7. ÚPLNÉ A PREKOMPAKTNÍ PROSTORY

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Třída jemných uniformních prostorů je uzavřená na součty a kvocienty a je tedy koreflektivní (koreflekcí je jemná uniformita vytvářející stejnou topologii).
S dědičností a součinovostí je to však jiné.

Podprostory jemných uniformit

Podprostor jemné uniformity nemusí být jemný. Např. (0,1) je podprostor kompaktního prostoru [0,1]. Na [0,1] existuje jediná uniformita a ta je tedy jemná a prekompaktní. Její zúžení na (0,1) je prekompaktní, ale jemná uniformita na (0,1) není prekompaktní, např. proto, že tento prostor není pseudokompaktní.
Lze najít i příklad uzavřeného podprostoru jemného, který není jemný.

Součiny jemných uniformit

Součin dvou jemných uniformit nemusí být jemný.
Příklad lze vyvodit např. z příkladu dvou pseudokompaktních úplně regulárních prostorů, jejichž součin není pseudokompaktní.
Jiný příklad......

Třída jemných uniformních prostorů je uzavřená na součty a kvocienty a je tedy koreflektivní (koreflekcí je jemná uniformita vytvářející stejnou topologii).
S dědičností a součinovostí je to však jiné.

Podprostory jemných uniformit

Podprostor jemné uniformity nemusí být jemný. Např. (0,1) je podprostor kompaktního prostoru [0,1]. Na [0,1] existuje jediná uniformita a ta je tedy jemná a prekompaktní. Její zúžení na (0,1) je prekompaktní, ale jemná uniformita na (0,1) není prekompaktní, např. proto, že tento prostor není pseudokompaktní.
Lze najít i příklad uzavřeného podprostoru jemného, který není jemný.

Součiny jemných uniformit

Součin dvou jemných uniformit nemusí být jemný.
Příklad lze vyvodit např. z příkladu dvou pseudokompaktních úplně regulárních prostorů, jejichž součin není pseudokompaktní.
Jiný příklad......

Třída jemných uniformních prostorů je uzavřená na součty a kvocienty a je tedy koreflektivní (koreflekcí je jemná uniformita vytvářející stejnou topologii).
S dědičností a součinovostí je to však jiné.

Podprostory jemných uniformit

Podprostor jemné uniformity nemusí být jemný. Např. (0,1) je podprostor kompaktního prostoru [0,1]. Na [0,1] existuje jediná uniformita a ta je tedy jemná a prekompaktní. Její zúžení na (0,1) je prekompaktní, ale jemná uniformita na (0,1) není prekompaktní, např. proto, že tento prostor není pseudokompaktní.
Lze najít i příklad uzavřeného podprostoru jemného, který není jemný.

Součiny jemných uniformit

Součin dvou jemných uniformit nemusí být jemný.
Příklad lze vyvodit např. z příkladu dvou pseudokompaktních úplně regulárních prostorů, jejichž součin není pseudokompaktní.
Jiný příklad......

Neparakompaktní úplná jemná uniformita

Parakompaktní prostory nejsou součinové, ale jsou (pro neměřitelné mohutnosti) reálně kompaktní. Z toho vyplývají příslušné příklady.
Např. Sorgenfreyova přímka je parakompaktní (je Lindelöfova) a její součin se sebou není normální, tedy ani parakompaktní. Ale jemná uniformita na tomto součinu je úplná, protože Sorgenfreyova přímka je reálně kompaktní (a tedy úplně uniformizovatelná). To, že Sorgenfreyova přímka má jemnou uniformitu a není parakompaktní, lze dokázat i přímo (zkuste to).

Zúplnění uniformit na stejné topologii

Jestliže $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ jsou dvě uniformity na topologickém prostoru X, pak identické zobrazení $1_X : (X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{V})$ se rozšíří na stejnoměrně spojité zobrazení mezi zúplněními těchto prostorů.
Příklad kanonického zobrazení Čechovy-Stoneovy kompaktifikace na jednobodovou kompaktifikaci (např. na $\mathbb{R}$) ukazuje, že toto rozšíření nemusí být prosté.
Příklad, kde $\mathcal{U}$ je obvyklá nebo jemná uniformita na $\mathbb{R}$ a $\mathcal{V}$ je prekompaktní uniformita jednobodové kompaktifikace $\mathbb{R}$, ukazuje, že uvedené rozšíření nemusí být na celé zúplnění. Můžete najít příklad, kde rozšířené zobrazení není ani na ani prosté.

Existuje však obecná situace, kde uvedené rozšíření je vždy prosté, a to mají-li obě uniformity $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ stejnou prekompaktní modifikaci $\mathcal{W}$. Pak je zúplnění prostoru $(X,\mathcal{U})$ částí zúplnění prostoru $(X,\mathcal{V})$, a to je částí kompaktifikace $(X,\mathcal{W})$. Tato vnoření jsou topologická.

Neparakompaktní úplná jemná uniformita

Parakompaktní prostory nejsou součinové, ale jsou (pro neměřitelné mohutnosti) reálně kompaktní. Z toho vyplývají příslušné příklady.
Např. Sorgenfreyova přímka je parakompaktní (je Lindelöfova) a její součin se sebou není normální, tedy ani parakompaktní. Ale jemná uniformita na tomto součinu je úplná, protože Sorgenfreyova přímka je reálně kompaktní (a tedy úplně uniformizovatelná). To, že Sorgenfreyova přímka má jemnou uniformitu a není parakompaktní, lze dokázat i přímo (zkuste to).

Zúplnění uniformit na stejné topologii

Jestliže $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ jsou dvě uniformity na topologickém prostoru X, pak identické zobrazení $1_X : (X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{V})$ se rozšíří na stejnoměrně spojité zobrazení mezi zúpleněními těchto prostorů.
Příklad kanonického zobrazení Čechovy-Stoneovy kompaktifikace na jednobodovou kompaktifikaci (např. na $\mathbb{R}$) ukazuje, že toto rozšíření nemusí být prosté.
Příklad, kde $\mathcal{U}$ je obvyklá nebo jemná uniformita na $\mathbb{R}$ a $\mathcal{V}$ je prekompaktní uniformita jednobodové kompaktifikace $\mathbb{R}$, ukazuje, že uvedené rozšíření nemusí být na celé zúplnění. Můžete najít příklad, kde rozšířené zobrazení není ani na ani prosté.

Existuje však obecná situace, kde uvedené rozšíření je vždy prosté, a to mají-li obě uniformity $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ stejnou prekompaktní modifikaci $\mathcal{W}$. Pak je zúplnění prostoru $(X,\mathcal{U})$ částí zúplnění prostoru $(X,\mathcal{V})$, a to je částí kompaktifikace $(X,\mathcal{W})$. Tato vnoření jsou topologická.

Neparakompaktní úplná jemná uniformita

Parakompaktní prostory nejsou součinové, ale jsou (pro neměřitelné mohutnosti) reálně kompaktní. Z toho vyplývají příslušné příklady.
Např. Sorgenfreyova přímka je parakompaktní (je Lindelöfova) a její součin se sebou není normální, tedy ani parakompaktní. Ale jemná uniformita na tomto součinu je úplná, protože Sorgenfreyova přímka je reálně kompaktní (a tedy úplně uniformizovatelná). To, že Sorgenfreyova přímka má jemnou uniformitu a není parakompaktní, lze dokázat i přímo (zkuste to).

Zúplnění uniformit na stejné topologii

Jestliže $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ jsou dvě uniformity na topologickém prostoru X, pak identické zobrazení $1_X : (X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{V})$ se rozšíří na stejnoměrně spojité zobrazení mezi zúpleněními těchto prostorů.
Příklad kanonického zobrazení Čechovy-Stoneovy kompaktifikace na jednobodovou kompaktifikaci (např. na $\mathbb{R}$) ukazuje, že toto rozšíření nemusí být prosté.
Příklad, kde $\mathcal{U}$ je obvyklá nebo jemná uniformita na $\mathbb{R}$ a $\mathcal{V}$ je prekompaktní uniformita jednobodové kompaktifikace $\mathbb{R}$, ukazuje, že uvedené rozšíření nemusí být na celé zúplnění. Můžete najít příklad, kde rozšířené zobrazení není ani na ani prosté.

Existuje však obecná situace, kde uvedené rozšíření je vždy prosté, a to mají-li obě uniformity $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ stejnou prekompaktní modifikaci $\mathcal{W}$. Pak je zúplnění prostoru $(X, \mathcal{U})$ částí zúplnění prostoru $(X, \mathcal{V})$, a to je částí kompaktifikace $(X, \mathcal{W})$. Tato vnoření jsou topologická.