1. cvičení

1. **Zadání topologie pomocí uzavřených množin.** Navrhněte, jak zadat topologii pomocí uzavřených množin. Příslušné tvrzení dokažte.

2. **Zadání topologie pomocí uzávěrů.** Dokažte následující větu: Je-li $\varphi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ takové zobrazení, že

- pro $A \in \mathcal{P}(X)$ je $A \subseteq \varphi(A)$,
- $\varphi(\emptyset) = \emptyset$,
- pro $A, B \in \mathcal{P}(X)$ je $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$,
- pro $A \in \mathcal{P}(X)$ je $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$,

pak existuje na X právě jedna topologie pro kterou platí $\varphi(A) = \overline{A}$ pro každé $A \in \mathcal{P}(X)$.

3. **Zadání topologie pomocí operace vnitřku.** Zformulujte a dokažte analogickou větu o zadání topologie pomocí operace vnitřku.

4. **Čechův operátor.** Mějme zobrazení $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ splňující první tři podmínky ze cvičení 2. Takové zobrazení také určuje přirozeným způsobem topologii na X. Jak?

5. **Zadání topologie pomocí okolí.** Zformulujte a dokažte větu o zadání topologie pomocí bazí okolí bodů.

6. **Sorgenfreyova přímka.** Ukažte, že systém všech polouzavřených intervalů $[a, b)$, kde $a < b$, je bazí topologie na množině reálných čísel $\mathbb{R}$.

7. **Křížková topologie.** Ukažte, že předpisem: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená, právě když

$$\big(\forall (x, y) \in A\big)(\exists \epsilon > 0)\Big(\big(\{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon)\big) \cup \big((x - \epsilon, x + \epsilon) \times \{y\}\big) \subseteq A\Big),$$

je korektně zadaná topologie na množině $\mathbb{R}^2$.

8. **Kuratowského úloha.** Pro podmnožinu A topologického prostoru X označme $A^- = \overline{A}$, $A^c = X \setminus A$. Postupným opakováním obou operací tedy získáme množiny A, A^-, A^{-c}, A^{-c-}, ... a A^c, A^{c-}, A^{c-c}, ... Kolik různých množin můžeme nejvýše získat? Najděte $A \subset \mathbb{R}$ s maximálním počtem odvozených množin.