3. cvičení

1. Infimum T_i topologií. Dokažte, že v množině všech T_1 topologií na dané množině existuje infimum množiny všech T_1 topologií a toto infimum je T_1 topologie. Platí obdobné tvrzení pro T_0 a T_2 topologie?

2. Vlastnosti křížkové topologie. Dokažte, že $\mathbb{R}^2$ s křížkovou topologií je separabilní Hausdorffův prostor, který obsahuje diskrétní podprostor mohutnosti kontinua.

3. Další vlastnosti křížkové topologie. Dokažte, že $\mathbb{R}^2$ s křížkovou topologií nemá spočetnou lokální bázi v žádném bodě. Přesto však ke každému bodu $x \in \mathbb{R}^2$ existuje spočetně mnoho okolí U_n, že $\{x\} = \bigcap U_n$.

Je tento prostor metrizovatelný?

4. Souvislé lomené čáry v křížkové topologii. Popište obrazy takových spojitých zobrazení φ intervalu $[0,1]$ do $\mathbb{R}^2$ s křížkovou topologií, jež mají tu vlastnost, že existuje dělení $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ intervalu $[0,1]$, pro které je $f([a_i, a_{i+1}])$ částí úsečky spojující body $f(a_i)$ a $f(a_{i+1})$, pro každé $i < n$.

5. Polouzavřené oblouky v rovině. Najděte alespoň tři podmnožiny roviny $A_0, A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, které jsou homeomorfní uzavřené polopřímce $[0, \infty)$ a pro které neexistuje homeomorfismus $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s vlastností $h(A_i) = A_j$ pro nějaké dva indexy $0 \le i < j \le 2$.

6. Spojité reálné funkce na prvním nespočetném ordinálu. Ukažte, že pro každou spojitou funkci $f\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ existuje $\alpha < \omega_1$ takové, že $f(\beta) = f(\alpha)$ pro každé β s vlastností $\alpha < \beta < \omega_1$.

Je prostor ω_1 metrizovatelný?

7. Spočetný metrizovatelný prostor bez izolovaných bodů. Dokažte, že každý spočetný metrizovatelný prostor bez izolovaných bodů je homeomorfní s prostorem racionálních čísel $\mathbb{Q}$. (Speciálně tedy $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ je homeomorfní s $\mathbb{Q}$.)