10. cvičení

Úloha 1 (Různé uniformity mohou určovat stejnou topologii). Rozhodněte, zda uniformní prostory s nosnými množinami $(0,1)$ a $(-\infty,+\infty)$, kde uniformity jsou vytvořené euklidovskou metrikou, jsou izomorfní.

Úloha 2 (Zúplnění uniformního prostoru). Řekneme, že filtr $\mathcal{F}$ na uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ je *cauchyovský*, pokud pro každé uniformní pokrytí $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ existuje $P \in \mathcal{P}$ a $F \in \mathcal{F}$, že $F \subseteq P$. Řekneme, že uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ je *úplný*, pokud je v něm každý cauchyovský filtr konvergentní.

K danému uniformnímu prostoru $(X,\mathcal{U})$ najděte jeho zúplnění, tj. takový úplný uniformní prostor $(Y,\mathcal{V})$ a hustou podmnožinu $Z \subseteq Y$, že $(Z,\mathcal{V}\restriction Z)$ je izomorfní s $(X,\mathcal{U})$.

Návod: uvažujte množinu všech cauchyovských filtrů na X, na které zavedete vhodnou ekvivalenci. Na třídách ekvivalence definujte přirozeným způsobem uniformitu. Porovnejte tento způsob se zúplňováním metrických prostorů.

Úloha 3 (Bodová a stejnoměrná topologie). Ukažte, že prostory $C([0,1])$ s topologií bodové konvergence a $C([0,1])$ s topologií stejnoměrné konvergence nejsou homeomorfní. Najděte více možných zdůvodnění.

Úloha 4 (Metrizovatelnost). Najděte spočetný Hausdorffův nemetrizovatelný prostor.

Úloha 5 (Množství ultrafiltrů na spočetné množině). Ukažte, že mohutnost prostoru ultrafiltrů $Ult(\omega)$ je 2^{2^ω}. Návod: uvažujte spojité zobrazení spočetného diskrétního prostoru ω na spočetnou hustou množinu v kompaktu 2^{2^ω}. Toto zobrazení rozšiřte na $\beta\omega \to 2^{2^\omega}$ a ukažte, že jde o zobrazení na.