11. cvičení

Úloha 1 (Kompaktifikace polopřímky). Dejte příklad alespoň čtyř neekvivalentních kompaktifikací intervalu $[0, \infty)$.

Úloha 2 (Kompaktní podmnožiny iracionálních čísel). Ukažte, že kompaktní podprostory mocniny ω^ω jsou v tomto prostoru řídké. Následně ukažte, že prostor ω^ω není sjednocením spočetně mnoha svých kompaktních podprostorů.

Úloha 3 (Nespočetný skoro disjunktní systém). Najděte nespočetný systém nekonečných množin $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, že každé dvě různé množiny z $\mathcal{S}$ se protínají v konečné množině (tzv. skoro disjunktní systém).

Úloha 4 (Mrówka). Uvažujme prostor s nosnou množinou $\omega \cup \mathcal{S}$, kde $\mathcal{S}$ je nespočetný skoro disjunktní systém. Jeho topologie je popsána tak, že body z ω jsou izolované a bod $A \in \mathcal{S}$ má lokální bázi tvořenou množinami tvaru $\{A\} \cup (A \setminus K)$, kde $K \subseteq \omega$ je konečná.

Dokažte, že uvedený prostor je Hausdorffův separabilní prostor, který má v každém bodě spočetný charakter. Nemá ale spočetnou váhu a není kompaktní. Pokud byl systém $\mathcal{S}$ maximální, pak každá spojitá funkce tohoto prostoru do $\mathbb{R}$ je omezená.

Úloha 5 (Beta-obal prvního nespočetného ordinálu). Ukažte, že beta-obalem prostoru ω_1 je $\omega_1 + 1$. (A jde tedy o jedinou kompaktifikaci prostoru ω_1.)

Úloha 6 (Součin beta-obalů). Ukažte, že součin $\beta\omega \times \beta\omega$ není beta-obalem svého podprostoru $\omega \times \omega$. Použijte k tomu funkci $f\colon \omega \times \omega \to [0, 1]$ splňující $f(i, j) = \frac{i}{i+j+1}$, kterou nelze spojitě rozšířit na $\beta\omega \times \beta\omega$.

Úloha 7 (Mohutnosti beta-obalů). Ukažte, že prostory $\beta\omega$ a $\beta\mathbb{R}$ mají stejnou mohutnost. Rozšiřte inkluzi $\omega \to \mathbb{R}$ na zobrazení odpovídajících beta-obalů a ukažte, že je prosté. Pak vezměte nějaké zobrazení $\omega \to \mathbb{R}$ jehož obrazem jsou všechna racionální čísla a ukažte že příslušné spojité rozšíření na beta-obaly je na.