13. SOUVISLOST

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Uspořádatelné prostory

1. Ukažte, že uspořádaný topologický prostor je souvislý právě když je hustě uspořádaný (tj. žádný otevřený interval (a, b) pro $a \lneqq b$ není prázdný) a omezeně úplný (tj. každá omezená množina má supremum, a tedy i infimum).
2. Kdy je GO prostor, který není LOTS, souvislý?
3. Každý uspořádaný topologický prostor je podprostorem souvislého uspořádaného topologického prostoru.

Uspořádatelné prostory

1. Ukažte, že uspořádaný topologický prostor je souvislý právě když je hustě uspořádaný (tj. žádný otevřený interval (a, b) pro $a \lneq b$ není prázdný) a omezeně úplný (tj. každá omezená množina má supremum, a tedy i infimum).
2. Kdy je GO prostor, který není LOTS, souvislý?
3. Každý uspořádaný topologický prostor je podprostorem souvislého uspořádaného topologického prostoru.

Uspořádatelné prostory

1. Ukažte, že uspořádaný topologický prostor je souvislý právě když je hustě uspořádaný (tj. žádný otevřený interval (a, b) pro $a \lneqq b$ není prázdný) a omezené úplný (tj. každá omezená množina má supremum, a tedy i infimum).
2. Kdy je GO prostor, který není LOTS, souvislý?
3. Každý uspořádaný topologický prostor je podprostorem souvislého uspořádaného topologického prostoru.

Komponenty a kvazikomponenty

1. Dokažte, že komponenty (nebo kvazikomponenty) v součinu ΠX_i jsou součiny komponent (kvazikomponent, resp.) v jednotlivých X_i.
2. Popište kvocient topologického prostoru podle jeho rozkladu na komponenty. Jaké má tento kvocient komponenty?
3. Popište kvocient topologického prostoru podle jeho rozkladu na kvazikomponenty. Jaké má tento kvocient kvazikomponenty?

Komponenty a kvazikomponenty

1. Dokažte, že komponenty (nebo kvazikomponenty) v součinu ΠX_i jsou součiny komponent (kvazikomponent, resp.) v jednotlivých X_i.
2. Popište kvocient topologického prostoru podle jeho rozkladu na komponenty. Jaké má tento kvocient komponenty?
3. Popište kvocient topologického prostoru podle jeho rozkladu na kvazikomponenty. Jaké má tento kvocient kvazikomponenty?

Komponenty a kvazikomponenty

1. Dokažte, že komponenty (nebo kvazikomponenty) v součinu ΠX_i jsou součiny komponent (kvazikomponent, resp.) v jednotlivých X_i.
2. Popište kvocient topologického prostoru podle jeho rozkladu na komponenty. Jaké má tento kvocient komponenty?
3. Popište kvocient topologického prostoru podle jeho rozkladu na kvazikomponenty. Jaké má tento kvocient kvazikomponenty?

Řekneme, že topologický prostor X je slabě lokálně souvislý, jestliže každý bod má souvislé okolí.

Slabá lokální souvislost

1. Každý souvislý nebo lokálně souvislý prostor je slabě lokálně souvislý.
2. Topologický prostor je slabě lokálně souvislý právě když je každá jeho komponenta otevřená množina (a tedy obojetná).
3. Ve slabě lokálně souvislém prostoru komponenty a kvazikomponenty splývají.
4. Zachovává se vlastnost být slabě lokálně souvislým prostorem kvocienty.
5. Součin ΠX_i slabě lokálně souvislých prostorů je slabě lokálně souvislý právě když je každý X_i slabě lokálně souvislý a až na konečný počet jsou X_i souvislé.
6. Jsou otevřené nebo uzavřené podprostory slabě lokálně souvislých prostorů opět slabě lokálně souvislé?

Řekneme, že topologický prostor X je slabě lokálně souvislý, jestliže každý bod má souvislé okolí.

Slabá lokální souvislost

1. Každý souvislý nebo lokálně souvislý prostor je slabě lokálně souvislý.
2. Topologický prostor je slabě lokálně souvislý právě když je každá jeho komponenta otevřená množina (a tedy obojetná).
3. Ve slabě lokálně souvislém prostoru komponenty a kvazikomponenty splývají.
4. Zachovává se vlastnost být slabě lokálně souvislým prostorem kvocienty.
5. Součin ΠX_i slabě lokálně souvislých prostorů je slabě lokálně souvislý právě když je každý X_i slabě lokálně souvislý a až na konečný počet jsou X_i souvislé.
6. Jsou otevřené nebo uzavřené podprostory slabě lokálně souvislých prostorů opět slabě lokálně souvislé?

Řekneme, že topologický prostor X je slabě lokálně souvislý, jestliže každý bod má souvislé okolí.

Slabá lokální souvislost

1. Každý souvislý nebo lokálně souvislý prostor je slabě lokálně souvislý.
2. Topologický prostor je slabě lokálně souvislý právě když je každá jeho komponenta otevřená množina (a tedy obojetná).
3. Ve slabě lokálně souvislém prostoru komponenty a kvazikomponenty splývají.
4. Zachovává se vlastnost být slabě lokálně souvislým prostorem kvocienty.
5. Součin $\prod X_i$ slabě lokálně souvislých prostorů je slabě lokálně souvislý právě když je každý X_i slabě lokálně souvislý a až na konečný počet jsou X_i souvislé.
6. Jsou otevřené nebo uzavřené podprostory slabě lokálně souvislých prostorů opět slabě lokálně souvislé?

Řekneme, že topologický prostor X je slabě lokálně souvislý, jestliže každý bod má souvislé okolí.

Slabá lokální souvislost

1. Každý souvislý nebo lokálně souvislý prostor je slabě lokálně souvislý.
2. Topologický prostor je slabě lokálně souvislý právě když je každá jeho komponenta otevřená množina (a tedy obojetná).
3. Ve slabě lokálně souvislém prostoru komponenty a kvazikomponenty splývají.
4. Zachovává se vlastnost být slabě lokálně souvislým prostorem kvocienty.
5. Součin ΠX_i slabě lokálně souvislých prostorů je slabě lokálně souvislý právě když je každý X_i slabě lokálně souvislý a až na konečný počet jsou X_i souvislé.
6. Jsou otevřené nebo uzavřené podprostory slabě lokálně souvislých prostorů opět slabě lokálně souvislé?

Řekneme, že topologický prostor X je slabě lokálně souvislý, jestliže každý bod má souvislé okolí.

Slabá lokální souvislost

1. Každý souvislý nebo lokálně souvislý prostor je slabě lokálně souvislý.
2. Topologický prostor je slabě lokálně souvislý právě když je každá jeho komponenta otevřená množina (a tedy obojetná).
3. Ve slabě lokálně souvislém prostoru komponenty a kvazikomponenty splývají.
4. Zachovává se vlastnost být slabě lokálně souvislým prostorem kvocienty.
5. Součin ΠX_i slabě lokálně souvislých prostorů je slabě lokálně souvislý právě když je každý X_i slabě lokálně souvislý a až na konečný počet jsou X_i souvislé.
6. Jsou otevřené nebo uzavřené podprostory slabě lokálně souvislých prostorů opět slabě lokálně souvislé?

Lokální souvislost

1. Jsou otevřené nebo uzavřené podprostory lokálně souvislých prostorů opět lokálně souvislé?
2. Součin ΠX_i lokálně souvislých prostorů je lokálně souvislý právě když je každý X_i lokálně souvislý a až na konečný počet jsou X_i souvislé.
3. βX je lokálně souvislý právě když je X lokálně souvislý a pseudokompaktní.

Lokální souvislost

1. Jsou otevřené nebo uzavřené podprostory lokálně souvislých prostorů opět lokálně souvislé?
2. Součin ΠX_i lokálně souvislých prostorů je lokálně souvislý právě když je každý X_i lokálně souvislý a až na konečný počet jsou X_i souvislé.
3. βX je lokálně souvislý právě když je X lokálně souvislý a pseudokompaktní.

Lokální souvislost

1. Jsou otevřené nebo uzavřené podprostory lokálně souvislých prostorů opět lokálně souvislé?
2. Součin ΠX_i lokálně souvislých prostorů je lokálně souvislý právě když je každý X_i lokálně souvislý a až na konečný počet jsou X_i souvislé.
3. βX je lokálně souvislý právě když je X lokálně souvislý a pseudokompaktní.

$\sin(1/x)$-kontinuum

Ukažte, že $\sin(1/x)$-kontinuum není spojitým obrazem oblouku.

Sierpinského kobereček

Ukažte, že Sierpinského kobereček je kontinuum, které obsahuje topologickou kopii každého jednodimenzionálního kontinua. [Hint. Jednodimenzionální kontinuum je rovinné a neobsahuje neprázdnou otevřenou podmnožinu roviny.]

Typické kontinuum je nerozložitelné

Ukažte, že typické kontinuum je nerozložitelné (ve smyslu kategorií, taková kontinua tvoří G_δ hustou množinu mezi podkontinui Hilbertovy kostky, vzdálenost dvou kontinuí je nejdelší cesta z jednoho do druhého). [Hint. Volte $F_n = \{X$ je kontinuum ve tvaru $X = A \cup B$, kde A a B jsou subkontinua X, přičemž A neleží v $1/n$ stínu B a zároveň B neleží v $1/n$ stínu $A\}$. Použijte konstrukci nerozložitelného kontinua obsahujícího dané tři body.]

Vztah inverzních limit k průnikům

Ukažte, že průnik $X = \cap_{i=1}^{\infty} X_n$ klesající posloupnosti $X_n \supset X_{n+1}$ lze vyjádřit jako inverzní limita prostorů X_n. Musejí být lepící zobrazení na?

2^X a $C(X)$

Hyperprostory 2^X a $C(X)$ kontinua X jsou obloukově souvislé.

Totální nesouvislost a separovanost

1. Jeli X totálně nesouvislý (nebo separovaný), je i každý jemnější prostor totálně nesouvislý (separovaný, resp.).
2. Každý totálně nesouvislý uspořádatelný prostor je silně nuldimenzionální.
3. Platí, že X je totálně separovaný právě když je jeho nuldimenzionální modifikace (tj. hrubší topologie s bází složenou z obojetných množin v X) Hausdorffova?

Totální nesouvislost a separovanost

1. Jeli X totálně nesouvislý (nebo separovaný), je i každý jemnější prostor totálně nesouvislý (separovaný, resp.).
2. Každý totálně nesouvislý uspořádatelný prostor je silně nuldimenzionální.
3. Platí, že X je totálně separovaný právě když je jeho nuldimenzionální modifikace (tj. hrubší topologie s bází složenou z obojetných množin v X) Hausdorffova?

Totální nesouvislost a separovanost

1. Jeli X totálně nesouvislý (nebo separovaný), je i každý jemnější prostor totálně nesouvislý (separovaný, resp.).
2. Každý totálně nesouvislý uspořádatelný prostor je silně nuldimenzionální.
3. Platí, že X je totálně separovaný právě když je jeho nuldimenzionální modifikace (tj. hrubší topologie s bází složenou z obojetných množin v X) Hausdorffova?

Nuldimenzionální prostory

1. Každý nuldimenzionální prostor má nuldimenzionální kompaktifikaci. Je možné vzít Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci?
2. Pro každý nuldimenzionální T_1-prostor X existuje jeho nuldimenzionální kompaktifikace bX taková, že každé spojité zobrazení $f : X \to Y$, kde Y je kompaktní nuldimenzionální T_1-prostor, lze spojitě rozšířit na $bX \to Y$. (bX se nazývá Banaschewského kompaktifikace.)
3. Každý silně nuldimenzionální metrizovatelný prostor je uspořádatelný.

Nuldimenzionální prostory

1. Každý nuldimenzionální prostor má nuldimenzionální kompaktifikaci. Je možné vzít Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci?
2. Pro každý nuldimenzionální T_1-prostor X existuje jeho nuldimenzionální kompaktifikace bX taková, že každé spojité zobrazení $f : X \to Y$, kde Y je kompaktní nuldimenzionální T_1-prostor, lze spojitě rozšířit na $bX \to Y$. (bX se nazývá Banaschewského kompaktifikace.)
3. Každý silně nuldimenzionální metrizovatelný prostor je uspořádatelný.

Nuldimenzionální prostory

1. Každý nuldimenzionální prostor má nuldimenzionální kompaktifikaci. Je možné vzít Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci?
2. Pro každý nuldimenzionální T_1-prostor X existuje jeho nuldimenzionální kompaktifikace bX taková, že každé spojité zobrazení $f : X \to Y$, kde Y je kompaktní nuldimenzionální T_1-prostor, lze spojitě rozšířit na $bX \to Y$. (bX se nazývá Banaschewského kompaktifikace.)
3. Každý silně nuldimenzionální metrizovatelný prostor je uspořádatelný.

Extremální nesouvislost

1. Konvergentní posloupnost v extremálně nesouvislém prostoru je konstantní od nějakého indexu počínaje. (Takže lokální báze neizolovaných bodů jsou nespočetné.)
2. Topologický prostor X je extremálně nesouvislý právě když má každá omezená podmnožina svazu $C(X)$ supremum.
3. Kompaktní Hausdorffův prostor X je extremálně nesouvislý právě když je projektivním objektem pro kompaktní Hausdorffovy prostory.

Extremální nesouvislost

1. Konvergentní posloupnost v extremálně nesouvislém prostoru je konstantní od nějakého indexu počínaje. (Takže lokální báze neizolovaných bodů jsou nespočetné.)
2. Topologický prostor X je extremálně nesouvislý právě když má každá omezená podmnožina svazu $C(X)$ supremum.
3. Kompaktní Hausdorffův prostor X je extremálně nesouvislý právě když je projektivním objektem pro kompaktní Hausdorffovy prostory.

Extremální nesouvislost

1. Konvergentní posloupnost v extremálně nesouvislém prostoru je konstantní od nějakého indexu počínaje. (Takže lokální báze neizolovaných bodů jsou nespočetné.)
2. Topologický prostor X je extremálně nesouvislý právě když má každá omezená podmnožina svazu $C(X)$ supremum.
3. Kompaktní Hausdorffův prostor X je extremálně nesouvislý právě když je projektivním objektem pro kompaktní Hausdorffovy prostory.