5. cvičení

Úloha 1 (Kvocienty a spojité obrazy diskrétních prostorů). Popište kvocienty diskrétních prostorů a určete které topologické prostory jsou spojitým obrazem nějakého diskrétního prostoru.

Úloha 2 (Uzavřená diagonála). Dokažte, že prostor X je Hausdorffův, právě když množina $\Delta(X) = \{(x,x)\colon x \in X\}$ je v součinu $X \times X$ uzavřená.

Úloha 3 (Kdy se zachová součinem váha). Dokažte, že součin spočetně mnoha prostorů se spočetnou váhou má opět spočetnou váhu. Jak je to se součinem nespočetně mnoha takových prostorů?

Úloha 4 (Vějíř a metrický ježek). Uvažujme kvocient prostoru $\omega \times [0,1]$ podle nejmenší ekvivalence $\sim$, pro kterou $(n,0) \sim (m,0)$ pro $n,m \in \omega$. Rozhodněte, zda je tento prostor homeomorfní podprostoru roviny, který je tvořen všemi uzavřenými úsečkami spojujícími počátek s body $(1, 2^{-n})$, kde $n \in \omega$.

Úloha 5 (Počet metrizovatelných kompaktů). Kolik nejvýše existuje vzájemně nehomeomorfních kompaktních metrizovatelných prostorů? Využijte toho, že každý metrizovatelný kompakt má homeomorfní kopii obsaženou v Hilbertově kostce $[0,1]^\omega$.

Úloha 6 (Regulární prostor, kde dva body neoddělíme spojitou funkcí). Buď X topologický prostor, který obsahuje dvě disjunktní neprázdné uzavřené množiny F a H. Nechť $Y = X \times \mathbb{Z} \cup \{a,b\}$, kde a a b jsou dva různé body nepatřící do $X \times \mathbb{Z}$. Báze okolí bodu a sestává ze všech množin tvaru $\{a\} \cup \bigcup_{i>n} X \times \{i\}$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Podobně množiny $\{b\} \cup \bigcup_{i<n} X \times \{i\}$ pro $n \in \mathbb{Z}$ tvoří bázi okolí bodu b. V ostatních bodech prostoru Y je topologie odvozena z topologie součinu. Na prostoru Y nechť $\sim$ je nejmenší ekvivalence, pro kterou $(x,2n) \sim (x,2n+1)$ pro všechna $x \in F$ a $n \in \mathbb{Z}$ a $(x,2n+1) \sim (x,2n+2)$ pro všechna $x \in H$ a $n \in \mathbb{Z}$. Označme $J(X,F,H) = Y/\sim$.

Dokažte, že je-li prostor X T_1 (resp. Hausdorffův, resp. regulární), pak i $J(X,F,H)$ je T_1 (resp. Hausdorffův, resp. regulární). Pro váhu a hustotu platí $w\big(J(X,F,H)\big) = \max\big\{\omega, w(X)\big\}$, $d\big(J(X,F,H)\big) = \max\big\{\omega, d(X)\big\}$.

Pokud X není normální a F a H je dvojice uzavřených disjunktních množin, které nejdou oddělit otevřenými, pak pro každou spojitou funkci $f\colon J(X,F,H) \to \mathbb{R}$ je $f(a) = f(b)$.