2. cvičení

1. Borelovské množiny. Buď (X, τ) topologický prostor. Borelovskými množinami nazveme prvky nejmenšího systému $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ takového, že

- $\tau \subseteq \mathcal{S}$,
- je-li $A \in \mathcal{S}$, pak $X \setminus A \in \mathcal{S}$,
- jsou-li $A_n \in \mathcal{S}$, pak $\bigcup A_n \in \mathcal{S}$.

Ukažte, že v $\mathbb{R}$ existuje množina, která není borelovská.

2. Separabilita a spojité obrazy. Ukažte, že spojitý obraz separabilního prostoru je separabilní, a pokuste se toto tvrzení zobecnit.

3. Dědičná separabilita Sorgenfreyovy přímky. Ukažte, že Sorgenfreyova přímka je dědičně separabilní (tj. každý její podprostor je separabilní). Návod: využijte separabilitu $\mathbb{R}$ s euklidovskou topologií.

4. Nemetrizovatelnost Sorgenfreyovy přímky. Má Sorgenfreyova přímka spočetnou bázi? Je to metrizovatelný prostor?

5. Metrizovatelnost. Na množině $\mathbb{R}^2$ uvažujme topologii zadanou tak, že nějaká její baze je tvořena všemi otevřenými koulemi se středem v počátku a dále množinami tvaru

$$\big\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \colon a < r < b\big\},$$

kde $0 < a < b$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Ukažte, že jde o korektně zadaný topologický prostor, a rozhodněte, zda je metrizovatelný.

6. Homeomorfismy. Rozhodněte, které z následujících topologických prostorů (podprostorů $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R}^2$) jsou homeomorfní:

- $\mathbb{N}$,
- $\{2^{-n} \colon n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{0\} \cup \{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \colon x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1/n, n^2 \cdot x \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$.

7. Různé topologie. Kolik různých topologií existuje na množině $\{0,1\}$? Kolik existuje nehomeomorfních (tj. topologicky odlišných) dvou-prvkových topologických prostorů?

8. Regulárně otevřené množiny. Pro podmnožinu M topologického prostoru X označme jako $r(M)$ vnitřek uzávěru množiny M. Množina $M \subseteq X$ se nazývá regulárně otevřená, pokud $M = r(M)$. Dokažte, že $r(r(M)) = r(M)$ a je-li $\{G_\alpha \colon \alpha \in A\}$ libovolný soubor regulárně otevřených množin, pak v množině všech regulárně otevřených množin uspořádané inklusí existuje supremum systému $\{G_\alpha \colon \alpha \in A\}$.