11. POKRÝVACÍ VLASTNOSTI

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Uspořádané prostory

Uspořádané topologické prostory mohou a nemusejí být parakompaktní, i když jsou všechny dědičně normální.

1. Reálná přímka je LOTS a je parakompaktní (je metrizovatelný prostor nebo Lindelöfův prostor).
2. Sorgenfreyova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
3. Michaelova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
4. Prostor ω_1 není parakompaktní.
5. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α parakompaktní právě když konfinalita α je spočetná.

Uspořádané prostory

Uspořádané topologické prostory mohou a nemusejí být parakompaktní, i když jsou všechny dědičně normální.

1. Reálná přímka je LOTS a je parakompaktní (je metrizovatelný prostor nebo Lindelöfův prostor).
2. Sorgenfreyova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
3. Michaelova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
4. Prostor ω_1 není parakompaktní.
5. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α parakompaktní právě když konfinalita α je spočetná.

Uspořádané prostory

Uspořádané topologické prostory mohou a nemusejí být parakompaktní, i když jsou všechny dědičně normální.

1. Reálná přímka je LOTS a je parakompaktní (je metrizovatelný prostor nebo Lindelöfův prostor).
2. Sorgenfreyova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
3. Michaelova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
4. Prostor ω_1 není parakompaktní.
5. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α parakompaktní právě když konfinalita α je spočetná.

Uspořádané prostory

Uspořádané topologické prostory mohou a nemusejí být parakompaktní, i když jsou všechny dědičně normální.

1. Reálná přímka je LOTS a je parakompaktní (je metrizovatelný prostor nebo Lindelöfův prostor).
2. Sorgenfreyova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
3. Michaelova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
4. Prostor ω_1 není parakompaktní.
5. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α parakompaktní právě když konfinalita α je spočetná.

Uspořádané prostory

Uspořádané topologické prostory mohou a nemusejí být parakompaktní, i když jsou všechny dědičně normální.

1. Reálná přímka je LOTS a je parakompaktní (je metrizovatelný prostor nebo Lindelöfův prostor).
2. Sorgenfreyova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
3. Michaelova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
4. Prostor ω_1 není parakompaktní.
5. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α parakompaktní právě když konfinalita α je spočetná.

Uspořádané prostory

Uspořádané topologické prostory mohou a nemusejí být parakompaktní, i když jsou všechny dědičně normální.

1. Reálná přímka je LOTS a je parakompaktní (je metrizovatelný prostor nebo Lindelöfův prostor).
2. Sorgenfreyova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
3. Michaelova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
4. Prostor ω_1 není parakompaktní.
5. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α parakompaktní právě když konfinalita α je spočetná.

Uspořádané prostory

Uspořádané topologické prostory mohou a nemusejí být parakompaktní, i když jsou všechny dědičně normální.

1. Reálná přímka je LOTS a je parakompaktní (je metrizovatelný prostor nebo Lindelöfův prostor).
2. Sorgenfreyova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
3. Michaelova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
4. Prostor ω_1 není parakompaktní.
5. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α parakompaktní právě když konfinalita α je spočetná.

Položku 4 dokažte jak pomocí uniformit na ω_1 tak pomocí lokálně konečných zjemnění.

Uspořádané prostory

Uspořádané topologické prostory mohou a nemusejí být parakompaktní, i když jsou všechny dědičně normální.

1. Reálná přímka je LOTS a je parakompaktní (je metrizovatelný prostor nebo Lindelöfův prostor).
2. Sorgenfreyova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
3. Michaelova přímka je GO a je parakompaktní (je Lindelöfův prostor).
4. Prostor ω_1 není parakompaktní.
5. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α parakompaktní právě když konfinalita α je spočetná.

Předchozí tvrzení pro ω_1 lze zobecnit a pak použít pro charakterizaci parakompaktnosti uspořádaných množin (viz Cvičení).

$\Rightarrow$

Vějíř a ježek

Každý spočetný symetrický prostor je parakompaktní:

1. Vějíř je parakompaktní.
2. Ježek je parakompaktní (je i metrizovatelný).
3. Pseudovějíř je parakompaktní

Vějíř a ježek

Každý spočetný symetrický prostor je parakompaktní:

1. Vějíř je parakompaktní.
2. Ježek je parakompaktní (je i metrizovatelný).
3. Pseudovějíř je parakompaktní

Vějíř a ježek

Každý spočetný symetrický prostor je parakompaktní:

1. Vějíř je parakompaktní.
2. Ježek je parakompaktní (je i metrizovatelný).
3. Pseudovějíř je parakompaktní

Vějíř a ježek

Každý spočetný symetrický prostor je parakompaktní:

1. Vějíř je parakompaktní.
2. Ježek je parakompaktní (je i metrizovatelný).
3. Pseudovějíř je parakompaktní

Vějíř a ježek

Každý spočetný symetrický prostor je parakompaktní:

1. Vějíř je parakompaktní.
2. Ježek je parakompaktní (je i metrizovatelný).
3. Pseudovějíř je parakompaktní

Předchozí příklady zůstanou parakompaktní i když se místo konvergentní posloupnosti vezmou uzavřené intervaly $[0, 1]$, které se spojí v 0. Pak se musí použít Lindelöfovost.

$\Rightarrow$

U některých prostorů se dokáže nebo vyvrátí parakompaktnost snadno, u některých je to složitější a často se použije nepřímý postup.

Různé příklady

1. Prostory s topologií vytvořenou filtrem jsou parakompaktní, protože mají nejvýše jeden hromadný bod.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy není parakompaktní, pokud je skoro disjunktní soustava maximální (prostor je pseudokompaktní), ale může být parakompaktní, pokud soustava není maximální.
3. Σ-součin uzavřených intervalů není parakompaktní, protože je pseudokompaktní.

$\Rightarrow$

Různé příklady

1. Prostory s topologií vytvořenou filtrem jsou parakompaktní, protože mají nejvýše jeden hromadný bod.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy není parakompaktní, pokud je skoro disjunktní soustava maximální (prostor je pseudokompaktní), ale může být parakompaktní, pokud soustava není maximální.
3. Σ-součin uzavřených intervalů není parakompaktní, protože je pseudokompaktní.

$\Rightarrow$

Různé příklady

1. Prostory s topologií vytvořenou filtrem jsou parakompaktní, protože mají nejvýše jeden hromadný bod.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy není parakompaktní, pokud je skoro disjunktní soustava maximální (prostor je pseudokompaktní), ale může být parakompaktní, pokud soustava není maximální.
3. Σ-součin uzavřených intervalů není parakompaktní, protože je pseudokompaktní.

$\Rightarrow$

Různé příklady

1. Prostory s topologií vytvořenou filtrem jsou parakompaktní, protože mají nejvýše jeden hromadný bod.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy není parakompaktní, pokud je skoro disjunktní soustava maximální (prostor je pseudokompaktní), ale může být parakompaktní, pokud soustava není maximální.
3. Σ-součin uzavřených intervalů není parakompaktní, protože je pseudokompaktní.

$\Rightarrow$

Některé dále uvedené prostory nejsou čechovsky úplné, protože nesplňují některé vlastnosti čechovsky úplných prostorů (pro takové vlastnosti viz i Cvičení) – tento postup je často vhodnější než použít definici.

Čechovská úplnost některých prostorů

1. Lokálně kompaktní Hausdorffův prostor je čechovsky úplný. Takže prostory ω_1 a $\beta\mathbb{N} \setminus F$ (kde F je konečná podmnožina $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$) jsou čechovsky úplné.
2. Prostor iracionálních čísel je čechovsky úplný, prostor racionálních čísel není čechovsky úplný. Takže prostor iracionálních čísel není F_σ v $\mathbb{R}$ a je úplně metrizovatelný.
3. Je-li D nespočetná diskrétní prostor, pak D^{ω_1} není čechovsky úplný.
4. Sorgenfreyova přímka není čechovsky úplná.
5. σ-součin v $\mathbb{R}^\omega$ není čechovsky úplný.
6. Prostor vytvořený ultrafiltrem není čechovsky úplný.
7. Pseudovějíř není čechovsky úplný (a vějíř?).
8. Prostory skoro disjunktních množin jsou čechovsky úplné.
9. Existuje LOTS se spočetnými charaktery bodů, který je čechovsky úplný a není metrizovatelný.

$\Rightarrow$

Některé dále uvedené prostory nejsou čechovsky úplné, protože nesplňují některé vlastnosti čechovsky úplných prostorů (pro takové vlastnosti viz i Cvičení) – tento postup je často vhodnější než použít definici.

Čechovská úplnost některých prostorů

1. Lokálně kompaktní Hausdorffův prostor je čechovsky úplný. Takže prostory ω_1 a $\beta\mathbb{N} \setminus F$ (kde F je konečná podmnožina $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$) jsou čechovsky úplné.
2. Prostor iracionálních čísel je čechovsky úplný, prostor racionálních čísel není čechovsky úplný. Takže prostor iracionálních čísel není F_σ v $\mathbb{R}$ a je úplně metrizovatelný.
3. Je-li D nespočetná diskrétní prostor, pak D^{ω_1} není čechovsky úplný.
4. Sorgenfreyova přímka není čechovsky úplná.
5. σ-součin v $\mathbb{R}^\omega$ není čechovsky úplný.
6. Prostor vytvořený ultrafiltrem není čechovsky úplný.
7. Pseudovějíř není čechovsky úplný (a vějíř?).
8. Prostory skoro disjunktních množin jsou čechovsky úplné.
9. Existuje LOTS se spočetnými charaktery bodů, který je čechovsky úplný a není metrizovatelný.

$\Rightarrow$