12. METRIZACE

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Kvazimetriky

Jak bylo zmíněno v úvodních kapitolách tohoto textu, axiómy metrik (nebo pseudometrik) se často oslabují, aby bylo možné popsat další případy. Jednou z možností je vynechat axióm symetrie – dostane se tzv kvazimetrika. Tato možnost se v praxi často vyskytuje, např. při měření minimálního času jízdy mezi různými místy.

Kvazimetriky určují topologie stejným způsobem jako metriky jak pomocí uzávěru ($x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$) tak pomocí okolí (koule $B_r(x) = \{y; d(x, y) < r\}$ tvoří bázi okolí bodu x). Při konvergenci je nutné brát zřetel na pořadí. Např. $x_n \to x$ znamená $d(x, x_n) \to 0$, nikoli $d(x_n, x) \to 0$.

Každá kvazimetrika d určuje jednoduše metriku $e(x, y) = (d(x, y) + d(y, x))/2$, ale ta nemusí určovat stejnou topologii jako kvazimetrika d – najděte příklad. V jakém vztahu jsou topologie určené pomocí d, resp. e?

Topologie určená kvazimetrikou má v každém bodě spočetnou bázi okolí, nemusí však být Hausdorffova, vždy je T_1.

Kvazimetrizovat se dají např. Sorgenfreyova přímka nebo Michaelova přímka (najděte příslušné kvazimetriky).

Kvazimetrizovatelné prostory sdílejí některé vlastnosti metrizovatelných prostorů, např. perfektní obraz kvazimetrizovatelného prostoru je kvazimetrizovatelný.

Každý T_1-prostor se σ-bodově konečnou bází je kvazimetrizovatelný (dokonce nearchimedovskou kvazimetrikou, která splňuje silnější trojúhelníkovou nerovnost: $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$).

Tedy každý T_1-prostor se spočetnou bází je kvazimetrizovatelný.

Regulární spočetně kompaktní kvazimetrizovatelný prostor je metrizovatelný.

$\Rightarrow$

Kvazimetriky

Jak bylo zmíněno v úvodních kapitolách tohoto textu, axiómy metrik (nebo pseudometrik) se často oslabují, aby bylo možné popsat další případy. Jednou z možností je vynechat axióm symetrie – dostane se tzv kvazimetrika. Tato možnost se v praxi často vyskytuje, např. při měření minimálního času jízdy mezi různými místy.

Kvazimetriky určují topologie stejným způsobem jako metriky jak pomocí uzávěru ($x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$) tak pomocí okolí (koule $B_r(x) = \{y; d(x, y) < r\}$ tvoří bázi okolí bodu x). Při konvergenci je nutné brát zřetel na pořadí. Např. $x_n \to x$ znamená $d(x, x_n) \to 0$, nikoli $d(x_n, x) \to 0$.

Každá kvazimetrika d určuje jednoduše metriku $e(x, y) = (d(x, y) + d(y, x))/2$, ale ta nemusí určovat stejnou topologii jako kvazimetrika d – najděte příklad. V jakém vztahu jsou topologie určené pomocí d, resp. e?

Topologie určená kvazimetrikou má v každém bodě spočetnou bázi okolí, nemusí však být Hausdorffova, vždy je T_1.

Kvazimetrizovat se dají např. Sorgenfreyova přímka nebo Michaelova přímka (najděte příslušné kvazimetriky).

Kvazimetrizovatelné prostory sdílejí některé vlastnosti metrizovatelných prostorů, např. perfektní obraz kvazimetrizovatelného prostoru je kvazimetrizovatelný.

Každý T_1-prostor se σ-bodově konečnou bází je kvazimetrizovatelný (dokonce nearchimedovskou kvazimetrikou, která splňuje silnější trojúhelníkovou nerovnost: $d(x, y) \le \max\{d(x, z), d(z, y)\}$).

Tedy každý T_1-prostor se spočetnou bází je kvazimetrizovatelný.

Regulární spočetně kompaktní kvazimetrizovatelný prostor je metrizovatelný.

Kvazimetriky

Jak bylo zmíněno v úvodních kapitolách tohoto textu, axiómy metrik (nebo pseudometrik) se často oslabují, aby bylo možné popsat další případy. Jednou z možností je vynechat axióm symetrie – dostane se tzv kvazimetrika. Tato možnost se v praxi často vyskytuje, např. při měření minimálního času jízdy mezi různými místy.

Kvazimetriky určují topologie stejným způsobem jako metriky jak pomocí uzávěru ($x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$) tak pomocí okolí (koule $B_r(x) = \{y; d(x, y) < r\}$ tvoří bázi okolí bodu x). Při konvergenci je nutné brát zřetel na pořadí. Např. $x_n \to x$ znamená $d(x, x_n) \to 0$, nikoli $d(x_n, x) \to 0$.

Každá kvazimetrika d určuje jednoduše metriku $e(x, y) = (d(x, y) + d(y, x))/2$, ale ta nemusí určovat stejnou topologii jako kvazimetrika d – najděte příklad. V jakém vztahu jsou topologie určené pomocí d, resp. e?

Topologie určená kvazimetrikou má v každém bodě spočetnou bázi okolí, nemusí však být Hausdorffova, vždy je T_1.

Kvazimetrizovat se dají např. Sorgenfreyova přímka nebo Michaelova přímka (najděte příslušné kvazimetriky).

Kvazimetrizovatelné prostory sdílejí některé vlastnosti metrizovatelných prostorů, např. perfektní obraz kvazimetrizovatelného prostoru je kvazimetrizovatelný.

Každý T_1-prostor se σ-bodově konečnou bází je kvazimetrizovatelný (dokonce nearchimedovskou kvazimetrikou, která splňuje silnější trojúhelníkovou nerovnost: $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$).

Tedy každý T_1-prostor se spočetnou bází je kvazimetrizovatelný.

Regulární spočetně kompaktní kvazimetrizovatelný prostor je metrizovatelný.

$\Rightarrow$

Kvazimetriky

Jak bylo zmíněno v úvodních kapitolách tohoto textu, axiómy metrik (nebo pseudometrik) se často oslabují, aby bylo možné popsat další případy. Jednou z možností je vynechat axióm symetrie – dostane se tzv kvazimetrika. Tato možnost se v praxi často vyskytuje, např. při měření minimálního času jízdy mezi různými místy.

Kvazimetriky určují topologie stejným způsobem jako metriky jak pomocí uzávěru ($x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$) tak pomocí okolí (koule $B_r(x) = \{y; d(x, y) < r\}$ tvoří bázi okolí bodu x). Při konvergenci je nutné brát zřetel na pořadí. Např. $x_n \to x$ znamená $d(x, x_n) \to 0$, nikoli $d(x_n, x) \to 0$.

Každá kvazimetrika d určuje jednoduše metriku $e(x, y) = (d(x, y) + d(y, x))/2$, ale ta nemusí určovat stejnou topologii jako kvazimetrika d – najděte příklad. V jakém vztahu jsou topologie určené pomocí d, resp. e?

Topologie určená kvazimetrikou má v každém bodě spočetnou bázi okolí, nemusí však být Hausdorffova, vždy je T_1.

Kvazimetrizovat se dají např. Sorgenfreyova přímka nebo Michaelova přímka (najděte příslušné kvazimetriky).

Kvazimetrizovatelné prostory sdílejí některé vlastnosti metrizovatelných prostorů, např. perfektní obraz kvazimetrizovatelného prostoru je kvazimetrizovatelný.

Každý T_1-prostor se σ-bodově konečnou bází je kvazimetrizovatelný (dokonce nearchimedovskou kvazimetrikou, která splňuje silnější trojúhelníkovou nerovnost: $d(x, y) \le \max\{d(x, z), d(z, y)\}$).

Tedy každý T_1-prostor se spočetnou bází je kvazimetrizovatelný.

Regulární spočetně kompaktní kvazimetrizovatelný prostor je metrizovatelný.

$\Rightarrow$

Kvazimetriky

Jak bylo zmíněno v úvodních kapitolách tohoto textu, axiómy metrik (nebo pseudometrik) se často oslabují, aby bylo možné popsat další případy. Jednou z možností je vynechat axióm symetrie – dostane se tzv kvazimetrika. Tato možnost se v praxi často vyskytuje, např. při měření minimálního času jízdy mezi různými místy.

Kvazimetriky určují topologie stejným způsobem jako metriky jak pomocí uzávěru ($x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$) tak pomocí okolí (koule $B_r(x) = \{y; d(x, y) < r\}$ tvoří bázi okolí bodu x). Při konvergenci je nutné brát zřetel na pořadí. Např. $x_n \to x$ znamená $d(x, x_n) \to 0$, nikoli $d(x_n, x) \to 0$.

Každá kvazimetrika d určuje jednoduše metriku $e(x, y) = (d(x, y) + d(y, x))/2$, ale ta nemusí určovat stejnou topologii jako kvazimetrika d – najděte příklad. V jakém vztahu jsou topologie určené pomocí d, resp. e?

Topologie určená kvazimetrikou má v každém bodě spočetnou bázi okolí, nemusí však být Hausdorffova, vždy je T_1.

Kvazimetrizovat se dají např. Sorgenfreyova přímka nebo Michaelova přímka (najděte příslušné kvazimetriky).

Kvazimetrizovatelné prostory sdílejí některé vlastnosti metrizovatelných prostorů, např. perfektní obraz kvazimetrizovatelného prostoru je kvazimetrizovatelný.

Každý T_1-prostor se σ-bodově konečnou bází je kvazimetrizovatelný (dokonce nearchimedovskou kvazimetrikou, která splňuje silnější trojúhelníkovou nerovnost: $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$).

Tedy každý T_1-prostor se spočetnou bází je kvazimetrizovatelný.

Regulární spočetně kompaktní kvazimetrizovatelný prostor je metrizovatelný.

$\Rightarrow$

Semimetriky

Další možností zobecnění metrik je vynechat trojúhelníkovou nerovnost – dostane se tzv. semimetrika. Tento případ nastoluje složitější situaci než kvazimetriky, ačkoliv by se mohlo zdát, že to bude naopak.
Semimetriky se v některé literatuře nazývají symmetriky.
Otevřené množiny se definují stejně jako u metrického prostoru: množina je otevřená, jestliže obsahuje s každým svým bodem i nějakou kouli okolo něho.
Tyto koule však nemusí být okolím svého středu. Dokonce indukovaná topologie nemusí mít spočetné báze okolí. Zatím není jasné, zda každý bod semimetrizovatelného prostoru je G_δ – je však známo, že existuje semimetrizovatelný prostor obsahující uzavřenou množinu, která není G_δ-množinou.
Také se nedá definovat uzávěr rovností $\overline{A} = \{x; d(x, A) = 0\}$. Takto definovaný uzávěr nemusí být uzavřenou množinou – dostává se tzv. zobecněný uzávěr (Čechův uzávěr) a uzávěr indukované topologie vznikne až iterací tohoto uzávěru.
Semimetrizovatelný prostor je sekvenční T_1-prostor, nemusí být Hausdorffův. (Takže existují spočetné parakompaktní prostory, které nejsou semimetrizovatelné.)
Semimetrizovatelný prostor má spočetné báze okolí právě když je FU-prostor.
Semimetrizovatelný spočetně kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný. (Takže ω_1 není semimetrizovatelný.)
Semimetrizovatelný uspořádatelný prostor je metrizovatelný.
Kvocient metrizovatelného prostoru s kompaktními vzory bodů je semimetrizovatelný.
Existují různé podmínky, slabší než trojúhelníková nerovnost (např. na konvergenci, nebo na semimetriku samou), které zaručí, že semimetrizovatelný prostor je metrizovatelný.

$\Longrightarrow$

Semimetriky

Další možností zobecnění metrik je vynechat trojúhelníkovou nerovnost – dostane se tzv. semimetrika. Tento případ nastoluje složitější situaci než kvazimetriky, ačkoliv by se mohlo zdát, že to bude naopak.
Semimetriky se v některé literatuře nazývají symmetriky.
Otevřené množiny se definují stejně jako u metrického prostoru: množina je otevřená, jestliže obsahuje s každým svým bodem i nějakou kouli okolo něho.
Tyto koule však nemusí být okolím svého středu. Dokonce indukovaná topologie nemusí mít spočetné báze okolí. Zatím není jasné, zda každý bod semimetrizovatelného prostoru je G_δ – je však známo, že existuje semimetrizovatelný prostor obsahující uzavřenou množinu, která není G_δ-množinou.
Také se nedá definovat uzávěr rovností $\overline{A} = \{x; d(x,A) = 0\}$. Takto definovaný uzávěr nemusí být uzavřenou množinou – dostává se tzv. zobecněný uzávěr (Čechův uzávěr) a uzávěr indukované topologie vznikne az iterakcí tohoto uzávěru.
Semimetrizovatelný prostor je sekvenční T_1-prostor, nemusí být Hausdorffův. (Takže existují spočetné parakompaktní prostory, které nejsou semimetrizovatelné.)
Semimetrizovatelný prostor má spočetné báze okolí právě když je FU-prostor.
Semimetrizovatelný spočetně kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný. (Takže ω_1 není semimetrizovatelný.)
Semimetrizovatelný uspořádatelný prostor je metrizovatelný.
Kvocient metrizovatelného prostoru s kompaktními vzory bodů je semimetrizovatelný.
Existují různé podmínky, slabší než trojúhelníková nerovnost (např. na konvergenci, nebo na semimetriku samou), které zaručí, že semimetrizovatelný prostor je metrizovatelný.

$\Longrightarrow$

Semimetriky

Další možností zobecnění metrik je vynechat trojúhelníkovou nerovnost – dostane se tzv. semimetrika. Tento případ nastoluje složitější situaci než kvazimetriky, ačkoliv by se mohlo zdát, že to bude naopak.
Semimetriky se v některé literatuře nazývají symmetriky.
Otevřené množiny se definují stejně jako u metrického prostoru: množina je otevřená, jestliže obsahuje s každým svým bodem i nějakou kouli okolo něho.
Tyto koule však nemusí být okolím svého středu. Dokonce indukovaná topologie nemusí mít spočetné báze okolí. Zatím není jasné, zda každý bod semimetrizovatelného prostoru je G_δ – je však známo, že existuje semimetrizovatelný prostor obsahující uzavřenou množinu, která není G_δ-množinou.
Také se nedá definovat uzávěr rovností $\overline{A} = \{x; d(x, A) = 0\}$. Takto definovaný uzávěr nemusí být uzavřenou množinou – dostává se tzv. zobecněný uzávěr (Čechův uzávěr) a uzávěr indukované topologie vznikne az iterakcí tohoto uzávěru.
Semimetrizovatelný prostor je sekvenční T_1-prostor, nemusí být Hausdorffův. (Takže existují spočetné parakompaktní prostory, které nejsou semimetrizovatelné.)
Semimetrizovatelný prostor má spočetné báze okolí právě když je FU-prostor.
Semimetrizovatelný spočetně kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný. (Takže ω_1 není semimetrizovatelný.)
Semimetrizovatelný uspořádatelný prostor je metrizovatelný.
Kvocient metrizovatelného prostoru s kompaktními vzory bodů je semimetrizovatelný.
Existují různé podmínky, slabší než trojúhelníková nerovnost (např. na konvergenci, nebo na semimetriku samou), které zaručí, že semimetrizovatelný prostor je metrizovatelný.

⇒

Semimetriky

Další možností zobecnění metrik je vynechat trojúhelníkovou nerovnost – dostane se tzv. semimetrika. Tento případ nastoluje složitější situaci než kvazimetriky, ačkoliv by se mohlo zdát, že to bude naopak.
Semimetriky se v některé literatuře nazývají symmetriky.
Otevřené množiny se definují stejně jako u metrického prostoru: množina je otevřená, jestliže obsahuje s každým svým bodem i nějakou kouli okolo něho.
Tyto koule však nemusí být okolím svého středu. Dokonce indukovaná topologie nemusí mít spočetné báze okolí. Zatím není jasné, zda každý bod semimetrizovatelného prostoru je G_δ – je však známo, že existuje semimetrizovatelný prostor obsahující uzavřenou množinu, která není G_δ-množinou.
Také se nedá definovat uzávěr rovností $\overline{A} = \{x; d(x, A) = 0\}$. Takto definovaný uzávěr nemusí být uzavřenou množinou – dostává se tzv. zobecněný uzávěr (Čechův uzávěr) a uzávěr indukované topologie vznikne az iterakcí tohoto uzávěru.
Semimetrizovatelný prostor je sekvenční T_1-prostor, nemusí být Hausdorffův. (Takže existují spočetné parakompaktní prostory, které nejsou semimetrizovatelné.)
Semimetrizovatelný prostor má spočetné báze okolí právě když je FU-prostor.
Semimetrizovatelný spočetně kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný. (Takže ω_1 není semimetrizovatelný.)
Semimetrizovatelný uspořádatelný prostor je metrizovatelný.
Kvocient metrizovatelného prostoru s kompaktními vzory bodů je semimetrizovatelný.
Existují různé podmínky, slabší než trojúhelníková nerovnost (např. na konvergenci, nebo na semimetriku samou), které zaručí, že semimetrizovatelný prostor je metrizovatelný.

$\Rightarrow$

Další zobecnění

Mezi zobecnění metrizovatelných prostorů lze počítat i třídy prostorů popsaných pomocí podmínek obsahujících nějaká spočetná omezení a platná v metrizovatelných prostorech.

Jiným příkladem jsou prostory mající bázi nebo zobecněnou bázi otevřených množin splňující nějakou spočetnou podmínku. Jednou z možností je tzv. „network” topologického prostoru X (český termín nebyl určen). Je to soustava podmnožin X taková, že každá otevřená množina obsahuje s každým svým bodem prvek networku obsahující onen bod. Prostory mající spočetný network jsou separabilní a mají řadu pěkných vlastností.

Jiným zobecněním je vzít vlastnosti soustav okolí metrizovatelných prostorů. Např. tzv. stratifikovatelné prostory jsou topologické prostory, kde pro každou otevřenou množinu G existuje posloupnost $\{G_n\}$ jejích otevřených podmnožin s vlastnostmi: $\overline{G_n} \subset G, \bigcup G_n = G$, $G_n \subset H_n$ jestliže $G \subset H$. Na tyto prostory se dají přenést některá tvrzení platná pro metrizovatelné prostory nebo nahradí metrizovatelnost tam, kde neexistuje.

Je-li X úplný separabilní metrický prostor, je prostor $C(X)$ s kompaktně-otevřenou topologií stratifikovatelný. Nadprostory některých metrických prostorů nejsou metrizovatelné, ale jsou stratifikovatelné.

Třída stratifikovatelných prostorů je dědičná, uzavřená na spočetné součiny a libovolné disjunktní součty, navíc i na uzavřené spojité obrazy.

$\Longrightarrow$

Další zobecnění

Setkali jsme se s prostory mající development nebo jiné spočetně soustavy otevřených pokrytí nějak určujícími danou topologii.

Jiným příkladem jsou prostory mající bázi nebo zobecněnou bázi otevřených množin splňující nějakou spočetnou podmínku. Jednou z možností je tzv. „network" topologického prostoru X (český termín nebyl určen). Je to soustava podmnožin X taková, že každá otevřená množina obsahuje s každým svým bodem prvek networku obsahující onen bod. Prostory mající spočetný network jsou separabilní a mají řadu pěkných vlastností.

Jiným zobecněním je vzít vlastnosti soustav okolí metrizovatelných prostorů. Např. tzv. stratifikovatelné prostory jsou topologické prostory, kde pro každou otevřenou množinu G existuje posloupnost $\{G_n\}$ jejích otevřených podmnožin s vlastnostmi: $\overline{G_n} \subset G, \bigcup G_n = G, G_n \subset H_n$ jestliže $G \subset H$. Na tyto prostory se dají přenést některá tvrzení platná pro metrizovatelné prostory nebo nahradí metrizovatelnost tam, kde neexistuje.

Je-li X úplný separabilní metrický prostor, je prostor $C(X)$ s kompaktně-otevřenou topologií stratifikovatelný.

Nadprostory některých metrických prostorů nejsou metrizovatelné, ale jsou stratifikovatelné.

Třída stratifikovatelných prostorů je dědičná, uzavřená na spočetné součiny a libovolné disjunktní součty, navíc i na uzavřené spojité obrazy.

$\Rightarrow$

Další zobecnění

Jiným příkladem jsou prostory mající bázi nebo zobecněnou bázi otevřených množin splňující nějakou spočetnou podmínku. Jednou z možností je tzv. „network" topologického prostoru X (český termín nebyl určen). Je to soustava podmnožin X taková, že každá otevřená množina obsahuje s každým svým bodem prvek networku obsahující onen bod. Prostory mající spočetný network jsou separabilní a mají řadu pěkných vlastností.

Jiným zobecněním je vzít vlastnosti soustav okolí metrizovatelných prostorů. Např. tzv. stratifikovatelné prostory jsou topologické prostory, kde pro každou otevřenou množinu G existuje posloupnost $\{G_n\}$ jejích otevřených podmnožin s vlastnostmi: $\overline{G_n} \subset G, \bigcup G_n = G$, $G_n \subset H_n$ jestliže $G \subset H$. Na tyto prostory se dají přenést některá tvrzení platná pro metrizovatelné prostory nebo nahradí metrizovatelnost tam, kde neexistuje.

Je-li X úplný separabilní metrický prostor, je prostor $C(X)$ s kompaktně-otevřenou topologií stratifikovatelný. Nadprostory některých metrických prostorů nejsou metrizovatelné, ale jsou stratifikovatelné.

Třída stratifikovatelných prostorů je dědičná, uzavřená na spočetné součiny a libovolné disjunktní součty, navíc i na uzavřené spojité obrazy.

$\Rightarrow$

Další zobecnění

Jiným příkladem jsou prostory mající bázi nebo zobecněnou bázi otevřených množin splňující nějakou spočetnou podmínku. Jednou z možností je tzv. „network" topologického prostoru X (český termín nebyl určen). Je to soustava podmnožin X taková, že každá otevřená množina obsahuje s každým svým bodem prvek networku obsahující onen bod. Prostory mající spočetný network jsou separabilní a mají řadu pěkných vlastností.

Jiným zobecněním je vzít vlastnosti soustav okolí metrizovatelných prostorů. Např. tzv. stratifikovatelné prostory jsou topologické prostory, kde pro každou otevřenou množinu G existuje posloupnost $\{G_n\}$ jejích otevřených podmnožin s vlastnostmi: $\overline{G_n} \subset G, \bigcup G_n = G$, $G_n \subset H_n$ jestliže $G \subset H$. Na tyto prostory se dají přenést některá tvrzení platná pro metrizovatelné prostory nebo nahradí metrizovatelnost tam, kde neexistuje.

Je-li X úplný separabilní metrický prostor, je prostor $C(X)$ s kompaktně-otevřenou topologií stratifikovatelný.

Nadprostory některých metrických prostorů nejsou metrizovatelné, ale jsou stratifikovatelné.

Třída stratifikovatelných prostorů je dědičná, uzavřená na spočetné součiny a libovolné disjunktní součty, navíc i na uzavřené spojité obrazy.

$\Rightarrow$

Hausdorffova metrika

V metrickém prostoru (X, d) se definuje Hausdorffova vzdálenost dvou uzavřených množin

$$d_H(F_1, F_2) = \max\{\sup\{d(x, F_2); x \in F_1\}, \sup\{d(x, F_1); x \in F_2\}\},$$

tj., $d_H(F_1, F_2) \leq r$ právě když $F_1 \subset B_r(F_2)$, $F_2 \subset B_r(F_1)$. Funkce d_H je metrika, pokud připustíme, že může nabývat nekonečných hodnot. Jsou-li F_1, F_2 kompaktní (stačí omezené), je jejich vzdálenost konečná – tento prostor označme pro tuto část jako $\mathrm{Comp}(X)$.

Prostor X je uzavřeným podprostorem prostoru $\mathrm{Comp}(X)$ (isometricky vnořený).

Prostor $\mathrm{Comp}(X)$ je totálně omezený nebo úplný právě když má X stejnou vlastnost (takže se zachovává kompaktnost). Separabilita se nezachovává.

Prostor $\mathrm{Comp}(X)$ lze isometricky vnořit do $C^*(X)$ se supremovou metrikou.

Hausdorffova metrika má široké použití, např. se používá při zkoumání křivek, funkcí (braných jako podmnožiny součinu), v teorii fraktálů na existenci samopodobných množin (v $\mathrm{Comp}(\mathbb{R}^n)$ platí Banachova věta o pevném bodě), v informatice, logice, topologické dynamice,...

$\Rightarrow$

Hausdorffova metrika

V metrickém prostoru (X, d) se definuje Hausdorffova vzdálenost dvou uzavřených množin

$$d_H(F_1, F_2) = \max\{\sup\{d(x, F_2); x \in F_1\}, \sup\{d(x, F_1); x \in F_2\}\},$$

tj., $d_H(F_1, F_2) \leq r$ právě když $F_1 \subset B_r(F_2)$, $F_2 \subset B_r(F_1)$. Funkce d_H je metrika, pokud připustíme, že může nabývat nekonečných hodnot. Jsou-li F_1, F_2 kompaktní (stačí omezené), je jejich vzdálenost konečná – tento prostor označme pro tuto část jako Comp(X).

Prostor X je uzavřeným podprostorem prostoru Comp(X) (isometricky vnořený).

Prostor Comp(X) je totálně omezený nebo úplný právě když má X stejnou vlastnost (takže se zachovává kompaktnost). Separabilita se nezachovává.

Prostor Comp(X) lze isometricky vnořit do $C^*(X)$ se supremovou metrikou.

Hausdorffova metrika má široké použití, např. se používá při zkoumání křivek, funkcí (braných jako podmnožiny součinu), v teorii fraktálů na existenci samopodobných množin (v Comp$(\mathbb{R}^n)$ platí Banachova věta o pevném bodě), v informatice, logice, topologické dynamice,...

$\Rightarrow$

Hausdorffova metrika

V metrickém prostoru (X, d) se definuje Hausdorffova vzdálenost dvou uzavřených množin

$$d_H(F_1, F_2) = \max\{\sup\{d(x, F_2); x \in F_1\}, \sup\{d(x, F_1); x \in F_2\}\},$$

tj., $d_H(F_1, F_2) \leq r$ právě když $F_1 \subset B_r(F_2)$, $F_2 \subset B_r(F_1)$. Funkce d_H je metrika, pokud připustíme, že může nabývat nekonečných hodnot. Jsou-li F_1, F_2 kompaktní (stačí omezené), je jejich vzdálenost konečná – tento prostor označme pro tuto část jako Comp(X).
Prostor X je uzavřeným podprostorem prostoru Comp(X) (isometricky vnořený).
Prostor Comp(X) je totálně omezený nebo úplný právě když má X stejnou vlastnost (takže se zachovává kompaktnost). Separabilita se nezachovává.
Prostor Comp(X) lze isometricky vnořit do $C^*(X)$ se supremovou metrikou.
Hausdorffova metrika má široké použití, např. se používá při zkoumání křivek, funkcí (braných jako podmnožiny součinu), v teorii fraktálů na existenci samopodobných množin (v Comp$(\mathbb{R}^n)$ platí Banachova věta o pevném bodě), v informatice, logice, topologické dynamice,...

$\Rightarrow$

Univerzální prostory

To, že každý separabilní metrický prostor lze izometricky vnořit do ℓ_∞ (prostor $C^*(\mathbb{N})$ se supremovou metrikou), věděl už Fréchet před 100 lety. Také věděl, že ℓ_∞ není separabilní a položil otázku, zda lze takový univerzální prostor, obsahující izometricky každý separabilní metrický prostor, sestrojit separabilní.

Otázku zodpověděl kladně Uryson v r. 1924, několik dní před tragickou smrtí. Sestrojil separabilní metrický prostor U obsahující izometrické kopie všech separabilních metrických prostorů a mající navíc následující vlastnost (jistá homogenita):

isometrie mezi konečnými podmnožinami v U lze rozšířit na izometrii U na U.

Takový prostor U je určen jednoznačně až na izometrii.

Katětov v r. 1986 rozšířil (použitím jiné metody) Urysonův výsledek na neseparabilní prostory.

$\Longrightarrow$

Univerzální prostory

To, že každý separabilní metrický prostor lze izometricky vnořit do ℓ_∞ (prostor $C^*(\mathbb{N})$ se supremovou metrikou), věděl už Fréchet před 100 lety. Také věděl, že ℓ_∞ není separabilní a položil otázku, zda lze takový univerzální prostor, obsahující izometricky každý separabilní metrický prostor, sestrojit separabilní.

Otázku zodpověděl kladně Uryson v r. 1924, několik dní před tragickou smrtí. Sestrojil separabilní metrický prostor U obsahující izometrické kopie všech separabilních metrických prostorů a mající navíc následující vlastnost (jistá homogenita):

isometrie mezi konečnými podmnožinami v U lze rozšířit na izometrii U na U.

Takový prostor U je určen jednoznačně až na izometrii.

Katětov v r. 1986 rozšířil (použitím jiné metody) Urysonův výsledek na neseparabilní prostory.

$\Longrightarrow$

Univerzální prostory

To, že každý separabilní metrický prostor lze izometricky vnořit do ℓ_∞ (prostor $C^*(\mathbb{N})$ se supremovou metrikou), věděl už Fréchet před 100 lety. Také věděl, že ℓ_∞ není separabilní a položil otázku, zda lze takový univerzální prostor, obsahující izometricky každý separabilní metrický prostor, sestrojit separabilní.

Otázku zodpověděl kladně Uryson v r. 1924, několik dní před tragickou smrtí. Sestrojil separabilní metrický prostor U obsahující izometrické kopie všech separabilních metrických prostorů a mající navíc následující vlastnost (jistá homogenita):

isometrie mezi konečnými podmnožinami v U lze rozšířit na izometrii U na U.

Takový prostor U je určen jednoznačně až na izometrii.

Katětov v r. 1986 rozšířil (použitím jiné metody) Urysonův výsledek na neseparabilní prostory.

$\Rightarrow$

Gromovova metrika

Gromov definoval metriku na množině všech kompaktních metrických prostorů (ekvivalence až na izometrii) v r. 1980 pro účel zkoumání grup. Od té doby se tato metrika ukázala být užitečná v riemannovské geometrii, počítačové geometrii, algebraické topologii,...

Jsou-li X, Y dva kompaktní metrické prostory, definuje se $d_G(X, Y)$ jako infimum vzdáleností $d_H(f(X), g(Y))$, kde f, g jsou libovolné izometrie X, resp. Y, do libovolného metrického prostoru Z.
Zřejmě je možné za Z vzít univerzální metrický prostor pro separabilní metrické prostory, např. ℓ_∞ nebo Urysonův univerzální prostor.
V případě, že X, Y jsou podprostory $\mathbb{R}^n$, lze za Z vzít opět $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$

Gromovova metrika

Gromov definoval metriku na množině všech kompaktních metrických prostorů (ekvivalence až na izometrii) v r. 1980 pro účel zkoumání grup. Od té doby se tato metrika ukázala být užitečná v riemannovské geometrii, počítačové geometrii, algebraické topologii,...

Jsou-li X, Y dva kompaktní metrické prostory, definuje se $d_G(X,Y)$ jako infimum vzdáleností $d_H(f(X),g(Y))$, kde f,g jsou libovolné izometrie X, resp. Y, do libovolného metrického prostoru Z.

Zřejmě je možné za Z vzít univerzální metrický prostor pro separabilní metrické prostory, např. ℓ_∞ nebo Urysonův univerzální prostor.

V případě, že X, Y jsou podprostory $\mathbb{R}^n$, lze za Z vzít opět $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$