6. cvičení

Úloha 1 (Funkcionálně otevřené a uzavřené množiny). Buď X topologický prostor. Množina $C \subseteq X$ se nazývá *funkcionálně otevřená* (někdy *konulová*), pokud existuje spojitá funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ taková, že $C = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Množina $Z \subseteq X$ se nazývá funkcionálně uzavřená, pokud existuje spojitá funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ taková, že $Z = f^{-1}(0)$.

Ukažte, že doplněk funkcionálně otevřené množiny je funkcionálně uzavřená a že v metrizovatelných prostorech jsou funkcionálně otevřené množiny právě všechny otevřené.

Úloha 2 (Ekvivalentní popis funkcionálně otevřených množin). Ukažte, že množina $C \subseteq X$ je funkcionálně otevřená, právě když existuje spojitá funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ a otevřená množina $G \subseteq \mathbb{R}$ tak, že $C = f^{-1}(G)$.

Úloha 3 (Sjednocení a průnik funkcionálně otevřených množin). Spočetné sjednocení a konečný průnik funkcionálně otevřených množin je funkcionálně otevřená množina. Dejte příklad, že nekonečné sjednocení a nekonečný průnik funkcionálně otevřených množin nemusí být funkcionálně otevřená množina.

Úloha 4 (Disjunktní funkcionálně uzavřené množiny lze oddělit). Jsou-li Z_0 a Z_1 dvě disjunktní funkcionálně uzavřené množiny, pak existuje spojité zobrazení $f\colon X \to [0,1]$ takové, že $f(x) = i$ právě když $x \in Z_i$ pro $i = 0, 1$

Úloha 5 (Charakterizace normality). T_1 topologický prostor X je normální, právě když jsou splněny následující dvě podmínky:

a) Každá uzavřená G_δ-množina je funkcionálně uzavřená.

b) Je-li $F \subseteq X$ uzavřená, $U \subseteq X$ otevřená a $F \subseteq U$, pak existuje uzavřená G_δ-množina M tak, že $F \subseteq M \subseteq U$.

(Množina se nazývá G_δ-množinou, je-li průnikem spočetného souboru otevřených množin.)

Úloha 6 (Protipříklady). Dejte příklady, že ani jedna z podmínek a), b) předchozí úlohy neimplikuje normalitu.