1. TOPOLOGIE A SPOJITOST

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Definice, charakterizace a vlastnosti uzavřené báze topologického prostoru se snadno získají přechodem k doplňkům množin.

DEFINICE (Definice báze a subbáze uzavřených množin)

- Soustava $\mathcal{F}$ uzavřených množin v prostoru X se nazývá báze uzavřených množin, je-li každá uzavřená množina v X průnikem množin z $\mathcal{F}$.
- Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze uzavřených množin prostoru X, jestliže každá uzavřená množina v X se dá vytvořit průniky a konečnými sjednoceními množin z $\mathcal{S}$.

Uzavřené báze

1. Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin X je uzavřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti
   1. Je-li $F_1, F_2 \in \mathcal{B}, x \notin F_1 \cup F_2$, pak existuje $F \in \mathcal{F}$ takové, že $x \notin F \supset F_1 \cup F_2$.
   2. $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
2. Každá soustava podmnožin X je subbází nějaké (jediné) topologie na X.
3. Je-li $\mathcal{S}$ uzavřená subbáze topologie na X, jsou konečná sjednocení množin z $\mathcal{S}$ uzavřenou bází této topologie.

DEFINICE (Definice báze a subbáze uzavřených množin)

- Soustava $\mathcal{F}$ uzavřených množin v prostoru X se nazývá báze uzavřených množin, je-li každá uzavřená množina v X průnikem množin z $\mathcal{F}$.
- Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze uzavřených množin prostoru X, jestliže každá uzavřená množina v X se dá vytvořit průniky a konečnými sjednoceními množin z $\mathcal{S}$.

Uzavřené báze

1. Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin X je uzavřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti
    1. Je-li $F_1, F_2 \in \mathcal{B}$, $x \notin F_1 \cup F_2$, pak existuje $F \in \mathcal{F}$ takové, že $x \notin F \supset F_1 \cup F_2$.
    2. $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
2. Každá soustava podmnožin X je subbází nějaké (jediné) topologie na X.
3. Je-li $\mathcal{S}$ uzavřená subbáze topologie na X, jsou konečná sjednocení množin z $\mathcal{S}$ uzavřenou bází této topologie.

DEFINICE (Definice báze a subbáze uzavřených množin)

- Soustava $\mathcal{F}$ uzavřených množin v prostoru X se nazývá báze uzavřených množin, je-li každá uzavřená množina v X průnikem množin z $\mathcal{F}$.
- Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze uzavřených množin prostoru X, jestliže každá uzavřená množina v X se dá vytvořit průniky a konečnými sjednoceními množin z $\mathcal{S}$.

Uzavřené báze

1. Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin X je uzavřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti
   1. Je-li $F_1, F_2 \in \mathcal{B}$, $x \notin F_1 \cup F_2$, pak existuje $F \in \mathcal{F}$ takové, že $x \notin F \supset F_1 \cup F_2$.
   2. $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
2. Každá soustava podmnožin X je subbází nějaké (jediné) topologie na X.
3. Je-li $\mathcal{S}$ uzavřená subbáze topologie na X, jsou konečná sjednocení množin z $\mathcal{S}$ uzavřenou bází této topologie.

DEFINICE (Definice báze a subbáze uzavřených množin)

- Soustava $\mathcal{F}$ uzavřených množin v prostoru X se nazývá báze uzavřených množin, je-li každá uzavřená množina v X průnikem množin z $\mathcal{F}$.
- Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze uzavřených množin prostoru X, jestliže každá uzavřená množina v X se dá vytvořit průniky a konečnými sjednoceními množin z $\mathcal{S}$.

Uzavřené báze

1. Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin X je uzavřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti
   1. Je-li $F_1, F_2 \in \mathcal{B}, x \notin F_1 \cup F_2$, pak existuje $F \in \mathcal{F}$ takové, že $x \notin F \supset F_1 \cup F_2$.
   2. $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
2. Každá soustava podmnožin X je subbází nějaké (jediné) topologie na X.
3. Je-li $\mathcal{S}$ uzavřená subbáze topologie na X, jsou konečná sjednocení množin z $\mathcal{S}$ uzavřenou bází této topologie.

DEFINICE (Definice báze a subbáze uzavřených množin)

- Soustava $\mathcal{F}$ uzavřených množin v prostoru X se nazývá báze uzavřených množin, je-li každá uzavřená množina v X průnikem množin z $\mathcal{F}$.
- Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze uzavřených množin prostoru X, jestliže každá uzavřená množina v X se dá vytvořit průniky a konečnými sjednoceními množin z $\mathcal{S}$.

Uzavřené báze

1. Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin X je uzavřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti
   1. Je-li $F_1, F_2 \in \mathcal{B}, x \notin F_1 \cup F_2$, pak existuje $F \in \mathcal{F}$ takové, že $x \notin F \supset F_1 \cup F_2$.
   2. $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
2. Každá soustava podmnožin X je subbází nějaké (jediné) topologie na X.
3. Je-li $\mathcal{S}$ uzavřená subbáze topologie na X, jsou konečná sjednocení množin z $\mathcal{S}$ uzavřenou bází této topologie.

DEFINICE (Definice báze a subbáze uzavřených množin)

- Soustava $\mathcal{F}$ uzavřených množin v prostoru X se nazývá báze uzavřených množin, je-li každá uzavřená množina v X průnikem množin z $\mathcal{F}$.
- Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze uzavřených množin prostoru X, jestliže každá uzavřená množina v X se dá vytvořit průniky a konečnými sjednoceními množin z $\mathcal{S}$.

Uzavřené báze

1. Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin X je uzavřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti
   1. Je-li $F_1, F_2 \in \mathcal{B}, x \notin F_1 \cup F_2$, pak existuje $F \in \mathcal{F}$ takové, že $x \notin F \supset F_1 \cup F_2$.
   2. $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
2. Každá soustava podmnožin X je subbází nějaké (jediné) topologie na X.
3. Je-li $\mathcal{S}$ uzavřená subbáze topologie na X, jsou konečná sjednocení množin z $\mathcal{S}$ uzavřenou bázi této topologie.

Báze nebo subbáze uzavřených množin se používají méně než báze a subbáze otevřených množin.
Hrubý T_1-prostor má za uzavřenou bázi všechny své jednobodové podmnožiny.

otevřené báze a báze okolí

1. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze topologie $\mathcal{G}$, je pro každé $x \in X$ soustava $\{b \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí v x.
2. Obráceně, je-li pro každé $x \in X$ soustava $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x složenou z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$ otevřenou bází topologie $\mathcal{G}$.
3. Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená báze v prostoru X. Pro každé $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ zvolte bod $x_B \in B$. Pak množina všech těchto bodů x_B je hustá v X.

Obojetné množiny

1. Soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na konečné průniky a konečná sjednocení.
2. Podmnožina A prostoru X je obojetná právě když existuje spojité zobrazení X do dvoubodového diskrétního prostoru tak, že A je vzor jednoho bodu.
3. Je-li soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na libovolné průniky a libovolná sjednocení, existuje spojité zobrazení X do diskrétního prostoru tak, že vzory bodů jsou nejmenší neprázdné otevřené množiny v X. Tyto vzory tvoří otevřenou bázi topologie v X.

otevřené báze a báze okolí

1. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze topologie $\mathcal{G}$, je pro každé $x \in X$ soustava $\{b \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí v x.
2. Obráceně, je-li pro každé $x \in X$ soustava $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x složenou z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$ otevřenou bází topologie $\mathcal{G}$.
3. Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená báze v prostoru X. Pro každé $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ zvolte bod $x_B \in B$. Pak množina všech těchto bodů x_B je hustá v X.

Obojetné množiny

1. Soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na konečné průniky a konečná sjednocení.
2. Podmnožina A prostoru X je obojetná právě když existuje spojité zobrazení X do dvoubodového diskrétního prostoru tak, že A je vzor jednoho bodu.
3. Je-li soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na libovolné průniky a libovolná sjednocení, existuje spojité zobrazení X do diskrétního prostoru tak, že vzory bodů jsou nejmenší neprázdné otevřené množiny v X. Tyto vzory tvoří otevřenou bázi topologie v X.

otevřené báze a báze okolí

1. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze topologie $\mathcal{G}$, je pro každé $x \in X$ soustava $\{b \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí v x.
2. Obráceně, je-li pro každé $x \in X$ soustava $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x složenou z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$ otevřenou bází topologie $\mathcal{G}$.
3. Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená báze v prostoru X. Pro každé $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ zvolte bod $x_B \in B$. Pak množina všech těchto bodů x_B je hustá v X.

Obojetné množiny

1. Soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na konečné průniky a konečná sjednocení.
2. Podmnožina A prostoru X je obojetná právě když existuje spojité zobrazení X do dvoubodového diskrétního prostoru tak, že A je vzor jednoho bodu.
3. Je-li soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na libovolné průniky a libovolná sjednocení, existuje spojité zobrazení X do diskrétního prostoru tak, že vzory bodů jsou nejmenší neprázdné otevřené množiny v X. Tyto vzory tvoří otevřenou bázi topologie v X.

otevřené báze a báze okolí

1. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze topologie $\mathcal{G}$, je pro každé $x \in X$ soustava $\{b \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí v x.
2. Obráceně, je-li pro každé $x \in X$ soustava $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x složenou z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$ otevřenou bází topologie $\mathcal{G}$.
3. Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená báze v prostoru X. Pro každé $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ zvolte bod $x_B \in B$. Pak množina všech těchto bodů x_B je hustá v X.

Otevřené intervaly v lineárně uspořádané množině bez nejmenšího a největšího prvku tvoří otevřenou bázi topologie uspořádaného prostoru. Pro lokální bázi v bodě x stačí brát intervaly s koncovými body v množinách A, B, kde $A \subset (\leftarrow, x), B \subset (x, \rightarrow)$, pro které je $x = \inf B = \sup A$.
Otevřené koule v pseudometrizovatelném prostoru tvoří otevřenou bázi. Pro lokální bázi v bodě x stačí brát koule se středem v x a poloměry z nějaké posloupnosti kladných čísel konvergující k 0.

Obojetné množiny

1. Soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na konečné průniky a konečná sjednocení.
2. Podmnožina A prostoru X je obojetná právě když existuje spojité zobrazení X do dvoubodového diskrétního prostoru tak, že A je vzor jednoho bodu.

otevřené báze a báze okolí

1. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze topologie $\mathcal{G}$, je pro každé $x \in X$ soustava $\{b \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí v x.
2. Obráceně, je-li pro každé $x \in X$ soustava $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x složenou z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$ otevřenou bází topologie $\mathcal{G}$.
3. Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená báze v prostoru X. Pro každé $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ zvolte bod $x_B \in B$. Pak množina všech těchto bodů x_B je hustá v X.

Jako příklady otevřené subbáze mohou sloužit nevlastní intervaly v uspořádaném prostoru. V rovině tvoří všechny otevřené pásy rovnoběžné s osami souřadnic otevřenou subbázi (jsou to množiny tvaru $\{(x, y); a < x < b\}$ a $\{(x, y); a < y < b\}$ pro všechna, nebo jen racionální, čísla $a < b$).

Obojetné množiny

1. Soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na konečné průniky a konečná sjednocení.
2. Podmnožina A prostoru X je obojetná právě když existuje spojité zobrazení X do dvoubodového diskrétního prostoru tak, že A je vzor jednoho bodu.
3. Je-li soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na libovolné průniky a libovolná sjednocení, existuje spojité zobrazení X do diskrétního prostoru tak, že vzory bodů jsou nejmenší neprázdné

otevřené báze a báze okolí

1. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze topologie $\mathcal{G}$, je pro každé $x \in X$ soustava $\{b \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí v x.
2. Obráceně, je-li pro každé $x \in X$ soustava $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x složenou z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$ otevřenou bází topologie $\mathcal{G}$.
3. Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená báze v prostoru X. Pro každé $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ zvolte bod $x_B \in B$. Pak množina všech těchto bodů x_B je hustá v X.

Prostory, které mají otevřenou bázi složenou z obojetných množin se nazývají 0-dimenzionální. Obojetné množiny mají na jedné straně méně vlastností než uzavřené nebo otevřené množiny, na druhé straně však mají tyto vlastnosti v jistém smyslu hlubší.

Obojetné množiny

1. Soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na konečné průniky a konečná sjednocení.
2. Podmnožina A prostoru X je obojetná právě když existuje spojité zobrazení X do dvoubodového diskrétního prostoru tak, že A je vzor jednoho bodu.
3. Je-li soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na libovolné průniky a libovolná sjednocení, existuje spojité zobrazení X do diskrétního prostoru tak, že vzory bodů jsou nejmenší neprázdné otevřené množiny v X. Tyto vzory tvoří otevřenou bázi topologie v X.

otevřené báze a báze okolí

1. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze topologie $\mathcal{G}$, je pro každé $x \in X$ soustava $\{b \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí v x.
2. Obráceně, je-li pro každé $x \in X$ soustava $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x složenou z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$ otevřenou bází topologie $\mathcal{G}$.
3. Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená báze v prostoru X. Pro každé $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ zvolte bod $x_B \in B$. Pak množina všech těchto bodů x_B je hustá v X.

Obojetné množiny

1. Soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na konečné průniky a konečná sjednocení.
2. Podmnožina A prostoru X je obojetná právě když existuje spojité zobrazení X do dvoubodového diskrétního prostoru tak, že A je vzor jednoho bodu.
3. Je-li soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na libovolné průniky a libovolná sjednocení, existuje spojité zobrazení X do diskrétního prostoru tak, že vzory bodů jsou nejmenší neprázdné otevřené množiny v X. Tyto vzory tvoří otevřenou bázi topologie v X.

otevřené báze a báze okolí

1. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze topologie $\mathcal{G}$, je pro každé $x \in X$ soustava $\{b \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí v x.
2. Obráceně, je-li pro každé $x \in X$ soustava $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x složenou z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$ otevřenou bází topologie $\mathcal{G}$.
3. Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená báze v prostoru X. Pro každé $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ zvolte bod $x_B \in B$. Pak množina všech těchto bodů x_B je hustá v X.

Obojetné množiny

1. Soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na konečné průniky a konečná sjednocení.
2. Podmnožina A prostoru X je obojetná právě když existuje spojité zobrazení X do dvoubodového diskrétního prostoru tak, že A je vzor jednoho bodu.
3. Je-li soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na libovolné průniky a libovolná sjednocení, existuje spojité zobrazení X do diskrétního prostoru tak, že vzory bodů jsou nejmenší neprázdné otevřené množiny v X. Tyto vzory tvoří otevřenou bázi topologie v X.

otevřené báze a báze okolí

1. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze topologie $\mathcal{G}$, je pro každé $x \in X$ soustava $\{b \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí v x.
2. Obráceně, je-li pro každé $x \in X$ soustava $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x složenou z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x$ otevřenou bází topologie $\mathcal{G}$.
3. Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená báze v prostoru X. Pro každé $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ zvolte bod $x_B \in B$. Pak množina všech těchto bodů x_B je hustá v X.

Obojetné množiny

1. Soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na konečné průniky a konečná sjednocení.
2. Podmnožina A prostoru X je obojetná právě když existuje spojité zobrazení X do dvoubodového diskrétního prostoru tak, že A je vzor jednoho bodu.
3. Je-li soustava obojetných množin prostoru X je uzavřená na libovolné průniky a libovolná sjednocení, existuje spojité zobrazení X do diskrétního prostoru tak, že vzory bodů jsou nejmenší neprázdné otevřené množiny v X. Tyto vzory tvoří otevřenou bázi topologie v X.

V textu o vytváření topologie konvergencí chybí odpověď na dvě otázky. Jednak není jasné, zda ona nejjemnější topologie k danému systému $\mathcal{K}$ vždy existuje a jednak není jasný popis této topologie.

Topologie určená konvergencí

1. Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Pak existuje nejjemnější topologie na X taková, že každý usměrněný soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje v této topologii k x.
2. Topologie z předchozího bodu lze popsat následovně:
   - Množina $F \subset X$ je uzavřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ ležící v F je $x \in F$.
   - Množina $G \subset X$ je otevřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ a $x \in G$ leží skoro celý v G.
   - Množina $U \subset X$ je okolím bodu $x \in X$, jestliže každý $S \in \mathcal{K}_x$ leží skoro celý soubor S v U.

Vhodná konvergence

1. Nechť $\mathcal{B}_x$, $x \in X$, jsou báze okolí x v prostoru X. Pak konvergentní soubory v X na usměrněných souborech $\mathcal{B}_x$, $x \in X$, vytvářejí topologii X.

Topologie určená konvergencí

1. Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Pak existuje nejjemnější topologie na X taková, že každý usměrněný soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje v této topologii k x.
2. Topologie z předchozího bodu lze popsat následovně:
   - Množina $F \subset X$ je uzavřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ ležící v F je $x \in F$.
   - Množina $G \subset X$ je otevřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ a $x \in G$ leží skoro celý v G.
   - Množina $U \subset X$ je okolím bodu $x \in X$, jestliže každý $S \in \mathcal{K}_x$ leží skoro celý soubor S v U.

Vhodná konvergence

1. Nechť $\mathcal{B}_x$, $x \in X$, jsou báze okolí x v prostoru X. Pak konvergentní soubory v X na usměrněných souborech $\mathcal{B}_x$, $x \in X$, vytvářejí topologii X.
2. Má-li topologický prostor v každém bodě spočetnou bázi svých okolí (např. je-li metrizovatelný), určují konvergentní posloupnosti jeho topologii.

$\Rightarrow$

Topologie určená konvergencí

1. Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Pak existuje nejjemnější topologie na X taková, že každý usměrněný soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje v této topologii k x.
2. Topologie z předchozího bodu lze popsat následovně:
   - Množina $F \subset X$ je uzavřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ ležící v F je $x \in F$.
   - Množina $G \subset X$ je otevřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ a $x \in G$ leží skoro celý v G.
   - Množina $U \subset X$ je okolím bodu $x \in X$, jestliže každý $S \in \mathcal{K}_x$ leží skoro celý soubor S v U.

Vhodná konvergence

1. Nechť $\mathcal{B}_x$, $x \in X$, jsou báze okolí x v prostoru X. Pak konvergentní soubory v X na usměrněných souborech $\mathcal{B}_x$, $x \in X$, vytvářejí topologii X.
2. Má-li topologický prostor v každém bodě spočetnou bázi svých okolí (např. je-li metrizovatelný), určují konvergentní posloupnosti jeho topologii.

Topologie určená konvergencí

1. Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Pak existuje nejjemnější topologie na X taková, že každý usměrněný soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje v této topologii k x.
2. Topologie z předchozího bodu lze popsat následovně:
   - Množina $F \subset X$ je uzavřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ ležící v F je $x \in F$.
   - Množina $G \subset X$ je otevřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ a $x \in G$ leží skoro celý v G.
   - Množina $U \subset X$ je okolím bodu $x \in X$, jestliže každý $S \in \mathcal{K}_x$ leží skoro celý soubor S v U.

Všechny konvergentní soubory v daném topologickém prostoru tvoří vlastní třídu. Vždy lze však najít množinu konvergentních souborů, které vytvářejí danou topologii.

Vhodná konvergence

1. Nechť $\mathcal{B}_x$, $x \in X$, jsou báze okolí x v prostoru X. Pak konvergentní soubory v X na usměrněných souborech $\mathcal{B}_x$, $x \in X$, vytvářejí topologii X.
2. Má-li topologický prostor v každém bodě spočetnou bázi svých okolí (např. je-li metrizovatelný)

Topologie určená konvergencí

1. Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Pak existuje nejjemnější topologie na X taková, že každý usměrněný soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje v této topologii k x.
2. Topologie z předchozího bodu lze popsat následovně:
   - Množina $F \subset X$ je uzavřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ ležící v F je $x \in F$.
   - Množina $G \subset X$ je otevřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ a $x \in G$ leží skoro celý v G.
   - Množina $U \subset X$ je okolím bodu $x \in X$, jestliže každý $S \in \mathcal{K}_x$ leží skoro celý soubor S v U.

Vhodná konvergence

1. Nechť $\mathcal{B}_x, x \in X$, jsou báze okolí x v prostoru X. Pak konvergentní soubory v X na usměrněných souborech $\mathcal{B}_x, x \in X$, vytvářejí topologii X.
2. Má-li topologický prostor v každém bodě spočetnou bázi svých okolí (např. je-li metrizovatelný), určují konvergentní posloupnosti jeho topologii.

$\Rightarrow$

Topologie určená konvergencí

1. Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Pak existuje nejjemnější topologie na X taková, že každý usměrněný soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje v této topologii k x.
2. Topologie z předchozího bodu lze popsat následovně:
   - Množina $F \subset X$ je uzavřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ ležící v F je $x \in F$.
   - Množina $G \subset X$ je otevřená, jestliže pro $S \in \mathcal{K}_x$ a $x \in G$ leží skoro celý v G.
   - Množina $U \subset X$ je okolím bodu $x \in X$, jestliže každý $S \in \mathcal{K}_x$ leží skoro celý soubor S v U.

Vhodná konvergence

1. Nechť $\mathcal{B}_x, x \in X$, jsou báze okolí x v prostoru X. Pak konvergentní soubory v X na usměrněných souborech $\mathcal{B}_x, x \in X$, vytvářejí topologii X.
2. Má-li topologický prostor v každém bodě spočetnou bázi svých okolí (např. je-li metrizovatelný), určují konvergentní posloupnosti jeho topologii.

$\Rightarrow$

Je zřejmé, že topologické prostory určené konvergencí posloupností jsou důležité. Tyto prostory se nazývají sekvenční. Neznamená to, že každý bod z uzávěru množiny P je limitou posloupnosti ležící v P (viz příklady) Pokud má prostor tuto silnější vlastnost, nazývá se FU-prostor (Fréchet–Urysonův prostor).

Z předchozího tvrzení vyplývá, že prostor je sekvenční právě když pro každou jeho neuzavřenou množinu A existuje posloupnost v A konvergující k bodu mimo A.

Zřejmě je každý prostor, mající spočetné báze okolí, FU-prostor. Vějíř je FU-prostor, který nemá spočetnou bázi okolí v každém bodě. Prostor $\mathbb{N}_\xi$ není sekvenční.
Je jasné, že každý FU-prostor je sekvenční. Prostory K_n, $2 \leq n \leq \omega$, jsou sekvenční a nejsou FU.
V FU-prostoru získáme uzávěr množiny A přidáním limit posloupností ležících v A. V sekvenčním prostoru je nutné v tomto procesu pokračovat.

Je zřejmé, že topologické prostory určené konvergencí posloupností jsou důležité. Tyto prostory se nazývají sekvenční. Neznamená to, že každý bod z uzávěru množiny P je limitou posloupnosti ležící v P (viz příklady) Pokud má prostor tuto silnější vlastnost, nazývá se FU-prostor (Fréchet–Urysonův prostor).

Z předchozího tvrzení vyplývá, že prostor je sekvenční právě když pro každou jeho neuzavřenou množinu A existuje posloupnost v A konvergující k bodu mimo A.

Zřejmě je každý prostor, mající spočetné báze okolí, FU-prostor. Vějíř je FU-prostor, který nemá spočetnou bázi okolí v každém bodě. Prostor $\mathbb{N}_\xi$ není sekvenční.
Je jasné, že každý FU-prostor je sekvenční. Prostory K_n, $2 \leq n \leq \omega$, jsou sekvenční a nejsou FU.
V FU-prostoru získáme uzávěr množiny A přidáním limit posloupností ležících v A. V sekvenčním prostoru je nutné v tomto procesu pokračovat.

Je zřejmé, že topologické prostory určené konvergencí posloupností jsou důležité. Tyto prostory se nazývají sekvenční. Neznamená to, že každý bod z uzávěru množiny P je limitou posloupnosti ležící v P (viz příklady) Pokud má prostor tuto silnější vlastnost, nazývá se FU-prostor (Fréchet–Urysonův prostor).

Z předchozího tvrzení vyplývá, že prostor je sekvenční právě když pro každou jeho neuzavřenou množinu A existuje posloupnost v A konvergující k bodu mimo A.

Zřejmě je každý prostor, mající spočetné báze okolí, FU-prostor. Vějíř je FU-prostor, který nemá spočetnou bázi okolí v každém bodě. Prostor $\mathbb{N}_\xi$ není sekvenční.
Je jasné, že každý FU-prostor je sekvenční. Prostory $K_n, 2 \leq n \leq \omega$, jsou sekvenční a nejsou FU.
V FU-prostoru získáme uzávěr množiny A přidáním limit posloupností ležících v A. V sekvenčním prostoru je nutné v tomto procesu pokračovat.

1. Topologický prostor má jediný neizolovaný bod právě když je jeho topologie určená filtrem.
2. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když je množina $X \setminus \overline{A}$ hustá v X.
3. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když každá neprázdná otevřená podmnožina X obsahuje neprázdnou otevřenou množinu disjunktní s A.
4. Každý prostor se spočetnou bází otevřených množin je separabilní. Opak platí v metrizovatelných a uspořádatelných prostorech. Sestrojte spočetný prostor, který nemá spočetnou otevřenou bázi.
5. Sestrojte na přímce množinu A takovou, že kombinacemi uzávěru, vnitřku a doplňku dostanete 14 různých množin. Ukažte, že v topologickém prostoru není možné tímto způsobem dostat více než 14 různých množin.

1. Topologický prostor má jediný neizolovaný bod právě když je jeho topologie určená filtrem.
2. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když je množina $X \setminus \overline{A}$ hustá v X.
3. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když každá neprázdná otevřená podmnožina X obsahuje neprázdnou otevřenou množinu disjunktní s A.
4. Každý prostor se spočetnou bází otevřených množin je separabilní. Opak platí v metrizovatelných a uspořádatelných prostorech. Sestrojte spočetný prostor, který nemá spočetnou otevřenou bázi.
5. Sestrojte na přímce množinu A takovou, že kombinacemi uzávěru, vnitřku a doplňku dostanete 14 různých množin. Ukažte, že v topologickém prostoru není možné tímto způsobem dostat více než 14 různých množin.

1. Topologický prostor má jediný neizolovaný bod právě když je jeho topologie určená filtrem.
2. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když je množina $X \setminus \overline{A}$ hustá v X.
3. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když každá neprázdná otevřená podmnožina X obsahuje neprázdnou otevřenou množinu disjunktní s A.
4. Každý prostor se spočetnou bází otevřených množin je separabilní. Opak platí v metrizovatelných a uspořádatelných prostorech. Sestrojte spočetný prostor, který nemá spočetnou otevřenou bázi.
5. Sestrojte na přímce množinu A takovou, že kombinacemi uzávěru, vnitřku a doplňku dostanete 14 různých množin. Ukažte, že v topologickém prostoru není možné tímto způsobem dostat více než 14 různých množin.

1. Topologický prostor má jediný neizolovaný bod právě když je jeho topologie určená filtrem.
2. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když je množina $X \setminus \overline{A}$ hustá v X.
3. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když každá neprázdná otevřená podmnožina X obsahuje neprázdnou otevřenou množinu disjunktní s A.
4. Každý prostor se spočetnou bází otevřených množin je separabilní. Opak platí v metrizovatelných a uspořádatelných prostorech. Sestrojte spočetný prostor, který nemá spočetnou otevřenou bázi.
5. Sestrojte na přímce množinu A takovou, že kombinacemi uzávěru, vnitřku a doplňku dostanete 14 různých množin. Ukažte, že v topologickém prostoru není možné tímto způsobem dostat více než 14 různých množin.

1. Topologický prostor má jediný neizolovaný bod právě když je jeho topologie určená filtrem.
2. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když je množina $X \setminus \overline{A}$ hustá v X.
3. Podmnožina A prostoru X je řídká právě když každá neprázdná otevřená podmnožina X obsahuje neprázdnou otevřenou množinu disjunktní s A.
4. Každý prostor se spočetnou bází otevřených množin je separabilní. Opak platí v metrizovatelných a uspořádatelných prostorech. Sestrojte spočetný prostor, který nemá spočetnou otevřenou bázi.
5. Sestrojte na přímce množinu A takovou, že kombinacemi uzávěru, vnitřku a doplňku dostanete 14 různých množin. Ukažte, že v topologickém prostoru není možné tímto způsobem dostat více než 14 různých množin.

Vlastnosti vnitřku množiny

1. Nechť X je topologický prostor, A, B jsou jeho podmnožiny. Platí
   - $X^o = X$;
   - $A^o \subset A$;
   - $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$;
   - $(A^o)^o = A^o$.
2. Nechť X je množina a každé jeho podmnožině A je přiřazena podmnožina A^o splňující předchozí 4 vlastnosti. Pak na X existuje jediná topologie tak, že A^o je vnitřek množiny A v prostoru X.

DEFINICE (Hranice množiny)

V topologickém prostoru se hranice jeho podmnožin A definuje jako $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Vlastnosti vnitřku množiny

1. Nechť X je topologický prostor, A, B jsou jeho podmnožiny. Platí
   - $X^o = X$;
   - $A^o \subset A$;
   - $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$;
   - $(A^o)^o = A^o$.
2. Nechť X je množina a každé jeho podmnožině A je přiřazena podmnožina A^o splňující předchozí 4 vlastnosti. Pak na X existuje jediná topologie tak, že A^o je vnitřek množiny A v prostoru X.

DEFINICE (Hranice množiny)

V topologickém prostoru se hranice jeho podmnožin A definuje jako $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Vlastnosti vnitřku množiny

1. Nechť X je topologický prostor, A, B jsou jeho podmnožiny. Platí
   - $X^o = X$;
   - $A^o \subset A$;
   - $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$;
   - $(A^o)^o = A^o$.
2. Nechť X je množina a každé jeho podmnožině A je přiřazena podmnožina A^o splňující předchozí 4 vlastnosti. Pak na X existuje jediná topologie tak, že A^o je vnitřek množiny A v prostoru X.

DEFINICE (Hranice množiny)

V topologickém prostoru se hranice jeho podmnožin A definuje jako $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Zřejmě je hranice A uzavřená množina bodů jejichž každé okolí protíná jak A tak její doplněk. Ukažte, že uzávěr množiny A se získá přidáním k A hranice této množiny (podobný popis: uzávěr množiny A se získá přidáním k A všech hromadných bodů této množiny).
Lze sepsat základní vlastnosti, které hranice v daném prostoru charakterizují a charakterizují i prostor, podobně jako uzávěr nebo vnitřek.

Uzávěr i hranice množin racionálních nebo iracionálních čísel v $\mathbb{R}$ je celé $\mathbb{R}$, jejich vnitřek je prázdný.
Kdy se hranice množiny A rovná A?

Zřejmě je hranice A uzavřená množina bodů jejichž každé okolí protíná jak A tak její doplněk.
Ukažte, že uzávěr množiny A se získá přidáním k A hranice této množiny (podobný popis: uzávěr množiny A se získá přidáním k A všech hromadných bodů této množiny).
Lze sepsat základní vlastnosti, které hranice v daném prostoru charakterizují a charakterizují i prostor, podobně jako uzávěr nebo vnitřek.

Uzávěr i hranice množin racionálních nebo iracionálních čísel v $\mathbb{R}$ je celé $\mathbb{R}$. jejich vnitřek je prázdný.
Kdy se hranice množiny A rovná A?

DEFINICE (Metrický prostor)

Pro metrický prostor (X, d) se definuje podmnožina $G \subset X$ jako otevřená, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje kladné číslo r tak, že otevřená koule $B_{x,r} = \{y \in X; d(x, y) < r\}$ je částí G.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená metrikou d. Topologie, která je určená nějakou metrikou, se nazývá metrizovatelná.
Pokud nemůže dojít k nedorozumění, značí dvojice (X, d) nejen metrický prostor ale i jím určený topologický prostor.

Uvedená definice otevřené množiny v (X, d) je ekvivalentní požadavku $d(x, X \setminus G) > 0$ pro každé $x \in G$.

Pro uvedenou definici stačí požadovat, aby d byla pseudometrikou. Pseudometrizovatelný prostor je metrizovatelný právě když každá jeho jednobodová podmnožina je uzavřená.

DEFINICE (Metrický prostor)

Pro metrický prostor (X, d) se definuje podmnožina $G \subset X$ jako otevřená, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje kladné číslo r tak, že otevřená koule $B_{x,r} = \{y \in X; d(x, y) < r\}$ je částí G.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená metrikou d. Topologie, která je určená nějakou metrikou, se nazývá metrizovatelná.
Pokud nemůže dojít k nedorozumění, značí dvojice (X, d) nejen metrický prostor ale i jím určený topologický prostor.

Uvedená definice otevřené množiny v (X, d) je ekvivalentní požadavku $d(x, X \setminus G) > 0$ pro každé $x \in G$.

Pro uvedenou definici stačí požadovat, aby d byla pseudometrikou. Pseudometrizovatelný prostor je metrizovatelný právě když každá jeho jednobodová podmnožina je uzavřená.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Metrický prostor)

Pro metrický prostor (X, d) se definuje podmnožina $G \subset X$ jako otevřená, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje kladné číslo r tak, že otevřená koule $B_{x,r} = \{y \in X; d(x, y) < r\}$ je částí G.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená metrikou d. Topologie, která je určená nějakou metrikou, se nazývá metrizovatelná.
Pokud nemůže dojít k nedorozumění, značí dvojice (X, d) nejen metrický prostor ale i jím určený topologický prostor.

Uvedená definice otevřené množiny v (X, d) je ekvivalentní požadavku $d(x, X \setminus G) > 0$ pro každé $x \in G$.

Pro uvedenou definici stačí požadovat, aby d byla pseudometrikou. Pseudometrizovatelný prostor je metrizovatelný právě když každá jeho jednobodová podmnožina je uzavřená.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Metrický prostor)

Pro metrický prostor (X, d) se definuje podmnožina $G \subset X$ jako otevřená, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje kladné číslo r tak, že otevřená koule $B_{x,r} = \{y \in X; d(x, y) < r\}$ je částí G.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená metrikou d. Topologie, která je určená nějakou metrikou, se nazývá metrizovatelná.
Pokud nemůže dojít k nedorozumění, značí dvojice (X, d) nejen metrický prostor ale i jím určený topologický prostor.

Uvedená definice otevřené množiny v (X, d) je ekvivalentní požadavku $d(x, X \setminus G) > 0$ pro každé $x \in G$.

Pro uvedenou definici stačí požadovat, aby d byla pseudometrikou. Pseudometrizovatelný prostor je metrizovatelný právě když každá jeho jednobodová podmnožina je uzavřená.

$\Rightarrow$

Některé vlastnosti metrizovatelných prostorů

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. X má v každém bodě spočetnou bázi okolí a je tedy FU-prostor..
2. X má spočetnou otevřenou bázi právě když je separabilní (podprostor separabilního metrizovatelného prostoru je tedy separabilní).
3. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální. Najděte příklad nespočetného 0-dimenzionálního metrizovatelného prostoru.
4. Je-li X spočetný, je uspořádatelný.
5. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou, je prostorem 2.kategorie. (Existují podprostory $\mathbb{R}^2$ 2.kategorie, které nejsou metrizovatelné úplnou metrikou.)
6. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou a nemá izolované body, má mohutnost aspoň kontinuum. Prostor $\mathbb{Q}$ tedy není metrizovatelný úplnou metrikou. (Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je metrizovatelný úplnou metrikou.) .
7. Každá uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů má mohutnost kontinuum.
8. Metrizovatelný spočetný prostor bez izolovaných bodů je homeomorfní s $\mathbb{Q}$.

Některé vlastnosti metrizovatelných prostorů

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. X má v každém bodě spočetnou bázi okolí a je tedy FU-prostor..
2. X má spočetnou otevřenou bázi právě když je separabilní (podprostor separabilního metrizovatelného prostoru je tedy separabilní).
3. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální. Najděte příklad nespočetného 0-dimenzionálního metrizovatelného prostoru.
4. Je-li X spočetný, je uspořádatelný.
5. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou, je prostorem 2.kategorie. (Existují podprostory $\mathbb{R}^2$ 2.kategorie, které nejsou metrizovatelné úplnou metrikou.)
6. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou a nemá izolované body, má mohutnost aspoň kontinuum. Prostor $\mathbb{Q}$ tedy není metrizovatelný úplnou metrikou. (Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je metrizovatelný úplnou metrikou.) .
7. Každá uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů má mohutnost kontinuum.
8. Metrizovatelný spočetný prostor bez izolovaných bodů je homeomorfní s $\mathbb{Q}$.

Některé vlastnosti metrizovatelných prostorů

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. X má v každém bodě spočetnou bázi okolí a je tedy FU-prostor..
2. X má spočetnou otevřenou bázi právě když je separabilní (podprostor separabilního metrizovatelného prostoru je tedy separabilní).
3. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální. Najděte příklad nespočetného 0-dimenzionálního metrizovatelného prostoru.
4. Je-li X spočetný, je uspořádatelný.
5. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou, je prostorem 2.kategorie. (Existují podprostory $\mathbb{R}^2$ 2.kategorie, které nejsou metrizovatelné úplnou metrikou.)
6. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou a nemá izolované body, má mohutnost aspoň kontinuum. Prostor $\mathbb{Q}$ tedy není metrizovatelný úplnou metrikou. (Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je metrizovatelný úplnou metrikou.) .
7. Každá uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů má mohutnost kontinuum.
8. Metrizovatelný spočetný prostor bez izolovaných bodů je homeomorfní s $\mathbb{Q}$.

Některé vlastnosti metrizovatelných prostorů

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. X má v každém bodě spočetnou bázi okolí a je tedy FU-prostor..
2. X má spočetnou otevřenou bázi právě když je separabilní (podprostor separabilního metrizovatelného prostoru je tedy separabilní).
3. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální. Najděte příklad nespočetného 0-dimenzionálního metrizovatelného prostoru.
4. Je-li X spočetný, je uspořádatelný.
5. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou, je prostorem 2.kategorie. (Existují podprostory $\mathbb{R}^2$ 2.kategorie, které nejsou metrizovatelné úplnou metrikou.)
6. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou a nemá izolované body, má mohutnost aspoň kontinuum. Prostor $\mathbb{Q}$ tedy není metrizovatelný úplnou metrikou. (Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je metrizovatelný úplnou metrikou.) .
7. Každá uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů má mohutnost kontinuum.
8. Metrizovatelný spočetný prostor bez izolovaných bodů je homeomorfní s $\mathbb{Q}$.

Některé vlastnosti metrizovatelných prostorů

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. X má v každém bodě spočetnou bázi okolí a je tedy FU-prostor..
2. X má spočetnou otevřenou bázi právě když je separabilní (podprostor separabilního metrizovatelného prostoru je tedy separabilní).
3. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální. Najděte příklad nespočetného 0-dimenzionálního metrizovatelného prostoru.
4. Je-li X spočetný, je uspořádatelný.
5. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou, je prostorem 2.kategorie. (Existují podprostory $\mathbb{R}^2$ 2.kategorie, které nejsou metrizovatelné úplnou metrikou.)
6. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou a nemá izolované body, má mohutnost aspoň kontinuum. Prostor $\mathbb{Q}$ tedy není metrizovatelný úplnou metrikou. (Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je metrizovatelný úplnou metrikou.) .
7. Každá uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů má mohutnost kontinuum.
8. Metrizovatelný spočetný prostor bez izolovaných bodů je homeomorfní s $\mathbb{Q}$.

Některé vlastnosti metrizovatelných prostorů

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. X má v každém bodě spočetnou bázi okolí a je tedy FU-prostor..
2. X má spočetnou otevřenou bázi právě když je separabilní (podprostor separabilního metrizovatelného prostoru je tedy separabilní).
3. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální. Najděte příklad nespočetného 0-dimenzionálního metrizovatelného prostoru.
4. Je-li X spočetný, je uspořádatelný.
5. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou, je prostorem 2.kategorie. (Existují podprostory $\mathbb{R}^2$ 2.kategorie, které nejsou metrizovatelné úplnou metrikou.)
6. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou a nemá izolované body, má mohutnost aspoň kontinuum. Prostor $\mathbb{Q}$ tedy není metrizovatelný úplnou metrikou. (Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je metrizovatelný úplnou metrikou.)
7. Každá uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů má mohutnost kontinuum.
8. Metrizovatelný spočetný prostor bez izolovaných bodů je homeomorfní s $\mathbb{Q}$.

Některé vlastnosti metrizovatelných prostorů

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. X má v každém bodě spočetnou bázi okolí a je tedy FU-prostor..
2. X má spočetnou otevřenou bázi právě když je separabilní (podprostor separabilního metrizovatelného prostoru je tedy separabilní).
3. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální. Najděte příklad nespočetného 0-dimenzionálního metrizovatelného prostoru.
4. Je-li X spočetný, je uspořádatelný.
5. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou, je prostorem 2.kategorie. (Existují podprostory $\mathbb{R}^2$ 2.kategorie, které nejsou metrizovatelné úplnou metrikou.)
6. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou a nemá izolované body, má mohutnost aspoň kontinuum. Prostor $\mathbb{Q}$ tedy není metrizovatelný úplnou metrikou. (Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je metrizovatelný úplnou metrikou.) .
7. Každá uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů má mohutnost kontinuum.
8. Metrizovatelný spočetný prostor bez izolovaných bodů je homeomorfní s $\mathbb{Q}$.

Některé vlastnosti metrizovatelných prostorů

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. X má v každém bodě spočetnou bázi okolí a je tedy FU-prostor..
2. X má spočetnou otevřenou bázi právě když je separabilní (podprostor separabilního metrizovatelného prostoru je tedy separabilní).
3. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální. Najděte příklad nespočetného 0-dimenzionálního metrizovatelného prostoru.
4. Je-li X spočetný, je uspořádatelný.
5. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou, je prostorem 2.kategorie. (Existují podprostory $\mathbb{R}^2$ 2.kategorie, které nejsou metrizovatelné úplnou metrikou.)
6. Je-li X metrizovatelný úplnou metrikou a nemá izolované body, má mohutnost aspoň kontinuum. Prostor $\mathbb{Q}$ tedy není metrizovatelný úplnou metrikou. (Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je metrizovatelný úplnou metrikou.) .
7. Každá uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů má mohutnost kontinuum.
8. Metrizovatelný spočetný prostor bez izolovaných bodů je homeomorfní s $\mathbb{Q}$.

DEFINICE (Uspořádaný prostor)

Pro lineárně uspořádaný prostor $(X, <)$ se definuje podmnožina G jako otevřená, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje otevřený interval $I \subset G$ obsahující x.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená uspořádáním. Topologie, která je určena nějakým uspořádáním, se nazývá uspořádatelná.
Pokud nemůže dojít k nedorozumění, značí dvojice $(X, <)$ nejen uspořádaný prostor ale i jím určený topologický prostor.
Z angličtiny pochází pro tyto prostory zkratka LOTS, tj. linearly ordered topological space.

Význačnými příklady uspořádaných topologických prostorů jsou různé podmnožiny reálných čísel (kromě $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ a iracionální čísla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) a prostory ordinálních čísel, zvláště prostor ω_1 všech spočetných ordinálních čísel nebo $\omega_1 + 1$ všech spočetných ordinálních čísel spolu s prvním nespočetným.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Uspořádaný prostor)

Pro lineárně uspořádaný prostor $(X,<)$ se definuje podmnožina G jako otevřená, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje otevřený interval $I \subset G$ obsahující x.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená uspořádáním. Topologie, která je určena nějakým uspořádáním, se nazývá uspořádatelná.
Pokud nemůže dojít k nedorozumění, značí dvojice $(X,<)$ nejen uspořádaný prostor ale i jím určený topologický prostor.
Z angličtiny pochází pro tyto prostory zkratka LOTS, tj. linearly ordered topological space.

Význačnými příklady uspořádaných topologických prostorů jsou různé podmnožiny reálných čísel (kromě $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ a iracionální čísla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) a prostory ordinálních čísel, zvláště prostor ω_1 všech spočetných ordinálních čísel nebo $\omega_1 + 1$ všech spočetných ordinálních čísel spolu s prvním nespočetným.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Uspořádaný prostor)

Pro lineárně uspořádaný prostor $(X, <)$ se definuje podmnožina G jako otevřená, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje otevřený interval $I \subset G$ obsahující x.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená uspořádáním. Topologie, která je určena nějakým uspořádáním, se nazývá uspořádatelná.
Pokud nemůže dojít k nedorozumění, značí dvojice $(X, <)$ nejen uspořádaný prostor ale i jím určený topologický prostor.
Z angličtiny pochází pro tyto prostory zkratka LOTS, tj. linearly ordered topological space.

Význačnými příklady uspořádaných topologických prostorů jsou různé podmnožiny reálných čísel (kromě $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ a iracionální čísla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) a prostory ordinálních čísel, zvláště prostor ω_1 všech spočetných ordinálních čísel nebo $\omega_1 + 1$ všech spočetných ordinálních čísel spolu s prvním nespočetným.

$\Rightarrow$

Některé vlastnosti uspořádatelných prostorů

Nechť X je uspořádatelný prostor, vytvořená lineárním uspořádáním $<$.

1. X je separabilní právě když má spočetnou otevřenou bázi.
2. Bod $x \in X$ má spočetnou bázi okolí právě když existují nejvýše spočetné množiny $A \subset (a, \rightarrow)$, $B \subset (\leftarrow, a)$ s vlastností $x = \inf A = \sup B$.
3. Je-li X spočetný a uspořádání $<$ je husté (tj. pro $a \lneqq b$ je interval $(a, b) \neq \emptyset$, je X homeomorfní s $\mathbb{Q}$ (i uspořádaně isomorfní).
4. Je-li X spočetný, je metrizovatelný.
5. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální.

Některé vlastnosti uspořádatelných prostorů

Nechť X je uspořádatelný prostor, vytvořená lineárním uspořádáním $<$.

1. X je separabilní právě když má spočetnou otevřenou bázi.
2. Bod $x \in X$ má spočetnou bázi okolí právě když existují nejvýše spočetné množiny $A \subset (a, \to)$, $B \subset (\leftarrow, a)$ s vlastností $x = \inf A = \sup B$.
3. Je-li X spočetný a uspořádání $<$ je husté (tj. pro $a \lneqq b$ je interval $(a, b) \neq \emptyset$, je X homeomorfní s $\mathbb{Q}$ (i uspořádaně isomorfní).
4. Je-li X spočetný, je metrizovatelný.
5. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální.

Některé vlastnosti uspořádatelných prostorů

Nechť X je uspořádatelný prostor, vytvořená lineárním uspořádáním $<$.

1. X je separabilní právě když má spočetnou otevřenou bázi.
2. Bod $x \in X$ má spočetnou bázi okolí právě když existují nejvýše spočetné množiny $A \subset (a, \rightarrow)$, $B \subset (\leftarrow, a)$ s vlastností $x = \inf A = \sup B$.
3. Je-li X spočetný a uspořádání $<$ je husté (tj. pro $a \lneqq b$ je interval $(a, b) \neq \emptyset$, je X homeomorfní s $\mathbb{Q}$ (i uspořádaně isomorfní).
4. Je-li X spočetný, je metrizovatelný.
5. Je-li X spočetný, je 0-dimensionální.

Některé vlastnosti uspořádatelných prostorů

Nechť X je uspořádatelný prostor, vytvořená lineárním uspořádáním $<$.

1. X je separabilní právě když má spočetnou otevřenou bázi.
2. Bod $x \in X$ má spočetnou bázi okolí právě když existují nejvýše spočetné množiny $A \subset (a, \rightarrow)$, $B \subset (\leftarrow, a)$ s vlastností $x = \inf A = \sup B$.
3. Je-li X spočetný a uspořádání $<$ je husté (tj. pro $a \lneqq b$ je interval $(a, b) \neq \emptyset$, je X homeomorfní s $\mathbb{Q}$ (i uspořádaně isomorfní).
4. Je-li X spočetný, je metrizovatelný.
5. Je-li X spočetný, je 0-dimenzionální.

Některé vlastnosti uspořádatelných prostorů

Nechť X je uspořádatelný prostor, vytvořená lineárním uspořádáním $<$.

1. X je separabilní právě když má spočetnou otevřenou bázi.
2. Bod $x \in X$ má spočetnou bázi okolí právě když existují nejvýše spočetné množiny $A \subset (a, \to)$, $B \subset (\leftarrow, a)$ s vlastností $x = \inf A = \sup B$.
3. Je-li X spočetný a uspořádání $<$ je husté (tj. pro $a \lneqq b$ je interval $(a, b) \neq \emptyset$, je X homeomorfní s $\mathbb{Q}$ (i uspořádaně isomorfní).
4. Je-li X spočetný, je metrizovatelný.
5. Je-li X spočetný, je 0-dimensionální.

DEFINICE (Topologie určená filtrem)

Nechť X je nekonečná množina, $x_0 \in X$ a $\mathcal{U}$ je filtr na množině $X \setminus \{x_0\}$. Otevřené množiny jsou prvky $\exp(X \setminus \{x_0\})$ a množiny $\{x_0\} \cup U$, $U \in \mathcal{U}$.

Otevřené množiny jsou tedy libovolné podmnožiny X, které neobsahují bod x_0 a ty podmnožiny X, které s bodem x_0 obsahují i množinu daného filtru.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená filtrem $\mathcal{U}$ v bodě x_0.

Význačnými příklady jsou prostory určené ultrafiltry, zvláště na spočetných množinách. Označíme $X = \mathbb{N} \cup \{\xi\}$, kde ξ je volný ultrafiltr na $\mathbb{N}$ a x_0 z předchozí definice je právě přidaný bod ξ. Tento prostor se často značí symbolem $\mathbb{N}_\xi$.

DEFINICE (Topologie určená filtrem)

Nechť X je nekonečná množina, $x_0 \in X$ a $\mathcal{U}$ je filtr na množině $X \setminus \{x_0\}$. Otevřené množiny jsou prvky $\exp(X \setminus \{x_0\})$ a množiny $\{x_0\} \cup U$, $U \in \mathcal{U}$.

Otevřené množiny jsou tedy libovolné podmnožiny X, které neobsahují bod x_0 a ty podmnožiny X, které s bodem x_0 obsahují i množinu daného filtru.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená filtrem $\mathcal{U}$ v bodě x_0.

Význačnými příklady jsou prostory určené ultrafiltry, zvláště na spočetných množinách. Označíme $X = \mathbb{N} \cup \{\xi\}$, kde ξ je volný ultrafiltr na $\mathbb{N}$ a x_0 z předchozí definice je právě přidaný bod ξ. Tento prostor se často značí symbolem $\mathbb{N}_\xi$.

DEFINICE (Topologie určená filtrem)

Nechť X je nekonečná množina, $x_0 \in X$ a $\mathcal{U}$ je filtr na množině $X \setminus \{x_0\}$. Otevřené množiny jsou prvky $\exp(X \setminus \{x_0\})$ a množiny $\{x_0\} \cup U$, $U \in \mathcal{U}$.

Otevřené množiny jsou tedy libovolné podmnožiny X, které neobsahují bod x_0 a ty podmnožiny X, které s bodem x_0 obsahují i množinu daného filtru.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená filtrem $\mathcal{U}$ v bodě x_0.

Význačnými příklady jsou prostory určené ultrafiltry, zvláště na spočetných množinách. Označíme $X = \mathbb{N} \cup \{\xi\}$, kde ξ je volný ultrafiltr na $\mathbb{N}$ a x_0 z předchozí definice je právě přidaný bod ξ. Tento prostor se často značí symbolem $\mathbb{N}_\xi$.

DEFINICE (Topologie určená filtrem)

Nechť X je nekonečná množina, $x_0 \in X$ a $\mathcal{U}$ je filtr na množině $X \setminus \{x_0\}$. Otevřené množiny jsou prvky $\exp(X \setminus \{x_0\})$ a množiny $\{x_0\} \cup U$, $U \in \mathcal{U}$.

Otevřené množiny jsou tedy libovolné podmnožiny X, které neobsahují bod x_0 a ty podmnožiny X, které s bodem x_0 obsahují i množinu daného filtru.

Uvedená topologie se nazývá topologie určená filtrem $\mathcal{U}$ v bodě x_0.

Význačnými příklady jsou prostory určené ultrafiltry, zvláště na spočetných množinách. Označíme $X = \mathbb{N} \cup \{\xi\}$, kde ξ je volný ultrafiltr na $\mathbb{N}$ a x_0 z předchozí definice je právě přidaný bod ξ. Tento prostor se často značí symbolem $\mathbb{N}_\xi$.

Zajímavé třídy prostorů dostaneme, požadujeme-li, aby měly speciální báze. Následující příklad je velmi důležitý. Důvod pro uvedený termín poznáme v kapitole o dimenzích.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

DEFINICE (0-dimenzionální prostory)

Topologický prostor, který má otevřenou bázi složenou z obojetných množin, se nazývá 0-dimenzionální.

Ekvivalentně: každý bod má bázi okolí složenou z obojetných množin.

1. Každý diskrétní prostor je 0-dimenzionální.
2. Každý indiskrétní prostor je 0-dimenzionální.
3. Prostory racionálních čísel a iracionálních čísel jsou 0-dimenzionální.
4. Každý spočetný metrizovatelný prostor je 0-dimenzionální.
5. Prostory ordinálních čísel jsou 0-dimenzionální.
6. Vějíř i ježek jsou 0=dimenzionální.
7. Každý prostor s nejvýše jedním neizolovaným bodem je 0-dimenzionální.
8. Euklidovské prostory nejsou 0-dimenzionální.

Homeomorfismy

1. Bijekce $f : X \to Y$ topologických prostorů je homeomorpfismem právě když $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ pro každé $A \subset X$.
2. Bijekce $f : X \to Y$ topologických prostorů je homeomorpfismem právě když platí: *usměrněný soubor* $\{x_a\}$ *konverguje k* $x \in X$ *právě když soubor* $\{f(x_a)\}$ *konverguje k* $f(x) \in Y$.
3. Identické zobrazení topologického prostoru je homeomorfismus.
4. Složení dvou homeomorfismů je homeomorfismus.

Homeomorfismy

1. Bijekce $f : X \to Y$ topologických prostorů je homeomorpfismem právě když $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ pro každé $A \subset X$.
2. Bijekce $f : X \to Y$ topologických prostorů je homeomorpfismem právě když platí: *usměrněný soubor* $\{x_a\}$ *konverguje k* $x \in X$ *právě když soubor* $\{f(x_a)\}$ *konverguje k* $f(x) \in Y$.
3. Identické zobrazení topologického prostoru je homeomorfismus.
4. Složení dvou homeomorfismů je homeomorfismus.

Homeomorfismy

1. Bijekce $f : X \to Y$ topologických prostorů je homeomorpfismem právě když $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ pro každé $A \subset X$.
2. Bijekce $f : X \to Y$ topologických prostorů je homeomorpfismem právě když platí: *usměrněný soubor* $\{x_a\}$ *konverguje k* $x \in X$ *právě když soubor* $\{f(x_a)\}$ *konverguje k* $f(x) \in Y$.
3. Identické zobrazení topologického prostoru je homeomorfismus.
4. Složení dvou homeomorfismů je homeomorfismus.

Homeomorfismy

1. Bijekce $f : X \to Y$ topologických prostorů je homeomorpfismem právě když $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ pro každé $A \subset X$.
2. Bijekce $f : X \to Y$ topologických prostorů je homeomorpfismem právě když platí: *usměrněný soubor* $\{x_a\}$ *konverguje k* $x \in X$ *právě když soubor* $\{f(x_a)\}$ *konverguje k* $f(x) \in Y$.
3. Identické zobrazení topologického prostoru je homeomorfismus.
4. Složení dvou homeomorfismů je homeomorfismus.