož posloupnost $\{H_j\}_1^\infty$ je neklesající a platí i $\sup H_j \geq \sup h_{ij} \geq 1$ (pokud $x \in M_j$, pak $h_{ij}(x) \to F_j(x) \geq 1$), splňuje tato posloupnost požadavky v definici množiny míry nula.

Definice 11: Platnost skoro všude

Řekneme, že určitá vlastnost platí skoro všude (s.v.), platí-li na $\mathbb{R}^n \setminus Z$, kde Z je množina míry nula.

Označení: Označme kladnou část funkce α symbolem $\alpha^+ \equiv \max\{\alpha, 0\}$, zápornou část $\alpha^- \equiv$

$\max\{-\alpha, 0\}$. Zjevně jsou to nezáporné funkce a α lze psát jako $\alpha^+ - \alpha^-$.

Věta 10: Vlastnosti schodovitých funkcí
Nechť $h, k, \{h_i\}_1^\infty \in H$. Pak

1. $\max\{h,k\}$, $\min\{h,k\} \in H$
2. $h \leq k \Rightarrow \int h \leq \int k$
3. $\left|\int h\right| \leq \int |h|$
4. $h_i \searrow 0$ s.v. $\Rightarrow \lim \int h_i = 0$
5. $h = k$ s.v. $\Rightarrow \int h = \int k$
6. $h \leq k$ s.v. $\Rightarrow \int h \leq \int k$

Důkaz:

1. Rozepíšeme $\max\{h,k\} = \frac{1}{2}[|h-k| + h + k]$ a použijeme větu (8), $\min\{h,k\} = -\max\{-h,-k\}$.
2. Platí $k - h \geq 0$, tedy podle věty (8) $\int(k-h) \geq 0$ a opět dle věty (8) $\int k \geq \int h$.
3. Plyne z $(-h \leq |h|) \wedge (h \leq |h|)$ a předchozího bodu.
4. Nechť je nejprve $h_i \geq 0$ nerostoucí všude, tedy $\lim \int h_i \geq 0$ a dále $\lim h_i = 0$ skoro všude. Označme Z inkriminovanou množinu míry nula. Dále označme $M \equiv \max h_1$. Dle definice $\exists \{k_i\}_1^\infty \in H$ nezáporná neklesající, že $(\forall i)\big(\int k_i < \varepsilon/M\big)$, $(\forall x \in Z)\big(\sup k_i(x) \geq 1\big)$. Tedy funkce $h_i - Mk_i$ tvoří nerostoucí posloupnost. O této posloupnosti tvrdíme, že $\lim(h_i - Mk_i) \leq 0$. To je jistě pravda, neboť pro body z $\mathbb{R}^n \setminus Z$ jde h_i do nuly a $Mk_i \geq 0$ a pro body ze Z je pro všechna i od určitého indexu výše $Mk_i \geq M$, tedy větší nebo rovno než jakákoliv z funkcí h_i kdekoliv. Pomocí posledního bodu věty (8) můžeme usoudit, že
$$\lim_{i\to\infty} (h_i - Mk_i)^+ = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \int (h_i - Mk_i)^+ = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \int (h_i - Mk_i) \leq 0,$$
odkud roztržením integrálu na dva členy plyne $\lim \int h_i \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

   K důkazu obecnější verze budeme potřebovat tvrzení následujících bodů, proto napřed dokážeme je.
5. Definujme konstantní posloupnost funkcí $\{|k-h|\}_1^\infty$. Je to posloupnost nerostoucí a nezáporná a dle předpokladu $|k-h| = 0$ s.v. Můžeme na ni tedy použít slabší verzi předchozího bodu, kterou jsme již dokázali, podle níž $\int |k-h| = 0$. Podle bodu 3 této věty $\left|\int(k-h)\right| \leq \int |k-h| = 0$, čili $\int k = \int h$.
6. Podle předpokladů $|k-h| = k-h$ s.v., zároveň dle věty (8) $|k-h| \geq 0 \Rightarrow \int |k-h| \geq 0$. Užitím předchozího bodu pak $0 \leq \int |k-h| = \int (k-h) = \int k - \int h$.
7. Nyní se vrátíme k obecné verzi bodu 4. Nechť existuje množina Z míry nula taková, že $(\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Z)(h_i \searrow 0)$. Definujme novou posloupnost $\{\widetilde{h}_i\}_1^\infty$ vztahy $\widetilde{h}_1 = h_1^+$, $\widetilde{h}_i = \min\{\widetilde{h_{i-1}}, h_i^+\}$ Pro tuto posloupnost platí předpoklady slabší verze bodu 4, neboť je nerostoucí a má nulovou limitu skoro všude, tedy $\lim \int \widetilde{h}_i = 0$. Navíc ovšem $\widetilde{h}_i = h_i$ s.v., což podle bodu 5 znamená, že $\lim \int h_i = 0$.

§3. Systém lebesgueovsky integrovatelných nezáporných funkcí: věty o limitních přechodech

Definice 12: Systém L^+
Řekneme, že $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ náleží do L^+ (systém lebesgueovsky integrovatelných nezáporných funkcí), právě když existuje posloupnost nezáporných schodovitých $h_i \nearrow f$ s.v. a $(\exists K \in \mathbb{R})(\int h_i \leq K)$. Pro takovou funkci definujeme horní Lebesgueův integrál
$$(L)\int f = \lim \int h_i$$

P o z n á m k a: Systém L^+ je podmnožinou systému M^+ měřitelných nezáporných funkcí, který má obdobnou definici, ale chybí v ní požadavek omezenosti.

Věta 11: Vlastnosti funkcí z L^+
Nechť $f, g \in L^+$. Pak

1. $f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$
2. $f = g \Rightarrow \int f = \int g$
3. $\int f$ nezávisí na volbě posloupnosti $\{h_i\}_1^\infty$.
4. f je konečná s.v.
5. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L^+$
6. $\min\{f, g\}, \max\{f, g\} \in L^+$

P o z n á m k a: V bodě 5 jsou $\alpha, \beta \ge 0$! L^+ proto není vektorový prostor.

Důkaz: Označme $\{h_i\}_1^\infty$, $\{k_i\}_1^\infty$ posloupnosti schodovitých funkcí, $h_i \nearrow f$ s.v., $k_i \nearrow g$ s.v., $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall i \in \mathbb{N})\big((\int h_i \le K) \wedge (\int k_i \le K)\big)$.

1. Nechť $i, j \in \mathbb{N}$, položme i pevné, potom $h_i - k_j \searrow h_i - g \le 0$ s.v. Podle věty (10) $(h_i - k_j)^+ \searrow 0$ s.v. $\Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} \int (h_i - k_j)^+ = 0$, čili $\lim\limits_{j\to\infty} \int (h_i - k_j) \le 0$. Protože $\lim \int k_j$ existuje (rozmyslete), můžeme tento výraz roztrhnout na $\int h_i \le \lim \int k_j$ a pomocí věty o limitním přechodu v nerovnosti a definic $\int f$, $\int g$ snadno dokončit důkaz.
2. $(f = g)$ s.v. $\Leftrightarrow \big((f \le g \text{ s.v.}) \wedge (g \le f \text{ s.v.})\big) \Rightarrow \big((\int f \le \int g) \wedge (\int g \le \int f)\big) \Rightarrow (\int f = \int g)$
3. Formálně můžeme f definované pomocí dvou různých posloupností považovat za dvě funkce, které se sobě rovnají, a použít tvrzení předchozího bodu.
4. Označme $Z_1 = \{x \in \mathbb{R}^n |$ Neplatí $h_n(x) \nearrow f(x)\}$ a budiž $\int h_i < K$ pro všechna i. Množina Z_1 je míry nula, na níž může mít f jakékoliv hodnoty, tedy i nekonečné. Dále označme $Z_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z_1 |\ f(x) = \infty\}$ a definujme posloupnost funkcí $H_i \equiv \frac{\varepsilon}{K} h_i$, pro kterou na základě vlastností h_i platí:

   (a) H_i je neklesající a nezáporná.
   (b) $\int H_i = \frac{\varepsilon}{K} \int h_i \le \varepsilon$
   (c) $(\forall x \in Z_2)(\sup H_i = \lim \frac{\varepsilon}{K} h_i = \infty \ge 1)$

   Tedy Z_2 je míry nula a podle věty (9) $Z_1 \cup Z_2$ je míry nula.
5. Z definice.
6. $\max\{h_i, k_i\} \nearrow \max\{f, g\}$, $\int \max\{h_i, k_i\} \le 2K$.

Věta 12: Limitní přechod v L^+
Nechť $\{f_i\}_1^\infty$ je posloupnost funkcí z L^+, $f_n \nearrow f$ s.v., $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall i \in \mathbb{N})(\int f_n \le K)$. Pak $f \in L^+$ a $\int f = \lim \int f_i$.

Důkaz: Označme $\{h_{ij}\}_1^\infty$ posloupnosti schodovitých funkcí z definice (12) ($h_{ij} \nearrow f_i$, $\int h_{ij} \le K$). Podle schématu analogického schématu v důkazu věty (9) definujme funkce $H_j \equiv \max\limits_{1\le i\le j} h_{ij}$. Označme dále $f^* \equiv \lim H_j$. Podle věty o limitním přechodu v nerovnosti můžeme pro $i \le j$ psát

$$\begin{array}{ccccl} h_{ij} & \le & H_j & \le & f_j \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\ j \to \infty \\ f_i & \le & f^* & \le & f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\ i \to \infty \\ f & \le & f^* & \le & f. \end{array}$$

Konvergence jsou samozřejmě míněny s.v. Platí tedy $H_j \nearrow f$ s.v. Funkce H_j jsou schodovité a $\int H_j \leq f_j \leq K$, splňují tedy podmínky z definice (12). Nyní stačí jen provést další dva limitní přechody:

$$\begin{array}{ccccc}
\int h_{ij} & \leq \int H_j \leq & & & \int f_j \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow j \to \infty \\
\int f_i & \leq & \int f & \leq & \lim \int f_j \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow i \to \infty \\
\lim \int f_i & \leq & \int f & \leq & \lim \int f_j
\end{array}$$

§4. Lebesgueův integrál

Definice 13: Lebesgueovsky integrovatelné funkce
Řekneme, že $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je lebesgueovsky integrovatelná, pakliže $(\exists f_1, f_2 \in L^+)(f = f_1 - f_2 \text{ s.v.})$. Pak definujeme $\int f = \int f_1 - \int f_2$ a označíme L množinu všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí.

Věta 13: Vlastnosti funkcí z L
Nechť $f, g \in L$. Pak platí:

1. Hodnota $\int f$ nezávisí na rozkladu $f = f_1 - f_2$.
2. $(f \geq 0 \text{ s.v.}) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists f_1, f_2 \in L^+)\big((f = f_1 - f_2) \wedge (\int f_2 < \varepsilon)\big)$.
3. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha f + \beta g \in L$ a $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.
4. $f \geq g$ s.v. $\Rightarrow \int f \geq \int g$, $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$
5. $|f|$, f^+, f^-, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\} \in L$
6. Funkce f je konečná s.v.

Důkaz:

1. Uvažujme dva rozklady $f_1 - f_2 = f = \widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2$, $f_1, f_2, \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in L^+$. Pak $(f_1 + \widetilde{f}_2 = \widetilde{f}_1 + f_2 \in L^+) \Rightarrow (\int f_1 + \int \widetilde{f}_2 = \int \widetilde{f}_1 + \int f_2) \Rightarrow (\int \widetilde{f}_1 - \int \widetilde{f}_2 = \int f_1 - \int f_2)$, což je dle definice $\int f$.
2. $(\exists f_1, f_2 \in L^+)(f = f_1 - f_2) \Rightarrow (\exists K \in \mathbb{R})\big[\big((\exists f_{1i} \in H)(f_{1i} \nearrow f_1 \text{ s.v.})(\int f_{1i} \leq K)\big) \wedge \big((\exists f_{2i} \in H)(f_{2i} \nearrow f_2 \text{ s.v.})(\int f_{2i} \leq K)\big)\big]$. Pro dané $\varepsilon > 0$ lze zvolit $m \in \mathbb{N}$, aby $\int f_2 - \int f_{2m} < \varepsilon$. Potom ovšem nově definované funkce $\widetilde{f}_1 \equiv f_1 - f_{2m}$, $\widetilde{f}_2 \equiv f_2 - f_{2m}$ splňují kritéria hledaného rozkladu: $f_1 - f_{2m} \in L^+$, neboť $(\exists p_0)(\forall p > p_0)(f_{1p} - f_{2m} \geq 0)$, a $\int \widetilde{f}_2 < \varepsilon$.
3. Uvažujme rozklady $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$ z definice. Pak rozklad $f + g$ můžeme psát jako $(f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ a $\int(f + g) = \int(f_1 + g_1) - \int(f_2 + g_2) = \int f_1 - \int f_2 + \int g_1 - \int g_2$. Pro $\alpha \geq 0$ je možným rozkladem $f = (\alpha f_1) - (\alpha f_2)$, pro $\alpha < 0$ je to $f = (-\alpha f_2) - (-\alpha f_1)$.
4. Podle předchozího bodu můžeme definovat funkci $\varphi \equiv f - g \in L$, která má rozklad $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in L^+$, a $\varphi \geq 0$ s.v. Podle věty (11) $(\varphi_1 \geq \varphi_2 \text{ s.v.}) \Rightarrow (\int \varphi_1 \geq \int \varphi_2)$, což nám po úpravě dává první tvrzení tohoto bodu. Druhé tvrzení je už jen triviální důsledek.
5. Pro f zapsané rozkladem $f_1 - f_2$ je rozklad $|f|$ možné psát ve tvaru $\max\{f_1, f_2\} - \min\{f_1, f_2\}$ (podle věty (11) jsou obě z L^+). Zbylá tvrzení postupně odvodíme pomocí tohoto a bodu 3: $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$, $\max\{f, g\} = f + (g - f)^+$, $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$.
6. Funkce f_1 a f_2 z rozkladu jsou podle věty (11) konečné s.v., tedy i f je konečná s.v.

Poznámka: V důkazu posledního bodu jsme nezmínili případ, kdy budou obě funkce f_1 i f_2 nekonečné a jejich rozdíl nebude definován. Tehdy ovšem můžeme (díky tomu, že takové body tvoří množinu míry nula) funkci f nadefinovat libovolným číslem — podle definice totiž chceme aby $f = f_1 - f_2$ jen skoro všude.

Poznámka: Bod 5 říká velmi důležitou věc — Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní, čímž se výrazně odlišuje od integrálu Newtonova. Newtonův integrál například zintegruje funkci $\frac{\sin(x)}{x}$ v mezích od

0 do ∞, ale $\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} = \infty$.[11] Naproti tomu Lebesgueův integrál nekonverguje pro žádnou z těchto funkcí. Je to různými metodami sčítání. Newtonův integrál postupuje podél osy a přičítá přírůstky primitivní funkce. V případě prvního integrálu mu díky oscilacím nad a pod osu nakonec vyjde konečné číslo. Naproti tomu Lebesgue nejprve sečte všechno nad osou a odečte od toho součet všeho pod osou, jelikož jsou to obě nekonečna[12] , není integrál z celé funkce definován.

Zklamaného čtenáře, který má pocit, že budoval nový integrál jen proto, aby s ním zintegroval méně funkcí než se starým, můžeme utěšit Dirichletovou funkcí, která je reprezentantem bohaté třídy funkcí, jež jsme doposud integrovat neuměli, a to ani Riemannovým integrálem. Jako demonstraci nadvlády naší nové Lebesgueovy teorie nad starou Riemannovou uveďme bez důkazu ještě jeden teoretický výsledek, tzv. Lebesgueovu větu[13]: funkce je Riemannovsky integrovatelná, právě když je spojitá až na množinu nulové míry[14].

§5. Věty o limitním přechodu

Věta 14: Beppo–Levi

Nechť $\{f_i\}_1^\infty$ je posloupnost nezáporných funkcí z L, $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{N})\left(\int \sum\limits_1^m f_i \leq K\right)$. Pak existuje součet řady $F \equiv \sum\limits_1^\infty f_i$ s.v. a $\int F = \sum\limits_1^\infty \int f_i$.

Důkaz: Definujme $F_m \equiv \sum\limits_1^m f_i$. Podle předpokladů a věty (13) víme, že $F_m \in L$, $F_m \nearrow F$ s.v. a $(\forall m)(\int F_m \leq K)$. Dále víme, že $(\exists g_i, h_i \in L^+)\big((f_i = g_i - h_i \text{ s.v.}) \wedge (h_i \geq 0) \wedge (\int h_i < \frac{1}{2^i})\big)$.

Dále definujme $H_m \equiv \sum\limits_1^m h_i \nearrow H$. Podle věty (12) $(H \in L^+) \wedge (\int H = \sum\limits_1^\infty \int h_i < 1)$. Poslední nerovnost plyne ze způsobu zavedení funkcí h_i. Protože $g_i = f_i + h_i \geq 0$ s.v., můžeme do třetice zavést $G_m \equiv \sum\limits_1^m g_i \nearrow G$. Na základě předpokladů a definice funkcí h_i platí nerovnost

$$\int G_m = \sum_1^m \int g_i = \sum_1^m \int f_i + \sum_1^m \int h_i < K + 1$$

a podle věty (12) $G \in L^+$ a $\int G = \sum\limits_1^\infty \int g_i$. Definiční rozklad funkce F tedy může být $G - H$, čímž je definován i integrál

$$\int F = \int G - \int H = \lim_{m\to\infty} \int \left(\sum_1^m g_i - \sum_1^m h_i\right) = \lim_{m\to\infty} \int \sum_1^m (g_i - h_i) = \sum_1^\infty \int f_i$$

Věta 15: Monotónní limita funkcí z L

Uvažujme posloupnost $\{f_i\}_1^\infty$ funkcí z L, $f_i \nearrow f$ s.v., $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall i \in \mathbb{N})(\int f_i \leq K)$. Pak $f \in L$ a $\int f = \lim \int f_i$

Důkaz: Pro $k \in \mathbb{R}$ definujme funkce $\varphi_k \equiv f_{k+1} - f_k \geq 0$ s.v., čili $f_k - f_1 = \sum\limits_1^k \varphi_i$. Na řadu $\sum\limits_1^\infty \varphi_i$ můžeme použít Beppo–Leviho větu (ověřte předpoklady) a obdržíme tak

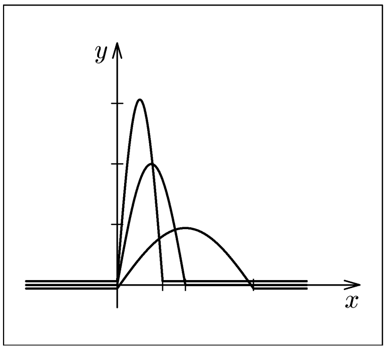
$$\int (f - f_1) = \int (\lim f_k - f_1) = \int \sum_1^\infty \varphi_i = \sum_1^\infty \int \varphi_i = \lim \left(\int f_k - \int f_1\right),$$

[11] Obě tato tvrzení jsme ověřovali v minulém ročníku.

[12] Není-li vám to zřejmé, dokažte si to. Zvolte k f^+ vhodnou minorantu, například vepisujte do oblouků sinusovky rovnoramenné trojúhelníky, převeďte problém na součet řady a ukažte, že tato řada diverguje.

[13] Po Lebesgueovi, podobně jako například po Cauchym nebo Eulerovi, je pojmenováno několik vět, proto nebuďte zmateni, budeme-li o kus dál říkat Lebesgueova věta něčemu docela jinému.

[14] Pozor! To neznamená, že se liší od nějaké spojité funkce na množině nulové míry! Viz Dirichletova funkce.



Obr. 5: Příklad $f_n \to f$, $\int f_n \not\to \int f$.

odkud odečtením konstanty $\lim \int f_1$ dostáváme tvrzení věty.

P o z n á m k a: Podle věty (13) víme, že $f = 0$ s.v. implikuje $\int f = 0$. Jde tato implikace obrátit?

Věta 16:
Nechť $f \in L$, $f \geq 0$, $\int f = 0$. Pak $f = 0$ s.v.

Důkaz: Definujme posloupnost $F_k \equiv kf$. Tato posloupnost splňuje předpoklady věty (15) (je neklesající, $F_k \in L$, $\int F_k = k \int f = 0$), podle věty (13) je tedy její limita F skoro všude konečná. Jelikož ale $F(x) = \lim F_k(x) = \infty$, je-li $f(x) > 0$, je množina $\{x | f(x) > 0\}$ míry nula, tudíž $f = 0$ s.v.

Věta 17: Fatouovo lemma

1. Nechť $f_k \geq 0$, $f_k \in L$, $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{N})(\int f_k \leq K)$, $f_k \to f$ s.v.. Pak $f \in L$, $\int f \leq K$.
2. Nechť $f_k \in L$, $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{N})(\int |f_k| \leq K)$, $f_k \to f$ s.v.. Pak $|f| \in L$, $\int |f| \leq K$.

Lemma:
Nechť $f_k, g_k \in L$, $f_0, g_0 \in L$, $(\forall k \in \mathbb{N})\big((f_k \geq f_0) \wedge (g_k \leq g_0)\big)$. Pak $F \equiv \inf\{f_1, f_2, \ldots\} \in L$, $G \equiv \sup\{g_1, g_2, \ldots\} \in L$.

Důkaz: Definujme posloupnost $G_k \equiv \max\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$. Podle věty (13) $G_k \in L$, dále zřejmě $G_k \nearrow G$. Protože $(\forall k)(g_k \leq g_0)$, je i $G_k \leq g_0$, což podle věty (13) znamená $\int G_k \leq \int g_0$. Posloupnost G_k splňuje požadavky věty (15), tedy $G \in L$. Symetrické tvrzení se dokáže obdobně.

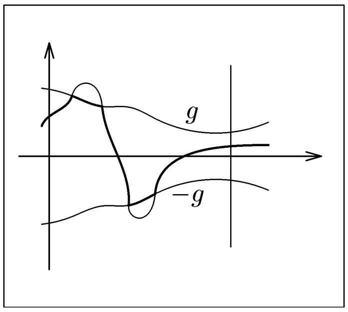
Důkaz věty:

1. Definujme posloupnost $F_k \equiv \inf\{f_k, f_{k+1}, \ldots\}$. Podle lemmatu $F_k \in L$, zřejmě $F_k \nearrow f$ s.v. a $\int F_k \leq \int f_k \leq K$. To jsou opět předpoklady věty (15), tudíž $f \in L$, $\int f = \lim \int F_k \leq K$.
2. Stačí použít bod 1 pro posloupnost $\{|f_k|\}_1^\infty$.

Příklad: Pro použití Fatouova lemmatu stačí, aby posloupnost f_i pouze konvergovala (nikoliv tedy monotónně konvergovala). Za to ovšem dokážeme $\int f$ pouze omezit a nikoliv spočítat jeho hodnotu. Příkladem budiž posloupnost $f_n = n \sin nx$ s tím, že f_n je nenulové pouze na intervalu $(0, \pi/n)$ (viz obrázek). Jak brzy ukážeme, lze Lebesgueův integrál počítat pomocí Riemannova integrálu. Vidíme, že $f_n \to 0$, ale zatímco $\int f = 0$, neplatí $2 \equiv \int f_n \not\to 0$.

Věta 18: Lebesgue
Nechť $\{f_k\}_1^\infty$ je posloupnost funkcí z L, $f_k \to f$, se společnou integrovatelnou majorantou $g \in L$, $(\forall k)(|f_k| \leq g)$. Pak $f \in L$ a $\int f = \lim \int f_k$.

Důkaz: Označme $F_k = \inf\{f_k, f_{k+1}, \ldots\} \nearrow f$ s.v., $G_k = \sup\{f_k, f_{k+1}, \ldots\} \searrow f$ s.v.. Podle předpokladů $-g \leq F_k \leq f_k \leq G_k \leq g$, přejdeme-li k integrálům, pak $-\int g \leq \int F_k \leq \int f_k \leq \int G_k \leq \int g$. Podle věty



Obr. 6: Funkce $\max\{\min\{f,g\},-g\}$.

(15) $\lim\int F_k = \lim\int G_k = \int f$ a podle věty o dvou strážnících pak $\lim\int f_n = \int f$.

Věta 19:
Nechť $f_i \in L$, $f_i \to f$ s.v.

1. Nechť $(\exists g,h \in L)(\forall i \in \mathbb{N})(g \le f_i \le h)$. Pak $f \in L$, $\int f = \lim\int f_i$.
2. Nechť $(\exists g \in L)(|f| \le g)$. Pak $f \in L$.

Důkaz:

1. Důsledek Lebesgueovy věty.
2. Definujme $F_i \equiv \max\{\min\{f_i,g\},-g\}$. Geometricky to znamená, že z f_i „ořízneme“ úseky vybočující z pásu od $-g$ do g a funkční hodnoty tam nahradíme funkčními hodnotami g resp. $-g$ (viz obrázek). Sporem se snadno ukáže, že $F_i \to f$ s.v. Posloupnost $\{f_i\}_1^\infty$ splňuje předpoklady Lebesgueovy věty, z níž plyne kýžené tvrzení.

§6. Prostor s normou definovanou pomocí Lebesgueova integrálu

Definice 14: Prostor $L_1(\mathbb{R}^n)$
Nechť L je prostor lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^n$. Na tomto prostoru zavedeme relaci ekvivalence[15] $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.v.. Tato relace definuje jednoznačný rozklad na třídy ekvivalence. Prostor $L_1(\mathbb{R}^n) \equiv L/\sim$ definujeme jako prostor tříd ekvivalence, na němž definujeme algebraické operace pomocí reprezentantů.[16] Podobně definujeme $|f|, f^+, f^-, \max\{f,g\}, \sup\{f_i\}$ pro spočetnou množinu $\{f_i\}$. Na $L_1(\mathbb{R}^n)$ definujeme normu prvku f vztahem $||f||_1 \equiv \int |f| \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Striktně vzato bychom měli ověřit korektnost definice, ale čtenář jistě chápe, že by to byla jen zdlouhavá formální práce. Ověříme pouze, že $||.||_1$ je skutečně norma:

1. $||f||_1 \ge 0$, $||f||_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ plyne z vět (13) a (16).
2. Linearita $||\alpha f||_1 = \alpha||f||_1$ plyne z věty (13).
3. Trojúhelníkovou nerovnost obdržíme také z věty (13): $||f+g||_1 = \int|f+g| \le \int|f| + \int|g| = ||f||_1 + ||g||_1$

Úmluva: Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme index u normy vynechávat a psát jen $||.||$.

Věta 20: Riesz–Fischer
Prostor $L_1(\mathbb{R}^n)$ je úplný normovaný vektorový prostor (Banachův prostor).

Důkaz: Dokážeme pouze vlastnost úplnosti, zbytek je triviální. Chceme ověřit, zda všechny cauchyovské posloupnosti konvergují k nějakému prvku z prostoru.

[15] Tj. relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
[16] Součet tříd je třída příslušná součtu libovolných dvou funkcí ze sčítanců apod.

Uvažujme cauchyovskou posloupnost $\{f_i\}_1^\infty$ funkcí z $L_1(\mathbb{R}^n)$, čili $(\forall\varepsilon > 0)(\exists i_0 \in \mathbb{N})(\forall i, j \geq i_0)(\|f_i - f_j\| < \varepsilon)$. Nejprve sestrojíme kandidáta na její limitu. Jistě existuje rostoucí posloupnost indexů $\{i_k\}_1^\infty$, splňující $(\forall i \geq i_k)(\|f_i - f_{i_k}\| < \frac{1}{2^k})$, speciálně $\|f_{i_{k+1}} - f_{i_k}\| < \frac{1}{2^k}$. Definujme posloupnost $F_r \equiv \sum\limits_{k=1}^{r} |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}|$ To je rostoucí posloupnost z $L_1(\mathbb{R}^n)$, respektive z L, chápeme-li symboly f_i jako reprezentanty a ne jako třídy. Navíc

$$\int F_r = \sum_{k=1}^{r} \int |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}| = \sum_{k=1}^{r} \|f_{i_{k+1}} - f_{i_k}\| < 1,$$

což podle Beppo–Leviho věty znamená, že $F \equiv \lim F_r \in L$. Podle trojúhelníkové nerovnosti a věty o limitním přechodu v nerovnosti

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(f_{i_{k+1}} - f_{i_k})\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{i_{k+1}} - f_{i_k}\right| = F \in L,$$

Funkce vlevo je s.v. rovna $|\lim f_{i_{k+1}} - f_{i_1}|$ a je z L, což podle věty (13) znamená, že je s.v. konečná. Tedy existuje $\lim f_{i_{k+1}}$ s.v. Tuto limitu nazveme f a ukážeme o ní, že je z $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Zvolme p pevné. Posloupnost $\{f_{i_p} - f_{i_k}\}_1^\infty$ konverguje k $\{f_{i_p} - f\}$ s.v. Pro $k > p$ můžeme její členy v absolutní hodnotě omezit nerovnostmi

$$\left|f_{i_p} - f_{i_k}\right| \leq \sum_{m=p}^{k-1} \left|f_{i_m} - f_{i_{m+1}}\right| \leq F.$$

Funkce F je integrovatelná, posloupnost tedy splňuje předpoklady Lebesgueovy věty, z níž plyne $f_{i_p} - f \in L$ neboli $f \in L$. Funkce f_{i_k} jsme si zavedli tak, aby $\|f_{i_p} - f_{i_k}\| < \frac{1}{2^p}$. Lebesgueův integrál je podle věty (13) absolutně konvergentní, díky čemuž můžeme použít Lebesgueovu větu i na posloupnost absolutních hodnot:

$$\lim_{k\to\infty} \left\|f_{i_p} - f_{i_k}\right\| = \lim_{k\to\infty} \int \left|f_{i_p} - f_{i_k}\right| = \int \left|f_{i_p} - \lim_{k\to\infty} f_{i_k}\right| = \left\|f_{i_p} - f\right\| \leq \frac{1}{2^p}$$

V závěru jsme učinili limitní přechod v nerovnosti.

Konečně ukažme, že f je limitou celé posloupnosti. Ta je cauchyovská — $(\forall\varepsilon > 0)(\exists i_0 \in \mathbb{N})(\forall i, j \geq i_0)(\|f_i - f_j\| < \frac{\varepsilon}{2})$. Zároveň jsme ukázali, že $(\forall\varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\|f_{i_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2})$. Z trojúhelníkové nerovnosti potom plyne $\forall i \geq i_k \geq i_0,\ k \geq k_0$

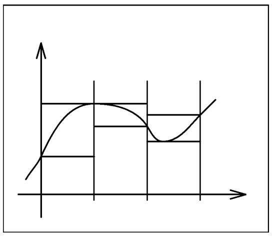
$$\|f_i - f\| \leq \left\|f_i - f_{i_{k_0}}\right\| + \left\|f_{i_{k_0}} - f\right\| < \varepsilon.$$

§7. Jak se Lebesgueův integrál počítá

Poznámka: Dosud jsme se zabývali zejména otázkou, za jakých přepdokladů je funkce lebesgueovsky integrovatelná. Jediný způsob výpočtu Lebesgueova integrálu, který zatím známe, je výpočet přímo z definice. Následující věta říká, že lebesgueovsky integrovatelné funkce jsou nadmnožinou funkcí riemannovsky integrovatelných (zde máme na mysli vlastní Riemannův integrál) a hodnoty obou integrálů jsou stejné.

Věta 21: Souvislost Riemannova a Lebesgueova integrálu
Nechť jsou $a, b \in \mathbb{R}$ a funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je omezená. Nechť dále existuje Riemannův integrál funkce f na $\langle a, b\rangle$ (značme $(R)\int\limits_a^b f$). Definujme funkci F na intervalu $\langle a, b\rangle$ rovnu funkci f a jinde rovnu nule. Potom je $F \in L$ a platí $(L)\int\limits_a^b F = (R)\int\limits_a^b f$.

Důkaz: Označme D_n posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ z definice Riemannova integrálu, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že následující dělení je vždy zjemněním předchozího. Norma dělení $\nu(D_n)$ jde



Obr. 7: Jednoduché funkce m_i, M_i v $\mathbb{R}_1$.

(monotónně) k nule. Definujme jednoduché funkce h_n a H_n následujícím předpisem (viz obrázek):

$$h_n = \sum m_i \chi_{\langle x_{i-1}, x_i)} \qquad m_i = \inf_{\langle x_{i-1}, x_i)} f(x) \qquad D_n = \langle x_0, \ldots, x_{k_n} \rangle$$

$$H_n = \sum M_i \chi_{\langle x_{i-1}, x_i)} \qquad M_i = \sup_{\langle x_{i-1}, x_i)} f(x) \qquad D_n = \langle x_0, \ldots, x_{k_n} \rangle$$

Z definice integrálu jednoduchých funkcí ihned plynou rovnosti:

$$\int h_n = s(f, D_n) \qquad \int H_n = S(f, D_n)$$

Posloupnost funkcí $h_n \in L$ (resp. $H_n \in L$) jde monotónně (D_n jsou postupná zjemnění) k funkci F_1 (resp. F_2), neboť $h_n \leq H_0$ ($H_n \geq h_0$). Lebesgueův integrál z těchto funkcí je omezen (například Riemannovým integrálem funkce f), tedy funkce $F_1 \in L$ (resp. $F_2 \in L$) a navíc platí $(L)\int F_1 = \lim\limits_{n\to\infty} (L)\int h_n = (R)\underline{\int} f$ (resp. $(L)\int F_2 = \lim\limits_{n\to\infty} (L)\int H_n = (R)\overline{\int} f$) dle Beppo–Leviho věty.
Vzhledem k tomu, že $h_n \leq F \leq H_n$, musí platit pro limity posloupností funkcí h_n a H_n platit: $F_1 \leq F \leq F_2$. Funkce $F_2 - F_1$ je nezáporná lebesgueovsky integrovatelná funkce, jejíž integrál je roven nule (horní a dolní Riemannův integrál si jsou rovny). Potom ale musí dle věty (16) platit $F_2 - F_1 = 0$ s.v. a tedy $F_1 = F_2 = F$ s.v. Potom ale už F je lebesgueovsky integrovatelná funkce a její integrál je roven integrálu funkce F_1, který je roven Riemannovu integrálu funkce f.

Věta 22: Fubiniho
Nechť jsou $n, k, p \in \mathbb{N}$, že platí $n = k + p$. Zápisem $x = (x', x'')$, kde $x \in \mathbb{R}_n, x' \in \mathbb{R}_k, x'' \in \mathbb{R}_p$ budeme rozumět, že prvních k složek x je rovno složkám x' a zbylé jsou rovny x''. Nechť je dále $f(x) : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}^*$, lebesgueovsky integrovatelná. Potom platí:

1. Pro každé $x'' \in \mathbb{R}_p$ pevné, je funkce $\varphi(x') = f(x', x'')$ lebesgueovsky integrovatelná na $\mathbb{R}_k$.
2. Označím-li $F(x'') = \int\limits_{\mathbb{R}_k} \varphi(x', x'')\,\mathrm{d}x'$, potom je F jako funkce x'' lebesgueovsky integrovatelná na $\mathbb{R}_p$.
3. Pro integrál původní funkce platí:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}_p} F(x'')\,\mathrm{d}x'' = \int\limits_{\mathbb{R}_p} \Big[\int\limits_{\mathbb{R}_k} \varphi(x', x'')\,\mathrm{d}x' \Big]\,\mathrm{d}x''.$$

Idea důkazu: Větu dokážeme nejprve pro elementární funkce (jádrem bude rovnost $V(I) = V(I') \cdot V(I'')$ pro $I = I' \times I''$), pak použijeme limitní přechod. Formální důkaz provádět nebudeme.

Příklad: Uvažme Dirichletovu funkci, která je definovaná na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ předpisem $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ a $f(x) = 0, x \in \mathbb{Q}$. Vzhledem k tomu, že množina, kde je funkce nulová na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je spočetná, je míry nula. Potom ale je integrál Dirichletovy funkce roven integrálu funkce, která je na tomto intervalu rovna jedné, a integrál Dirichletovy funkce se dle věty o souvislosti Riemannova a Lebesguova integrálu rovná 1.

Věta 23: Postačující podmínka pro integrovatelnost
Nechť $f \geq 0$, nechť existují $h_n \in H$, které $h_n \to f$ s.v. . Nechť je dále $\int\limits_{\mathbb{R}_k} \int\limits_{\mathbb{R}_p} f(x', x'')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}x''$ konečný. Potom je f Lebesguovsky integrovatelná na $\mathbb{R}_{k+p}$.

Idea důkazu: Při integraci v $\mathbb{R}_n$ jsme často odkázáni pouze na Fubiniho větu a počítání Riemannových integrálů v $\mathbb{R}$. Přitom ovšem nevíme, zda původní funkce v $\mathbb{R}_n$ byla integrovatelná, což je předpoklad Fubiniho věty. Proto je užitečná věta (23). Zkonstruujeme nejprve posloupnost funkcí $f_n \to f$, o které ukážeme, že $f_n \in L$. Můžeme pak použít jednak Fubiniho větu a dále větu Lebesgueovu.

Důkaz: Označme $H_n = \max\{h_1, \dots, h_n\} \in L$. Dále označme $\varphi_n = \min\{f, H_n\} \in L$ (podle Lebesgueovy věty), neboť $|\varphi_n| \leq H_n$ (přičemž $H_n \nearrow f^* \geq f$) a $\varphi_n = \lim\limits_{m\to\infty} \min\{h_m, H_n\}$. Nyní si povšimněme, že $\varphi_n \nearrow f$. Abychom dokázali platnost $f \in L$ stačí dle Beppo–Leviho věty ověřit omezenost integrálu z φ_n, což ukážeme za použití Fubiniho věty následovně:

$$\int \varphi_n(x', x'')\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}_k} \int\limits_{\mathbb{R}_p} \varphi_n(x', x'')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}x'' \leq \int\limits_{\mathbb{R}_k} \int\limits_{\mathbb{R}_p} f(x', x'') dx' dx'' \in \mathbb{R}.$$

§8. Míra: měřitelné funkce, měřitelné množiny, míra, σ-algebry

Poznámka: Zabývejme se nyní následující otázkou: je-li f funkce lebesgueovsky integrovatelná na $\mathbb{R}_n$, za jakých podmínek bude platit, že pro množinu $M \subset \mathbb{R}$, je funkce F definovaná předpisem $F(x) = f(x)\chi_M(x)$ integrovatelná? Funkce F je definovaná na množině M hodnotami funkce f a vně této množiny je rovna nule. Množina M nemůže být libovolná — protipříklad již brzy zkonstruujeme.

Definice 15: Měřitelná funkce
Funkci $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}^*$ nazveme měřitelnou, pokud existuje taková posloupnost jednoduchých funkcí $h_n \in H$, že platí $h_n \to f$. Množinu všech měřitelných funkcí budeme značit M.

Poznámka k větě (19): Je-li f měřitelná a existuje-li její integrovatelná majoranta, je f i lebesgueovsky integrovatelná.

Poznámka o množině M: M je lineární vektorový prostor, jak jistě čtenář sám snadno z definice ověří. L je podmnožinou M.

Věta 24: Základní vlastnosti měřitelných funkcí

1. $f_n \in \mathrm{M}, f_n \to f \Longrightarrow f \in \mathrm{M}$,
2. $f, g, \{h_n\} \in \mathrm{M} \Longrightarrow |f|, \max\{f,g\}, \min\{f,g\}, \sup\{h_n\}, \inf\{h_n\}, \liminf h_n, \limsup h_n, f+g, fg \in M$

Nechť $F(x_1, \dots, x_n)$ je spojitá na $\mathbb{R}_n$, $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{M}(\mathbb{R}_p)$ s.v. konečné, potom funkce $F(f_1(y), \dots, f_n(y)) \in \mathrm{M}(R_p)$.

3.

4. Je-li funkce spojitá je i měřitelná.

Poznámka: Důkaz této věty je vynechán. Z větší části je tvořen pouze mechanickým užíváním definic a jednoduchých vlastností zkoumaných funkcí. Tomuto konstatování se však vymyká třetí část věty, jejíž důkaz může čtenář nalézt v příslušné literatuře.

Poznámka o skládání měřitelných funkcí: Každou funkci lze vyjádřit jako složení dvou měřitelných funkcí. Ne každé složení měřitelných funkcí je tedy měřitelná funkce.

P o z n á m k a o integrovatelnosti posunuté funkce: Je-li funkce f integrovatelná (na $\mathbb{R}_n$) je i funkce $f_a(x) = f(x+a)$ integrovatelná a hodnoty integrálů jsou si rovny.

Příklad: Sestrojme nyní neměřitelnou funkci:
Uvažujme interval $\langle 0,1\rangle$. Uvažme systém podmnožin M tohoto intervalu takový, že platí $\big[(\forall N \in M)(x \in N, y \in N)\big] \iff (x - y \in \mathbb{Q})$. Čtenář jistě snadno ověří, že prvky tohoto systému podmnožin jsou vesměs disjunktní. Z každé takové množiny vyberu jeden prvek a množinu těchto prvků označím A. Dále označím $A_q = \{x + q | x \in A\}$ pro $q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1, 1\rangle$. Vzhledem ke spočetnosti $\mathbb{Q}$ je systém množin A_q spočetný. Pro jeho (spočetné) sjednocení $B = \cup_q A_q$ tedy platí:

$$\langle 0,1\rangle \subset B \subset \langle -1,2\rangle$$

Ověřte levou inkluzi. Zajímá nás nyní hodnota integrálu funkce χ_B (předpokládejme, že B je měřitelná; pak χ_B je integrovatelná). Je-li hodnota integrálu χ_A nulová, je A množina míry nula, potom ale spočetné sjednocení A_q je také míry nula, což je spor, neboť interval $\langle 0,1\rangle$, který určitě není míry nula, je jeho (nevlastní) podmnožinou.
Nechť naopak je hodnota tohoto integrálu nenulová — označme ji K. Potom integrál funkce χ_B není konečný, neboť je větší než nK, pro libovolné přirozené n. Což je spor, neboť tento integrál lze odhadnout shora integrálem z funkce $\chi_{\langle -1,2\rangle}$, který je roven třem.

Definice 16: Měřitelná množina, míra
Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}_n$ je měřitelná, pokud je funkce χ_M měřitelná. Míru (měřitelné) množiny pak definujeme následovně: $\mu(M) = \int \chi_M$, pokud je $\chi_M \in L$, jinak $\mu(M) = +\infty$. Systém všech měřitelných množin označme $\Lambda(\mathbb{R}_n)$. Dále označme $L(M)$ lebesgueovsky integrovatelné funkce na M.

P o z n á m k a: Je-li $M \in \Lambda$ a $f \in L$, potom je i $\chi_M f \in L$, dle Lebesgueovy věty (f je integrovatelná majoranta).

P o z n á m k a: Míra množiny μ je funkce z jistého systému podmnožin $\mathbb{R}_n$ do $\mathbb{R}^*$.

Definice 17: Systémy podmnožin a funkce na nich
Nechť X je daná množina, Σ systém jejích podmnožin. Řekneme, že Σ je σ-okruh, pokud platí:

1. $A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \setminus B, A \cup B \in \Sigma$,
2. $A_n \in \Sigma \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$.

Pokud navíc $X \in \Sigma$, pak je Σ σ-algebrou. Řekneme, že množinová funkce $\phi : X \to \mathbb{R}^*$ je

1. nezáporná, pokud $\phi(M) \geq 0, \forall M \in \Sigma$,
2. σ-aditivní, pokud $\phi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \phi(A_i)$ pro $A_i \in \Sigma$ po dvou disjunktní,
3. míra, pokud je nezáporná a σ-aditivní,
4. úplná míra, pokud platí $(A \subset B \in \Sigma) \wedge \big(\phi(B) = 0\big) \Longrightarrow (A \in \Sigma)$.

P o z n á m k a o Kolmogorově modelu pravděpodobnosti: Je-li (X, Σ, μ) σ-algebra a μ úplná míra na Σ, kde X je množina všech možných elementárních jevů, Σ množina podmnožin X (například potenční množina), pak pravděpodobnost, že nastane daný jev $M \in \Sigma$, lze definovat jako $\mu(M)$.

P o z n á m k a o alternativní definici Lebesgueova integrálu: Alternativně lze nejprve vybudovat pojem míry v $\mathbb{R}_n$, tj. vytvořit trojici $(X, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}_n, \Lambda, \mu)$, následně definovat měřitelné funkce a poté i funkce jednoduché — ty však nabývají jednu hodnotu nikoliv na intervalu, ale na měřitelné množině. Ty využiji k definici Lebesgueova integrálu.

Poznámka o množinách míry nula: Již dříve jsme definovali význam výroku „množina je míry nula“. Nyní máme funkci, kterou označujeme jako míra. Ověřme, že pouze pro množiny míry nula nabývá míra nulové hodnoty:

$$\mu(M) = 0 \iff \int \chi_M = 0 \iff \chi_M = 0 \text{ s.v.} \iff M \text{ je míry nula}$$

Úmluva: Je-li funkce f definována s.v. na množině M, poté ji automaticky dodefinujeme nulou vně množiny M a případně i v bodech množiny M, kde není definována. Hodnota integrálu takto nově definované funkce přes $\mathbb{R}_n$ bude stejná jako hodnota integrálu původní funkce f přes množinu M.

Poznámka o integrálu komplexních funkcí: Integrálem komplexní funkce $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{C}$ bude součet následujících dvou integrálů, pokud má pravá strana rovnosti smysl:

$$\int_M f = \int_M \mathrm{Re}(f) + i \int_M \text{Im f}.$$

8.1 Vlastnosti míry a měřitelných množin

Věta 25:
Množina všech měřitelných množin Λ je σ-algebra a μ je míra na Λ.

Důkaz: Nechť provede čtenář sám tím, že ověří platnost jednotlivých podmínek v definici (17).

Důsledek:

1. $\forall M, N \in \Lambda : M \subset N \Longrightarrow \mu(M) \le \mu(N)$
2. $\forall M, N \in \Lambda : \mu(M \cup N) + \mu(M \cap N) = \mu(M) + \mu(N)$
3. $\forall M_n \in \Lambda : M_n \subset \mathrm{M}_{n+1} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_n)$
4. $\forall M_n \in \Lambda : M_{n+1} \subset \mathrm{M}_n \Longrightarrow \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_n)$

Tyto důsledky si mohou zájemci zkusit dokázat jako cvičení. Rovnosti zkuste dokazovat jako dvě neostré nerovnosti.
Poznámka: Platí, že $\mathbb{R}_n \in \Lambda$, ale neplyne to z konstrukce Lebesgueova integrálu. K tomu, aby funkce $f(x) = 1$ byla měřitelná, je postačující následující podmínka:

1. $\forall h \in H : \min\{h, 1\} \in H$
2. $\exists h_n \ge 0, h_n \in H, \int h_n > 0; \forall x : \sup\limits_n h_n(x) > 0$

Poznámka o borelovských množinách: Je-li množina M otevřená nebo uzavřená, je měřitelná. Vzhledem k tomu, že Λ je σ-algebra, je i spočetné sjednocení nebo průnik těchto množin měřitelný. Nechť tedy O_n jsou otevřené množiny, množinu všech spočetných průniků otevřených množin označme G_δ — G se obvykle označuje otevřená množina, δ v indexu reprezentuje průnik[17]. Množinu všech spočetných sjednocení prvků G_δ označme $G_{\sigma\delta}$ — σ reprezentuje sjednocení[18]. Takto můžeme postupovat dále a tvořit množiny $G_{\delta\sigma\delta} \dots$ Množinu všech množin, které vzniknou konečným počtem sjednocení nebo průniků

[17] Z něm. Durchschnitt.
[18] Opět z něm. Summe.

spočetně otevřených množin označme B a tyto množiny nazvěme borelovské množiny. Všechny borelovské množiny jsou měřitelné, neboť Λ je σ-okruh. Místo otevřených množin lze uvážit i množiny uzavřené a získáme stejnou množinu množin. Množina B je nejmenší vzhledem k inkluzi σ-algebra obsahující všechny otevřené množiny. Stejně tak je nejmenší σ-algebra obashující všechny uzavřené množiny.

Poznámka o měřitelnosti množin míry nula: Každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná a má míru nula. Navíc však lze dokázat, že kdyby některá podmnožina M množiny míry nula nebyla měřitelná, lze ji do daného σ-okruhu přidat, tj. nahradit uvažovaný σ-okruh nejmenším σ-okruhem, který jej obsahuje a navíc obsahuje množinu M, a definovat míru všech množin N, které neobsahoval původní σ-okruh jako míru množiny $N \setminus M$.

Poznámka o množinách míry nula: Je-li $F : \Omega \to \mathbb{R}_n$, $\Omega \subset \mathbb{R}_k$, $k < n$, F spojitě diferencovatelné, potom platí, že $\mu\big(F(\Omega)\big) = 0$.

Poznámka (Sardova věta): Nechť $F : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_k,\ k < n,\ F \in C^1(\mathbb{R}_n)$. Potom množina $M = \big\{x \in \mathbb{R}_n \big|\ h\big[\mathrm{Jac}\big(F(x)\big)\big] < k\big\}$, tj. množina obrazů kritických bodů[19] zobrazení F, má míru nula, tj. $\mu(M) = 0$. Předchozí poznámka je důsledkem této věty.

Poznámka o hranicích množin: Označme hranici množiny M jako ∂M. Často je ∂M hladká, tzn. je lokálně grafem funkce $f : \mathbb{R}_{n-1} \to \mathbb{R}_n$, většinou má i nulovou míru (ne vždy). Platí, že je-li $\mu(\partial M) = 0$ a M je otevřená, potom libovolná množina N taková, že $M \subset N \subset \overline{M}$, je měřitelná.

Poznámka - varování: Existuje spojité zobrazení z $\langle 0, 1\rangle$ do $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Toto zobrazení není bijektivní a nesplňuje podmínky jedné z předchozích poznámek, neboť není spojitě diferencovatelné.

§9. Závislost integrálu na integračním oboru

Věta 26:

1. (a) $f \in L(M)$, $M \in \Lambda$, $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \in \Lambda$ po dvou disjunktní, potom platí: $\int\limits_M f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f$

   (b) f měřitelná,$M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \in \Lambda$ po dvou disjunktní, $f \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f$ konečná, potom platí, že $f \in L$

2. f měřitelná, M míry nula, potom $\int\limits_M f = 0$

3. $f \in L(M)$, $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \in \Lambda$, $M_i \subset M_{i+1}$, potom platí $\int\limits_M f = \lim\limits_{i \to \infty} \int\limits_{M_i} f$

4. $f \in L(M)$, $M = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \in \Lambda$, $M_{i+1} \subset M_i$, potom platí $\int\limits_M f = \lim\limits_{i \to \infty} \int\limits_{M_i} f$

5. f měřitelná, $M \in \Lambda$, $\mu(M)$ konečná a existuje $K \in \mathbb{R}^+$, že $\forall x \in M : |f(x)| \leq K$, potom platí, že $f \in L(M)$ a $|\int\limits_M f| \leq K\mu(M)$.

6. $f \in L(M)$, $f \geq 0$, M měřitelná, $N \subset M$ měřitelná, potom $\int\limits_N f \leq \int\limits_M f$.

Důkaz:

1. (a) Integrály $\int\limits_{M_i} f$ existují dle Lebesgueovy věty, neboť funkce $|f|$ je pro ně integrovatelnou majorantou. Tvrzení o rovnosti $\int\limits_M f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f$, plyne z téže věty, neboť $\sum\limits_{i=1}^{k} \chi_{M_i} f \to \chi_M f$.

[19] Jacobián má hodnost menší než k.

(b) Důkaz se provede analogicky jako v předchozí části použitím Beppo–Leviho věty, neboť $\sum_{i=1}^{k} \chi_{M_i} f \nearrow \chi_M f$ a omezenost je zaručena předpokladem konečnosti sumy $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{M_i} f$.

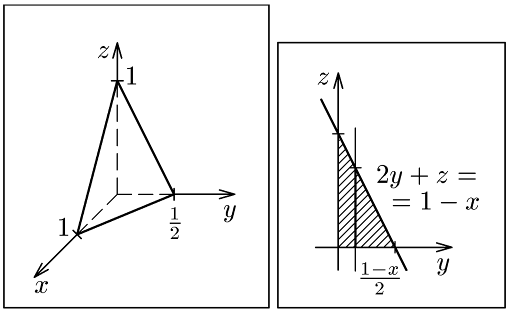
2. Triviální z definice.
3. Důkaz se provede přechodem k množinám $\widetilde{M_i} = M_i \setminus M_{i-1}$ a $\widetilde{M_1} = M_1$ a užitím již dokázané první části věty.
4. Plyne přímo z první a třetí části věty.
5. Existence integrálu je zaručena dle Lebesgueovy věty. Na množině M platí, že $|f(x)| \leq K$, a tedy
$$\left| \int_M f \right| \leq \int_M |f| \leq K \int \chi_M \leq K\mu(M).$$
6. Plyne přímo z nezápornosti f a následující rovnosti:
$$\int_N f \leq \int_N f + \int_{M \setminus N} f = \int_M f.$$

§10. Výpočet Lebesgueova integrálu: věta o substituci

P o z n á m k a o substituování: Nejprve si připomeňme substituovaní při integrování funkcí jedné proměnné:
$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$
za jistých předpokladů. Lze tedy očekávat, že při integrování funkcí více proměnných bude platit analogicky vztah:
$$\int_M f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\phi^{-1}(M)} f(\phi(x))(?)\,\mathrm{d}x$$
Předpokládejme nyní, že bychom integrovali funkci rovnou jedné po objemu rovnoběžnostěnu A. Tento rovnoběžnostěn bychom popsali funkcí ϕ z $\langle 0,1\rangle^n$. Poté by substituovaný integrál vypadal následovně ($|A|$ značí objem rovnoběžnostěnu).
$$|A| = \int_A 1\,\mathrm{d}y = \int_{\langle 0,1\rangle^n} 1|A|\,\mathrm{d}x.$$
O výpočtu objemu rovnoběžnostěnu hovoří následující poznámka.

P o z n á m k a o objemu rovnoběžnostěnu: Uvažme rovnoběžnostěn, parametricky popsaný jako $x = \sum_{i=1}^{n} c_i A_i$, kde $0 \leq c_i \leq 1$, $x, A_i \in \mathbb{R}_n$. Označme A matici se sloupci A_i. Grammovou maticí odpovídající matici A budeme rozumět maticí skalárních součinů jednotlivých sloupců matice A, tj. matici:
$$G = \begin{pmatrix} \langle A_1, A_1\rangle & \dots & \langle A_n, A_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_1, A_n\rangle & \dots & \langle A_n, A_n\rangle \end{pmatrix} = A^T A$$
Pro objem $V(A)$ rovnoběžnostěnu poté platí $V(A) = \sqrt{\det G} = |\det A|$, jak známo z lineární algebry.

Věta 27: o substituci
Nechť $\phi : \mathbb{R}_n \mapsto \mathbb{R}_n$ je prosté regulární zobrazení z $O \subset \mathbb{R}_n$ na $\Omega = \phi(O) \subset \mathbb{R}_n$, O a Ω otevřené. Nechť M je měřitelná množina funkce f je měřitelná na Ω, potom platí:
$$\int_{\phi(M)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_M f\big(\phi(x)\big)|\det\ \mathrm{Jac}\ \phi(x)|\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 8: Čtyřstěn a řez kolmo na osu x

Poznámka: Větu dokazovat nebudeme, důkaz je poměrně složitý.

k výpočtu Lebesgueova inetgrálu Uvažujme funkci $f \in L(\mathbb{R}_k \times \mathbb{R}_p)$ a mějme za úkol spočítat $\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}_p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$. Nechť je funkce f nenulová pouze na měřitelné množině M — je ovšemže možné, že $M = \mathbb{R}_k \times \mathbb{R}_p = \mathbb{R}_m$. Potom platí $\int\limits_{\mathbb{R}_m} f = \int\limits_M f$. Označme dále $P(M)$ průmět množiny M do $\mathbb{R}_p$, tj. $M = \{y \in \mathbb{R}_p |\ \exists x \in \mathbb{R}_k; (x,y) \in M\}$, potom je původní integrál roven $\int\limits_{P(M)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$. Dále označme M_{y_0} řez množiny M (nad)rovinou o rovnici $y = y_0$, tj. množiny $M_y = \{x \in \mathbb{R}_k |\ (x,y) \in M\}$. Integrál je potom roven i $\int\limits_{P(M)} \left(\int\limits_{M_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$, čímž jsme výrazně zmenšili množinu, přes kterou integrujeme.

Příklad: Zkusme nyní vypočítat x-ovou souřadnici těžiště homogenního čtyřstěnu, jehož podstavu tvoří pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách délky 1 a 1/2. Jeho výška je 1 a hrana vycházející z vrcholu podstavy naproti přeponě je kolmá k rovině podstavy (viz obrázek). Tento čtyřstěn je určen tedy rovnicemi:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad z \geq 0 \qquad x + 2y + z \leq 1$$

Integrál přes celý prostor lze pak upravovat (řez kolmo na x viz též na obrázku):

$$\int_{\mathbb{R}^3} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{1-x}{2}} \int\limits_0^{1-x-2y} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{1-x}{2}} x - x^2 - 2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [xy - x^2y - xy^2]_0^{\frac{1-x}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 (x - x^2)\frac{1-x}{2} - x\frac{(1-x)^2}{2^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 (2x - x)(1 - 2x + x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x - 2x^2 + x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{48}.$$

Pokud výsledek vydělíme objemem čtyřstěnu, získáme hledanou polohu těžiště.

§11. Integrály závislé na parametru: záměna integrálu a limity či derivace

Poznámka o integrálu závislém na parametru: Uvažujme měřitelné množiny M, A, $M \subset \mathbb{R}_n$ a $A \subset \mathbb{R}_p$. Nechť funkce $f \in L(M \times A)$, potom definujme funkci $\varphi(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$. Funkce $\varphi(\alpha)$ je hodnota integrálu funkce f, přičemž se funkce f, a tedy i hodnota integrálu z ní se může měnit v závislosti na parametru α.

Věta 28: Záměna limity a integrálu
Nechť

1. $A = U^*(\alpha_0) \subset \mathbb{R}_p, M \subset \mathbb{R}_n, M \in \Lambda$
2. $\forall \alpha \in A : f(x, \alpha)$ je měřitelná na M
3. Existuje $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(x, \alpha)$ s.v., její hodnotu označme $f(x)$
4. $\exists g(x) \in L(M); \forall A : |f(x, \alpha) \leq g(x)|$ s.v. na M

Potom platí $f(x) \in L(M)$ a navíc $\int f = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \int\limits_M f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x$.

Důkaz: Pro libovolnou posloupnost $\alpha_n \to \alpha_0$ jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty. Zejména $f(x)_\alpha \in L(M)$, $f_\alpha(x)$ jako limita je dle Heineho věty stejná pro libovolnou posloupnost $\alpha_n \to \alpha_0$, a dále platí $\int f = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_M f(x, \alpha_n)\, \mathrm{d}x$. Nyní ovšem z Heineho věty, chápeme-li hodnotu integrálu jako funkci α, plyne i druhá část tvrzení věty.

Poznámka o spojité funkci závislé na parametru: Nechť funkce $f(x, \alpha)$ je spojitá pro každé $\alpha \in A$ a existuje funkce $g(x) \in L(M)$, že $|f(x, \alpha)| \leq |g(x)|$. Potom jsou již splněny předpoklady předchozí věty a $\varphi(\alpha) = \int f\, \mathrm{d}x$ je spojitá v α_0.

Věta 29: Záměna limity a integrálu jinak
Nechť

1. $\alpha_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $A = U^*_-(\alpha_0)$, $M \subset \mathbb{R}_n, M \in \Lambda$
2. $\forall \alpha : f(x, \alpha) \in L(M)$
3. $\forall \alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta : f(x, \alpha) \leq f(x, \beta)$ s.v. na M
4. $\exists K \in \mathbb{R}; \forall \alpha \in A : \int f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x \leq K$

Potom existuje $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(x, \alpha)$ s.v. na M, označme ji $f(x)$ a dále platí $f(x) \in L(M)$ a navíc $\int f = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \int\limits_M f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x$.

Důkaz: Pro libovolnou neklesající posloupnost $\alpha_n \to \alpha_0$ jsou splněny předpoklady Beppo–Leviho věty. Zejména $f(x) \in L(M)$, $f(x)$ jako limita je dle Heineho věty stejná pro libovolnou posloupnost $\alpha_n \to \alpha_0$, a protože je lebesgueovsky integrovatelná, je i konečná s.v. na M. Dále platí $\int f = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_M f(x, \alpha_n)\, \mathrm{d}x$. Nyní ovšemže z Heineho věty, chápeme-li hodnotu integrálu jako funkci α plyne i druhá část tvrzení věty.

Poznámka o přechozí větě: Čtenář si jistě snadno sám zformuluje zbylé tři analogie předchozí věty, kdy posloupnost funkcí je klesající, resp. se počítá limita parametru zprava.

Věta 30: O derivaci podle parametru
Nechť

1. $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval, $M \subset \mathbb{R}_n$ je měřitelná
2. $\forall \alpha \in I$ je $f(x, \alpha)$ měřitelná
3. $\exists N \subset M$, $\mu(N) = 0$, $\forall x \in M \setminus N : \partial f / \partial \alpha(x, \alpha)$ je konečná $\forall \alpha \in I$
4. **důležité:** $\exists g \in L(M); \forall x \in M \setminus N : \forall \alpha \in I : |\partial f / \partial \alpha(x, \alpha)| \leq g(x)$
5. **a ještě navíc:** $\exists \alpha_0 \in I; f(x, \alpha_0) \in L(M)$

Potom platí:

1. $\forall \alpha \in I : f(x, \alpha) \in L(M)$
2. $\varphi(\alpha) = \int\limits_M f(x, \alpha) dx$, funkce $\varphi(\alpha)$ je diferencovatelná na I

3. $\varphi'(\alpha) = \int\limits_M \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx$

Důkaz: Nejprve ukažme první bod tvrzení. Dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě platí:

$$g(x,\alpha) = \frac{f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\xi),\ \xi \in (\alpha_0, \alpha)$$

Odtud však okamžitě plyne odhad pro absolutní hodnotu funkce $f(x,\alpha)$, pro α pevné:

$$|f(x,\alpha)| \le \left| f(x,\alpha_0) + \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\xi(\alpha)) \right| |\alpha - \alpha_0| \right| \le |f(x,\alpha_0) + |g(x)||\alpha - \alpha_0|,$$

čímž jsme nalezli integrovatelnou majorantu pro $f(x,\alpha)$, opírajíce se ovšem o 5. předpoklad. Nyní již můžeme předpokládat, že $\forall \alpha \in M : f(x,\alpha) \in L(M)$. K důkazu věty stačí ukázat, že existuje derivace funkce $\varphi(\alpha)$ v α_0. Dle definice derivace platí: $\varphi'(\alpha_0) = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} g(x,\alpha)$. Ale funkce $g(x,\alpha)$ splňuje předpoklady věty o limitě vzhledem k parametru a tím je předchozí věta dokázána.

Poznámka o vyšetřování konvergence Lebesgueova integrálu: Vyšetřit konvergenci Lebesgueova integrálu znamená zjistit, zda existuje Lebesgueův integrál z dané funkce, případně ukázat, že neexistuje. Ve většině případů se integrační obor nejprve rozloží na několik (konečně) podmnožin. Na těchto jednotlivých podmnožinách se vyšetřuje konvergence integrálu zvlášť — nejčastěji se používá věta o existenci Lebesgueova integrálu funkce na omezeném intervalu, existuje-li zde integrál Riemannův. Na okrajích podmnožin, na nichž leží obvykle singularity funkce, zejména pokud zde limita funkce není konečná, se vyšetří porovnáním funkce s funkcemi, o nichž je známo, zda konvergují nebo nekonvergují.

Příklad: Vyšetříme nyní konvergenci integrálu $\int\limits_0^1 1/x^\alpha \,\mathrm{d}x$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ pevné. Je-li $\alpha < 1$ existuje zobecněný Riemannův integrál funkce, tedy speciálně je $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}$ konečná. Pro $\varepsilon > 0$ je tedy funkce $f_\varepsilon(x)$ definovaná na $\langle \varepsilon, 1 \rangle$ jako $\frac{1}{x^\alpha}$, vně nulou, lebesgueovsky integrovatelná (spojitá funkce) a dle Beppo–Leviho věty pro posloupnost funkcí $f_{1/n}$ i vyšetřovaná funkce lebesgueovsky integrovatelná.

Je-li nyní naopak $\alpha \ge 1$, potom $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}$ diverguje k $+\infty$. Jestliže by funkce $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ byla lebesgueovsky integrovatelná, označme její hodnotu K. Potom pro $\varepsilon > 0$ dostatečně malé je hodnota integrálu f_ε větší než K, což je ovšemže ve sporu s monotonií Lebesgueova integrálu. Tedy vyšetřovaná funkce není lebesgueovsky integrovatelná pro $\alpha \ge 1$.

Cvičení: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

Poznámka o vyšetřování konvergence Lebesgueova integrálu: Nyní můžeme dále zpřesnit návod k vyšetřování konvergence Lebesgueova integrálu. Určitý interval, kde je vyšetřovaná funkce spojitá, si rozdělíme na tři části. Prostřední část bude tvořit uzavřený interval, kde je funkce lebesgueovsky integrovatelná. Na krajích intervalu, se vyšetřovaná funkce porovnává s násobky funkcí tvaru $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$; je-li funkce menší než násobek integrovatelná funkce f, získáme po úvahách obdobných úvahám v předchozím příkladu, výsledek, že integrál funkce konverguje. Je-li však větší než násobek neintegrovatelná funkce f, potom integrál funkce nekonverguje.

Poznámka o souvislosti zobecněného Riemannova integrálu a Lebesgueova integrálu: V minulém příkladu jsme viděli, že Lebesgueův integrál existoval právě tehdy, když existoval zobecněný Riemannův integrál. V obecném případě však tato implikace neplatí, jak již bylo ukázáno v některé z předchozích poznámek. Platí ale následující tvrzení: nechť existuje (zobecněný) Riemannův integrál $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $f \ge 0$, potom existuje Lebesgueův integrál $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a rovnají se. Čtenář jistě snadno toto tvrzení dokáže jako důsledek Beppo–Leviho věty.

Poznámka o vyšetřování konvergence Lebesgueova integrálu: Vyšetřujme konvergenci $\int\limits_M f$, spojité mimo konečně mnoha bodů — singularit. Nechť $\bigcup_{i \in I} M_i = M$ a funkce je na každé množině M_i spojitá. Dle věty o závislosti integrálu na integračním oboru platí $\int_M f = \sum_{i \in I} \int_{M_i} f$. Singularity budou obvykle body, kde funkce nemá vlastní limitu — v opačném případě ji zde spojitě dodefinuji. Nechť b je vyšetřovaná singularita. Nechť platí:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} \in \mathbb{R}, \alpha < 1$$

Potom je násobek funkce $\frac{1}{x^\alpha}$ integrovatelnou majorantou funkce f na levém okolí bodu b a dle Beppo–Leviho věty zde integrál funkce konverguje. Nechť naopak platí:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} > 0, \alpha \geq 1$$

Potom by na levém okolí bodu b byla funkce f integrovatelnou majorantou násobku funkce $\frac{1}{x^\alpha}$, a tedy by dle Lebesgueovy věty integrál funkce $\frac{1}{x^\alpha}$ na levém okolí bodu b konvergoval, což je ovšem spor. Integrál funkce f tedy na levém okolí b nekonverguje.

Příklad: Vypočtěme

$$I(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx)\, \mathrm{d}x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Určete $I'(b)$, je-li $a > 0$. Nejprve proveďme následující výpočet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b} e^{-ax^2} \cosh(bx)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} \sinh(bx)\, \mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{e^{-ax^2}}{2a} \sinh(bx) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{b}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{b}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx)\, \mathrm{d}x$$

Nyní ověřme předpoklady věty o derivaci podle parametru:

1. $\frac{\partial}{\partial b} f(x, b)$ existuje pro všechny $x, b \in \mathbb{R}$
2. Funkce $f(x, b)$ je pro b pevné spojitá, a tedy měřitelná.
3. Potřebujeme nalézt integrovatelnou majorantu funkce $\frac{\partial}{\partial b} f(x, b) = x e^{-ax^2} \sinh(bx)$. Tu se nám nepodaří nalézt pro všechny b najednou, ale dle věty o derivaci podle parametru, se pro libovolné b stačí omezit na netriviální interval obsahující b — například $(-B, B)$. Majorantou je pak například $\sup_{b \in (-B,B)} |x e^{-ax^2} \sinh(bx)| = |x e^{-ax^2} \sinh(Bx)|$, která je spojitá, a tudíž integrovatelná.
4. Ověření posledního předpokladu o konvergenci integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx)\, \mathrm{d}x$ pro alespoň jedno $b \in (-B, B)$ je snadné, například pro $b = 0$.

Dle věty o derivaci funkce podle parametru tedy platí:

$$I'(b) = \frac{b}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx)\, \mathrm{d}x$$

Zkusme ještě určit hodnotu integrálu nebo jeho derivace. Především si povšimněme, že platí $I'(b) = (b/2a) I(b)$, potom ale nutně platí $I(b) = K e^{b^2/4a}$, $K \in \mathbb{R}$. Velikost K určíme z hodnoty integrálu pro $b = 0$, která je $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Zjistili jsme tedy, že:

$$I(b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

§12. Hilbertův prostor $L_2(M)$

Poznámka o konstrukci $L_2(M)$: Nyní zkonstruujeme Hilbertův prostor nad prostorem M. Budeme postupovat analogicky konstrukci Banachova prostoru $L_1(M)$.

Definice 18: Prostor $L_2(M)$
Nechť $M \in \Lambda$, potom označme $L_2 = \{f \in M(M); |f|^2 \in L(M)\}$. Zaveďme na této množině rovnost dvou funkcí, jestliže se tyto funkce rovnají skoro všude. Označme $L_2(M)$ množinu tříd funkcí z $L_2(M)$, které se rovnají dle zavedené rovnosti.

Poznámka o prostoru $L_2(M)$: Prostor $L_2(M)$ je lineární vektorový prostor — linearitu lze dokázat například za použití KA–nerovnosti[20].

Definice 19: Skalární součin na $L_2(M)$
Definujme skalární součin funkcí f a g z $L_2(M)$ jako $\langle f|g\rangle = \int\limits_M f\overline{g}$.

Poznámka o skalárním součinu na $L_2(M)$: Čtenář jistě snadno ověří, že skalární součin, který jsme definovali má vlastnosti skalárního součinu:

1. $\langle \alpha f_1 + \beta f_2 | g\rangle = \alpha\langle f_1|g\rangle + \beta\langle f_2|g\rangle$
2. $\langle f|g\rangle = \overline{\langle g|f\rangle}$
3. $\langle f|f\rangle = 0 \Longleftrightarrow f = 0$

Dále je samozřejmě potřeba ověřit, že skalární součin na tomto prostoru je dobře definován — tj. je konečný. Plyne to přímo z KG–nerovnosti[21]:

$$|f\overline{g}| \leq \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2.$$

Poznámka o normě prostoru $L_2(M)$: Dle poznatků z lineární algebry je tedy $||f|| = \sqrt{\langle f|f\rangle}$ normou prostoru $L_2(M)$.

Věta 31: o úplnosti $L_2(M)$
Prostor $L_2(M)$ je Hilbertův prostor.

Poznámka k důkazu věty: Doporučujeme, aby čtenář porovnal důkaz této věty s důkazem Riesz-Fischerovy věty. Čtenář se též může zamyslet, zda má smysl konstruovat prostory $L_p(M)$, kde $p \geq 1$.

Důkaz: Nechť f_n je libovolná cauchyovská posloupnost funkcí z $L_2(M)$, tj. platí $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(||f_n - f_m|| < \varepsilon)$.

1. Sestrojme rostoucí posloupnost přirozených n_k takových, že platí $||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < \frac{1}{2^k}$ (lze díky cauchyovskosti posloupnosti funkcí). Definujme funkci $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$.

   Platí:
   $$\left(\int |F_n|^2\right)^{1/2} = ||F_n|| \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < 1.$$

   Dále označme
   $$F = \lim_{n\to\infty} F_n = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

[20] $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

[21] $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \sqrt{xy}$.

Zřejmě platí $\lim\limits_{n\to\infty} |F_n|^2 = |F|^2$, přičemž ovšem $|F_n|^2 \nearrow |F|^2$ a $\int |F_n|^2 < 1$, a dle Beppo–Leviho věty tedy platí $|F|^2 \in L(M)$. $|F|^2$ je potom konečná s.v., a tím pádem i $|F|$ je s.v. konečná. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ proto konverguje, a tedy konverguje i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$. Potom ale existuje

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) + f_{n_1} \stackrel{\text{df}}{=} f.$$

2. Nyní ukažme, že je $f \in L_2(M)$. Platí: $|f - f_{n_k}|^2 = \lim\limits_{p\to\infty} |f_{n_p} - f_{n_k}|^2$. Pro každou z funkcí náleží $|f_{n_p} - f_{n_k}|^2 \in L(M)$ a dle Lebesgueovy věty i pro jejich limitu platí $|f - f_{n_k}|^2 \in L(M)$. Tedy $f - f_{n_k} \in L_2(M)$ a $f_{n_k} \in L_2(M)$. Potom ale $f \in L_2(M)$, neboť $L_2(M)$ je lineární vektorový prostor.

3. Poslední krok je ukázat platnost $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Ovšemže platí:

$$||f_n - f|| \le ||f_{n_k} - f_n|| + ||f_n - f||.$$

Oba členy na pravé straně jsou však pro n a n_k dostatečně menší než libovolné $\varepsilon > 0$; odhad prvního plyne z cauchyovskosti posloupnosti a odhad druhého plyne zejména z úvah v prvním bodě důkazu.

12.1 Obecná konstrukce Lebesgueova integrálu

Věta 32:
Nechť X je libovolná množina. Nechť A je libovolný systém množin z X, pro který platí:

1. $(\forall B, C \in A)(B \cup C) \Rightarrow (B \cap C \in A)$
2. $(\forall B, C \in A)(B \subset C) \Rightarrow (C \setminus B \in A)$
3. $(\forall B_n \in A, n \in \mathbb{N})\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = X\right)$

Nechť $\mu : A \to \mathbb{R}$ je množinová funkce s následujícími vlastnostmi:

1. $\forall B \in A : \mu(B) \ge 0$
2. $\forall B_n \in A, B_n$ disjunktní, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in A : \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$

μ je elementární míra na A.
Označme H lineární vektorový prostor tvoření funkcemi tvaru $h(x) = \sum\limits_{j\in J} \alpha_j \chi_{A_j}$, kde J je konečná množina a $A_j \in A$. Integrál této funkce definujme jako $\int h = \sum\limits_{j\in J} \alpha_j \mu(A_j)$. Prostor H s takto definovaným integrálem má vlastnosti 1 až 5 z věty (8). Zopakujeme-li konstrukci Lebesgueova integrálu zůstanou v platnosti limitní věty a věty o závislosti na integračním oboru.

Poznámka o Fubiniho větě a větě o substituci: Fubiniho věta platit nebude, neboť obsahuje jisté požadavky na tvar množin, přes které se integruje — vyžaduje, aby se daly zapsat jako kartézský součin jiných množin. Věta o substituci je typická pro $\mathbb{R}^n$, a tedy platit také obecně nebude.

Poznámka o pravděpodobnosti a integrálu: Pravděpodobnost, jak již bylo řečeno v předešlých poznámkách, lze vyjádřit jako trojici (X, A, μ), kde X je množina jevů, A systém jejich podmnožin a μ funkce, která jim přiřazuje pravděpodobnosti. Lze ověřit, že tato množina má vlastnosti Lebesgueova integrálu.

Poznámka o Stieltjesově míře a integrálu: Nechť F je neklesající zprava spojitá funkce. Definujme $\mu\big(\langle\alpha, \beta)\big) = F(\beta) - F(\alpha)$. Takto zavedenou míru lze využít ke konstrukci Lebesgue–Stieltjesova integrálu. Speciálně, je-li $F' = g$ spojitá, potom $\int\limits_M f \,\mathrm{d}F \stackrel{\text{df}}{=} \int\limits_M fg \,\mathrm{d}x$ — funkce g tedy vyjadřuje „hustotu“.
Je-li $F(x) = 0$ pro $x < c$ a $F(x) = 1$ pro $x \le c$, potom platí $\mu(M) = 1 \Longleftrightarrow c \in M$, jinak je $\mu(M) = 0$.

11 Křivkový a plošný integrál

§1. Úvod

V této kapitole se budeme zabývat integrací v $\mathbb{R}_n$ po množinách „dimenze“ menší než n — název napovídá, co je tím myšleno. Pro funkci definovanou například na ploše nemá smysl použít metody z předchozí kapitoly, totiž dodefinovat ji všude mimo plochu nulou. Integrál by byl samozřejmě roven nule (zopakujte větu (26)). Pokud by plocha „dimenze“[22] k byla podmnožinou nějakého $\mathbb{R}_k$ (tedy byla „rovná“), věděli bychom si rady. V opačném případě tušíme, že vhodnou (nelineární) transformací souřadnic, by bylo v některých případech možné plochu „narovnat“. Očekáváme proto obdobu věty o substituci, která nám umožní dát takovým integrálům smysl.

Druhým významným poznatkem bude souvislost mezi integrálem přes oblast M a integrálem přes hranici této oblasti, tj. ∂M. S příslušnými vzorci již čtenář umí zacházet, proto se nejprve pokusíme systematizovat naše vědomosti v této oblasti a vyslovit obecné tvrzení, které později dokážeme.

P o z n á m k a : Čtenáři jsou jistě známy termíny „skalární pole“, „vektorové pole“. „Polem“ máme obecně na mysli zobrazení $F : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$, přičemž přes $\mathbb{R}_n$ zamýšlíme pole nějakým způsobem integrovat a m bývalo často rovno 1 nebo n (což odpovídá dvěma výšeuvedeným příkladům polí).

P o z n á m k a o křivkových integrálech: Za křivku v $\mathbb{R}_n$ považujme množinu $C \subset \mathbb{R}_n$, pro niž existuje spojitě diferencovatelné zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_n$ takové, že $\varphi(\langle a, b\rangle) = C$. Pomocí φ je křivka parametrizována, každému „času“ $t \in \langle a, b\rangle$ je přiřazena poloha na křivce $\varphi(t)$. Čtenář patrně používal křivkový integrál ze skalárního, resp. vektorového pole f, resp. F, které počítal podle vzorců[23]:

$$\int_C f \,\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\sqrt{\sum_{i=1}^n \varphi'(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{23}$$

$$\int_C \mathsf{F}\cdot \mathsf{ds} = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i\big(\varphi(t)\big)\varphi_i'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Znaky $\mathrm{d}s$ a ds značily element dráhy po křivce (jeho délku nebo jeho vektor). Výraz na pravé straně (23) připomíná vzorec pro délku křivky v $\mathbb{R}_n$ použitý na „křivku“ ds. Z formálního hlediska zde můžeme vidět analogii s větou o substituci v Newtonově integrálu: $\mathrm{d}s \mapsto ||\varphi'||\,\mathrm{d}t$, $\mathsf{ds} = \varphi'\,\mathrm{d}t$ (tedy vyjádření $\mathrm{d}s$, ds pomocí parametrizační funkce φ a $\mathrm{d}t$).

Pokud v případě vektorového pole F nezávisel integrál na průběhu samotné křivky, ale jen na jejích krajních bodech, bylo skrze něj možné jednoznačně (až na konstantu) definovat potenciál U tohoto pole:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_n : \int_x^y \mathsf{F}\,\mathsf{ds} \stackrel{\mathrm{df}}{=} U(x) - U(y) \tag{25}$$

Vzpomeňme si na Newtonův vzorec v $\mathbb{R}_1$: $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$. Integrál z derivace f přes křivku v $\mathbb{R}_1$ (úsečku) souvisí s hodnotami f v krajních bodech. Očekáváme proto, že F by mohlo být také v jistém smyslu „derivace“ U. Tuto derivaci označujeme symbolem ∇U a po dosazení do (25) je možné (25) považovat za definici operátoru ∇.

P o z n á m k a : Integrály (23), (24) se nazývají křivkové integrály prvního a druhého druhu.

Cvičení: Zkuste si rozmyslet, jak z této definice ukážete, že v kartézských souřadnicích má ∇ skutečně tvar

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{26}$$

P o z n á m k a o plošných integrálech: Plochu v $\mathbb{R}_n$ definujme opět pomocí spojitě diferencovatelného zobrazení $\Phi : \mathbb{R}_2 \supset O \to \mathbb{R}_n$, tentokrát pro *otevřenou* množinu O. Samotná plocha S bude potom množina

[22] Precizněji řečeno, má-li množina P (plocha) v $\mathbb{R}_k$ nenulovou míru.

[23] Pokud integrujeme po „rovné“ oblasti, čemuž lze samozřejmě napomoci vhodnou volbou souřadnic, derivace φ vymizí (budou identicky rovny konstantě, často jedničce).

$\Phi(O)$. Pro $n = 3$ bude mít Φ tvar $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \mathbf{\Phi}(u, v)$, $u, v \in \mathbb{R}$. I v tomto případě lze uvažovat plošné integrály prvního, resp. druhého druhu přes skalární, resp. vektorová pole. Je třeba ovšem vymyslet, jak vyjádřit element plochy dS pomocí Φ (čtenář doposud pravděpodobně používal ortogonální parametrizace[24], kde platilo „$\mathrm{d}S = |\,\mathrm{d}u| \cdot |\,\mathrm{d}v|$", „délka" d$u$, d$v$ mohla případně záviset na u, v — viz příklad). Pro obecné souřadnice u, v je přirozené brát

$$\mathsf{dS} = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}\,\mathrm{d}u \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\,\mathrm{d}v = \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{27}$$

neboť, jak jsme viděli u křivkového integrálu druhého druhu, vektor $\partial\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)/\partial u\,\mathrm{d}u$ má význam vektoru elementu dráhy po křivce $v = v_0 =$ konst. v bodě u_0. Plošné integrály (v $\mathbb{R}_3$) je pak přijatelné počítat pomocí vzorců

$$\textstyle\int_S f\,\mathrm{d}S = \int_O f \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{28}$$

$$\textstyle\int_S \mathsf{F} \cdot \mathsf{dS} = \int_O \mathsf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{29}$$

Cvičení: Analogie s větou o substituci (tentokrát již spíše s větou probranou v kapitole o Lebesgueově integrálu) vysvitne, pokud vektorový součin v (28) rozepíšeme do složek. Předpokládejte, že $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ je zapsáno ve vhodné bázi: ortonormální, aby bylo možno vektorový součin počítat známým jednoduchým vzorcem, a takové, že $\partial\mathbf{\Phi}/\partial u$ i $\partial\mathbf{\Phi}/\partial v$ jsou kolmé na $(0, 0, 1)$. Výsledkem by měl být determinant Jacobiho matice.

Příklad: Ve fyzice se často používají cylindrické a sférické souřadnice. Zvolme v obou případech plochy $\rho =$ konst., resp. $r =$ konst. a vzpomeňme si na vyjádření plošných elementů na těchto plochách (tyto elementy byly označovány dS_ϱ, resp. dS_r).

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \mathrm{d}S_\varrho = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z' \qquad \left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\varphi \\ y &= r\cos\theta\sin\varphi \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \mathrm{d}S_r = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

P o z n á m k a : Zopakujme ještě věty, které hovořily o plošných a objemových integrálech v $\mathbb{R}_3$. Gaussova věta o divergenci tvrdila, že pro „rozumnou" oblast $\Omega \subset \mathbb{R}_3$ (objem), její hranici $\partial\Omega$ a „rozumné" vektorové pole T jsou si rovny integrály

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathsf{T}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \mathsf{T} \cdot \mathsf{dS}. \tag{30}$$

Stokesova věta naopak ukazovala souvislost mezi rotací T na ploše S a T na hranici ∂S této plochy:

$$\int_S (\nabla \times \mathsf{T}) \cdot \mathsf{dS} = \int_{\partial S} \mathsf{T} \cdot \mathsf{ds}. \tag{31}$$

Obě tyto věty společně s (25) mají jednotný tvar, totiž

$$\int_M \mathrm{d}T = \int_{\partial M} T. \tag{32}$$

Integrál z vektorového pole přes hranici oblasti M je roven integrálu „nějaké derivace" pole přes vnitřek M, to vše v prostoru $\mathbb{R}_n$. Tuto (zatím) myšlenku nazveme později obecnou Stokesovou větou.

Jak jsme již naznačili v úvodu, stojí před námi tedy dva úkoly:

1. Najít způsob, jak „rozumně" integrovat přes oblast $\Omega \subset \mathbb{R}_k$ v $\mathbb{R}_n$.

2. Zjistit, jak má být definována „nějaká derivace" v (32).

[24] Křivky $u =$ konst. a $v =$ konst. na S jsou na sebe vždy kolmé.

Cvičení: Přeformulujte Gaussovu a Stokesovu větu pro $\mathbb{R}_2$.

Poznámka: Vraťme se ještě k plošnému integrálu druhého druhu. Pokud integrujeme vektorové pole $\mathsf{T} = (T_1, T_2, T_3)$ a položíme $\mathrm{d}\mathsf{S} = (\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2)$, nabude zřejmě integrál tvaru

$$\int_S \big(T_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + T_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1 + T_3\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\big). \tag{33}$$

Při přechodu od x_1, x_2, x_3 k u, v použijeme (podle věty o substituci a poznámky výše) determinant Jacobiho matice

$$\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} & \frac{\partial x_j}{\partial u} \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} & \frac{\partial x_j}{\partial v} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{34}$$

Pozorný čtenář možná namítne, že ve větě o substituci byl determinant v absolutní hodnotě. Tam byl ale na $\Phi : (u, v) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ kladen požadavek regularity. V jednorozměrném případě ($f(x)\,\mathrm{d}x \mapsto f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$) tento požadavek[25] nebyl, a jacobián (tj. $\varphi'(t)$) zde potom *není* v absolutní hodnotě. Podmínka $\varphi'(t) \neq 0$ by zajistila, aby paramtrizace φ nemohla křivku (úsečku v $\mathbb{R}_1$), přes kterou integrujeme, proběhnout vícekrát (aby se nemohla „vracet").

V případě plošného integrálu má také smysl hovořit o orientaci plochy, tj. směru normály $\mathrm{d}\mathsf{S}$ kvůli tomu, že $\mathsf{T}\cdot\mathrm{d}\mathsf{S} \neq \mathsf{T}\cdot(-\,\mathrm{d}\mathsf{S})$. Odpovídá to tomu, že při výpočtu $\mathrm{d}\mathsf{S}$ pomocí (27) záleží na pořadí souřadnic u, v, což se v (34) projeví změnou znaménka při výměně řádků v determinantu. Stejného efektu ovšem docílíme při výměně sloupců, tedy zjišťujeme, že $\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i$. Přicházíme tak k myšlence zavést mezi elementy $\mathrm{d}x_i$ nový druh násobení. Kromě výšeuvedené antikomutativity by ovšem mělo mít všechny vlastnosti obyčejného násobení.

Nové násobení (brzy jej nazveme vnější součin) bude mít zajímavou vlastnost:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \quad \Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} : \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0. \tag{35}$$

Příklad: Ukážeme, jak naopak jen z této definice „násobení diferenciálů" vyplyne vztah pro přechod mezi x_i, x_j a u, v. Bereme-li $x_i = x_i(u, v)$, $x_j = x_j(u, v)$, můžeme psát

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x_i}{\partial v}\,\mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}x_j = \frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

Nyní dosaďme

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x_i}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) \wedge \left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) =$$

$$= \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}u + \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v + \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u + \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}v =$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v - \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} & \frac{\partial x_j}{\partial u} \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} & \frac{\partial x_j}{\partial v} \end{pmatrix} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

Shrňme nyní naše poznatky o způsobech, jak integrovat skalární či vektorová pole (f či T) po plochách, a pokusme se je rozšířit i na plochy v $\mathbb{R}_4$.

[25] Regularita, tj. nenulovost jacobiánu zde znamená triviálně $\varphi'(t) \neq 0$.

Prostor	Dimenze plochy	Integrovaný výraz
	0	f, místo integrálu bereme jen funkční hodnotu v bodě
V $\mathbb{R}_2$:	1	$T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2$,
	2	$f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$[26]
	0	f,
V $\mathbb{R}_3$:	1	$T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2 + T_3\,\mathrm{d}x_3$,
	2	$T_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + T_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + T_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$,
	3	$f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$
	0	$T_\emptyset$,
	1	$T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2 + T_3\,\mathrm{d}x_3 + T_4\,\mathrm{d}x_4$,
V $\mathbb{R}_4$:	2	$T_{12}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + T_{13}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \ldots$,
	3	$T_{123}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + T_{134}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 + \ldots$,
	4	$T_{1234}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$.

V případě $\mathbb{R}_4$ jsme již přešli k výhodnějšímu značení složek pole T. Vidíme, že pokud integrujeme přes „k-rozměrnou“ plochu v $\mathbb{R}_n$, sestavujeme integrand jako lineární kombinaci součinů typu $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, přičemž množinu indexů I vybíráme z $\{1, \ldots, n\}$. Nezávislé součiny budou ty, které se liší alespoň jedním indexem. Pokud se dva součiny liší pouze pořadím indexů (např. $a\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + b\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2$), můžeme je snadno s využitím (35) sečíst. Koeficienty této lineární kombinace jsou pak složky integrovaného pole, a je tedy logické je označovat všemi indexy příslušného součinu. To, zda za složku pole budeme považovat např. T_{123} nebo T_{213}, které se liší znaménkem, je jen otázka konvence. Zapsáno formálně jsme se tedy rozhodli definovat

$$\varphi : \mathbb{R}_k \supset O \to \mathbb{R}_n, \qquad \int_{\varphi(O)} T \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{\varphi(O)} \sum_I^n T_{i_1,\ldots,i_k}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}x_{i_k}, \quad I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}. \tag{36}$$

Výraz, jehož strukturu jsme právě „uhádli“, se nazývá diferenciální forma.

Ve druhém kroku se pokusíme určit, co se skrývá za pojmem „nějaká derivace“. Inspirováni Newtonovým vzorcem, potažmo formálním zápisem (32), zkusíme vzít $\mathrm{d}T$ jako totální diferenciál T.

Příklad: Ve Stokesově větě o rotaci je $T = T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2 + T_3\,\mathrm{d}x_3$. Bereme-li $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_i) = 0$ ($\mathrm{d}x_i$ nezávisí na žádné ze souřadnic x_j), můžeme $\mathrm{d}T$ zapsat následovně:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}T = \mathrm{d}\big(T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2 + T_3\,\mathrm{d}x_3\big) = \mathrm{d}T_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}T_2 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}T_3 \wedge \mathrm{d}x_3 = \\
= \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial T_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \mathrm{d}x_2 + \\
+ \left(\frac{\partial T_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial T_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \mathrm{d}x_3.
\end{aligned}$$

Použijeme-li definici násobení diferenciálů (35), po roznásobení závorek se některé členy anulují a jiné bude možno sečíst za cenu změny znaménka. Dospějeme k výrazu

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1,$$

který má správný tvar pro integraci přes dvoudimenzionální plochu v $\mathbb{R}_3$. Integrované pole lze chápat jako vektorové pole se složkami vektoru $\nabla \times \mathsf{T}$.

Pochopili jsme již význam vnějšího násobení „$\wedge$“, pokusíme se proto nyní vybudovat příslušnou teorii precizně. Před tím ale ještě učiníme malou odbočku jako ukázku užití Gaussovy věty ve variačním počtu. Zopakujme, co říká Gaussova věta. Pro vektorové pole $\mathsf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ hladké na $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}_n$ platí[27]

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathsf{f}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \cdot \mathsf{n}\,\mathrm{d}S,$$

[27] $\overline{\Omega}$ značí uzávěr množiny Ω (tj. Ω sjednocena s $\partial\Omega$).

kde $\mathsf{n} = (n_1, \dots, n_n)$ značí normálový vektor elementu plochy $\mathrm{d}S$. Toto tvrzení je snadným důsledkem Greenovy věty, podle níž dokonce platí pro každé $i = 1, \dots, n$ a hladkou funkci g na Ω

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = \int_{\partial\Omega} g n_i\,\mathrm{d}S. \tag{37}$$

Tuto větu nyní dokážeme v $\mathbb{R}_2$ pro speciální volbu Ω za předpokladu $g \equiv 0$ na $\partial\Omega$. Čtenář se již pravděpodobně s tímto důkazem dříve seznámil, a následující odstavec slouží tedy spíše jako opakování. Později dokážeme obecnou Stokesovu větu, jejímž speciálním případem je i Gaussova věta.
Poznámka: Vidíme opět analogii mezi Greenovou větou a Newtonovým vzorcem $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

Greenovu větu budeme dokazovat např. pro $i = 2$. Předpokládejme, že lze hranici $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ rozdělit na dvě části, které jsou grafy určitých funkcí $a_1(x_1), a_2(x_2)$ na $\langle a, b\rangle$ a že $a_1(a) = a_1(b) = P$. Oblast Ω rozdělíme přímkou $x_2 = P$ na „horní" a „dolní" část Ω_1, Ω_2. Pro výpočet integrálu na levé straně (37) použijeme Fubiniho věty

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial g}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_P^{a_1(x_1)} \frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_a^b \big[g\big(x_1, a_1(x_1)\big) - g(x_1, P)\big]\,\mathrm{d}x_1 = -\int_a^b g(x_1,P)\,\mathrm{d}x_1.$$

Analogicky vypočteme integrál přes Ω_2, celkem získáme

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_1} \frac{\partial g}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_2} \frac{\partial g}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(-g(x_1,P) + g(x_1,P)\big)\,\mathrm{d}x_1 = 0,$$

což je samozřejmě rovno integrálu z g po $\partial\Omega$, kde je g identicky nulová.

Pro dvě funkce hladké funkce g, h dává tato věta společně s větou o integraci per partes jednoduché tvrzení:

$$\forall x \in \partial\Omega : h(x) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i} h\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g\frac{\partial h}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g h n_i\,\mathrm{d}S = -\int_\Omega g \frac{\partial h}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x. \tag{38}$$

Proberme ještě pojem funkcionálu pro funkce více proměnných. Předně uvažujme „kulturní"[28] množiny Ω. Budiž $f = f(x_1, \dots, x_n, y, z_1, \dots, z_n)$ hladká funkce na $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_{n+1}$. Funkcí hladkou na uzavřené množině $\overline{\Omega}$ máme na mysli funkci hladkou na nějaké otevřené nadmnožině $\overline{\Omega}$:

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \Big\{ y : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_n \big| \big(\exists O \supset \overline{\Omega}\big)\ \big(\exists \tilde{y} : O \to \mathbb{R}_n\big)\big(\tilde{y} \in C^\infty(\Omega)\big) \& \big(y = \tilde{y} \text{ na } \overline{\Omega}\big)\Big\}.$$

Stejně jako v kapitole o variačním počtu definujeme ještě $\mathring{C}^\infty(\overline{\Omega})$ jako funkce hladké na $\overline{\Omega}$ s nulovými hodnotami na $\partial\Omega$. Klasický funkcionál nad výšeuvedeným prostorem má pak tvar

$$\forall y \in C^\infty(\overline{\Omega}) :\ \Phi(y) = \int_\Omega f\Big(\mathsf{x}, y, \nabla y\Big)\,\mathrm{dx} = \int_\Omega f\Big(x_1, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\Big)\,\mathrm{dx}.$$

Spočítejme nyní Gateauxův diferenciál $\Phi(y)$ a pokusme se sestavit příslušné Euler–Lagrangeovy rovnice. Postup bude téměř shodný jako v kapitole o variačním počtu. Pro první krok (derivace ve směru h, $h \in \mathring{C}^\infty(\overline{\Omega})$) použijeme definici:

$$\delta\Phi_h(y) = \frac{\partial \Phi(y+th)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \int_a^b f_h\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f\Big(\mathsf{x}, y+th, \frac{\partial}{\partial x_1}(y+th), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y+th)\Big|_{t=0}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \Big(h \frac{\partial}{\partial y} f(\mathsf{x}, y, \nabla y) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z_i} f(\mathsf{x}, y, z_1, \dots, z_n)|_{(z_1,\dots,z_n)=\nabla y}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

[28]Kompaktní a souvislé.

Cvičení: Prozkoumejte, zda byly splněny předpoklady pro použití věty o záměny integrálu a derivace. Pokud některé chybí, zamyslete se, zda je „rozumné“ je skutečně požadovat.

Nyní použijeme „metodu per partes“, přesněji každou složku v sumě zvlášť upravíme pomocí (38) — zde tedy přichází k užití Greenova věta. Dostaneme opět sumu

$$\delta\Phi_h(y) = \int_a^b \Big(h\frac{\partial}{\partial y} f(\mathsf{x}, y, \nabla y) - h\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial}{\partial z_i} f(\mathsf{x}, y, z_1, \ldots, z_n)|_{(z_1,\ldots,z_n)=\nabla y}\Big]\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{39}$$

Lemma:
Nechť $f \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ je pevná funkce a nechť pro každé $g \in \mathring{C}^\infty(\overline{\Omega})$ platí

$$\int_\Omega fg\,\mathrm{d}x = 0.$$

Potom $f \equiv 0$ na Ω.

Důkaz: provedeme pro Ω jednorozměrné (rovné $\langle a, b\rangle$), čtenář nechť myšlenku sám rozšíří na dvourozměrné „kulturní“ množiny Ω.

Budeme postupovat sporem. Nechť existuje $x_0 \in \Omega$ takové, že např. $f(x_0) = A > 0$. Pak ze spojitosti f plyne, že existuje okolí $U_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$, na němž je všude $f(x) > A/2$. Nyní už jen stačí najít vhodnou funkci g (například nezápornou), která bude nabývat nenulových hodnot pouze na $U_\varepsilon(x_0)$ a jejíž integrál B přes Ω bude kladný. Pak bude zřejmě $\int gf \geq \int gA/2 = AB/2 > 0$, což je spor. Je zřejmé, že jediný problém je požadavek hladkosti (jinak by stačilo brát funkci identicky rovnou nule mimo $U_\varepsilon(x_0)$ a identicky rovnu $B/2\varepsilon$ uvnitř). Ke konstrukci využijeme funkci $\exp(-1/x^2)$. Přesný postup v konkrétním případě ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad: Sestrojme hladkou funkci na $I = (-2, 2)$, která nabývá nenulových hodnot pouze na $(-1, 1)$, a jejíž integrál přes I je větší než dvě.

Naším cílem bude funkce, která má na $(-1/2, 1/2)$ hodnoty větší než dvě a mimo $(-1, 1)$ je identicky rovna nule. Pokud bude nezáporná, bude její integrál tím pádem větší než 2. Stačí už jen najít „hladké propojení“ mezi body $-1, -1/2$ a $1/2, 1$. Již víme, že funkce $\exp(-1/x^2)$ dodefinovaná v $x = 0$ nulou je v tomto bodě spojitá a všechny její derivace jsou zde nulové[29]. Tím pádem je ale i hladká na $\mathbb{R}$. Podobně bude hladká i funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{pro } |x| < 1 \\ 0 & \text{pro } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Protože je tato funkce sudá a na $(-1, 0)$ rostoucí, můžeme z $f(-1/2) > 1/e^2$ usoudit, že funkce $2e^2 f(x)$ je určitě na $(-1/2, 1/2)$ větší než dvě. Tato funkce proto splňuje všechny naše požadavky.

Nyní již vidíme, že pro kritický bod y funkcionálu Φ (tj. $\delta\Phi_h(y) = 0$ pro každé h) musí na Ω platit

$$\frac{\partial}{\partial y} f(\mathsf{x}, y, \nabla y) - h\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial}{\partial z_i} f(\mathsf{x}, y, z_1, \ldots, z_n)|_{(z_1,\ldots,z_n)=\nabla y}\Big] = 0. \tag{40}$$

Toto je Eulerova–Lagrangeova rovnice pro funkcionál nad prostorem funkcí n-proměnných. Jedná se ovšem o parciální diferenciální rovnici druhého řádu, a její řešení v obecném případě je tím pádem velmi obtížné.

Příklad: Buď funkce f klasického funkcionálu dána $f(x_i, y, z_i) = |z|^2 = \sum_{i=1}^n z_i$. Hledáme tedy minimum funkcionálu

$$\int_\Omega |\nabla y|^2\,\mathrm{d}x.$$

Z Eulerových–Lagrangeových rovnic získáme podmínku

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = 2z_i \;\Rightarrow\; -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(2\frac{\partial y}{\partial x_i}\Big) = 0, \text{ to jest } \nabla^2 y = 0.$$

[29] Opakování z prvního semestru: místo jednostranné derivace v nule vyšetřujeme limitu oboustranných derivací do nuly, používáme l'Hôspitalova pravidla.

Toto je známá Laplaceova rovnice vyjadřující například průběh elektrostatického potenciálu v prostoru bez nábojů. Její řešení se nazývají harmonická a mohou například záviset pouze na radiální souřadnici ($y = y(r)$) a být pak ve tvaru $\ln |r|$ pro $n = 2$ a $|r|^{2-n}$ pro ostatní n.

Příklad: Na $M \subset \mathbb{R}_4$ (časoprostoru) definujme klasický funkcionál pomocí $f(x_i, y, z_i) = z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - my^2$, $i = 0, \ldots, 3$. Definice skalárního součinu na M je jiná, než jsme doposud používali:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3) = a_0 b_0 - \sum_{i=1}^{3} a_i b_i.$$

Funkcionál a Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pak mají tvar

$$\Phi(y) = \int_\Omega \left(\|\nabla y\|_M^2 - my^2 \right) \mathrm{d}x,$$

$$-2my - 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} = 0, \text{ definujeme-li } \Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta = \nabla_M^2,$$

$$(\Box - m)y = 0.$$

V posledním řádku je uvedena tak zvaná Klein–Gordonova vlnová rovnice.

Příklad: Na $\mathbb{R}_n$ budiž $f(x_i, y, z_i) = \sqrt{1 + |z|^2}$. Příslušný funkcionál pak dává obsah plochy $y = y(x_i)$ v $\mathbb{R}_{n+1}$. Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pak vedou k určení extremální plochy (takto lze zjistit například plochu s minimálním obsahem).

$$\sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla y|^2}} \right) = 0.$$

Cvičení: Zkuste sestavit Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro funkcionály definované funkcemi $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x_i, y, z_i) = f(x_i, y, z_i) - 2ky, \; k = \text{konst.}$$

kam za f dosazujeme funkci z některého ze tří předchozích příkladů. Takto „započítáme“ do našich úloh potenciální energii v gravitačním poli ($k = mg/2$).

§2. Vnější algebry vektorového prostoru

Označení: Je-li I konečná množina, označíme $|I|$ počet jejích prvků (potenci množiny I).
Píšeme-li pro dvě množiny $A \simeq B$, máme tím na mysli, že mezi A a B existuje bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení). Množiny si tedy navzájem určitým způsobem „odpovídají“, například jako prostor a jeho duální prostor.

Poznámka: Algebrou nazýváme (neprázdnou) množinu A nad tělesem T s dvěma vhodně definovanými operacemi mezi prvky z A: sčítáním (+) a násobením (·). Na všechny operace klademe požadavek uzavřenosti a dále přidáváme asociativitu, distributivitu, případně i komutativitu.

Příklad: Algebra polynomů nebo racionálních lomených funkcí. Rozmyslete si, jak je to s neutrálními a inverzními prvky sčítání a násobení u těchto algeber.

Poznámka: Máme-li daný vektorový prostor V, je zřejmé, že jediná překážka, která brání vytvoření algebry z V, je operace násobení mezi prvky V. Uvažujme ve V bázi $\{e_\alpha\}_{\alpha \in M}$. Prostor V pak lze zapsat

$$V = \left\{ a = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha e_\alpha | a_\alpha \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^{|M|}.$$

Pokud požadujeme, aby hledané násobení mělo „rozumné vlastnosti“ (bylo např. distributivní vůči sčítání), převedeme problém, čemu je roven součin $a \cdot b$ pro libovolná a, b, na otázku jak definovat $e_i \cdot e_j$, $\forall i, j \in M$.

Příklad: V $\mathbb{R}_2$ s kanonickou bází e_1, e_2 uvažujme antikomutativní násobení $\wedge$. Jednou z možností je *rozšířit* prostor $\mathbb{R}_2$ o prvek $e_{12} \overset{\text{df}}{=} e_1 \wedge e_2$ a dále o jednotkový prvek násobení $1 \overset{\text{df}}{=} e_\emptyset$. Nový prostor pak bude lineární obal

$$\Lambda^*(\mathbb{R}_2) = L(\{e_\emptyset, e_1, e_2, e_{12}\}).$$

Násobení v tomto prostoru bude dáno tabulkou, kterou již snadno odvodíme z asociativity a antikomutativity

$\wedge$	$e_\emptyset$	e_1	e_2	e_{12}
$e_\emptyset$	$e_\emptyset$	e_1	e_2	e_{12}
e_1	e_1	0	e_{12}	0
e_2	e_2	$-e_{12}$	0	0
e_{12}	e_{12}	0	0	0

Například $e_{12} \wedge e_1 = (e_1 \wedge e_2) \wedge e_1 = -e_2 \wedge (e_1 \wedge e_1) = 0$.

Všimněme si ještě, že prvky báze Λ^* jsou indexovány podmnožinami $M = \{1, 2\}$. Prostor Λ^* lze tedy rozložit podle počtu prvků těchto podmnožin:

$$\begin{gathered}
\text{0-vektory (čísla): } \Lambda^0(\mathbb{R}_2) = \big\{a \cdot 1 = ae_\emptyset |\ a \in \mathbb{R}\big\} \simeq \mathbb{R} \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_2), \\
\text{1-vektory: } \Lambda^1(\mathbb{R}_2) = \big\{ae_1 + be_2 |\ a, b \in \mathbb{R}\big\} \simeq \mathbb{R}_2 \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_2), \\
\text{2-vektory: } \Lambda^2(\mathbb{R}_2) = \big\{ae_{12} |\ a \in \mathbb{R}\big\} \simeq \mathbb{R} \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_2), \\
\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2.
\end{gathered}$$

Příklad: Proveďme analogický postup v $\mathbb{R}_3$.

$$\begin{gathered}
\text{0-vektory (čísla): } \Lambda^0(\mathbb{R}_3) = \big\{a \cdot 1 = ae_\emptyset |\ a \in \mathbb{R}\big\} \simeq \mathbb{R} \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_3), \\
\text{1-vektory: } \Lambda^1(\mathbb{R}_3) = \big\{ae_1 + be_2 + ce_3 |\ a, b, c \in \mathbb{R}\big\} \simeq \mathbb{R}_3 \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_3), \\
\text{2-vektory: } \Lambda^2(\mathbb{R}_3) = \big\{ae_{12} + be_{23} + ce_{31} |\ a, b, c \in \mathbb{R}\big\} \simeq \mathbb{R}_3 \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_3), \\
\text{3-vektory: } \Lambda^0(\mathbb{R}_3) = \big\{ae_{123} |\ a \in \mathbb{R}\big\} \simeq \mathbb{R} \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_3). \\
\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2 \oplus \Lambda^3.
\end{gathered}$$

Pro násobení bázových vektorů nepoužijeme již tabulku, ale zapíšeme obecné pravidlo:

$$\forall I, J \subset \{1, 2, 3\} : \begin{cases} I \cap J \neq \emptyset & \Rightarrow \quad e_I \wedge e_J = 0 \\ I \cap J = \emptyset & \Rightarrow \quad e_I \wedge e_J = e_{I \cup J} \cdot \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} \end{cases} . \tag{41}$$

Učiňme úmluvu, že indexy v I u vektoru e_I budou uspořádány vzestupně. Při násobení $e_I \wedge e_J$ zřejmě oba činitele rozepíšeme do součinů bázových 1-vektorů a postupnými záměnami pořadí se budeme snažit docílit správného pořadí indexů. Pokud se přitom v celém součinu vyskytují dva stejní činitelé, těmito záměnami je „dostaneme k sobě“, čímž celý součin vynulujeme. Znaménko $\operatorname{sgn}(\cdot)$ tedy porovnává množiny I a J zapsané za sebou (I, J) a sjednocené, a tudíž již správně seřazené. Nabývá hodnoty $+1$, pokud je při přechodu $I, J \to I \cup J$ třeba provést sudý počet výměn sousedních prvků, a je rovno -1 pokud je tento počet lichý.

Úkol 7: Rozmyslete si, proc je $\dim \Lambda^*(\mathbb{R}_n) = 2^n$ a $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}_n) = \binom{n}{k}$.

Definice 20: Vnější algebra $\mathbb{R}_n$

Nechť $e_1, \ldots, e_n$ je kanonická báze $\mathbb{R}_n$. Pro libovolnou $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ označme

$$e_I = e_{i_1 \ldots i_k} = e_{i_1} \wedge \ldots e_{i_k}, \ e_\emptyset = 1 \in \mathbb{R}, \quad \text{je-li } i_1 < \ldots < i_k. \tag{42}$$

Prostor s bází $\{e_I\}_I \subset \{1,\ldots,n\}$ označíme $\Lambda^*(\mathbb{R}_n)$:

$$\Lambda^*(\mathbb{R}_n) = \Big\{a = \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} a_I e_I \big|\ a_I \in \mathbb{R}\Big\} \simeq \mathbb{R}^{2^n}.$$

Násobení prvků z $\Lambda^*(\mathbb{R}_n)$ je dáno předpisem (41).

Definujeme podprostory $\Lambda^k(\mathbb{R}_n) \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_n)$ a jejich prvky nazveme k-vektory:

$$\Lambda^k(\mathbb{R}_n) = \Big\{a = \sum_{|I|=k} a_I e_I \big|\ a_I \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Poznámka:

1. Pro libovolné I je $e_\emptyset \wedge e_I = e_I = e_I \wedge e_\emptyset$. Odpovídá to představě, že 0-vektory jsou „čísla“ (tj. $\Lambda^0 \simeq \mathbb{R}$).
2. V $\mathbb{R}_3$ „vypadají“ vektory a 2-vektory podobně; obecně je $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}_n) \simeq \Lambda^1(\mathbb{R}_n) \simeq \mathbb{R}_n$. Bereme-li např. $a,b \in \Lambda^1(\mathbb{R}_3)$ a $\mathsf{x},\mathsf{y} \in \mathbb{R}_3 \simeq \Lambda^1(\mathbb{R}_3)$, pozorujeme podobnost mezi 2-vektorem $a\wedge b$ a vektorem $\mathsf{x}\times\mathsf{y}$. $\Lambda^k(\mathbb{R}_n)$ je ve skutečnosti duální prostor (kovektorů) k prostoru vektorů $\mathbb{R}_{\binom{n}{k}}$.

Věta 33: Vlastnosti vnější algebry $\Lambda^*(\mathbb{R}_n)$

1. $\dim\Lambda^k(\mathbb{R}_n) = \binom{n}{k}$, $\dim\Lambda^*(\mathbb{R}_n) = 2^n$.
2. Operace $\wedge$ je asociativní.
3. $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}_n), \tau \in \Lambda^l(\mathbb{R}_n) \Rightarrow \omega\wedge\tau = (-1)^{kl}\tau\wedge\omega$.
4. Je-li $v_1,\ldots,v_n \in \Lambda^1(\mathbb{R}_n)$, pak $v_1\wedge\ldots\wedge v_n \det(v_i^j)e_{1\ldots n}$.

Poznámka:

1. Teprve díky druhému bodu věty můžeme psát $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k} = e_I$ pro $I = \{i_1,\ldots,i_k\}$ bez závorek.
2. Jsou-li $v_1,\ldots,v_k \in \Lambda^1(\mathbb{R}_n)$ zapsány v bázi jako $v_j = \sum\limits_i v_j^i e_i$, pak platí

$$v_1\wedge\ldots\wedge v_k = \sum_{|I|=k} e_I \det V_I,$$

kde pro $I = \{i_1,\ldots,i_k\}$ je $\{V_I\}_{i\in I}$ minor matice $\{v_j^i\}, j = 1,\ldots,k,\ i = 1,\ldots,n$ (ponecháváme pouze sloupce s indexy z I).
3. Pozor, podle bodu 3. vidíme, že obecně neplatí $\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = -\,\mathrm{d}x_J\wedge\mathrm{d}x_I$, a tudíž násobení $\wedge$ na $E^*(\Omega)$ není ani komutativní ani antikomutativní! Nicméně, antikomutativita je splněna například pro 1-formy (1-vektory).

K vlastnímu rozmyšlení předkládáme čtenáři následující tvrzení:

Lemma:

Pro každé tři množiny $I,J,K \subset \{1,\ldots,n\}$ (po dvou disjunktní) platí

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I,J,K \\ I\cup J,K\end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I\cup J,K \\ I\cup J\cup K\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I,J,K \\ I\cup J\cup K\end{pmatrix}, \text{ a } \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I,J \\ I\cup J\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I,J,K \\ I\cup J,K\end{pmatrix}.$$

Důkaz:

1. bylo již zadáno jako úkol (7).
2. Zapíšeme-li libovolné dva prvky z $\Lambda^*(\mathbb{R}_n)$ pomocí bázových vektorů, je patrné, že díky distributivitě $\wedge$ vůči sčítání stačí pouze dokázat asociativitu právě pouze u bázových vektorů. Nechť $I,J,K \subset \{1,\ldots,n\}$ jsou po dvou disjuktní (pokud by tomu tak nebylo, součin by vyšel samozřejmě nulový). S pomocí lemmatu pak odvodíme

$$(e_I\wedge e_J)\wedge e_K = e_{I\cup J}\wedge e_K \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I,J \\ I\cup J\end{pmatrix} =$$
$$= e_{I\cup J\cup K}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I,J \\ I\cup J\end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I\cup J,K \\ I\cup J\cup K\end{pmatrix} = e_{I\cup J\cup K}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I,J,K \\ I\cup J\cup K\end{pmatrix}.$$

Ke stejnému výrazu dospějeme i pro $e_I\wedge(e_J\wedge e_K)$ (zkuste).

3. Opět stačí uvažovat pouze bázové vektory. Zkoumejme součiny e_I, e_J, $|I| = k$, $|J| = l$, $I \cap J = \emptyset$.

$$e_I \wedge e_J = e_{I\cup J} \operatorname{sgn}\binom{I,J}{I\cup J} = e_{J\cup I} \operatorname{sgn}\binom{J,I}{J\cup I} \operatorname{sgn}\binom{I,J}{J,I} = e_J \wedge e_I \operatorname{sgn}\binom{I,J}{J,I}. \tag{43}$$

   Zbývá se přesvědčit, že signum v posledním výrazu je rovno $(-1)^{kl}$. Čtenář však snadno nahlédne, že na „proházení“ k-prvkové množiny „skrz“ l-prvkovou množinu je třeba právě $k \cdot l$ prohození.
4. Přímým výpočtem a přeuspořádáním e_k:

$$\Big(\sum_{i_1=1}^{n} v_1^{i_1} e_{i_1}\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{i_n=1}^{n} v_n^{i_n} e_{i_n}\Big) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} v_1^{i_1} \ldots v_n^{i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} =$$
$$e_{1\ldots n} \sum_{i_1,\ldots,i_n} v_1^{i_1} \ldots v_n^{i_n} \operatorname{sgn}\binom{i_1,\ldots,i_n}{1,\ldots,n}.$$

   Znaménko v posledním výrazu je definováno stejně jako dosud s tím, že pokud se některý z indexů i_k opakuje, je znaménko 0. Výsledná suma pak ovšem přesně odpovídá definici determinantu matice $\{v_i^j\}$.

   Tvrzení v poznámce (pro součin k vektorů) se odvodí stejným způsobem.

§3. Diferenciální formy na R_n

Definice 21: Vnější algebra diferenciálních forem
Označme $T^*(\mathbb{R}_n)$ vektorový prostor s bází $\{\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n\}$, tj. $T^*(\mathbb{R}_n) = \Big\{a = \sum_i a_i \,\mathrm{d}x_i | a_i \in \mathbb{R}\Big\} \simeq \mathbb{R}_n$. Definujeme vnější algebru $\Lambda^*\big(T^*(\mathbb{R}_n)\big)$. Diferenciální formou na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ nazveme libovolné hladké zobrazení $\omega : \Omega \to \Lambda^*\big(T^*(\mathbb{R}_n)\big)$, ve složkách:

$$\forall x \in \Omega: \ \omega(x) = \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \omega_I(x) \,\mathrm{d}x_I, \ \omega_I \in C^\infty(\Omega). \tag{44}$$

Množinu všech diferenciálních forem na Ω označíme $E^*(\Omega)$, množinu diferenciálních forem k-tého řádu na Ω definujeme a značíme takto:

$$E^k(\Omega) = \Big\{\sum_{|I|=k} \omega_I(x) \,\mathrm{d}x_I | \omega_I \in C^\infty(\Omega)\Big\}. \tag{45}$$

Poznámka o hladkosti: V dalším budeme požadovat, aby různá zobrazení byla hladká, tedy nekonečně diferencovatelná. Většinou stačí slabší podmínka (spojitá diferencovatelnost), vzhledem k praktickému použití budeme ovšem používat tento silnější předpoklad, čímž se také důkazy vět poněkud zpřehlední.

Příklad: Co jsou diferenciální formy $\omega \in E^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$?

1. $k = 0$. $E^0(\Omega) \simeq C^\infty(\Omega) = \{f\}$, tedy množina všech hladkých funkcí $\Omega \to \mathbb{R}$, neboť $\mathrm{d}x_\emptyset = 1$.
2. $k = 1$. $E^1(\Omega) = \{\omega = f_1(x)\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + f_n(x)\,\mathrm{d}x_n | f_i \in C^\infty(\Omega)\} \simeq \big[C^\infty(\Omega)\big]^n$. $E^1(\Omega)$ lze chápat jako pole kovektorů k $\big[C^\infty(\Omega)\big]^n$[30]: je to prostor všech lineárních forem nad $\big[C^\infty(\Omega)\big]^n$. Libovolné funkci (vektoru) $\mathsf{f}(\mathsf{x})$ je jednoznačně přiřazena lineární forma $\omega(\mathsf{f}) : \Omega \to \mathbb{R}$. Pro $\mathsf{f} \in \big[C^\infty(\Omega)\big]^n$ a vektor $\tilde{x} = (\tilde{x_1}, \ldots, \tilde{x_n}) \in \Omega$ si můžeme pod zápisem (44) představit například takto: $\omega(\mathsf{f})(\tilde{x}) = f_1\tilde{x_1} + \ldots + f_n\tilde{x_n}$.

   Pokud ovšem v tomto zápisu bereme $\partial f/\partial x_i$ místo f_i, nabude ω „tvaru totálního diferenciálu“ a číslo $\omega(f(\mathsf{x}))(\tilde{\mathsf{x}})$ pak znamená lineární aproximaci hodnoty funkce $f(\mathsf{x}+\tilde{\mathsf{x}}) - f(\mathsf{x})$ pomocí hodnot a parciálních derivací v bodě x.

[30] Tedy prostoru všech hladkých vektorových polí na Ω.

3. $k = n-1$. $E^{n-1}(\Omega) = \big\{\omega = f_1(x)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \mathrm{d}x_n - f_2(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 \wedge \ldots + \ldots\big\} = \big\{\omega = \sum\limits_i f_i(x)(-1)^{i+1}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n\big\}$ pro $f_i \in C^\infty(\Omega)$. Označení $\widehat{\mathrm{d}x_i}$ znamená, že člen $\mathrm{d}x_i$ v součinu *chybí*. Co se týče střídání znamének, jedná se pouze o konvenci v označování souřadnic prvků E^{n-1}. Tato volba má význam později, když budeme chtít tyto souřadnice ztotožnit (v tomto případě) s rotací vektorového pole.
4. $k = n$. $E^n(\Omega) = \big\{\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \mathrm{d}x_n | f \in C^\infty\big\} \simeq C^\infty(\Omega)$. Prostor E^n je samozřejmě „podobný“[31] prostoru všech hladkých skalárních polí, proto tyto diferenciální formy nazýváme pseudoskaláry.

Poznámka: Zabývali jsme se zatím pouze otázkou definice diferenciálních forem, nemluvili jsme ještě vůbec o tom, jak tyto objekty integrovat. Je-li plocha S parametrizována funkcí Φ, to jest $\Phi : \mathbb{R}_k \supset O \to \mathbb{R}_n$, O otevřená, $\Phi(O) = S \simeq$ k-dimenzionální plocha, pak očekáváme, že integrál z f přes S je rozumné definovat pomocí *přenesení do prostoru parametrů* nad O. Budou-li ovšem Φ a Φ' dvě různé parametrizace téže plochy, musí pak nutně platit rovnost integrálů?

$$\int_S f \overset{\text{df}}{=} \int_O f \circ \Phi \overset{?}{=} \int_{O'} f \circ \Phi'.$$

Tušíme, že se jedná o určitou substituci, a tedy by nezávislost mohl za určitých předpokladů „zajistit nějaký jacobián“.

§4. Přenášení diferenciálních forem

Poznámka: Uvažujeme-li formu $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_i \in E^1(\Omega), O \subset \Omega$ a parametrizaci $\Phi : O \to \mathbb{R}_n$, $x = \Phi(u) = \big(\Phi_1(u), \ldots, \Phi_n(u)\big)$, kde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S, u = (u_1, \ldots, u_k) \in O$, získáme „formálním dosazením“ formu na O:

$$f\big(\Phi(u)\big)\,\mathrm{d}\Phi_i(u) = f\big(\Phi(u)\big) \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi_i(u)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j.$$

Očekáváme, že obě formy by měly být „stejné“ — tedy alespoň po integraci přes S, resp. O dát stejný výsledek. Protože zatím nevíme, jak počítat integrál formy přes plochu, navrhneme toto jako jeho definici a bude nás samozřejmě zajímat, zda takto definovaný integrál závisí na volbě Φ.

Definice 22: Diferenciál funkce
Budiž $f \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Diferenciálem $\mathrm{d}f$ funkce f nazveme následující prvek $E^1(\Omega)$:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i. \tag{46}$$

Diferenciál je tedy zobrazení $E^0(\Omega) \to E^1(\Omega)$.

Příklad: Pro souřadnicovou funkci $\varphi_i : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$, $\varphi_i(x) = x_i$ je zřejmě $\mathrm{d}\varphi_i = \mathrm{d}x_i$.

Definice 23: Přenášení diferenciálních forem
Budiž Φ hladké zobrazení otevřené množiny $O \subset \mathbb{R}_k$ do $\Omega \subset \mathbb{R}_n$. Nechť $\omega = \sum\limits_{|I|=p} \omega_I(x)\,\mathrm{d}x_I \in E^p(\Omega)$. Pak definujme zobrazení $\Phi^* : E^p(\Omega) \to E^p(O)$, $\Phi(u_1, \ldots, u_k) = \big(\Phi_1(\mathsf{u}), \ldots, \Phi_n(\mathsf{u})\big)$ následovně:

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{|I|=p} \omega\big(\Phi(u)\big)\,\mathrm{d}\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\Phi_{i_p}, \text{ pokud } I = \{i_1, \ldots, i_p\},\ i_1 < \ldots < i_p. \tag{47}$$

Příklad: Tento postup jsme již intuitivně používali v úvodu (viz poslední příklad úvodního paragrafu — tam jsme se pouze přenášeli $\mathbb{R}_3$ do $\mathbb{R}_3$). Nyní jsme jej pouze formálně definovali a následně o něm dokážeme některé věty.

[31] Rozuměj duální.

Pro zopakování zkusme převést následující formu z $E^2(\mathbb{R}_3)$ do prostoru parametrů u, v:

$$\omega = xy\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y - xz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,\ \ \Phi(u,v) = (u^2, v-u, 2v)$$

$$\Phi^*(\omega) = u^2(v-u)\,\mathrm{d}(2v) \wedge \mathrm{d}(v-u) - u^2 2v\,\mathrm{d}(u^2) \wedge \mathrm{d}(2v) = 2u^2(v-u)\,\mathrm{d}v \wedge (\mathrm{d}v - \mathrm{d}u) - 2u^2 v \cdot 4u\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v =$$
$$= -2u^2(v-u)\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u - 8u^3 v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \big(2u^2(v-u) - 8u^3 v\big)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

Poznámka: Víme, že pro libovolnou hladkou funkci f je $\mathrm{d}f \in E^1(\Omega)$. Dále pro libovolnou $\omega \in E^1(\Omega)$ platí $\omega \wedge \omega = 0$, jak plyne například z bodu 3. věty (33). Čtenář si může zkusit jako cvičení rozepsat násobení 1-vektoru sebou samým zapsaným pomocí báze.

Cvičení: Formy $\omega_1 = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$ a $\omega_2 = x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z$ přeneste do prostoru parametrů σ, τ, pokud platí

$$x = \cos\sigma \cos\tau, \quad y = \cos\sigma \sin\tau, \quad z = \sin\sigma.$$

Věta 34: Vlastnosti zobrazení Φ^*
Nechť $\Phi : \mathbb{R}_k \supset O \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$ je hladké a $\omega, \tau \in E^k(\Omega)$. Potom

1. $\Phi^*(\omega + \tau) = \Phi^*(\omega) + \Phi^*(\tau)$,
2. $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau)$,
3. pro libovolné $\Psi : \mathbb{R}_l \supset U \to O \subset \mathbb{R}_k$ hladké je
$$\big(\Phi \circ \Psi\big)(\omega) = \Psi^*\big(\Phi^*(\omega)\big),\ \text{tedy}\ (\Phi \circ \Psi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*,$$
4. je-li $k = n$ a $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \in E^n(\Omega)$, pak
$$\Phi^*(\omega) = f\big(\Phi(u)\big) \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right) \mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \mathrm{d}u_n.$$

Označení: Determinant jacobiánu zobrazení $\Phi : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ zapisujeme také takto:

$$\det J_\Phi = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}. \tag{48}$$

Poznámka: Bod 4. lze samozřejmě zobecnit i pro $k \leq n$. Pokud $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, pak analogicky jako pro $k = n$ odvodíme

$$\Phi^*(\omega) = f\big(\Phi(u)\big) \frac{\partial x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}}{\partial u_1, \ldots, u_k}\,\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_k.$$

Důkaz:

1. Dosazením do definice.
2. Díky předchozímu bodu stačí tvrzení dokázat pro formy $\omega = f_I\,\mathrm{d}x_I$, $\tau = g_J\,\mathrm{d}x_J$. Budiž $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$:
$$\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*\big(f_I\,\mathrm{d}x_I \wedge g_J\,\mathrm{d}x_J\big) = \Phi^*\big(f_I\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}\big) =$$
$$= (f_I \circ \Phi)(g_J \circ \Phi)\,\mathrm{d}\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Phi_{i_p} \wedge \Phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \Phi_{j_q} = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau).$$

   Striktně vzato jsme nebyli zcela přesní: poté, co jsme spolu vynásobili formy ω a τ, měli jsme přeuspořádat $\mathrm{d}x_i$ a $\mathrm{d}x_j$ podle rostoucích indexů. Definice (23) je napsána pouze pro formy v tomto tvaru. Po přenesení ovšem musíme činitele $\mathrm{d}\Phi_i$, $\mathrm{d}\Phi_j$ přeuspořádat zase zpět, abychom mohli součin „rozdělit“, přičemž obě provedená přeuspořádání jsou „stejná“, tedy případná změna znaménka po prvním z nich se vykompenzuje. Skutečnost, že formy f_I a g_J volně „proplouvají“ celým součinem, odráží fakt, že $f_I, g_J \in E^0(\Omega)$, a tedy komutují se všemi formami.

3. Použijeme-li body 1. a 2., vidíme, že stačí uvažovat formy $\omega = f \in E^0(\Omega)$ a $\tau = \mathrm{d}x_i \in E^1(\Omega)$. V prvním případě je
$$\big(\Phi \circ \Psi\big)^* f = f \circ (\Phi \circ \Psi) = (f \circ \Phi) \circ \Psi = \Psi^*\big(\Phi^*(f)\big).$$
Ve druhém případě budeme upravovat obě strany rovnosti:
$$\big(Phi \circ \Psi\big)^*(\mathrm{d}x_i) = \mathrm{d}(\Phi_i \circ \Psi) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial(\Phi_i \circ \Psi)}{\partial u_j}\,\mathrm{d}u_j = \sum_{j=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}\Big(\frac{\partial \Phi_i}{\partial v_s} \circ \Psi\Big)\frac{\partial \Psi_s}{\partial u_j}\,\mathrm{d}u_j$$
$$\Psi^*\big(\Phi^*(\mathrm{d}x_i)\big) = \Psi^*\Big(\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial v_s}\,\mathrm{d}v_s\Big) = \sum_{s=1}^{k}\Bigg(\Big(\frac{\partial \Phi_i}{\partial v_s} \circ \Psi\Big)\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial \Psi_s}{\partial u_j}\,\mathrm{d}u_j\Bigg).$$
Oba výrazy jsou si zřejmě rovny. To, že v derivaci složené funkce zbyl místo parciálních derivací výraz $(\partial\Phi_i/\partial v_s)\circ\Psi$, znamená pouze, že po provedení derivace budeme do výsledné funkce dosazovat v proměnných u_j a nikoliv v_s.

4. Položíme $x_i = \Phi_i(u_1, \dots, u_n)$ a podle bodu 2. se stačí zajímat pouze o $\tau = \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n$. Uvedené tvrzení jsme potom dokázali ve větě (33), bodu 4. Nyní ji pouze používáme pro vektory $\mathrm{d}x_i = \sum_j \partial x_i/\partial u_j\,\mathrm{d}u_j$.

§5. Integrace diferenciálních forem

P o z n á m k a: Zatím jsme téměř výhradně definovali pojmy („forma“ a „parametrizace“) a ukazovali, jak se s novými objekty pracuje. Nyní se přesvědčíme, zda tyto definice dávají smysluplné výsledky.

Definice 24: Integrace přes parametrickou plochu

1. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ je otevřená množina a $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n \in E^n(\Omega)$. Potom definujeme
$$\int_\Omega \omega \overset{\mathrm{df}}{=} (L)\int_\Omega f\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n, \tag{49}$$
pokud je výraz na pravé straně definován.

2. Pokud je $\Phi : \mathbb{R}_k \supset O \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$ hladké a $\omega \in E^k(\Omega)$, definujeme
$$\int_\Phi \omega \overset{\mathrm{df}}{=} \int_O \Phi^*(\omega). \tag{50}$$

P o z n á m k a: Rozdíl mezi oběma definicemi je zřejmý: prvá část říká, jak vůbec integrovat objekt ω a ztotožňuje bázový vektor $\mathrm{d}x_i$ se stejným znakem v Lebesgueově integrálu. Druhá část dává návod jak počítat integrál po k-dimenzionální „rozumné“ ploše v n-dimenzionálním prostoru tak, aby nevyšel nula.

P o z n á m k a: Zatím jsme na parametrizaci Φ nekladli žádné požadavky kromě hladkosti. Φ takto například nemusí být regulární nebo může plochu Ω „proběhnout několikrát“, čímž se samozřejmě výsledná hodnota integrálu násobí. Chceme-li, aby integrál na parametrizaci nezávisel, musíme tedy volbu parametrizace poněkud omezit.

Příklad: Ověřme, zda podle definice vycházejí nám známé vztahy pro křivkový a plošný integrál (srovnejte s úvodním paragrafem). Pro $\omega = f_1\,\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n\,\mathrm{d}x_n \in E^1(\Omega)$ a parametrizaci $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}_n$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je
$$\int_\varphi \omega = \int_a^b \varphi^*(\omega) = \int_a^b \Big[f_1\big(\varphi_1(t)\big)\varphi_1'(t) + \dots + f_1\big(\varphi_n(t)\big)\varphi_n'(t)\Big]\,\mathrm{d}t.$$

Pro dvoudimenzionální plochu $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}_3$, parametrizaci $\varphi : \mathbb{R}_2 \supset O \to \Omega$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\varphi_i = \varphi_i(u_1, u_2)$, $\varphi(O) = S$ a například formu $\omega = \omega_1 \, \mathrm{d}x_{23} \in E^2(\Omega)$ je

$$\int_\varphi \omega = \int_O \big[\omega_1\big(\varphi(u)\big) \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u_1, u_2)}\big] \, \mathrm{d}u_1 \, \mathrm{d}u_2.$$

Poznámka: Na předchozím příkladu je vidět, jak lze jednoduchou změnou parametrizace docílit změny hodnoty integrálu. Pokud pro $(u_2, u_1) \in O$ bereme $\tilde{\varphi}(u_1, u_2) = \varphi(u_2, u_1)$, změní determinant jacobiánu znaménko, a bude tudíž $\int_{\tilde{\varphi}} \omega = -\int_\varphi \omega$.

Zjistili jsme tedy dva „problémové body“. Poslední obtíž můžeme zřejmě odstranit, pokud budeme žádat, aby determinant jacobiánu měl na O neměnné znaménko. Otázku vícenásobného proběhnutí oblastí Ω potom řeší požadavek na prostotu parametrizace. Zdá se tedy účelné zavést následující dvě definice.

Definice 25: Difeomorfizmus
Zobrazení $\alpha : \mathbb{R}_k \supset O \to O' \subset \mathbb{R}_k$ nazveme difeomorfizmus, právě když je bijekce (tedy prosté a zobrazuje O *na* O'), hladké a α^{-1} je rovněž hladké.

Definice 26: Parametrizace, orientace parametrizací
Parametrizací plochy $S \subset \mathbb{R}_k$ v $\mathbb{R}_n$ nazveme každé hladké zobrazení $\Phi : \mathbb{R}_k \supset O \to \mathbb{R}_n$ takové, že $\Phi(O) = S$. Parametrizace $\Phi(u_1, \ldots, u_k) = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ je regulární, pokud hodnost příslušné Jacobiho matice $\{\partial\Phi_i / \partial u_j\}$ je k *všude* na O.
Dvě parametrizace $\varphi : \mathbb{R}_k \supset O \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$, $\varphi' : \mathbb{R}_k \supset O' \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$ nazveme souhlasně orientované ($\varphi \sim \varphi'$), pokud existuje difeomorfizmus $\alpha : O' \to O$, $\det J_\alpha > 0$ na O' takový, že $\varphi' = \varphi \circ \alpha$.
Pokud tento difeomorfizmus splňuje na O' podmínku $\det J_\alpha < 0$, nazveme parametrizace nesouhlasně orientované ($\varphi \not\sim \varphi'$).

Poznámka: Regulární parametrizace $\varphi : O \to \mathbb{R}_n$ je „difeomorfizmem“ mezi O a $\varphi(O)$.

Věta 35: Nezávislost integrálu na parametrizaci až na znaménko
Buďte $\varphi : \mathbb{R}_k \supset O \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$, $\varphi' : \mathbb{R}_k \supset O' \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$ souhlasně, resp. nesouhlasně orientované hladké parametrizace téže plochy S a $\omega \in E^k(\Omega)$. Pak platí

$$\int_{\varphi'} \omega = \int_\varphi \omega, \text{ resp. } \int_{\varphi'} \omega = -\int_\varphi \omega.$$

Lemma o znaménku difeomorfizmu:
Nechť $\alpha : O' \to O$ je difeomorfizmus. Pak $\operatorname{sgn}(\det J_\alpha)$ je konstantní na O'.

Důkaz lemmatu: Protože je α hladké zobrazení, je $\det J_\alpha$ spojitý. Protože je α^{-1} hladké, je spojitý i $\det J_{\alpha^{-1}}$. Z rovnosti $\det J_\alpha(x) J_{\alpha^{-1}}\big(\alpha(x)\big) \equiv 1$ na O' („součin determinantů je stále 1“) pak plyne, že $\det J_\alpha$ je na O' nenulové. Že spojitá funkce nenabývající nikde nulové hodnoty nemůže měnit znaménka, je již zřejmé.
Lemma využijeme na konci důkazu věty.

Důkaz věty: Víme, že v obou případech existuje difeomorfizmus $\alpha : O' \to O$, $\varphi' = \varphi \circ \alpha$. Z definice (24) a věty (34) pak můžeme psát

$$\int_{\varphi'} \omega = \int_{O'} \big(\varphi'\big)^*(\omega) = \int_O \big(\varphi \circ \alpha\big)^*(\omega) = \int_O \alpha^*\big(\varphi^*(\omega)\big).$$

Dále již jen přenášíme formy; opět díky větě (34) stačí bez újmy na obecnosti uvažovat například $\omega = f(x) \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \mathrm{d}x_k$.

$$\varphi^*(\omega) = f\big(\varphi(u)\big)\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\,\mathrm{d}u_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}u_k$$

$$\int_{O'}\alpha^*\big(\varphi^*(\omega)\big) = \int_{O'} f\big[\big(\varphi\circ\alpha(u)\big)\big]\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\,\mathrm{d}\alpha_1(u')\ldots\mathrm{d}\alpha_k(u');$$

$$\int_{O}\varphi^*(\omega) = \int_{O} f\big(\varphi(u)\big)\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\,\mathrm{d}u_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}u_k.$$

Nyní dokončíme přenášení druhého řádku z O do O' (provedeme naznačené diferencování α_i a upravíme dle poznámky za větou (34)) a dále použijeme na třetí řádek větu o substituci v Lebesgueově integrálu (přejdeme z O do O').

$$\int_{O'}\alpha^*\big(\varphi^*(\omega)\big) = \int_{O'} f\big[\big(\varphi\circ\alpha(u)\big)\big]\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\frac{\partial u_1,\ldots,u_k}{\partial u'_1,\ldots,u'_k}\,\mathrm{d}u'_1\ldots\mathrm{d}u'_k,$$

$$\int_{O}\varphi^*(\omega) = \int_{O'} f\big[(\varphi\circ\alpha)(u)\big]\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\left|\frac{\partial u_1,\ldots,u_k}{\partial u'_1,\ldots,u'_k}\right|\mathrm{d}u'_1\ldots\mathrm{d}u'_k.$$

Podle lemmatu víme, že $\det J_\alpha$ nemění znaménko, a tedy můžeme zapsat

$$\int_{O'}\alpha^*\big(\varphi^*(\omega)\big) = \operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial u_1,\ldots,u_k}{\partial u'_1,\ldots,u'_k}\Big)\int_{O}\varphi^*(\omega),$$

což při srovnání s definicí souhlasné, resp. nesouhlasné orientace dává tvrzení věty.

Poznámka (odjinud): Všimněte si, že místo věty o substituci jsme (alespoň formálně a až na znaménko, tj. absolutní hodnotu) mohli použít tvrzení $\det AB = \det A \det B$. Můžeme to chápat jako náznak, že použití determinantu ve větě o substituci mělo svůj význam.

Poznámka: V dalším budeme blíže zkoumat plochy v $\mathbb{R}_n$. Definujeme nejprve pojem křivkové souvislosti plochy, který patří do požadavků na „kulturnost“ plochy.

Definice 27: Souvislá množina
Řekneme, že otevřená množina $O \subset \mathbb{R}_n$ je souvislá, pokud pro libovolné dva její body x, y existuje spojité zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to O$ takové, že $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y$.

Označení: Množinu $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ nazveme oblast, pokud je otevřená a souvislá.

Cvičení: Dokažte tvrzení, že spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina.

Definice 28: Regulární plocha dimenze k
Množinu $S \subset \mathbb{R}_n$ nazveme plochou dimenze nejvýše k, pokud existuje oblast $O \subset \mathbb{R}_k$ a zobrazení $\varphi : O \to \mathbb{R}_n$ hladké takové, že $\varphi(O) = S$.
Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}_n$ je regulární plocha dimenze k v $\mathbb{R}_n$, pokud existuje interval $I \subset \mathbb{R}_k$ a zobrazení $\varphi : I \to \mathbb{R}_n$ prosté a hladké[32] takové, že $S = \varphi(I^0)$ a hodnost J_φ je na[33] I^0 rovna k.

Poznámka: Pokud se omezíme na regulární plochy, nabízí se samozřejmě otázka, kolik existuje tříd (rozdělených podle ekvivalence $\sim$) parametrizací dané plochy. Odpověď dává následující věta.

Věta 36: Třídy parametrizací regulární plochy
Existují právě dvě třídy ekvivalence regulárních parametrizací libovolné regulární plochy dimenze k v $\mathbb{R}_n$.

Lemma o difeomorfizmu mezi regulárními parametrizacemi:
Jsou-li $\varphi : I \to \mathbb{R}_n, \varphi' : I' \to \mathbb{R}_n$ regulární parametrizace téže regulární plochy dimenze k v $\mathbb{R}_n$, pak existuje difeomorfizmus $\alpha : I'^0 \to I^0$ takový, že $\varphi' = \varphi\circ\alpha$.

Důkaz lemmatu: Zřejmě stačí brát $\alpha = \varphi^{-1}\circ\varphi'$. Je ovšem třeba ještě ověřit, zda takové α je skutečně difeomorfizmus. Nejprve prověřme hladkost: zřejmě stačí, aby φ^{-1} bylo hladké. Je-li však φ regulární,

[32] Zopakujme: φ je hladké na neotevřené množině M, pokud existuje otevřená množina $O \supset M$, na níž je některé rozšíření φ hladké.
[33] I^0 značí vnitřek množiny I.

znamená to podle definice, že hodnost příslušné Jacobiho matice je rovna k na I^0. V každém bodě $x \in I^0$ proto existují indexy $\{i_1, \ldots, i_k\}$ takové, že

$$\frac{\partial \varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k}}{\partial u_1, \ldots, u_k}(x) \neq 0.$$

Podle věty o inverzním zobrazení z minulého semestru to postačuje pro existenci hladkého zobrazení $\varphi_x^{-1} : \mathbb{R}_n \supset U \to I^0$ na určitém okolí U bodu $\varphi(x)$. Taková zobrazení existují v každém bodě $\varphi(O)$ a z jejich jednoznačnosti a ze souvislosti I^0 plyne, že je můžeme na sebe navázat a vytvořit tak jediné zobrazení $\varphi^{-1} : \varphi(I^0) \to I^0$. Skutečnost, že výběr indexů $i_1, \ldots, i_k$ mohl záviset na x nás nemusí znepokojovat. Díky výběru bychom byli dokonce schopni sestrojit zobrazení $\varphi_x^{-1}\mathbb{R}_k \to \mathbb{R}_k$, ale nám stačí zobrazovat z $\mathbb{R}_n$, s tím, že zobrazení si jednou „bude všímat“ některých k souřadnic x_i a jindy zase jiných.

Stejně bychom ověřili, že i φ'^{-1} je hladké, a tím pádem i zobrazení $\varphi'^{-1} \circ \varphi = \alpha^{-1}$ je hladké (čímž jsme ovšem také ukázali jeho existenci). Pak je ale α i prosté. α je také surjekce (zobrazení na), neboť φ i φ' parametrizují celou plochu S. Navržené α je tedy difeomorfizmus.

Důkaz věty: Dle lemmatu o „znaménku difeomorfizmu“ nyní víme, že každé dvě parametrizace jsou buď souhlasně, nebo nesouhlasně orientovány. Protože $\sim$ je ekvivalence[34], stačí vybrat libovolnou regulární parametrizaci φ a jednu, resp. druhou třídu vytvořit z parametrizací orientovaných souhlasně, resp. nesouhlasně s φ.

Definice 29: Orientace plochy

Nechť S je regulární plocha dimenze k v $\mathbb{R}_n$. Orientovat S znamená vybrat jednu ze dvou tříd ekvivalence jejích parametrizací. Jakoukoliv regulární parametrizaci z této vybrané třídy označím za kladně orientovanou parametrizaci.

Plochu S nazveme orientovaná plocha.

Je-li S orientovaná plocha, pak $-S$ označíme tutéž množinu s opačnou orientací.

Pokud je $\tilde{S}$ regulární plocha dimenze k v $\mathbb{R}_n$, $\tilde{S} \subset S$, pak orientací $\tilde{S}$ rozumíme výběr stejné třídy parametrizací jako u S pouze navíc zúžených na $\tilde{S}$.

Příklad: $k = 1$: křivka parametrizovaná $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}_n$. Opačnou orientaci má například $\tilde{\varphi} : \langle -b, -a\rangle \to \mathbb{R}_n$, $-\varphi(t) \overset{\text{df}}{=} \tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$.

$k = 2$: ploše parametrizované pomocí $\Phi = \Phi(u, v)$ lze změnit orientaci například záměnou souřadnic (napište si determinant). $-\Phi \overset{\text{df}}{=} \tilde{\Phi}(u, v) = \Phi(v, u)$.

Poznámka: Pojem orientace plochy zřejmě souvisí s orientací vektorového prostoru V. Čemu odpovídá naše definice? Uvažujme množinu B všech bází V. Dva prvky z B nazveme ekvivalentní, pokud matice přechodu mezi nimi má kladný determinant. Množinu B lze podle této ekvivalence rozložit na dvě disjunktní třídy. Jednu z nich pak označíme $+$, druhou $-$.

Příklad: Jak zjistit orientaci bez použití determinantu?
$\dim V = 1$. Kladná orientace může být například zleva doprava.
$\dim V = 2$. Za kladně orientovanou označíme například dvojici v_1, v_2, u níž je orientovaný úhel od v_1 k v_2 proti směru hodinových ručiček menší než π.
$\dim V = 3$. Zde pomáhají různá „pravidla pravé ruky“ — za kladnou bereme pravotočivou bázi.

Příklad: Pokud je zadána normála n k prostoru W dimenze n ve V dimenze $n+1$, můžeme za kladně orientovanou považovat takovou bázi $\{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_n\}$ ve W, pro níž je $\{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_n, \mathsf{n}\}$ kladně orientovaná ve V.

Poznámka: Jak přejdeme od orientace vektorového prostoru dimenze k zpět k orientaci obecné plochy téže dimenze? Pro parametrizaci $\Phi = \Phi(u_1, \ldots, u_k)$ stačí zjistit orientaci tečného prostoru vytvořeného jako lineární obal vektorů $\partial\Phi/\partial u_j$, $j = 1, \ldots, k$. Z lemmatu o znaménku difeomorfizmu pak plyne, že

[34] Pamatujete si ještě definici ekvivalence? Zkuste $\sim$ prověřit.

orientace všech těchto tečných prostorů je stejná.

P o z n á m k a : Orientovat vektorový prostor V dimenze n lze buď výběrem n lineárně nezávislých vektorů $v_1, \ldots, v_n$ z V nebo také výběrem nenulového prvku z $\Lambda^n(V) \simeq \mathbb{R}$. Pokud bychom v $\Lambda^n(V)$ zvolili bázi $\{\mathrm{d}x_i\}$, odpovídal by tento prvek 0-vektoru v, který splňuje $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = v\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ (zopakujte větu (33)).

Definice 30: Integrál diferenciální formy nezávislý na volbě parametrizace
Nechť S je orientovaná plocha dimenze k v $\mathbb{R}_n$, $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}_n$, $\omega \in E^k(\Omega)$. Pak pro libovolnou kladně orientovanou parametrizaci Φ plochy S položíme

$$\int_S \omega \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_\Phi \omega. \tag{51}$$

Věta 37: Nezávislost integrálu na parametrizaci
$\int_S \omega$ nezávisí na volbě parametrizace Φ.

Důkaz: Není téměř co dokazovat, práci jsme si odbyli ve větě (35). Stačí si uvědomit, že difeomorfizmus α, který mezi dvěma kladně (a tedy shodně) orientovanými parametrizacemi existuje, má kladný jacobián.

P o z n á m k a : Pro záporně orientovanou parametrizaci Φ bude samozřejmě $\int_\Phi \omega = -\int_S \omega$.

Celá teorie vypadá nyní uspokojivě. Bohužel množina všech regulárních ploch nezahrnuje některé užitečné exempláře.
Příklad: Kvádr, tedy plocha ohraničující interval v $\mathbb{R}_n$ není hladký. Pokud z něj ale vyjmeme všechny hrany, zbude soubor konečného počtu hladkých regulárních ploch.
Sféra není regulární plocha, neboť je kompaktní; prosté zobrazení nemůže otevřenou množinu zobrazit na kompaktní množinu. Je možné ji ale například rozdělit na dvě poloviny a z nich vyjmout „plochy řezu“ (v $\mathbb{R}_3$ je to kružnice).
Rýsuje se tedy řešení: z plochy S vyjmeme „problémovou“ množinu M, která je dostatečně „malá“, a formu zintegrujeme přes $S \setminus M$. Klasifikace „dostatečně malá“ v předchozím odpovídala tomu, že v M byl konečný počet ploch dimenze menší než $\dim S$. Pojem regulární plochy tedy zobecníme.

Definice 31: Zobecněná plocha, orientace zobecněné plochy, integrál přes zobecněnou plochu
Nechť $M \subset \mathbb{R}_n$, a dále nechť existují regulární plochy $M_1, \ldots, M_s \subset \mathbb{R}_n$ dimenze k a množina $N \subset \mathbb{R}_n$ takové, že

1. $M = N \cup \bigcup_i M_i$ a množiny $M_1, \ldots, M_s, N$ jsou po dvou disjunktní,
2. existují plochy $N_1, \ldots, N_t$ dimenze nejvýše $k-1$ takové, že $N \subset \bigcup_j N_j$.

Každý takový rozklad $\{M_i, N\}$ množiny M nazveme přípustný rozklad M. Plochu M nazveme zobecněnou plochou dimenze k, pokud existuje alespoň jeden její přípustný rozklad.
Orientovat M znamená orientovat každou z částí M_i. Dva rozklady $\{M_i, N\}$, $\{M'_j, N'\}$ množiny M označíme jako souhlasně orientované, pokud jsou obě orientace $M_i \cap M'_j$ plynoucí z orientace M_i a M'_j stejné pro každé i, j. Za kladně orientovaný rozklad označím každý rozklad souhlasně orientovaný s rozkladem, jehož všechny části M_i jsou orientovány kladně.
Budiž $M \subset \mathbb{R}_n$ orientovaná zobecněná plocha, $\Omega \subset \mathbb{R}_n, M \subset \Omega$ otevřená množina a $\omega \in E^k(\Omega)$. Potom pro libovolný přípustný kladně orientovaný rozklad $\{M_i, N\}$ položíme

$$\int_M \omega \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^{s} \int_{M_i} \omega. \tag{52}$$

P o z n á m k a : Počet všech možných orientací pro daný rozklad $M_1, \ldots, M_s, N$ je roven 2^s.

Věta 38: Nezávislost integrálu na volbě rozkladu
$\int_M \omega$ nezávisí na volbě rozkladu zobecněné plochy M.

Důkaz: Budiž dimenze M rovna k. Uvažujme dva kladně orientované rozklady $\{M_i, N\}, i = 1, \ldots, s$ a $\{M'_j, N'\}, j = 1, \ldots, s'$ množiny M. Pro každé i, j jsou tedy dány kladně orientované parametrizace M_i, M'_j a intervaly I_j, I_i

$$\varphi_i : \mathbb{R}_k \subset I_i^0 \to \mathbb{R}_n,\ \varphi'_j : \mathbb{R}_k \subset I_j^0 \to \mathbb{R}_n.$$

Množinu M_i, resp. M'_j pro libovolné i zapíšeme ve tvaru

$$M_i = (M_i \cap M'_1) \cup \ldots \cup (M_i \cap M'_{s'}) \cup (M_i \cap N'),$$
$$M'_i = (M'_i \cap M_1) \cup \ldots \cup (M'_i \cap M_s) \cup (M'_i \cap N)$$

a provedeme integraci

$$\sum_{i=1}^{s} \int_{M_i} \omega = \int_{I_i^0} \varphi_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^{s} \int_{\phi_i^{-1}(M_i \cap N')} \varphi_i^*(\omega) + \sum_{j=1}^{s'} \int_{\phi_i^{-1}(M_i \cap M'_s)} \varphi_i^*(\omega).$$

Bez důkazu ponecháme tvrzení, že množinu $M_i \cap M'_j$ lze regulárně parametrizovat pomocí zobrazení φ_i. Integrály přes oblasti $M_i \cap N'$ nebo $M'_i \cap N$ jsou zřejmě rovny nule, neboť množiny $\varphi^{-1}(N \cap X)$ pro libovolné X měřitelné mají v prostoru parametrů (v $\mathbb{R}_k$) míru nula. Celkem jsme tedy integrál přes M vyčíslili takto:

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s'} \int_{\phi_i^{-1}(M_i \cap M'_s)} \varphi_i^*(\omega).$$

Ke stejnému výrazu ovšem dojdeme, pakliže použijeme druhého rozkladu $\{M'_j, N'\}$, a věta je tím dokázána.

Příklad: Prozkoumejme, jak se právě naznačený postup aplikuje při parametrizaci již zmíněné sféry v $\mathbb{R}_3$. Budiž tedy plocha S a parametrizace φ následující:

$$S = \{[x_1, x_2, x_3] |\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},\ \varphi(\theta, \tau) = (\cos\theta\cos\tau, \cos\theta\sin\tau, \sin\theta),$$
$$(\theta, \tau) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) = I_1^0,\ \text{resp. } (\theta, \tau) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) = I_2^0.$$

Z rozkladu $M = \varphi(I_1^0) \cup \varphi(I_2^0) \cup N$, kde N je kružnice $\theta = \pi/2$, vidíme, že sféra je zobecněná plocha.

P o z n á m k a : Dalším zobecňováním pojmu plochy bychom dospěli k varietám[35]. „Zmírnit nároky" lze například povolením i nedisjunktních rozkladů $\{M_i, N\}$. Ve fyzice se variety uplatňují například v obecné teorii relativity jako model prostoročasu.

[35] Angl. manifold.

Obsah