7. cvičení

Úloha 1 (Filtry). *Filtr* na množině X je soubor $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ splňující

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- jsou-li $F_0, F_1 \in \mathcal{F}$, pak $F_0 \cap F_1 \in \mathcal{F}$,
- je-li $F \in \mathcal{F}$ a $F \subseteq G \subseteq X$, pak $G \in \mathcal{F}$.

Filtr $\mathcal{F}$ se nazývá *ultrafiltr*, pokud pro $A \cup B \in \mathcal{F}$ je $A \in \mathcal{F}$ nebo $B \in \mathcal{F}$. Filtr se nazývá triviální, pokud je tvořen nadmnožinami jednoprvkové množiny.

Popište všechny ultrafiltry na konečné množině a na nekonečné množině „najděte" netriviální ultrafiltr.

Úloha 2 (Prostor ultrafiltrů). Položme $Ult(\omega) = \{\mathcal{F} \colon \mathcal{F} \text{ je ultrafiltr na } \omega\}$. Pro $M \subseteq \omega$ označme $\hat{M} = \{\mathcal{F} \in Ult(\omega) \colon M \in \mathcal{F}\}$. Dokažte, že soubor $\{\hat{M} \colon M \subseteq \omega\}$ je bazí topologie na $Ult(\omega)$.

Úloha 3 (Vlastnosti prostoru ultrafiltrů). Dokažte, že prostor ultrafiltrů $Ult(\omega)$ je kompaktní, množina všech triviálních ultrafiltrů je v něm otevřená hustá a každou omezenou funkci definovanou na množině triviálních ultrafiltrů je možné (jednoznačně) rozšířit na spojitou funkci $Ult(\omega) \to \mathbb{R}$.

Úloha 4 (Nemetrizovatelnost prostoru ultrafiltrů). Dokažte, že prostor ultrafiltrů $Ult(\omega)$ není metrizovatelný. (Najděte například posloupnost triviálních ultrafiltrů, jež nemá konvergentní podposloupnost.)

Úloha 5 (Vztah mohutnosti prostoru a hustoty). Dokažte, že pro Hausdorffův prostor X platí $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$, kde $d(X)$ značí hustotu prostoru X.

Úloha 6 (Niemytzkého rovina). Uvažujme množinu $N = \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Ať báze otevřených množin je tvořena všemi otevřenými kruhy a dále množinami tvaru $\{x\} \cup D$, kde x je bod s nulovou druhou souřadnicí a D je otevřený kruh v N, na jehož obvodu leží bod x.

Dokažte, že prostor N je úplně regulární, ale není normální.