9. cvičení

Úloha 1 (**Uniformní prostor**). Pro dané pokrytí $\mathcal{P}$ množiny X označíme $st(N,\mathcal{P}) = \bigcup\{M \in \mathcal{P} \colon M \cap N \neq \emptyset\}$ Dvojice $(X,\mathcal{U})$ se nazývá *uniformní prostor*, pokud X je množina, $\mathcal{U}$ je systém pokrytí množiny X a platí následující podmínky

1. jsou-li $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathcal{U}$, pak existuje $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$ zjemňující $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$
2. pro každé $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ existuje $\mathcal{Q} \in \mathcal{U}$, že $\{st(N,\mathcal{Q}) \colon N \in \mathcal{Q}\}$ zjemňuje $\mathcal{P}$
3. je-li $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ a $\mathcal{P}$ zjemňuje $\mathcal{Q}$, pak také $\mathcal{Q} \in \mathcal{U}$
4. pro různá $x, y \in X$ existuje $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$, že $st(x,\mathcal{P}) \cap st(y,\mathcal{P}) = \emptyset$.

Systém $\mathcal{U}$ na množině X splňující pouze podmínky 1, 2 a 4 se nazývá *bází uniformity.*

Úloha 2 (**Báze uniformity**). Popište, jakým způsobem se vytvoří uniformita z báze uniformity.

Úloha 3 (**Uniformita na metrickém prostoru**). Buď (X,ρ) metrický prostor. Ukažte, že systém všech pokrytí tvaru $\{B_\rho(x,\epsilon) \colon x \in X\}$ pro $\epsilon > 0$ tvoří bázi uniformity na X.

Úloha 4 (**Topologie na uniformním prostoru**). Ať $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor. Řekneme, že $A \subseteq X$ je otevřená, pokud pro každé $x \in A$ existuje $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$, že $st(x,\mathcal{P}) \subseteq A$. Ukažte, že jsme popsali Hausdorffovu topologii na X.

Úloha 5 (**Double arrow space**). Uvažujme prostor s nosnou množinou $X = \big([0,1) \times \{0\}\big) \cup \big((0,1] \times \{1\}\big)$ a topologií zadanou pomocí bází okolí bodů $(x,0)$ tvořenými množinami

$$\big([x, x+2^{-n}) \times \{0\}\big) \cup \big((x, x+2^{-n}) \times \{1\}\big)$$

a okolí bodů $(x,1)$ z množin

$$\big((x-2^{-n}, x] \times \{1\}\big) \cup \big((x-2^{-n}, x) \times \{0\}\big)$$

pro $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že tento prostor je Hausdorffův a kompaktní.

Úloha 6 (**Double arrow space není metrizovatelný**). Dokažte, že double arrow space je separabilní a sekvenciálně kompaktní, ale není metrizovatelný.

Úloha 7 (**Tichonovova věta**). Dokažte, že součin kompaktů je kompakt tím, že ověříte, že každý ultrafiltr na součinu má hromadný bod.